UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

1960-2000
CUARENTA AÑOS DE MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LECCIÓN INAUGURAL DEL CURSO ACADÉMICO 2002-2003

ANTONIO PÉREZ GÓMEZ
CATEDRÁTICO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

VALLADOLID
2002

1960-2000
CUARENTA AÑOS DE MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LECCIÓN INAUGURAL DEL CURSO ACADÉMICO 2002-2003

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

1960-2000 CUARENTA AÑOS DE MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LECCIÓN INAUGURAL DEL CURSO ACADÉMICO 2002-2003

ANTONIO PÉREZ GÓMEZ
CATEDRÁTICO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

VALLADOLID
2002

Diseño cubierta: J. M. Báez Mezquita y Santiago Bellido Blanco

Imprime: Gráf. A. Martín, S. L.
Paraíso, 8. Valladolid

Depósito Legal: VA. 653.–2002

«Mejor adquirir sabiduría que adquirir oro»

(Proverbios 16-16)

A la memoria de mi queridísimo maestro el Profesor Gutiérrez Suárez, y a todas las personas que cursaron los estudios de Matemáticas en la Universidad de Valladolid, porque ellas son nuestro único patrimonio y nuestro legítimo orgullo.

Magfco. y Excmo. Sr. Rector,
Excmas. e Ilmas. Autoridades,
Queridos compañeros y restantes miembros de la comunidad universitaria,
Señoras y señores:

Cuando mi director de Departamento me comunicó, a finales de octubre del año 2001, que existían posibilidades de que yo pronunciara la lección inaugural del curso académico 2002-2003, mi primera actitud fue negarme por miedo a que mi torpe expresión desluciera la solemnidad de este acto tradicional, que se celebra en la secular y, para mí, queridísima Universidad de Valladolid, donde tantos y tan magníficos oradores me han precedido en el uso de la palabra a lo largo de los siglos. Pero tras recapacitar unos breves instantes decidí aceptar, ya que desde los comienzos del curso 1965-66, o sea, hace 37 años, cuando el Profesor Martínez Salas subiera a esta misma tribuna, en un momento semejante al actual, ningún matemático había tenido ocasión de hacerlo, porque cuando le llegó el turno a mi maestro (entonces la palabra se otorgaba por riguroso orden de antigüedad), ya se encontraba gravemente enfermo, teniendo que ser sustituido en aquella ocasión por el Profesor Aleixandre, fallecido hace poco más de diez años.

Por otra parte no me fue difícil encontrar la materia de esta lección; exponer un tema técnico hubiera sido absurdo, dada la heterogeneidad del público asistente. Por tanto he preferido hablar acerca de una cuestión relacionada con la entraña misma de nuestra Universidad, y que forma parte de nuestra historia reciente: relatar una aventura que recorrimos conjuntamente con otras universidades clásicas (no me refiero a las licenciaturas ya consolidadas en Matemáticas en aquella época y que eran tres, las que se impartían en las Universidades de Madrid, Barcelona y Zaragoza desde hacía largo tiempo). En dicha aventura, unos hombres, todos ellos pertenecientes a la generación de mi maestro, con una fuerte pasión intelectual por la matemática (sólo los hombres apasionados producen obras profundas y duraderas), derramaron a raudales aquellos bienes que no dejan huella material, pero que sí calan profundísimamente en el alma: la sabiduría, la generosidad, la bondad, el coraje, la alegría del trabajo y la inteligencia de la vida.

A todos quiero rendirles desde aquí tributo de admiración, cariño y respeto. Ellos lograron que la Matemática española pasara desde una oscuridad casi total, como sucedía en el año 1960, donde sólo unas pocas luces (a las que me referiré luego) resplandecían en medio de las tinieblas, a la espléndida realidad de hoy, donde contamos con matemáticos de talla mundial; donde el nivel de nuestras licenciaturas es equiparable con el de las mejores universidades extranjeras, aportando aproximadamente el 4% de la investigación universal en Matemáticas y donde nuestro prestigio ha alcanzado tal altura, que la propia Unión Internacional de Matemáticos tiene prevista la realización de su reunión cuatrianual en Madrid el año 2006.

Pues bien, los nombres de estos grandes hombres (hablo únicamente de los casos que yo conozco personalmente) fueron:

Don Eduardo García-Rodeja y don Antonio Valle en la Universidad de Santiago, Don Manuel Valdivia en la de Valencia, Don Norberto Cuesta en la de Salamanca, Don Antonio Castro en la de Sevilla, Don Nacere Hayek en la de La Laguna, y finalmente Don Miguel Martín y mi maestro Don Juan José Gutiérrez Suárez, aquí en la de Valladolid.

Antes de proseguir, quiero hacer público un hecho, que seguramente se deducirá de todo lo que diga a continuación: amo profundamente a la Matemática, con un fervor casi rayano en lo religioso, y no solamente por aquella frase notable de Cicerón:

«*Un hombre debe de amar su profesión puesto que es ella la que le proporciona el sustento*».

En este caso hay más. La Matemática, aparte de ser una ciencia básica en la cultura de hoy (sería muy difícil imaginar una sociedad en la que estuviera ausente el concepto de número), es también un arte bellísimo como pueden serlo la música, la literatura, la poesía o la pintura. A este respecto siempre recordaré una tarde del verano de 1988, paseando por la ciudad de Denia, con un gran amigo de la Universidad de Valladolid, un hombre que ha dado muchos días de gloria a la Matemática española, me estoy refiriendo a Don Manuel Valdivia, actualmente académico y catedrático emérito de la Universidad de Valencia. Pues bien, el Profesor Valdivia me contaba en aquella ocasión que en los ya lejanos días de su juventud, estaba leyendo la obra *Sombras del Paraíso* de nuestro premio Nobel de literatura Vicente Aleixandre, y que el mismo día que leía la oda *Luna del Paraíso*, se había estudiado la demostración de la transcendencia del número π que cerraba para siempre el viejo problema de la cuadratura del círculo, y él no sabía dilucidar cuál de las dos obras, la demostración de Lindemann o el poema de Aleixandre, le había producido mayor sensación de belleza.

También decía el matemático inglés Hardy que un matemático es como un poeta, «*un creador de expresiones estéticas*». Si las expresiones matemáticas son más permanentes que las poéticas, se debe a que las Matemáticas están hechas con ideas, mientras que en la poesía tienen más importancia las palabras, la forma de decir las cosas, y las palabras con el tiempo se desgastan más que las ideas.

Es más, en una carta escrita por el gran matemático alemán Gustavo Jacobi a su colega francés Mauricio Legendre, con fecha 2 de julio de 1836, Jacobi afirma:

«*Una gran finalidad de la Ciencia es rendir honor al espíritu humano, y por eso una cuestión sobre números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo*».

Para proseguir adelante y situar exactamente el problema en su punto de partida es imprescindible hacer una breve síntesis comparativa de la historia mundial de la Matemática y de la Matemática española.

EDAD ANTIGUA

El origen de la Matemática se pierde en la noche de los tiempos, y hasta en las culturas más rudimentarias aparece presente el concepto de número. En un principio fue cultivado en forma empírica por los egipcios y babilonios y las verdades que obtuvieron fueron guardadas celosamente como secreto por los sacerdotes y los escribas, puesto que ellos estaban animados por la convicción de que estrellas, planetas y cometas influyen sobre los asuntos humanos. Si los fenómenos celestes acaecidos en el nacimiento de una persona afectan al desarrollo de su vida, es obvio que los astrólogos que se tomaran en serio su profesión tuvieran que realizar, antes de hacer sus predicciones, numerosos cálculos sobre posiciones de planetas y otros cuerpos celestes. Vemos así un claro ejemplo de cómo la superstición y la Matemática están relacionadas. Por cierto, este sorprendente hecho sigue vigente hoy.

Pero en este caso, como en otras tantas cuestiones, la civilización occidental es profundísima deudora de la cultura griega; fueron los helenos los que aportaron los dos pilares fundamentales a partir de los cuales se desarrollaría la Matemática hasta hoy: la axiomática y el razonamiento lógico deductivo. Temas de tan palpable interés es el objeto de esta lección y que afectan tan intensamente a la esencia misma de la Matemática, que deseo hacer un comentario un poco más amplio.

Los entes matemáticos tienen carácter exacto, algo que no ocurre con los objetos sensibles de los cuales ellos son abstracciones, pues por ejemplo, un segmento de recta que se dibuje, por muy perfecta que sea la regla utilizada, aparecerá sobre el papel con irregularidades. De aquí que los griegos lleguen a establecer la conclusión de que los razonamientos matemáticos se hacen con objetos ideales, cuya realidad es eterna, y que sus correspondientes objetos materiales no son otra cosa sino una grosera aproximación a aquéllos. Estos objetos ideales son por tanto indefinibles y sólo cabe establecer un conjunto de reglas que rijan las relaciones entre ellos. Platón iría más lejos inventando su conocida teoría de las ideas, cuyo carácter transciende a la Matemática.

Por otra parte, los griegos son los inventores de ese don divino y exquisito que es el razonamiento teórico, llegando a conclusiones, a las que hoy llamamos teoremas, utilizando únicamente silogismos muy simples y los conceptos ideales, introducidos por los axiomas. Curiosamente, esta manera de proceder lleva a resultados de tipo práctico maravillosos, a los que la naturaleza, por lo menos hasta el momento actual, parece doblegarse.

Como afirmaba más arriba, las verdades matemáticas son eternas, tanto como pueden serlo la lógica y los axiomas que las sustentan. Por poner un ejemplo, a nadie se le ocurriría estudiar hoy medicina siguiendo los textos de Hipócrates o de Galeno, por muy geniales que fueran estos dos eminentes científicos, pero los teoremas establecidos por Thales, Pitágoras, Apolonio, Tolomeo y Euclides siguen siendo válidos hoy; éstos cultivaron tan excepcionalmente la Geometría que después de esta edad de oro de la Geometría griega, hay que esperar a Descartes para encontrar un nuevo genio matemático en este campo.

En lo que se refiere a la Matemática, los sabios que dio la antigüedad no pueden compararse con los grandes matemáticos griegos, especialmente con los de la escuela de Alejandría, y todos ellos no hicieron más que seguir la vía marcada por aquellos grandes geómetras, conformándose con adiciones más o menos importantes a la magna obra realizada por aquéllos.

Era tal el respeto que los griegos tenían por las Matemáticas, que no me resisto a citar el rótulo de Platón a la entrada de la célebre Academia de Atenas:

«*Nadie entre aquí que no sepa Geometría*».

También es importante la contribución de los griegos a lo que hoy conocemos con los nombres de Aritmética y Análisis Matemático. En primer lugar, hoy todavía asombra el examen de esa joya de valor incalculable debida a Euclides, donde se prueba la existencia de infinitos números primos, así como su contribución al algoritmo de las divisiones sucesivas para el cálculo del máximo común divisor de dos números.

Mientras que las Matemáticas griegas se elaboraban en las escuelas filosóficas según el sistema hipotético-deductivo, las necesidades de la vida corriente exigían la presencia de unos calculadores profesionales. No sabemos casi nada acerca de ellos más allá de su propia existencia y del desprecio que inspiran a Platón en *La República*, porque calculaban con fracciones explícitas, cuando según Platón, un matemático debe ocuparse sólo de los números enteros:

«*Que son los únicos accesibles a la inteligencia y que no pueden ser manejados de otra forma*».

Sin duda Platón está haciendo referencia a la admirable serie de teoremas generales demostrados por Euclides, donde expone la teoría de la divisibilidad de los enteros, y habla de los números primos y de la descomposición de un número entero en factores primos.

La tradición de los calculadores, citada arriba, no aparece con nitidez hasta Diofanto (hacia el siglo IV de nuestra era). Sus técnicas se inspiran en las tablillas babilonias, y allí aparece por primera vez el plantearse el cálculo de uno o varios números desconocidos, que sean solución de lo que hoy llamamos sistemas de ecuaciones lineales. ¡Estaba naciendo el Álgebra!

No vamos a analizar (por no ser de este lugar) los métodos de Diofanto, pero sí se debe hacer notar el siguiente hecho fundamental: al considerar una ecuación como

$$3\,x + 7 = 24\ ,$$

no se encuentra ningún número entero que sea solución de ella; pero esta dificultad la salva elegantemente Diofanto escribiendo la solución $x = {}^{17}/_{3}$, número que no es entero.

Esta forma de proceder, que no produce ninguna extrañeza, es un hecho muy común en Matemáticas; de esta forma, por sucesivas ampliaciones del concepto de número, se crean el número real y el número complejo. Pero deberán de pasar siglos hasta que una claridad absoluta ilumine estos conceptos por completo.

Es curioso lo cerca que los griegos estuvieron de llegar al concepto clave de número real, y no cabe duda de que, de haberlo logrado, la Matemática habría dado un paso de gigante. En este orden de cosas, son muy notables los trabajos de Eudoxio de Atenas, posiblemente con Euclides el mejor matemático de la antigüedad clásica, y al que, en la cuestión que nos ocupa, se le puede considerar como un precursor de Dedekind y de Cauchy. En la obra de Eudoxio, conjuntamente con Arquímedes, está la elaboración completa de lo que se conoce con el nombre de *«método de exhaución»,* donde ya hay atisbos de lo que sería en su día el Cálculo Infinitesimal. El principio fundamental en el que se apoyan es textualmente como sigue:

«*Si de una magnitud se resta la mitad o más de la mitad, se hace igual operación con el resto y así sucesivamente, se llegará a obtener un resto inferior a cualquier magnitud dada de la misma naturaleza*».

Para demostrar la igualdad de dos magnitudes A y B por el método de exhaución, es preciso probar que tanto A – B como B – A son menores que cualquier magnitud dada de la misma naturaleza. Este método no se estableció con toda su generalidad, sino que se aplicó uno tras otro, a diversos casos particulares. Eudoxio lo empleó para probar que el volumen de una pirámide (o de un cono) es un tercio del volumen de un prisma (o de un cilindro) de igual base e igual altura. Hay quien cree que le sirvió también para probar que el volumen de una esfera es proporcional al cubo de su radio.

No obstante, en la Matemática griega existe una grave dificultad, que muy posiblemente evitó mayores progresos; me refiero al problema de la notación numérica, por hablar de una cuestión de todos conocida. Pensemos en la representación de una cantidad con números romanos (tengamos en cuenta que la cultura romana es heredera directa de la cultura griega), y simplemente el considerar lo que tendría que ser efectuar un algoritmo tan simple como es el producto de dos números naturales, escrito en notación con números romanos, es algo que difícilmente incita al estudio de la aritmética.

De todos los pueblos que han convivido con nosotros, es indudablemente el romano con quien más nos hemos identificado, y Roma no se distinguió precisamente por su amor al espíritu especulativo sino, por el contrario, por el predominio de la acción, que elevaba a la categoría de dogma, y por el fin práctico de sus ideales. Si bien hay que reconocer que la utilidad es una presunción lógica de la certeza y puede conducir, por consiguiente, al descubrimiento de verdades teóricas.

A causa de nuestro sedimento romano sólo hemos aceptado como verdaderas las ideas prácticas y rechazado como falsas las meramente conceptuales, olvidando que la fuerza práctica de realización que lleva encerrada toda idea teórica depende de su grado de abstracción.

Si los romanos creyeron en la Matemática es porque la aplicaban a la ingeniería de la época, construyendo con ella naves, puentes y calzadas, muchos de los cuales podemos seguir admirando hoy. De la misma manera que en la actualidad una persona cree en la ciencia cada vez que conecta el televisor, se pone a manejar un ordenador o, simplemente, enciende o apaga la luz.

El laboratorio creó la fábrica, como la Ciencia especulativa engendró las aplicaciones industriales, demostrando así que un pensamiento no se puede perder nunca. Más vale un pensamiento sin acción, que una acción que no haya nacido de un pensamiento.

Para explicar la política de los emperadores romanos, su apoyo a la agricultura y al comercio y su desdén por la especulación científica, sólo hay que tener en cuenta un hecho clave: aquellos producían inmediatamente bienes que se podían observar, mientras que la ciencia pura no.

EDAD MEDIA Y RENACIMIENTO

Durante el transcurso del siglo VIII, ocurre un hecho de importancia excepcional, que afectaría también a la Matemática, como es la invasión de España por los árabes. Ello implicaría profundas consecuencias en todos los órdenes de la vida, pero la principal en lo que se refiere a la Matemática es la siguiente:

Ya hemos hablado con anterioridad, al comentar los problemas de representación de los números, las graves dificultades que existían al tratar de efectuar operaciones aritméticas sencillas con números romanos. Pues bien, la notación posicional o arábiga o decimal como la llamamos hoy (el número diez fue probablemente elegido por ser el del número de dedos de las manos), inventada por alguien desconocido en algún lugar de la India, fue captada allí por los árabes e introducida posteriormente en España, donde a través de los potentísimos focos culturales de Córdoba y de Toledo irradiaría lentamente por Europa. En este aspecto nuestra aportación sí fue singularmente importante y, en mi opinión, no ha sido investigado este hecho con la profundidad que merece.

Destaca de forma prominente en la Matemática española medieval el rey Don Alfonso X el Sabio, que rodeado de árabes y hebreos españoles, deja en sus *Tablas Alfonsinas* un monumento de valor inapreciable.

España fue en cierto modo la cuna del Renacimiento matemático. Las primeras traducciones del Álgebra, que dan a conocer esta ciencia en Europa, nacen en la escuela fundada en el siglo XII en Toledo por el Arzobispo Raimundo; éstas son la de Juan de Luna «el hispalense» y la de Gerardo de Cremona, que en Toledo tradujo infinidad de escritos árabes, y que por su larga estancia entre nosotros fue tenido por natural de Carmona (y así figura en alguno de sus escritos), hasta que el historiador Tirabachi demostró que su patria fue Cremona. En la historia del Renacimiento es importante la influencia de estos traductores (y otros varios como Platón de Tívoli), que hacen accesible a Europa la ciencia griega e india, de la que eran depositarios los árabes, cuya cultura original no parece haberse compenetrado mucho con la cultura indígena. Arabistas extranjeros niegan el influjo mutuo de ambas culturas; en cambio los arabistas españoles más renombrados borran toda separación que no sea la religiosa, llegando a declarar que *«debe considerarse como español a todo el que no pruebe lo contrario; hasta los mismos que se jactan de pertenecer a la raza árabe»* (Ribera).

En palabras del mismo autor *«El elemento árabe entra en dosis mínimas en la química social de los musulmanes españoles, la mejor denominación que puede dárseles, no es la de árabes, sino la de musulmanes españoles, son de raza hispana, aunque en algunas familias se mezclara la sangre extranjera, y además fueran musulmanes. Ahora bien, ese elemento árabe, aunque poco numeroso, trajo una lengua, e impuso por la fuerza militar, ciertas costumbres y modas asiáticas...».*

Parece justo agregar que también trajeron una ciencia, que esta ciencia resplandeció en Andalucía y que desapareció por propia consunción con la decadencia de los musulmanes en España. Entre los grandes matemáticos árabe-españoles, merecen citarse: primero Ibn Albanna (siglo XII), que armonizó el cálculo con el ábaco con el cálculo en cifras, dando un procedimiento para el cálculo de la raíz cuadrada que no difiere del actual, y también Alcaradí (segunda mitad del siglo XV), autor de un importante tratado de Aritmética y Álgebra, en el cual se ofrecen reglas para el cálculo aproximado de raíces. De otros españoles que se ocuparon de las Matemáticas, conocemos sus nombres, pero no la contribución que aportaron. Será muy difícil aquilatar qué parte de estos últimos destellos corresponde a la civilización árabe, y cuál a los cristianos; pero hay un hecho evidente y de gran peso que puede ser útil cuando se escriba la historia completa de la ciencia musulmana en España. Ninguna de las características de la Matemática árabe aparece en libros posteriores hasta hoy conocidos, escritos en latín o romance. En toda la copiosa bibliografía, sólo en un pasaje de la Aritmética de Fray Juan de Ortega aparecen unos ejemplos de cálculo de raíces, sin indicación del método ni procedencia, que quizás podrían resultar ser aplicación de alguna regla árabe. Pero sobre todo, el hecho positivo que demuestra el desconocimiento árabe, por parte de los aritméticos de pura estirpe ibérica, es la ignorancia del Álgebra hasta pasada la primera mitad del siglo XVI, y esto a pesar de las traducciones hechas en Toledo, y también a pesar de la difusión que alcanzó el Álgebra entre los musulmanes españoles, como demuestra por ejemplo el *Compendio* de Abenberder, traducido por Sánchez-Pérez en 1916.

En resumen se puede afirmar hoy que en la Edad Media, y en lo que a la Matemática respecta, el gran papel desempeñado por España fue el de transmisor de la cultura, en una época en que, si bien es verdad nacieron las primeras Universidades, entre ellas la nuestra, se había experimentado un notable retroceso, en todos los órdenes de la cultura, respecto a la Antigüedad clásica.

Hacia aproximadamente el 1500 el saber matemático no había avanzado en su mayor parte más allá de la fase en que los griegos y los musulmanes lo habían dejado. Luego, la investigación humanística descubrió textos clásicos que hicieron mucho para estimular el pensamiento matemático; por ejemplo, se publicó en Basilea en 1547 una edición de la obra de Arquímedes, con lo cual sus trabajos, que ya eran conocidos antes, resultaron accesibles de una forma más fácil, completa y exacta.

A mediados del siglo XVI en Europa se desarrolló el campo del Álgebra más allá de sus fuentes hindúes e islámicas, convirtiéndolo en algo europeo. El trabajo de Purbach (1423-1461), *Opus Algorithmi Jucumdissimum*, publicado posteriormente (1492), se convirtió en el manual más en uso durante el siglo XVI.

El Álgebra proporcionó métodos de solucionar ecuaciones que, si estaban resueltas con anterioridad, lo habían sido utilizando procedimientos geométricos griegos. Se atribuye generalmente a Nicolás Tartaglia (1505-1557), en gran parte autodidacta, el mérito de descifrar los problemas tenidos desde hace tiempo como fundamentales para la resolución de ecuaciones cúbicas, pero la erudición moderna indica que el crédito pertenece más bien a su colega Scipione del Ferro. Jerónimo Cardano, otro del grupo, respondió a ciertas cuestiones relativas a raíces negativas e imaginarias. Ludovico Ferrari mostró como se resolvían ecuaciones bicuadradas. El Álgebra de Rafael Bombelli, publicada en forma de manuscrito en 1572, sintetizó y elevó a un nuevo nivel los hallazgos algebraicos de la escuela italiana.

Como anécdota puedo relatar la siguiente: Estalló una famosa querella entre Tartaglia y Cardano, aparentemente sin que ninguno de los dos tuviera totalmente la razón sobre el mérito por la solución de ecuaciones cúbicas. La disputa giró en torno a la publicación por Cardano de métodos que le habían sido facilitados confidencialmente por Tartaglia, en *Ars Magna* (1545), un resumen del Álgebra conocida en la época. Este hecho ilustra la importancia que un asunto matemático podía representar en los círculos doctos del Renacimiento en el norte de Italia. La aspereza personal mostrada por los disputadores fue característica de los intelectuales italianos de la época y especialmente por el vibrante y fogoso Cardano. Esta disputa no carece totalmente de relación con la rivalidad entre los sabios no académicos y los universitarios.

Disputas de esta naturaleza pronto pusieron de manifiesto que un conjunto de símbolos matemáticos comúnmente comprendidos permitiría una economía de palabras, simplificaría los pasos hacia la solución de ecuaciones y evitaría muchas confusiones.

Un abogado y matemático francés, François Viete (1540-1603), fue el primero en introducir en el Álgebra letras como símbolos representando cantidades desconocidas. Los signos para más (+) y menos (–), introducidos en 1489, y que terminaron por significar adición y sustracción, y el de igualdad (=), introducido en 1557, no se hicieron comunes hasta el siglo XVII.

Un reformador místico alemán, Michael Stifel (¿1487?-1557), instituyó el signo para la raíz (   ) y el cálculo con números negativos; en cuanto a Descartes, en *La Geometría* (1637) utilizó un sistema exponencial moderno (a^b). El signo para la multiplicación (x) apareció en la edición póstuma (1619) de *Mirifi logarithmoumcanonis descriptis*, del matemático escocés John Napier (1550-1617), y Leibniz introdujo posteriormente el punto (•) para indicar la misma operación. El símbolo para la división (:) y los signos que representan mayor que (>), y menor que (<), también aparecieron impresos por primera vez en el siglo XVII, en una obra de Thomas Harriot (1560-1621).

Simon Stevin (1548-1620), de Brujas, simplificó muchos los cálculos aritméticos cuando propuso (1586) el empleo de fracciones decimales en lugar de las sexagesimales entonces en uso. Instó a que el nuevo plan fuera empleado en las monedas y en los pesos y medidas. Su sistema de notación para fracciones siguió siendo sin embargo muy embarazoso, y el cálculo decimal fue simplificado únicamente cuando Edward Wright en una traducción inglesa (publicada en 1616), de la *Rabdologiae sen Numerationis por virgulos libris duo*, introdujo el uso de la coma tal y como se hace en la actualidad. En 1617 Napier introdujo el simple punto decimal, aproximadamente por el tiempo en que el continente europeo adoptaba la coma con el mismo fin.

La aceptación general del sistema decimal de pesas y medidas tiene que esperar hasta la llegada del siglo XIX en Europa continental, y al siglo XX en los Estados Unidos.

Otra cuestión propuesta a comienzos del siglo XVII, los logaritmos, facilitó los cálculos agobiantes sin exigir una comprensión de las operaciones matemáticas que suponían. Se basaban en un principio, previamente examinado por Stifel (*Arithmetica integna,* 1545), referente a la correspondencia entre las progresiones aritméticas y geométricas de números. Los logaritmos reducían la multiplicación y la división a sumas y restas, y la extracción de raíces a una simple multiplicación o división. Se llegó a los supuestos básicos de los logaritmos de modo independiente por Napier (en las dos obras ya mencionadas) y Jost Busgi (1552-1562), un astrónomo suizo, quienes proporcionaron de esta forma una nueva ilustración de la tesis de que, cuando se cuenta con el suficiente conocimiento, el próximo paso en un proceso científico puede ser dado por más de una inteligencia al mismo tiempo. Los logaritmos hicieron un uso excelente del sistema decimal introducido por Stifel.

Entretanto, también se progresó en el estudio de la trigonometría. Copérnico escribió un tratado sobre trigonometría esférica en relación con su investigación científica sobre el sistema del mundo, pero su obra fue publicada separadamente por Georg Jarchim von Laucher, llamado Rheticus (1514-1576). Rheticus también escribió un tratado propio (publicado posteriormente en 1596) que contenía tablas de senos, cosenos, tangentes y otras funciones trigonométricas. A comienzos del siglo XVII la trigonometría ya iba decididamente en camino de convertirse en una asociada científica de la Astronomía.

Asimismo, se alcanzaron y expresaron en fórmulas otras altas cumbres del pensamiento matemático. El cálculo de Probabilidades más antiguo que se conoce estuvo incluido en una empresa no muy respetable. Un tratado italiano de 1494 (de Luca di Pacioli) describió cómo debían dividirse las apuestas de juego en una partida no terminada.

Jerónimo Cardano, al que nos hemos referido antes, inveterado jugador, también calculó algunas de las probabilidades en juegos de azar y publicó sus conclusiones en un trabajo titulado *De ludo aleae*. En el siglo XVII Fermat, Pascal y Huygens trabajaron de un modo más general sobre el tema, dando un carácter científico al cálculo de probabilidades.

¿PERO QUÉ SUCEDÍA MIENTRAS EN ESPAÑA?

El comienzo del siglo XVI, en España, y en lo que se refiere al estudio de la Matemática, es más bien una terminación de la época medieval que un comienzo del Renacimiento. En las mejores obras matemáticas del Siglo de Oro está ya contenido el germen de la decadencia. En oposición a los panegiristas que brillantemente han encomiado la importancia de los descubrimientos realizados por los matemáticos del siglo XVI, Rey Pastor[1] ha establecido la conclusión anterior como consecuencia del análisis de todos los libros conocidos de aquella época. Como este trabajo y alguna monografía publicada en el Laboratorio-Seminario Matemático de Madrid son los únicos que conocemos relativos a la Matemática española de esta época, debemos atenernos a las conclusiones obtenidas en dichos trabajos, y a otras dadas por los historiadores de la ciencia extranjeros (Cantor, Katsner, Enestrom, Loria...). La clasificación propuesta por Rey Pastor divide a los matemáticos del Renacimiento español en tres grupos homogéneos por la naturaleza de sus obras; a saber: aritméticos, algoristas y geómetras.

En lo que se refiere a los aritméticos del siglo XVI, los más notables son: Pedro Ciruelo, Juan Martínez Guijarro (Siliceo), Gaspar Lax, Miguel Francés, Fray Juan Ortega y el portugués Alvaro Thomas. Todos tienen una vida prácticamente semejante; fueron en su juventud a París, llegando los cuatro primeros a ser profesores de la Sorbona y Thomas en el colegio Coquerett. La universidad de París, centro intelectual del mundo hasta el siglo XV, sufre a fines de éste tal decaimiento en las Ciencias exactas, que se coloca fuera del progreso europeo, entonces representado por Italia. Los esfuerzos de Lefébre por elevar el nivel científico de su patria mediante las ediciones de las obras maestras italianas no tuvieron éxito. A este ambiente tan poco favorable para la propia formación científica, llegaron los jóvenes matemáticos españoles, y timbre de gloria para ellos es haber contribuido a mejorar desde sus puestos de profesores aquel pobre ambiente. Ciruelo, de vuelta a España, imprimió en Alcalá (1516) la obra *Cursus quator mathematicorum ortium liberalium*, que alcanzó nueve ediciones en 1523, 1526 y 1528.

[1] Discurso inaugural en la Universidad de Oviedo (1913).

Por su parte, Gaspar Lax edita en 1515 en París su *Tratado de Proporciones* y la *Arithmetica speculativa*, inspirada en la obra de Jordano Nomenario.

A pesar de la ventajosa posición que nos deparó la convivencia secular con la cultura árabe, de la que irradia el Álgebra a toda Europa, el primer libro de esta ciencia publicado en español es el de Marco Aurel (un maestro de escuela alemán radicado en Valencia), impreso en 1552. Esta obra inspirada en el *Summe* de Lucas de Burgos y en el *Álgebra* de Rudolf, ejerció gran influencia en el desarrollo de la cultura Matemática española, publicándose en pocos años los tratados de Pérez de Moya, Antich Rocha y Tolsé, además de los trece ejemplos de arte mayor agregados por Gonzalo de Busto a la *Aritmética* de Ortega. Muy por encima de todos ellos descuella el famoso Pedro Nuñez Nonnino, de quien siglos después afirmaría Menéndez Pelayo en su *Polémica sobre la Ciencia Española* que es, junto con el italiano Vieta, el inventor del Álgebra. Destacó fundamentalmente por su libro *Aritmética y Geometría* publicado en 1564, pero escrito treinta años antes. En ella aparece por primera vez la idea de rebajar el grado de las ecuaciones por el algoritmo de la división; un pasaje del mismo libro sirvió más tarde para crear la teoría del máximo común divisor de dos polinomios. En el apéndice hace Nuñez una crítica muy justa de las obras de Lucas de Burgo, Cardano y Tartaglia, revelando un conocimiento perfecto del Álgebra de su tiempo.

A mediados del siglo XVI se inicia ya la decadencia de los estudios matemáticos, contribuyendo grandemente a ello la desdichada pragmática de Felipe II, que prohibió desde 1550 «*para los naturales de estos reinos a estudiar fuera de ellos*».

El bachiller Juan Pérez de Moya es una figura culminante, que procuró, con entusiasmo y competencia no iguales, atajar la decadencia. Su labor de vulgarización es muy extensa. *La Aritmética práctica y especulativa*, publicada en Salamanca en 1562, alcanzó en su época trece ediciones y revela el conocimiento de muchos libros extranjeros; Stenin, el gran matemático contemporáneo suyo, la recomienda para estudiar la regla de tres. Los capítulos en los que expone los modos de contar de los antiguos, el arte de contar con los dedos, así como los famosos diálogos para demostrar la utilidad de las Matemáticas, revelan erudición y talento no comunes. De la Geometría que forma parte de su *Tratado de Matemáticas* (Alcalá 1573) merecen señalarse las originales construcciones de los polígonos regulares, especialmente el de 36 lados. Asimismo, mencionaremos sus *Fragmentos Matemáticos* (Salamanca 1568), donde mejora en ciertos puntos algunas construcciones de Tartaglia y Durero.

Reconocen todos los historiadores que a fines del siglo XVI se acentúa la decadencia de los estudios matemáticos; hecho bien patente que no se le ocultó a Felipe II, el cual «*conociendo que muchos de los errores de las cartas náuticas, se deben a la falta de conocimientos científicos*» mandó por entonces, a instancia y súplica de Herrera (el gran arquitecto del monasterio del Escorial), fundar una Academia de Matemáticas. Esta Academia, mediante traducciones de obras clásicas, logró la vulgarización de las Matemáticas puras y aplicadas.

Entre las obras editadas figura *Perspectiva y especularia de Euclides* por Ambrosio Onderiz, y los seis primeros libros de Euclides por Juan Cedillo.

Profesor de la Academia fue también el italiano Cesar Firrucino, autor de los *Fragmentos matemáticos* (1648), donde da construcciones geométricas interesantes.

A la casa de contratación de Sevilla debe también mucho la cultura Española. A ella perteneció García de Céspedes, autor de un libro de instrumentos nuevos de Geometría (Madrid 1606), donde incluye multitud de cuestiones prácticas, y también Rodríguez Zamorano, traductor de los seis primeros libros de Euclides.

La decadencia de los estudios matemáticos se hace ya irreversible con la supresión de la Academia en 1624, y en todo el siglo XVII y en la primera mitad del siglo XVIII no se vislumbra ni un rayo de esperanza; el declive llegó a tales extremos que Don Diego de Torres y Villarroel fue catedrático de la Universidad de Salamanca. Pero en este punto prefiero copiar íntegramente lo que sobre el particular dice el Profesor José María Valverde, que afirma en el volumen sexto de su Historia de la Literatura Universal:

«Pintoresco vagabundo, de origen más burgués que plebeyo que pasó de la ciencia a la aventura sin ver entre ellas grandes diferencias, y que relató su vida imitando el tono de los relatos picarescos. Dice mucho sobre la situación intelectual de aquella España, que con escasa y dudosa carga de sabiduría llegara a ocupar la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Salamanca, que llevaba treinta años sin maestro y ciento cincuenta sin enseñanza (después de que en Inglaterra ya había existido Newton). Esa Matemática era más bien astronomía y aún astrología: Torres y Villarroel llegó a ella a través de la astrología y las ciencias ocultas».

Como dice el propio Torres: *«Di en el extraño delirio de leer las facultades más desconocidas y olvidadas, y arrastrado de esa manía, buscaba en las librerías más viejas a los autores rancios de la Filosofía natural, la Crisopeya, la Mágica, la Transmutatoria, la Separatoria y finalmente paré en la Matemática... A estos cartapacios, debía mis escasas luces y los relucientes antorchones que hoy me ilustran maestro, doctor y catedrático cuando menos. A los seis meses de estudio salí haciendo almanaques y pronósticos».*

Es forzoso reconocer que ni las enseñanzas de los jesuitas en el Colegio Imperial que sustituyó a la antigua Academia, ni las voluminosas obras del padre Vicente Tasca, ni las innumerables publicaciones *Omni se scibili* publicadas por el obispo Casanmal estaban a la altura de su época.

En pleno período de decadencia descuella sobremanera el Geómetra andaluz Antonio Hugo de Omerique. En 1689 ilustra con dos problemas originales las proposiciones XVII y XVIII del libro 6.º de Euclides. El padre Kresa dice de Omerique: *«En aquel siglo de cultísimos ingenios esperaba de él la Geometría su mayor pulimento»*. Y añade que tenía resueltos *«los más difíciles problemas que habían ejer-*

citado los ingenios de los pasados geómetras». La primera parte de sus trabajos se publicó en Cádiz (1698), con el título *Análisis Geométrico*. Se propone allí Omerique restaurar la Geometría sintética de los griegos, y con tal fin resuelve por aquellos métodos multitud de problemas, cuya solución por el método analítico de Descartes habían dado ya Renel, Dini, Schoten, etc. Son a veces muy ingeniosos los artilugios de Omenique, cuya elegancia disculpa a veces su propósito reaccionario. Ello le acarreó duras críticas por parte de Wolf, pero tampoco es admisible en modo alguno el juicio de Montuela, reproducido por Menéndez Pelayo, Vallin, Berenguer, etc., que tienden a presentarlo como cofundador de la Geometría Analítica conjuntamente con Descartes, cuando su tendencia es la diametralmente opuesta.

En la segunda mitad del siglo XVIII se inicia un estimable renacimiento en todos los órdenes de actividad, debido en gran parte al mayor contacto con el resto de Europa durante los reinados de Fernando VI y Carlos III.

El marqués de la Ensenada (que fue también profesor de Matemáticas) planteó el proyecto de la elaboración de un mapa general de España, protegió a Jorge Juan y a Diego de Ulloa para la fundación de un Observatorio Astronómico (1754), e invitó a notables profesores extranjeros para la enseñanza de las artes y las ciencias.

Al ocupar Carlos III el trono de España trajo a algunos profesores italianos (Giannini, Vimercati, etc.), y estimuló el cultivo de todas las ciencias, fundando entre otros centros el actual Observatorio Astronómico de Madrid.

El primer libro español en que aparece el Cálculo Infinitesimal es el *Examen marítimo* de Jorge Juan (Madrid 1771), «*quizá la obra científica de mayores vuelos y novedad relativa, que se haya escrito entre nosotros*», como observa Vicuña, y aunque sea un tratado de Mecánica aplicada a la construcción y manejo de navíos, es notable por la razón anteriormente citada.

El Cálculo Infinitesimal se explicaba hacia 1760 en el Colegio de Artillería por Cipriano Vimercati, y la primera obra española dedicada exclusivamente a estudiarlo es la de Villalpando *Tractatus proelimineri mathematicorum disciplinarum elemente* (Madrid 1778); años después aparece la de Giannini, sirviendo ambas como textos en la Academia de San Fernando durante largo tiempo.

Finalmente, hay que hacer notar que el primer libro extranjero de Cálculo Infinitesimal traducido al español fue el de Chaix (1801), el cual revela un progreso muy estimable respecto de sus antecesores, pero que no puede compararse con el Lacroix famoso entonces en todo el mundo.

HACIA LA GLORIA

Desde los tiempos de Omar Kayán (1100), se había reconocido que una multitud de problemas geométricos y otros de carácter cuantitativo, podrían ser estudiados por medios algebraicos, es decir, mediante cálculos, prescindiendo de la regla y el compás que utilizaban los griegos clásicos. Precursores modernos de esta idea fueron Thomas Harriot (1560-1621) y Pierre Fermat (1600-1665), pero sólo la presencia de ese gigante de la Matemática llamado Renato Descartes fue capaz de crear, en una labor genial de invención, la Geometría Analítica, liberando para siempre a la Geometría de las tremendas ligaduras impuestas por la regla y el compás y permitiendo de esta manera introducir para el estudio de los problemas geométricos la poderosa maquinaria del Álgebra primero y del Análisis después.

Por otra parte Galileo en 1604, en el apogeo de su carrera científica, cree probar que un movimiento rectilíneo donde la velocidad crece proporcionalmente al camino recorrido viene dado por la fórmula:

$$x = c\,t^2.$$

Este hecho va a llevar a resultados transcendentes, creándose de esta manera una de las aplicaciones claves de la Matemática: convertirse en lenguaje de la Física.

La solución de problemas que requieren el cálculo de longitudes de curvas, o bien medir el área encerrada por ellas, ya había sido abordado por los griegos mediante un ingenioso procedimiento que se conoce con el nombre de método del agotamiento o de exhaución. Consiste en «agotar» paso a paso el margen entre las mínimas y máximas longitudes (para el caso de longitudes) y superficies (en el caso de áreas) encerradas por la curva, mediante el cálculo del perímetro y el área de un polígono inscrito en ella, y de otro que la circunscribe, aumentando en cada paso el número de lados del polígono. Este método del agotamiento indicaba la conveniencia de calcular cualquier cantidad que no pudiera ser medida de otro modo con precisión por medio de su traducción aproximada a una curva y de la estimación del margen, entre el más bajo máximo posible (al que cabía acercarse por el «agotado» polígono circunscrito) y su más alto mínimo posible (al que cabía acercarse por el «agotado» polígono inscrito).

El científico del siglo XVIII, enfrentado con el problema de la medición de magnitudes en movimientos variables (cuerpos que caían, proyectiles, órbitas celestes, cuerdas vibrantes, vigas con cargas variables, etc.), tuvo que construir unas nuevas Matemáticas que le permitieran deducir el valor de una variable (como la velocidad) respecto del valor de la otra (en un instante o en una posición). Una serie de científicos hicieron contribuciones tendentes a la solución de este problema. La publicación en 1540 de la edición revisada de la obra de Arquímedes hizo accesible un trabajo suyo que trataba de este método del agotamiento.

El matemático italiano Luca Valerio (1552-1618) y otros idearon el método de los indivisibles, rompiendo las líneas en constituyentes puntos «indivisibles», los planos en «indivisibles líneas», y los sólidos en «indivisibles planos».

El trabajo de estos hombres arrojó más luz, y mejoró los métodos utilizados, sobre la solución del problema de construir una tangente a una curva y de calcular los valores máximos y mínimos, hasta que finalmente Kepler y otros reconocieron que los incrementos de una función se hacían desdeñables cuando se llegaba a la proximidad de un máximo o un mínimo. El simultáneo desarrollo de la Geometría Analítica, permitió que problemas geométricos fueran expresados como ecuaciones algebraicas, y que ecuaciones algebraicas fueran proyectadas como puntos, curvas, superficies y otras figuras geométricas.

Nuevas especulaciones sobre el valor de una cantidad variable que se acerca a un máximo o mínimo llevaron al concepto de que las cantidades matemáticas variables se describen mejor como «fluxiones», considerando de esta forma una curva como una sucesión continua de infinitos segmentos de recta, pegados unos a otros en una contigüidad ininterrumpida.

Tendrían que pasar cerca de doscientos años antes de que Cauchy aclarara totalmente esta situación.

Todo este razonamiento llevó finalmente a Newton y a Leibniz a exponer en el Cálculo Diferencial un método adecuado para el tratamiento de incrementos «infinitamente pequeños» de las variables. Surgió una desdichada contienda en cuanto a la prioridad del descubrimiento de este maravilloso medio, pero la verdad parece ser que ambos hombres llegaron al descubrimiento de modo independiente, aunque aparentemente fue Newton el primero en comunicarlo a otros.

Casi contemporáneamente, John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677), este último profesor de Newton en Cambridge, expresaron la inversión del proceso diferencial, probando de alguna manera que el problema de la tangente (diferencial) era inverso al problema del área (integral).

El primer libro de texto de Cálculo Infinitesimal completo fue publicado por Guillaume F. A. de L'Hôpital bajo el título de *Analyse des infinement petits pour* *l'intelligenes des lignes courbes*, en 1696. Con este nuevo recurso pudieron ser resueltos problemas que antes habían sido casi inabordables. El uso por Newton del Cálculo Infinitesimal en varios lugares críticos hizo que pareciera matemáticamente demostrable la teoría mecánica del universo, presentada en los *Principia*, y su obra sugería que todos los demás fenómenos medibles podrían ser unificados por las Matemáticas. Esto contribuyó a que el estudio de la Mecánica se hiciera cada vez más teórico, que sus problemas pudieran ser expuestos matemáticamente y que las Matemáticas parecieran probar y generalizar lo que la observación, la razón y el experimento sólo podían sugerir.

El prestigio de Newton fue tan grande que su sistema de notaciones en el Cálculo Infinitesimal se mantuvo en Inglaterra, aunque era mucho más embarazoso que el de Leibniz, usado en el continente. Esta divergencia de notaciones no se corrigió hasta el siglo XIX. Junto al resentimiento engendrado entre los contemporáneos de Newton y Leibniz por la disputa sobre el Cálculo Infinitesimal, y los debates sobre la utilidad del concepto de límite, la tosquedad de la notación tuvo sin duda algo que ver en el declinar de las Matemáticas en la Inglaterra del siglo XVIII. Entre los pocos matemáticos ingleses dignos de citar en ese siglo figura Colin MacLaurin (1698-1746), quien, aunque rechazó tanto las cantidades infinitas como las infinitesimales, produjo una obra con tanta autoridad que Lagrange la comparó con la mejor producida por Arquímedes; fue el *Treatise of Fluxions* (1742), el estudio más completo hasta entonces de esa rama de las Matemáticas.

En el siglo XVIII, a causa de la estrecha correspondencia entre la Matemática y la Física Teórica, se realizaron importantes avances en el campo del Análisis. La especulación sobre el concepto de una variable como movimiento que se acerca a un límite condujo a un debate entre filósofos y matemáticos ingleses, como Berkeley, Benjamin Robins, Brask Taylor y Thomas Simpson, y surgieron dudas acerca de la validez de utilizar cantidades «*infinitesimales*» (supuestas por tanto desdeñables) en un cuidadoso trabajo científico.

Entre tanto los matemáticos continentales se entregaron a tareas más productivas. *La Memoire sur le calcul integral* (1738) de D'Alembert, y sus pertinentes artículos en la *Encyclopedia* difundieron el concepto de límite. Leonardo Euler (1707-1783), de origen helvético, hizo la mayor parte de su trabajo en las Academias de San Petersburgo y Berlín. Efectuó contribuciones notables en casi todos los campos de las Matemáticas. Estableció el Cálculo de Variaciones (en términos aproximados, el cálculo de las variables de variables) como una rama separada del Análisis superior, y fue el primero en ofrecer una notación clara de una función matemática; de él parten la notación de serie y de producto infinito, tan fundamentales en el Análisis de hoy.

La familia Bernouilli, de Basilea, que produjo una serie de brillantes matemáticos, estuvo en estrecho contacto con Euler tanto en San Petersburgo como en Basilea. Santiago Bernouilli (1654-1715) sistematizó el Cálculo Diferencial de Leibniz, y colocó la Teoría de la Probabilidad sobre una sólida base matemática. Su hermano Juan (1667-1748) resolvió el problema de la braquistócrona. Uno de los hijos de Juan, Daniel, no sólo contribuyó a la Física-Matemática, sino que también proporcionó algunas impresionantes aplicaciones de la Teoría de la Probabilidad a los seguros y los juegos de azar.

Los resultados de los Bernouilli, sobre todo en Cálculo de Probabilidades, fueron completados por Abraham de Moivre (1667-1754), un hugonote refugiado en Inglaterra, quien entregado a esta tarea, elaboró la teoría de las permutaciones y combinaciones, tan básica hoy.

También una figura impresionante de este siglo fue el sabio italo-francés José Luis Lagrange (1736-1813). Revolucionó la Mecánica Teórica, con el concepto de «*grados de libertad*» de un sistema mecánico; siguiendo los pasos de Euler proporcionó una nomenclatura para el Cálculo de Variaciones, y, sustituyendo métodos geométricos por analíticos, fue uno de los varios científicos que avanzaron en el objetivo de Euler del desplazamiento de lo sintético a lo analítico.

EL SIGLO XIX

El conocimiento científico cambia de naturaleza en el curso del período que aquí nos ocupa; alcanza un desarrollo sin precedentes y sus consecuencias se extenderán mucho más allá de Europa, sede principal de esta transformación.

Por su amplitud, el fenómeno sólo es comparable al que se produjo en Jonia, cuando experiencias y reflexiones efectuadas en Asia y Africa hallaron, en la encrucijada de los continentes antiguos, una prolongación revolucionaria en las innovaciones de la Matemática griega. Gracias a ellas el arte de demostrar alcanzó una perfección que reemplazó la lenta acumulación y el ajuste de los conocimientos prácticos por la rapidez de la deducción. Este nuevo poder, adquirido por el esfuerzo teórico desplegado desde Euclides a Diofanto, no tuvo consecuencias técnicas y sociales inmediatas: no fueron transformados los destinos colectivos de Grecia y Roma. Pero desde entonces el trabajo mental es un método cuyo empleo se revelaría dos milenios después de una eficacia inmensa.

Cuando en el siglo XVII Fermat continúa la obra de Diofanto con anotaciones en el ejemplar de una edición reciente (allí estaba enunciado el famoso último teorema de Fermat demostrado recientemente), procedió intelectualmente como él, si bien dispuso de más instrumentos de cálculo, heredados de la India antigua, perfeccionados en el mundo musulmán y enriquecidos por los hallazgos del Renacimiento.

Dos siglos después de Fermat tuvo lugar una nueva expansión, un nuevo universo matemático. No sería razonable atribuir esta vigorización a la sola existencia de genios milagrosamente más numerosos en esta época que en cualquier otra anterior: la colectividad cultural representa en esto un papel tan evidente como difícil de definir. Las mentes que se abstrajeron en el estudio de los números y las formas lo harían en adelante en un medio que favorecería la invención. No fue solamente porque la burguesía mercantil y las instituciones comerciales y el Estado necesitaran disponer de mapas más exactos y también de instrumentos de medida más precisos; si la Matemática sólo hubiera respondido a necesidades inmediatas de este carácter, no se hubiera transformado tanto.

No basta recordar que el enriquecimiento de Europa permitió a un mayor número de mentes consagrarse a tareas totalmente abstractas. La experiencia social inspiraba nuevos conceptos, abría caminos para la meditación, conducía a la creación de nuevos entes, e ideó un nuevo concepto de objetos que parecían inmutables como el espacio y el tiempo.

Entre las revoluciones mentales así surgidas, la Teoría de Probabilidades, la Geometría Analítica y la Mecánica Racional constituyen otras tantas novedades que prepararon la más asombrosa: ¡la creación de espacios de más de tres dimensiones!, razonando sobre ellos con idéntica facilidad, como se hacía anteriormente con los espacios de una, dos y tres.

Todo ello ocurrió en un tiempo en que el hombre se liberó de sus antiguas creencias y usos sociales, como si su espíritu pudiera aventurarse más allá de las antiguas fronteras de la razón.

El trabajo conceptual del hombre escapará de aquí en adelante a la atracción y las sujeciones de la experiencia sensible. Como no es verosímil que los recursos del cerebro ni su funcionamiento se hubieran modificado, hay que atribuir forzosamente a la nueva manera en que los hombres vivían, se instruían e intercambiaban ideas, el hecho de que se estaba entrando en una nueva edad mental.

En este orden de ideas, se dio el primer paso cuando el símbolo $\sqrt{-1}$, que se usaba desde hacía tres siglos, fue referido a un nuevo conjunto de números, ya no simbolizados por la recta sino por el plano. En lo sucesivo se llamaría «complejos» a estos nuevos números, calificados como «imposibles» a raíz de su aparición. Transcurriría algo más de tiempo y los «cuaterniones» pondrían a su inventor delante de una multiplicación no conmutativa, cuyo resultado cambia de signo cuando se invierte el orden de los factores.

Pronto George Boole explicaría esta aparente aberración transfiriendo a los operadores la atención prestada con anterioridad a las cantidades. En este tiempo el antiguo espacio geométrico, inspirado por la experiencia concreta, ya no sería más que un caso particular de espacios mucho más generales. Bastarían varios decenios agitados por incesantes revoluciones políticas, que ponían en tela de juicio las tradiciones establecidas, para que se recorriera el camino que llevó de Newton a Einstein.

Fue una rapidez asombrosa que benefició no sólo a la Matemática, sino en general a todos los dominios de la investigación científica, tanto por el espíritu de conquista, del que la Matemática daba ejemplo, como también por los procedimientos de cálculo y de razonamiento que proporcionaba. La profundización del saber fue enorme, se estableció un cambio sutil, implícito y muchas veces inconsciente. Como una novedad de primerísima importancia se estableció un lenguaje científico y una notación universal, que facilitaría la lectura de libros y de trabajos de otros. No asombrará, por tanto, que varios de los matemáticos más notables hayan estado singularmente dotados para el aprendizaje de lenguas extranjeras o antiguas, hasta el punto de haber vacilado entre las dos vocaciones. Boole, al que los matemáticos actuales tanto debemos, fue también un gran gramático.

De todas formas no todo fue positivo en este colosal avance; la progresión de las ciencias y de su lenguaje fue tan rápida que se adelantó al conocimiento que el hombre tiene espiritualmente de sí mismo.

La Matemática, al descubrir tantas cosas, no proporciona una explicación clara de su propio poder y ninguna otra ciencia lo hizo por ella. Los nuevos números y operadores, las fórmulas eficaces y las demostraciones reveladoras eran tenidos en cuenta en función de su éxito después de haber quedado establecidos por operaciones abstractas cuya naturaleza íntima continuaba siendo tan desconocida como las causas que las suscitaban.

Hacia la terminación del siglo XIX, el recurso a las axiomáticas (debido en gran parte a David Hilbert y a su escuela, en la Universidad alemana de Gotinga) supuso un despliegue de esfuerzos de los lógicos, primera fase de un método que, ya entrado el siglo XX, ofrecería materia a los psicólogos. Pero la marcha científica tan poderosa, tan reveladora, tan convincente en aquello que producía, fue continuando a ciegas en medio de las circunstancias que la originaban, y a cuyo cambio estaba destinada.

Precisando un poco más: el siglo XVIII constituyó una época excepcional para el desarrollo y la consolidación de los portentosos resultados obtenidos por los matemáticos del siglo anterior o que vivieron a caballo entre los dos siglos (Descartes, Newton, Leibniz...). Sin embargo, curiosamente, el siglo XVIII parece adentrarse en un callejón sin salida. Desaparecen los grandes matemáticos de mediados de siglo: Daniel Bernouilli en 1782, Euler y D'Alembert en 1783, Lagrange, que apenas cuenta cincuenta años, da por finalizada su dedicación a las Matemáticas puras, y a partir de 1785, al igual que Monge, se orienta hacia la Física, mientras que Laplace sólo se ocupa de la Mecánica y del Cálculo de Probabilidades.

Llegan los años revolucionarios y los sabios de toda Europa han de ponerse al servicio de la nación y la guerra, hasta el punto que, en Francia, el decenio 1786-1796 sólo destaca por la carencia absoluta de resultados de cierta importancia. Este tipo de períodos vacíos, relacionados con la agitación social, se han vuelto a producir actualmente en varios países, pero en esa época, ningún país, aparte de Francia, contaba con matemáticos activos comparables a los que acabamos de citar; por tanto la esterilidad se hizo universal.

Con Gauss se inicia, en 1796, un verdadero renacimiento. Aunque su formación se basó únicamente en la lectura de las obras de sus antecesores, Gauss renovó en quince años todas las Matemáticas. A partir de los comienzos del siglo XIX ya no estuvo solo, pues un gran acierto de Napoleón, que como buen oficial de artillería, estaba muy interesado en los estudios de balística y mantenía frecuentes conversaciones sobre estas cuestiones con Lagrange y Laplace, fue la fundación en 1800 de la famosa Escuela Politécnica, cuyo primer director fue Gaspar Monge, y que se puede considerar durante todo el siglo XIX como el auténtico motor de la Matemática francesa e incluso mundial, a excepción de la escuela alemana y de los grandes matemáticos escandinavos, Nicolás Abel y Gosta Mittag-Leffler. En este centro fue donde explicó el genial Barón Agustín Luis de Cauchy sus famosos cursos de Análisis Matemático que le harían inmortal.

Las ideas expresadas en el siglo XVII, e incluso antes, serían el punto de partida de este renacimiento, pero el estilo y el contenido cambiarían inmediatamente, no sólo por el establecimiento del rigor, obra fundamental de Gauss, Bolzano, Cauchy y Abel, sino también por la introducción de nuevos objetos matemáticos, que se distinguen de los objetos clásicos por carecer de imágenes accesibles a nuestros sentidos. La abstracción daba así un nuevo paso hacia adelante.

El hervidero de ideas en todos los campos tradicionales de las Matemáticas, Aritmética, Álgebra, Geometría y Análisis, no cesará durante todo el siglo XIX, y lo contemplamos ahora como una etapa de transición entre los matemáticos «*clásicos*» y los nuestros. Fue un período de una fecundidad extraordinaria: por una parte el descubrimiento de conceptos que con el tiempo habían de constituir por sí mismos campos totalmente nuevos de las Matemáticas (Teoría de Grupos, Topología, Espacios Funcionales, etc.) que han adquirido actualmente una amplitud comparable a la de los campos tradicionales antes mencionados, y por otra parte por el análisis en profundidad de las antiguas nociones, lo que permitió comprender el verdadero alcance de los axiomas.

Poco a poco, se va desprendiendo una idea general, que culminará en el siglo XX, y que subyace en toda teoría matemática: la noción de «*estructura*». Esta idea es la consecuencia natural de constatar que aquello que desempeña un papel primordial en una teoría son las relaciones entre los objetos matemáticos que aparecen en ella, y no la naturaleza de dichos objetos, y que en dos teorías muy distintas puede suceder que las soluciones se expresen de la misma manera. El sistema de estas soluciones y de sus consecuencias es una misma estructura subyacente en las dos teorías.

Hay que hacer notar que, en casi todos los casos, dicha aparición respondía a la necesidad de abordar con éxito algunos problemas heredados de las Matemáticas clásicas y no a la fantasía de los matemáticos capaces de crear nuevas nociones abstractas sin ningún objetivo concreto.

El hecho de que una misma estructura pudiese aparecer en situaciones muy diferentes hizo a los matemáticos cada vez más conscientes de la unidad esencial de la Matemática. Sin embargo, había de pasar aún bastante tiempo antes de que se hiciera patente esta visión de conjunto, y en el siglo XIX cada nueva teoría se fue desarrollando, en la mayoría de los casos, sin que nadie se percatase de sus posibles relaciones con las demás, y en este hecho se fundamenta nuestra Matemática y constituye el auténtico motor de sus progresos.

Merece la pena en este punto dedicar un poco de atención al Cálculo Numérico y a su pasmosa evolución.

El cálculo aritmético fue considerado como una simple técnica utilitaria hasta el siglo XVIII. La terminación del siglo señaló una fase muy distinta, caracterizada por un lado por la desaparición del cálculo con ábacos, y por otro, por una mayor concentración en los problemas básicos de la técnica del cálculo.

Se realizaron numerosos intentos para abreviar el proceso de los cálculos efectuados en el papel, mediante el empleo de tablas mejor concebidas, máquinas de calcular perfeccionadas y una mayor confianza referida al cálculo mental. Tablas de logaritmos mejoradas y tablas numéricas mejor adaptadas hicieron más fáciles los cálculos.

Pero el proceso decisivo del siglo, en lo que se refiere al Cálculo Numérico, se produjo con el mejoramiento y la extensión de las máquinas de calcular y sus aplicaciones en los negocios de un modo general y particularmente en la banca, entonces en plena expansión. En 1820 apareció el aritmómetro del financiero Thomas de Calmer, versión mejorada de la máquina de multiplicar inventada por Leibniz en 1672.

Dos conjuntos de hechos representan un papel complementario en la aceleración del cálculo mecánico: en primer lugar, la corriente ininterrumpida de descubrimientos teóricos y de progresos técnicos obligó a los teorizantes a revisar constantemente los principios del cálculo mecánico; luego la demanda de los usuarios creció en proporción a su propio número. Para atender esta demanda, usuarios, ingenieros y fabricantes combinan los recursos de la mecánica de precisión con las técnicas más recientes existentes en el momento para mejorar la calidad de sus máquinas. Se pueden distinguir dos aspectos principales en esta corriente de progreso: la mecanización, que se refería a los dispositivos capaces de efectuar operaciones matemáticas, y la automatización, que reducía estos dispositivos a simples reflejos. Hasta 1880 los esfuerzos se concentraron sobre todo en la mecanización.

Después de 1880 los técnicos norteamericanos, siguiendo los pasos de Felt y Burrough, orientaron sus investigaciones hacia la automatización. Esto se produjo en la época en que los métodos comerciales e industriales comenzaban a uniformizarse. Los rápidos progresos de la mecánica aplicada, aliados con la flexibilidad en el uso de la electricidad, permitieron una mejora continua de las máquinas.

La importancia adquirida por la contabilidad y los servicios estadísticos aumentó muchísimo, en forma paralela al desarrollo del comercio y de la industria y de su necesidad siempre creciente de máquinas.

Los perfeccionamientos de las antiguas máquinas se efectuaron mediante la adaptación de los métodos de la mecánica a las posibilidades que ofrecía la misma naturaleza de las máquinas y de sus componentes. Citemos por ejemplo, en las máquinas de sumar, la introducción de las columnas en fase, la simplificación del registro mediante el empleo de teclados para operaciones completas o fragmentarias, la posibilidad de registrar datos con antelación, la automatización de los multiplicadores, la invención de la división mecánica, los imprimentes en el trabajo de contabilidad, la mecanización y la automatización procurados por los relés y los motores eléctricos y, finalmente, la invención de la máquina estadística de tarjeta perforada por Hollerit en 1899. Estos perfeccionamientos, que ilustran las principales etapas del cálculo automático y el crecimiento de una industria nueva, proporcionan igualmente un carácter nuevo a la misma sociedad.

Antes de abandonar el sector de las aplicaciones del Cálculo Numérico debemos mencionar otro proceso notable: se trata del aparato de integración mecánica, inventado por el suizo Oppihofer (1827) para facilitar la agrimensura, que fue perfeccionado por Amsler y Lord Kelvin y tuvo muchos usos; se construyeron máquinas análogas para el cálculo de derivadas, así como cinemómetros, taquímetros, anemómetros, etc.

Es así como apareció una nueva rama de la Tecnología que se inspiró directamente en las Matemáticas; fue un sector que recibirá en los años 40-60 del siglo XX un impulso extraordinario como consecuencia de la revolución provocada en sus mismas bases por la Electrónica.

La Teoría de Números, después de grandes progresos durante el siglo XVII, debidos sobre todo a Fermat, había permanecido prácticamente estancada durante el siglo XVIII. La publicación en 1801 de las *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss señaló una etapa decisiva en este sector de las Matemáticas. En este trabajo, el gran matemático alemán logró hacer la síntesis de las obras de Euler y de Lagrange con respecto a la reducción de ecuaciones con coeficientes literales. Introdujo igualmente en la Teoría de Números ideas originales que se revelaron posteriormente como base de ideas particularmente fecundas. Gauss fue el promotor de la teoría de la congruencia lineal y cuadrática, y resolvió el problema de la división de una circunferencia en arcos iguales, estableciendo de paso en qué casos esta operación podía efectuarse únicamente con la regla y el compás, demostrando así la imposibilidad de resolver el problema clásico de la trisección del ángulo, que había sido un objetivo primordial de los matemáticos griegos.

La memoria de Gauss tuvo un interés histórico por la nueva vida que infundió a las investigaciones relativas a la Teoría de Números durante todo el siglo XIX. Inspiró así las importantes investigaciones de Jacobi sobre residuos cuadráticos y las memorias de Dirichlet y Kummer que introdujeron la fecunda noción de ideal. Dirichlet, Eisenstein y Kronecker aportaron contribuciones esenciales a este complejo capítulo de las Matemáticas. Hay que señalar también la publicación en Francia del clásico *Tratado de la teoría de los números* de Adriano María Legendre.

Pero el siglo XIX iba a introducir cambios revolucionarios en esta última teoría, hasta entonces tenida como muy poco profundizada. Especialmente el lazo entre las propiedades aritméticas y el campo del continuo quedó establecido por los aportes de diversos matemáticos: por una parte los alemanes Jacobi, Dirichlet y Riemann, y por otra Hermite, Cayley y Sylvester. Los resultados obtenidos fueron de muchísima importancia, como en el caso de la teoría de la invarianza y la covarianza de las formas y de la demostración de la transcendencia del número «*e*», por Hermite.

Acerca de este último profesor no me resisto a incluir, aparte de su enorme talla intelectual como matemático, otras dos cualidades que le hacen sobresalir enormemente como persona.

En primer lugar, la humildad, y basta para ello relatar la siguiente anécdota transcrita íntegramente de la obra de Remmert:

«Cuando el joven y posteriormente gran matemático Gosta Mittag-Leffler concluyó los estudios de licenciatura en la Universidad de Uppsala en su Suecia natal, marchó a París deseoso de trabajar y aprender con Hermite. La respuesta de éste a la proposición fue poco menos que lapidaria: «Usted se ha equivocado de sitio, señor, vaya a trabajar a Berlín con el Profesor Weierstrass que es el maestro de todos nosotros», y lo más importante es el hecho de que la frase anterior fue pronunciada en 1873, a los tres años de concluir la guerra franco prusiana, cuando el odio de los franceses por los alemanes era intensísimo».

En segundo término quiero destacar su gran calidad como docente, en palabras de su alumno Paul Painlevé, uno de los matemáticos más gloriosos que ha producido la fecundísima matemática francesa:

«Cuando el gran matemático habla, un auténtico raudal de luz y de belleza inunda el aula haciéndonos estremecer de gozo a todos los que tuvimos la enorme fortuna de ser sus discípulos.»

En la línea de la tendencia general del siglo XIX, orientada hacia un mayor rigor matemático, los trabajos emprendidos hicieron posible la investigación profunda de las diferentes variedades de números, dándolas una consistencia sólida de la que hasta entonces carecían (números enteros, fraccionarios, irracionales, reales, transcendentes, algebraicos y finalmente números complejos), y de sus propiedades. Este trabajo aclaratorio esencial tuvo como principal consecuencia las nuevas ampliaciones del concepto de número.

Por ejemplo, la noción de número irracional, muy utilizada desde la antigüedad, continuaba aún en parte rodeada de misterio en la primera mitad de siglo. En 1844 el francés Liouville probó la existencia de números «*transcendentes*», es decir, que no podían ser solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales, y demostró que este tipo de números era infinitamente más numeroso que el de los «*algebraicos*». La teoría de los conjuntos de Cantor estableció a finales de siglo bases nuevas en este sector.

Los números «*imaginarios*», introducidos en el siglo XVI por Cardano y Bombelli, fueron cada vez más utilizados en el siglo XVIII, dando lugar a numerosas paradojas en las que participaron matemáticos tan notables como Euler, los Bernouilli, y D'Alembert. No se manifestó una verdadera comprensión de estos números hasta la primera mitad del siglo XIX.

Una etapa importante de este proceso se halla en la interpretación geométrica del número imaginario dada por el danés Wessel y el suizo Argand. A partir de esta interpretación dos verdaderos gigantes de la talla de Gauss y de Cauchy lograron realizar un álgebra rigurosa de estos números, llamados con preferencia complejos y reemplazándose poco a poco el término imaginario para designarlos. Estos progresos permitieron numerosas justificaciones a posteriori, y la teoría de funciones quedó armonizada con la de ecuaciones algebraicas.

En 1799 Gauss logró en su tesis doctoral probar rigurosamente el teorema fundamental del Álgebra, según el cual todo polinomio con coeficientes complejos tiene una raíz.

Hacia 1820 Poncelet, apoyándose en ideas anteriores de Monge y haciendo un considerable empleo de los números complejos en la Geometría, logró dar un fecundo acercamiento entre los métodos de la Geometría pura y la Geometría Analítica.

Los progresos del Álgebra durante el siglo XIX pueden agruparse bajo tres grandes apartados:

a) El estudio de las leyes fundamentales y la creación de nuevas álgebras.
b) El desarrollo de la teoría de ecuaciones.
c) La aparición de la teoría de grupos, y con ella la génesis del Álgebra abstracta.

En lo que se refiere al primero de estos campos de investigación, el inglés Augustus de Morgan esbozó el análisis lógico de las leyes, las operaciones y el simbolismo de las Matemáticas, y demostró que era posible concebir álgebras diferentes del Álgebra clásica. Este trabajo le puso en relación con el de su compatriota George Peacock, quien se interesaba igualmente en las funciones del Álgebra, y se reconoció así el interés de su carácter puramente simbólico. Si estas ideas no encontraron un éxito inmediato, representaron un papel activo en la reorganización de los principios del Álgebra general que se produjo a comienzos del siglo XIX.

Una aventura semejante le ocurrió al alemán Hermann Grassmann, cuyos dos volúmenes del tratado titulado *Lecciones sobre la expansibilidad lineal* publicado en 1844 y 1862, no llamaron apenas la atención a pesar de la riqueza y la originalidad de las ideas expuestas, que afectaban simultáneamente a la Geometría Analítica, al Álgebra y al Análisis puro.

Citemos entre las innovaciones más interesantes el Álgebra Lineal asociada al cálculo de determinantes. Otro campo de exploración y descubrimiento del siglo XIX fue el de los invariantes. Sus iniciadores fueron los británicos Cayley y Sylvester; posteriormente Jordan, Selman, Hermite y otros perfeccionaron esta teoría tan importante en la Matemática de hoy.

Pocos progresos se habían hecho desde el Renacimiento en lo referente a la resolución de ecuaciones algebraicas. Muchos matemáticos del siglo XVIII creyeron todavía que sería posible resolver toda ecuación algebraica del grado que fuera por medio de algoritmos simples, y esto a pesar de que los métodos conocidos de resolución no se hubieran extendido más allá del cuarto grado.

Las primeras dudas sobre esta cuestión fueron emitidas en 1770 por Lagrange, quien demostró que los métodos usados para los primeros grados no eran aplicables a los grados más altos. En 1779 el italiano Paolo Ruffini señaló la imposibilidad de encontrar por medio de radicales una solución para la ecuación de quinto grado, pero esta prueba carecía de rigor.

En 1824 el joven noruego Abel (sin duda el mejor matemático escandinavo de todos los tiempos) proporcionó una prueba totalmente correcta del hecho de que toda ecuación de grado superior al cuarto es imposible de resolver con radicales.

En 1831 el joven francés Evariste de Galois aportó una contribución decisiva a la resolución de ecuaciones algebraicas expresando las propiedades fundamentales de grupos de transformación asociados a las raíces de una ecuación algebraica; mostró que el campo de racionalidad de esta ecuación está determinado por el grupo. Esta teoría permitió, entre otras cosas, reagrupar en un terreno común problemas clásicos, como los de la trisección de un ángulo y la duplicación de un cubo. Sin embargo, este descubrimiento permaneció ignorado hasta que fue publicado, después de la muerte de su autor, en 1846.

El desarrollo de la teoría de ecuaciones algebraicas había llevado a Galois al concepto de grupo, que iba a revelarse de una capital importancia en numerosos sectores de las Matemáticas. Se pueden advertir algunos bosquejos iniciadores de esto en ciertos trabajos del siglo XVIII (especialmente los de Euler y Lagrange), y en el siglo XIX, en las investigaciones relativas a la teoría de ecuaciones que efectuaron Ruffini, Cauchy y Abel.

Esta nueva noción debía conducir, a causa de su aplicación a numerosas ramas de la Matemática, a fecundas relaciones entre ciertas propiedades correspondientes a entidades matemáticas muy diferentes.

La memoria de Galois, publicada en 1846 por Liouville, no vio reconocida de golpe su originalidad y tuvo una difusión lenta. Las ideas de Galois debieron esperar los desarrollos de Cauchy, Cayley, Serret y Jordan (este último en su *Tratado de las sustituciones*, publicado en 1870) para encontrar finalmente una cierta difusión y ver como su potente significado encontraba por fin la luz.

Sophus Lie y Felix Klein contribuyeron igualmente al desarrollo rápido de la teoría. Lie estaba especialmente interesado en el papel que representan los grupos en las transformaciones de contacto, para aplicarlo a la teoría de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, mientras que Felix Klein tuvo el gran mérito de presentar las aplicaciones de la noción de grupo a la Geometría elemental en su famoso programa de Erlangen en 1872. La estructura de la Geometría clásica queda transformada de esta forma gracias al concepto de grupo, y ello permitió una clarificación racional y natural de las propiedades de las distintas Geometrías.

Los últimos decenios del siglo XIX vieron la edificación de una teoría más abstracta de los grupos, los cuales serían introducidos en importantes capítulos del Álgebra moderna, aportando una unificación profunda y un método de síntesis.

El Álgebra abstracta, una de las ramas esenciales de la Matemática actual, es una creación del siglo XX. Esta extensión del Álgebra clásica, que utiliza operaciones muy generales sobre entidades definidas axiomáticamente, se ha desarrollado desde sus orígenes a partir de:

a) La generalización de la noción de operación.
b) La introducción gradual del concepto de estructura.
c) El fortalecimiento de los cimientos de la ciencia matemática bajo forma axiomática.

Estas tres tendencias se manifestaron y fueron explotadas desde sus inicios en el siglo XIX.

Los factores predominantes de esta evolución pueden ser clasificados así:

a) El descubrimiento de los grupos de sustituciones.
b) El estudio de las transformaciones geométricas y de sus leyes de composición.
c) La representación geométrica de los números complejos y la teoría de la representación conforme.
d) La teoría de los cuaterniones.
e) La introducción de los vectores, los tensores y las operaciones entre ellos, dando así origen al Álgebra Lineal y Multilineal.
f) El estudio de las operaciones, con la teoría de las proposiciones lógicas emprendida inicialmente por Boole y sus discípulos.

Además deben de considerarse los siguientes hechos:

a) Las investigaciones de la escuela alemana de aritmética, que permitieron la aclaración del concepto de número algebraico.
b) La introducción de los ideales por Kummer, y su generalización por Dedekind.
c) La creación del concepto de conjunto.

Todos estos esfuerzos, aparentemente divergentes, contribuyeron finalmente a la formación de un Álgebra muy general, que tomó una forma concreta con la famosa memoria de Steinitz (1910).

El Análisis Matemático, piedra angular de las Matemáticas, se limitaba a comienzos del siglo XIX al Cálculo Integral y al Cálculo Diferencial (usados con muy poco rigor) y a la resolución de ecuaciones diferenciales. Mientras se hacían rápidos progresos en estos tres campos, aparecieron dos nuevas ramas, que revelaron pronto su gran importancia, tanto en las Matemáticas puras como en las aplicadas: la teoría de las Ecuaciones en Derivadas Parciales y el Cálculo de Variaciones.

Se puede juzgar la extensión de los conocimientos en estos dos sectores gracias a importantes tratados publicados en Francia a finales del siglo XVIII y comienzos del XIX, debidos a Lagrange (*Teoría de funciones analíticas,* 1787, y *Lecciones sobre cálculo de funciones,* 1801) y por Lacroix (*Tratado del Cálculo Diferencial e Integral en tres volúmenes,* 1787-1800). Se advierten ya en estas obras el orgullo ante la masa de resultados que allí se exponen, y ciertos temores ante la incertidumbre que rodeaba aún a los principios fundamentales, de cuya carencia total de rigor y precisión eran plenamente conscientes sus autores.

El esfuerzo principal del siglo XIX, en lo que al Análisis matemático se refiere, se hizo de dos maneras. La primera pasaba por alto más o menos deliberadamente los problemas relacionados con los fundamentos y se dedicaba fundamentalmente a la creación de algoritmos que demandaban otras ciencias, principalmente la Física. La segunda volvía a las bases, tratando de establecer el Análisis sobre cimientos más sólidos. Y aunque parezca extraño estas dos formas de proceder se complementaban entre sí.

El desarrollo del Análisis Matemático fue tan rápido y la proliferación de nuevas categorías tan impresionante que es imposible resumir con un poco de profundidad la evolución de este portentoso fenómeno; de todas formas intentaremos fijar con un mínimo de claridad la evolución de los grandes capítulos del Análisis:

1. La Teoría de Funciones de Variable Real.
2. Los comienzos de la Teoría de Funciones de Variable Compleja.
3. El estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y en Derivadas Parciales.
4. La creación de la Teoría de Conjuntos y su influencia en el Análisis.

En estas teorías diferentes hallamos las mismas pasiones contradictorias, a favor por un lado de los principios rigurosos y, por otro, de las aplicaciones útiles de los nuevos resultados. La revolución estructural llevó a las dos tendencias a un desarrollo rápido de sus respectivos campos de aplicación y, en definitiva, a la armonización de ambas maneras de pensar, que tan sólo aparentemente eran divergentes.

Los orígenes y el desarrollo de la Geometría Analítica mostraron a los sucesores de Descartes la importancia considerable del concepto de función. Este concepto fue sólo parcialmente aclarado durante el siglo XVIII y presentaba todavía dificultades considerables.

La opinión más corriente a comienzos del siglo XIX consistía en pensar (como lo hacía Euler) que las únicas funciones que se podían usar en el Análisis Matemático eran las representadas por un número finito de operaciones. En realidad este tipo de funciones iban a revelarse demasiado restringidas como pronto se demostró.

En 1807 se hicieron progresos de importancia primordial por Joseph Fourier, quien después de haber descubierto las series trigonométricas, demostró que con la ayuda de estas series podían representarse tipos de funciones más generales que las consideradas por Euler.

En 1829 Dirichlet, profundizando en los trabajos de Fourier, introdujo la famosa función de Dirichlet, la cual carece de una representación analítica por medio de las funciones elementales.

La noción de continuidad constituyó el centro de las preocupaciones de los analistas, deseosos de introducir más rigor en la teoría de funciones. El mérito fundamental de haber logrado una definición precisa de la continuidad, introduciendo previamente el concepto de límite, es de Cauchy, genial matemático francés y profesor durante bastantes años de la famosa Escuela Politécnica de París.

Con Cauchy nace el pleno rigor en el Análisis; insistió, conjuntamente con Gauss, en las precauciones que había que tener debido a la existencia de funciones discontinuas. A su vez Bolzano arrojó una nueva luz sobre el concepto de función, y Riemann extendió al caso de funciones discontinuas la definición de integral dada por Cauchy, que solamente abarcaba el caso continuo. Esta definición iba a ser muy ampliada por Lebesgue en 1902.

Los ejemplos de funciones continuas no diferenciables establecieron claramente la necesidad de proseguir los esfuerzos en busca de la exactitud lógica, de la aclaración a fondo de los conceptos utilizados y de la definición, con una precisión exacta y rigurosa, del campo de aplicación de cada teorema.

La teoría de las series había progresado de un modo brillante a lo largo del siglo XVIII, pero este progreso, llevado a cabo fundamentalmente por Euler gracias a su intuición genial, carecía muchas veces de rigor. Se efectuó un estudio crítico de las series por parte de diversos investigadores: Lagrange, Gauss, Fourier, Cauchy, Abel, Dirichlet, etc. Se introdujeron nuevas e importantísimas nociones, como la de convergencia uniforme (dada por Stokes en 1848), al mismo tiempo que la nueva teoría de las Funciones de Variable Compleja permitía incluir cambios fecundos de unificación y de síntesis.

Los matemáticos del siglo XVIII ya habían usado en ocasiones las funciones de una o varias variables complejas, especialmente en relación con cuestiones de Física-Matemática; Clairaut, D'Alembert, Euler y Laplace entre otros, habían establecido algunas de sus propiedades. Uno de los problemas fundamentales planteados por el trazado de mapas (el de representación conforme), juntamente con los inicios del estudio de la hidrodinámica por parte de Euler y de Bernouilli, son ejemplos claros de lo citado anteriormente. Esto, dejando aparte el misterio que entonces planteaba la existencia de expresiones como $\sqrt{-1}$, cuyo manejo, debido a la no unicidad de la raíz compleja, dio origen a muchas discusiones y paradojas cuya lectura hoy es meramente ilustrativa y que se puede encontrar en la correspondencia mantenida entre los matemáticos de la época.

El examen más general de las funciones de variable compleja fue emprendido por Cauchy, quien en su *Análisis* (1825) aclaró completamente las nociones de «límite», «continuidad» y «convergencia». Estudió las funciones holomorfas, desarrolló un método de los residuos que hizo posible el cálculo de numerosas integrales que llevan su nombre, estableciendo la equivalencia entre la analiticidad y la holomorfía.

Posteriormente Victor Puiseux extendió estos resultados, dando en cuatro casos el desarrollo de una función multiforme en serie de potencias fraccionarias. Pero el avance fundamental en esta bellísima y dura teoría fue establecido por el matemático alemán Bernardo Riemann, el cual logró disipar todo el misterio que rodeaba a las funciones multiformes con la introducción del concepto de superficie de Riemann, ligándolo con el de prolongación analítica, establecido en aquel tiempo por ese otro gigante de la Matemática llamado Karl Weierstrass. Según el matemático francés Jean Dieudonné, fallecido hace poco tiempo y persona famosa por muchas razones, pero sobre todo por su erudición enciclopédica, «*la idea de Riemann es el rasgo de genio mayor que se ha dado nunca*».

Weierstrass descubrió también propiedades fundamentales de las funciones enteras, que fueron completadas por Emilio Picard en 1879. Por otra parte los trabajos de Fuchs y el empleo de funciones elípticas, llevaron a Henri Poincaré en 1881 al descubrimiento fundamental de las funciones automorfas, lo que condujo progresivamente a la fundación de la teoría geométrica de la variable compleja.

Aquí sí quiero modestamente indicar que sería tremendamente útil para el lector interesado en estas cuestiones una lectura meditada de la obra de Henri Poincaré *La Ciencia y el Método*.

Durante el siglo XIX, la nueva teoría de las Funciones de Variable Compleja adquirió tal desarrollo que se convirtió en el concepto esencial del Análisis Matemático.

Las investigaciones emprendidas a mediados del siglo XVIII por el matemático italiano Fagnano (1682-1766), referentes al cálculo de longitud de un arco de elipse, habían demostrado la imposibilidad de expresar ciertos resultados con la ayuda de las funciones clásicas conocidas en la época. Euler también trabajó en la misma dirección que Fagnano, logrando completar algunos de los resultados, pero el primer trabajo matemático en esta dirección fue obra del francés Legendre. Sus conclusiones aparecieron en 1825 y 1826, en los dos volúmenes de su obra *Teoría de las funciones elípticas*.

Pero apenas publicado este tratado por Legendre dos jóvenes matemáticos revolucionaron totalmente la cuestión: el noruego Niels Abel y el alemán Gustav Jacobi. Ellos reemplazaron el estudio efectuado hasta el momento, considerando la función inversa y viendo que al ser doblemente periódica y compleja, era imposible representarla por funciones de las llamadas elementales.

Surgió así una nueva línea de investigación: la de las funciones abelianas, a las que se procuró un brillante desarrollo durante el siglo XIX. En 1861 Weierstrass logró con la introducción de la función «$\wp$» una notable simplificación en el estudio de las funciones elípticas.

Las funciones elípticas señalaron la partida hacia nuevos progresos de las Matemáticas. Permitieron la investigación de numerosas funciones y de nuevos tipos de ecuaciones diferenciales. Nos limitaremos a citar a este respecto los grandes trabajos efectuados por Hermite y Kronecker, así como la invención de la función modular elíptica y la integración de todas las funciones elípticas gracias a las funciones hiperelípticas, surgidas de las funciones automorfas creadas por Henri Poincaré en 1882.

Las ecuaciones diferenciales habían sido objeto de numerosos estudios desde comienzos del siglo XVIII, pero los rápidos progresos de la técnica dejaban a la teoría muy atrás. Desde que inició sus investigaciones sobre este asunto, Cauchy sintió la necesidad de que se procediera con más rigor. Este punto de vista fue compartido por la mayoría de los matemáticos y se reveló como especialmente fecundo.

La primera demostración de un teorema de existencia para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales fue dada por Cauchy en 1820. Este teorema, conjuntamente con el tratamiento de la unicidad de las soluciones, fue generalizado por Lipschitz en 1877 y por Picard en 1893; este último, haciendo gala de la elegancia que muestran en su prueba la mayor parte de los teoremas que creó, introdujo el método de las «aproximaciones sucesivas» (o método de los iterantes, como se denomina actualmente). El mismo afán de exactitud llevó a Bernardo Riemann al estudio del problema de Dirichlet que iba a representar un papel esencial en la teoría del potencial y en la solución de numerosos problemas en Física-Matemática.

Hubo a lo largo de todo el siglo XIX una serie ininterrumpida de revisiones de los principios, que hizo que ciertos razonamientos todavía usados por Cauchy y Dirichlet ya no fueran admitidos por Riemann ni por Weierstrass. Entonces esto era algo bastante normal, pues el rigor no podía ser introducido súbitamente en un sector aislado de las Matemáticas: todas sus ramas están tan íntimamente entrelazadas que un progreso en una cualquiera de ellas repercute necesariamente en mayor o menor medida en todas las demás. No es posible en este breve resumen extendernos a relatar el progreso de las ecuaciones diferenciales en el siglo XIX; simplemente por su excepcional importancia citaremos el profundo trabajo de Henri Poincaré (de quien se ha dicho que fue el último que dominó la totalidad de las Matemáticas y la Física de la época), que hizo un brillante estudio acerca de aquellas Ecuaciones Diferenciales cuya integración no podía efectuarse, ni siquiera a partir de integrales de funciones elementales, obviando que este problema tiene relaciones profundas y está naturalmente entrelazado con ciertos problemas del Álgebra abstracta y con los de una ciencia matemática nueva en aquellos instantes, la Topología, que se desarrollaría vertiginosamente durante buena parte del siglo XX.

En cuanto se refiere a las Ecuaciones en Derivadas Parciales, fue nuevamente Cauchy el que ofrecerá un primer teorema de existencia, el cual fue generalizado notablemente por Sofía Kovalevskaya en una tesis doctoral dirigida por Weierstrass.

En el sector de la integración formal hay que señalar los trabajos de Monge y de Ampére, sobre ciertos tipos de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden y la solución del problema fundamental de Pfaff en 1814-1815. Luego vinieron una serie de descubrimientos notables debidos a Hamilton y Jacobi, más o menos inspirados en la Mecánica Racional, ciencia que tanto debe en su desarrollo a la teoría de Ecuaciones Diferenciales. A fines del siglo XIX Sophus Lie, siguiendo los pasos de Monge, quien había enlazado la teoría de las superficies con la de Ecuaciones en Derivadas Parciales, introdujo ideas nuevas de orden geométrico, especialmente la de transformación de contacto.

Al término del siglo XIX, una nueva teoría, la de conjuntos, propició la transformación de grandes sectores de la Matemática. Esta noción había sido introducida originalmente en la obra *Paradojas del infinito* en 1848 por el matemático Bolzano y aparecen también atisbos de ella en los trabajos de Hermann Hankel y de Paul du Bois-Reymond. Pero el desarrollo real de esta teoría revolucionaria sólo fue posible después de la publicación de una memoria sobre conjuntos infinitos debida al alemán George Cantor, profesor en Halle entre los años 1869 y 1905.

El problema planteado por la noción de «infinito» había ocupado desde la antigüedad la mente de muchos matemáticos de primera categoría. Por tanto Cantor vaciló diez años antes de hacer públicas las conclusiones a las que había llegado. Sus primeros trabajos aparecieron en 1870, pero la memoria anteriormente citada fue elaborada en 1883. La noción de conjunto como «toda colección de objetos que poseen una propiedad común» es tan elemental como engañosa, y pronto surgieron paradojas que fueron causa de división de los matemáticos, puesto que mientras algunos pensaban que podrían ser eliminadas fácilmente, otros rechazaban matemáticamente todas las soluciones que se proponían.

Por otra parte las teorías cantorianas daban un nuevo enfoque al planteamiento de numerosos problemas matemáticos, especialmente en teoría de Funciones de Variable Real y en Topología, que estaba naciendo en aquellos momentos. Pero sin duda una de las aplicaciones más fructíferas de la nueva teoría fue la refundición y la ampliación de los conceptos de medida y de integral. En este contexto se sitúan la noción de medida de un conjunto introducida por Emile Borel en 1899 (medida de Borel), y la nueva definición de la integral dada por Lebesgue en 1902. Estas dos nociones se aclaraban y completaban mutuamente gracias a la teoría de conjuntos.

De todas formas, la dificultad principal se produjo cuando Zermelo introdujo en 1904 el axioma de la elección. Todavía en nuestros días hay dificultades no totalmente resueltas y, según su posición respecto al axioma de la elección, los matemáticos actuales atribuyen más o menos posibilidades a la teoría de conjuntos, la cual pese a todo ocupa un lugar central en la Matemática de hoy.

Construir una «superciencia» cuyas reglas rijan a la totalidad del mundo intelectual es un deseo muy antiguo. Son muy conocidos los intentos de Leibniz en esta dirección. Se encuentra igualmente un intento de clasificación de todas las nociones científicas y de creación de un lenguaje universal en una memoria no concluida de Condorcet, y en algunas páginas de Lembert, quien se esforzó por desarrollar una lógica de las soluciones.

Pero los resultados realmente notables en este orden de ideas hay que concedérselos a Boole y a De Morgan. Éste último describió la falta de coordinación entre matemáticos y lógicos de la siguiente manera:

«*Sabemos que los matemáticos se interesan tan poco por la Lógica como los lógicos por las Matemáticas. Los dos ojos de la ciencia son las Matemáticas y la Lógica; la secta de los matemáticos cierra el ojo lógico, la de los lógicos cierra el ojo matemático, y cada cual está convencido de que con un solo ojo verá mejor que con los dos*».

En un intento de remediar esta falta de armonía, De Morgan analizó matemáticamente los principios de la Lógica y trató también de analizar lógicamente las leyes, los símbolos y las operaciones de las Matemáticas.

Por la misma época, Boole emprendió un trabajo análogo sobre los principios de la lógica formal y el cálculo lógico, englobando las Matemáticas en un amplio sistema compuesto de todas las ramas del razonamiento.

Numerosos lógicos y matemáticos siguen en la actualidad trabajando en esta durísima y por lo general desconocida materia; entre todos ellos destaca la portentosa figura del austríaco Kurt Gödel, que al probar el teorema de incompletitud, demostrando que toda teoría axiomática que comprende a la aritmética contiene siempre proposiciones indecidibles, llevó a esta materia a cambios insospechados. Aunque en su memoria él no dio ejemplos, hoy se reconocen dos, ambos relacionados con la teoría axiomática de conjuntos: «la hipótesis del continuo», cuya prueba le valió al matemático norteamericano Paul Cohen la medalla Field (equivalente al premio Nobel de Matemáticas), y el «axioma de la elección».

En cuanto al desarrollo de la Estadística Matemática y el Cálculo de Probabilidades se refiere, vamos a indicar muy rápidamente su evolución a lo largo del siglo XIX.

El siglo XVIII vio la definición de algunos principios y diversos métodos del Cálculo de Probabilidades; las aplicaciones de esta nueva teoría se registraron en relación con las estadísticas y censos, problemas de seguros y la interpretación de las experiencias.

El notable progreso que se produjo en los últimos años del siglo fue obra de Laplace, quien coordinó y generalizó los resultados adquiridos, preconizó una formulación muy precisa de las bases psicológicas de esta teoría de las probabilidades y sugirió su aplicación a los problemas demográficos y jurídicos, así como a una gran variedad de cuestiones científicas. Su *Teoría Analítica de las Probabilidades* (1812) y su obra más elemental *Ensayo Filosófico de las Probabilidades* expusieron lo esencial de sus investigaciones y formaron el telón de fondo que convenía a una época especialmente fecunda, durante la cual la Teoría de las Probabilidades se convirtió en una ciencia autónoma.

Apareció por aquella época otra aplicación de la Teoría de Probabilidades que a la larga resultó ser fundamental, el estudio por medio de series de una magnitud determinada, método ideado por Cotas y posteriormente ampliado por Simpson, Laplace y Gauss. Estas investigaciones llevaron a la formulación del «principio de los mínimos cuadrados» por Legendre, y la elaboración de la «teoría de los errores de observación» de Gauss, cuyo nombre fue dado a la popular curva en forma de campana que representa la dispersión de los valores experimentales.

También se registraron numerosas aplicaciones basadas en la ley de los grandes números, formulada en el siglo XVIII por Jacques Bernouilli, y demostrada a fines del siglo XIX por Chebychev, quien se apoyó en el concepto de convergencia en probabilidad introducido por Bienaqué; se iría así al estudio por parte de la escuela rusa (dirigida por Chebychev, Markov, Liapunov y Kolmogorov) para establecer una axiomática sólida del Cálculo de Probabilidades y relacionarlo con la Teoría general de la Medida y la Integración abstracta.

Son también muy importantes las aplicaciones de esta teoría a las Ciencias Biológicas y Físicas.

En cuanto se refiere a las primeras, fue Francis Galton, influido por los trabajos de Darwin, quien comenzó aplicando los métodos estadísticos a la Biología. El procedimiento que introdujo se basaba en el concepto de correlación o de conexión estocástica.

Hay que señalar por lo demás que los principios que gobiernan las aplicaciones de la Estadística a la Biología fueron aclarados lentamente y de forma muy gradual. En 1900 la mayoría de los estadísticos comenzaron por rechazar las leyes de Mendel, que acababan de ser descubiertas por segunda vez. Hubo que esperar a los trabajos de Karl Pearson sobre los métodos del análisis factorial a partir de 1903, para que tal incomprensión se disipara y la Teoría de Probabilidades volviera a ocupar el lugar al que tenía derecho como promotora de métodos de estudio en materia de Biología cuantitativa.

En lo que se refiere a la Física, la progresiva introducción de la teoría atómica en la Física-Matemática hizo que se recurriese directamente a la Teoría de las Probabilidades.

En 1850, Maxwell escribió que la Teoría de las Probabilidades era la verdadera lógica del universo. En 1871, Boltzmann introdujo la función de distribución de velocidades en un estado de equilibrio térmico estadístico; fundaba su teoría cinética de los gases en un análisis estadístico de la colisión entre moléculas.

Pero fue sobre todo Joriah William Gibbs, un físico norteamericano, quien en su célebre memoria *Principios elementales de la Mecánica Estadística*, reunió y definió claramente los principios de la Mecánica Estadística. Fundó igualmente los nuevos métodos que serían utilizados intensamente por los físicos del siglo XX.

Después de haber comenzado como un método sutil de análisis de los juegos de azar y de haber evolucionado para constituirse luego en la base teórica del método estadístico, la Teoría de Probabilidades se convertiría en dos siglos en una de las bases esenciales de la ciencia actual.

Es totalmente imposible resumir en esta lección los avances impresionantes de la Matemática en el siglo XX, basta recordar que su progresión ha sido inmensa; aparecen nuevas teorías: Topología, Análisis Funcional y sobre todo el Análisis Numérico, ciencia esta última que ha impactado de forma considerable en la entraña misma de la sociedad.

Pero lo importante para nosotros es que hasta fechas muy recientes, históricamente hablando, no es posible considerar la figura de ningún español que haya destacado internacionalmente en la ciencia abstracta.

EL SIGLO XIX Y PRINCIPIOS DEL XX EN ESPAÑA

Los graves acontecimientos políticos que ocuparon el siglo XIX no constituían ciertamente un marco adecuado para ningún progreso científico. En el último tercio de aquel siglo una generación de hombres entusiastas logró efectuar una renovación parcial de nuestra Matemática.

Por ejemplo Don José Echegaray, hombre polifacético, pues aparte de matemático fue director del Banco de España y Premio Nobel de Literatura, importó la Geometría de Chasles, el Cálculo de Variaciones, la teoría de los determinantes (¡que llevaba más de cincuenta años circulando por el mundo!). Y más tarde la teoría de Galois y las funciones elípticas y abelianas.

Rey Heredia publica en 1865 su teoría transcendental de las cantidades imaginarias. García Galdeano expuso en innumerables tratados diversas cuestiones, fundó la primera revista dedicada exclusivamente a las Matemáticas que llevó por título *El progreso matemático*, de vida efímera, y en la que colaboraron algunos extranjeros. Archilla y Clariana introducen en sus cursos universitarios los rudimentos de la Teoría de Funciones de variable compleja de Cauchy y Weierstrass; Torroja, el famoso arquitecto y simultáneamente matemático, autor entre otras obras de arquitectura de la gran tribuna voladiza del hipódromo de la Zarzuela en Madrid, introduce en España la Geometría de Von Staudt y educa en ella a varias generaciones de discípulos suyos, entre los que descuella Don José Álvarez Ude, posteriormente catedrático de Geometría Descriptiva en Madrid.

Pero el denominador común de todos estos hombres, alguno de ellos de gran formación, es que representaron en el panorama mundial de la Matemática de la época, ciertamente gloriosa, el papel de figuras de orden muy inferior al de los grandes maestros franceses y alemanes contemporáneos suyos.

De esta forma creo que queda representado fielmente el estado de la Matemática española en los comienzos del siglo XX. Nuestro país, que en algunas ramas de la cultura había representado un papel brillante y a veces en la cúspide mundial, en el aspecto científico y sobre todo en el matemático, exceptuando la

Edad Media, en la cual los musulmanes españoles habían efectuado el importantísimo papel de transmisores del Algebra, no había aportado absolutamente nada.

Quizás, respecto a esta cuestión, el hombre que mejor definió la situación fue el poeta vallisoletano Don Gaspar Núñez de Arce, que en su discurso de ingreso en la Academia Española el 21 de mayo de 1876 manifiesta:

«*Sujeto por innumerables trabas, nuestro pensamiento iba lentamente apocándose bajo la sombría, suspicaz e implacable intolerancia religiosa*».

Don Vicente Barrientos hizo una rápida valoración de nuestra cultura en la revista *Contemporánea*, terminando su estudio con las siguientes frases:

«*Por doloroso que sea confesarlo, si en la historia literaria de Europa suponemos mucho, en la historia científica no somos nada, y esa historia puede escribirse cumplidamente sin que en ella figuren otros nombres españoles que los de los heroicos marinos que descubrieron las Américas y dieron por vez primera la vuelta al mundo. No tenemos un solo matemático, físico, ni naturalista que merezca colocarse al lado de las grandes figuras de la Ciencia*».

Quien me consta que realizó un tremendo esfuerzo para librar a la Matemática española del estado de postración en el que se encontraba a principios del siglo XX fue Don Julio Rey Pastor. Nacido en Logroño en 1888, cursó la licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Zaragoza, siendo allí alumno de D. Joel García Galdeano, e inmediatamente obtuvo una beca para ampliar estudios en Gotinga con el Profesor Felix Klein, una de las grandes figuras de la Matemática mundial de la época. En el ambiente de la ciudad alemana reinaba entonces como figura máxima el gran David Hilbert, rodeado de un grupo de matemáticos excepcionales que en aquellos momentos trabajaban con él y posteriormente fueron figuras consagradas mundialmente: Federico Riesz, Constantino Carathéodory, Ernesto Zermelo, etc.

No es difícil imaginar la impresión que aquel mundo matemático le produciría a Rey Pastor, al compararlo con el de su patria; por otra parte visitó también París, observando de cerca a los grandes matemáticos franceses del momento como eran Emilio Borel, Enrique Lebesgue, Santiago Hadamard, Enrique Poincaré y la brillante estela que dejaron ellos y sus discípulos. Basta decir que la tesis doctoral de Enrique Lebesgue, elaborada en 1902, sigue siendo un siglo después asignatura obligatoria en todas las licenciaturas en Matemáticas del mundo. Asimismo estuvo en Berlín donde florecían los discípulos de Weierstrass, entre ellos el inmortal Hermann Amandus Schwarz, y finalmente recaló en Florencia donde, bajo la dirección de Ulises Dini, resplandecieron un conjunto de espléndidos matemáticos: Fubini, Vitali, Tonelli, etc.

Por lo tanto no nos debe extrañar que de vuelta a España, habiendo obtenido la Cátedra de Análisis Matemático de la Universidad de Oviedo, durante el discurso inaugural del año 1912-1913 afirmara con frase rotunda «*La Matemática Española no existe*», por lo cual fue tachado de antipatriota.

En 1915 pasó a ocupar la cátedra de la misma materia en la Universidad de Madrid, aprovechando su estancia para fundar el laboratorio y seminario matemático de esta Universidad. Instituyó la Real Sociedad Matemática Española, y creó la *Revista Hispano-Americana*, la cual pese a las circunstancias por las que atravesó nuestro país sigue publicándose hoy.

Pero la mejor manera de comprender el espíritu de Rey Pastor es citar algunos trozos del discurso que pronunció, precisamente, en Valladolid, en el congreso de la Asociación para el progreso de las Ciencias en 1915. Allí entre otras cosas dice:

«La finalidad y el título de nuestra asociación convidan a tratar en estos discursos del progreso de las ciencias en sus relaciones con España. Pero ocurre preguntar: ¿Cuál es el objeto de esta asociación? ¿Es el progreso de España en las ciencias, o es el progreso de las ciencias en España? No tengáis esta cuestión por baladí, considerando indiferente un esclarecimiento. Firmemente creo que en tal retruécano está contenido el problema de la política pedagógica que convenga seguir a nuestro país. Enunciado de otro modo: ¿Podemos colaborar ya en la Ciencia universal, o debemos todavía limitarnos a asimilarla?...

Por su visión de este vital problema, pueden ser clasificados en dos grupos los matemáticos españoles:

1.º) Los hombres modernos, es decir, amantes del progreso, que se han dado cuenta más o menos aproximada de nuestra posición y desean vivamente su mejora.

2.º) Los hombres que niegan la necesidad de este progreso, algunos de los cuales no son modernos, por desconocer la cultura matemática europea; otros, a pesar de conocer algo de ella por viajes, noticias o lecturas; otros que no conocen, ni lo son ni lo serían aunque la conocieran.

Fácil es predecir la actitud del segundo grupo al oír pronunciar esta fatídica palabra: REVISIÓN. Ausentes de la semi-oscuridad crepuscular, como los murciélagos, no toleran que un rayo de luz vaya a iluminar la penumbra de su cómoda posición, obligándoles quizás a salir de ella. Su estrategia defensiva dispone como armas de todos los tópicos conocidos. Nos hablarán de patriotismo (ellos que nada útil producen) creyendo, sin duda, que la patria se engrandece con los libros de texto y discursos vindicadores compuestos con inexactitudes diluidas en retórica. Nos hablarán de las «tradiciones nacionales hondamente arraigadas, que es insensato destruir, haciendo tabla rasa del pasado», como si nosotros tuviéramos tradición en este género de estudios, o pudiera tener influencia el factor geográfico en disciplina tan esencialmente internacional como es la Matemática. Nos hablan del optimismo, sin tener en cuenta que los hechos presentes son realidades objetivas que sólo cabe conocer o ignorar, pero no discutir, y que optimismo y pesimismo son posiciones que adopta el ánimo para conjeturar el porvenir.

Sólo nos dirigimos pues, a los hombres del grupo 1.º, a los de espíritu moderno, es decir, amantes del progreso, y por tanto, patriotas, pero por tanto patriotas con hechos y no con discursos...

Mientras son completamente ineficaces las organizaciones cuando las personas son inferiores a su época, basta un solo hombre para trazar nuevos rumbos, a pesar de todos los organismos constituidos (...).

La historia de nuestra cultura matemática no es la historia de las ideas, ni siquiera la historia de las Matemáticas, es la historia de los manuales (...).

Matemático se llama a quien de dos manuales sabe extraer un tercero. Y llega la desorientación al extremo de considerar como panteones inútiles a las colecciones de revistas, que son los viveros donde germina la Matemática naciente, depósito de la ciencia singular, móvil, rica en ideas y en problemas, cuando los panteones son precisamente los libros, porque en ellos se archiva la ciencia ya elaborada, y por tanto muerta (...).

¿Y es extraño que no averigüen y fructifiquen aquí las teorías, si traemos del extranjero el árbol, dejando allí sus órganos de nutrición y reproducción (...)? Plantas exóticas, traídas de lejanos países, que sólo viven raquítica vida de estufa, y mueren apenas falta el hombre que las cuidaba. Ni debemos esperar que progresen las ciencias afines, de base matemática, ni que prosperen las aplicaciones técnicas, sin la investigación abstracta.

Que la ciencia sólo es amorosa, y es pródiga, para los que la riegan con el sudor de su trabajo.»

Hasta aquí la opinión de Don Julio Rey Pastor, que como todas las cosas de este mundo es discutible, pero en mi opinión refleja muy exactamente la situación de la Matemática española en la primera mitad del siglo XX.

De todas formas hoy produce profunda amargura comparar el libro más querido de Rey Pastor (pero no el mejor), *Teoría de Funciones*, con los grandes tratados de la época, como son *Teoría de Funciones de Variable Real* del británico Eduardo Hobson, catedrático de Cambridge, o el monumental *Tratado de Análisis Matemático* del francés Eduardo Goursat, catedrático de París. De todas formas la capacidad matemática de D. Julio Rey Pastor quedará siempre patente en su *Análisis Algebraico*, obra que publicada en 1913, sigue siendo un libro plenamente actual.

Rey Pastor falleció en 1962, y debió intuir en sus últimos años que la alborada de la Matemática española iba a comenzar, pues en el prólogo del último de sus libros, en octubre de 1959, afirma:

«Algunos de los miembros de la familia hispano parlante han ascendido ya desde su pasiva posición de espectadores en que se vivió durante muchos siglos a la de actores de ese progreso, ingresando muy dignamente en la comunión internacional de la ciencia abstracta, que antaño se creía vedada a nuestra raza.

Inexorable anatema divino, con resignados creyentes egregios (Echegaray, Menéndez y Pelayo, Torroja, García de Galdeano, Ortega y Gasset), que los hechos han desmentido rotundamente en pocos años de trabajo creador intenso».

Al humilde firmante de estas líneas sólo se le ocurre pensar, qué hubiera dicho Don Julio Rey Pastor de haber vivido hoy.

De cualquier forma que se piense, es de justicia reconocer que todos los matemáticos españoles del momento presente somos deudores en gran parte del ingente patrimonio, de su voluntad de hierro y de su lucha sin descanso en pro de una Matemática española mejor. En nombre de todos ellos, ¡muchas gracias, Don Julio!


D. Ricardo San Juan Llosá.

Entre los discípulos de Rey Pastor, existe uno que brilló con luz propia y al que personalmente tengo un gran afecto, aunque apenas lo conocí, se trata de mi abuelo científico, el maestro de mi maestro, Don Ricardo San Juan Llosá.

Alumno predilecto de Rey Pastor, no hay más que recordar las palabras del discurso de Don Julio cuando San Juan fue investido como académico, al recordar el primer contacto entre ambos: «*¡Entre tantos alumnos, por fin un discípulo!*».

Don Ricardo, hombre brillantísimo y de gran profundidad, especialista en esa Matemática áspera y dura de las transformaciones integrales, de los núcleos monstruosos, de las series hipergeométricas, cuyo término general parece no tener fin... es decir, la Matemática apta para curtir al más fino analista, triunfó en este difícil terreno, logrando bastantes resultados definitivos, hasta tal punto que es el único español citado en la bibliografía de la imponente obra *Teoría de los Operadores Lineales* de Dunford y Schwartz.

Realizó a principio de los años cuarenta, por encargo del Profesor Julio Palacios, catedrático de Termología en la Universidad de Madrid en aquellos momentos, un profundo trabajo de investigación sobre Análisis Dimensional, es decir, la esencia misma de la filosofía y el tratamiento matemático de la medida de las magnitudes físicas, trabajo que fue publicado en la Revista de la Real Academia de Ciencias y del cual afirma la crítica internacional:

«*Precedida de una exposición de teorías algebraicas modernas a aplicar a la fundamentación del concepto de magnitud, con interesantes resultados matemáticos originales, y un detallado estudio de las ecuaciones funcionales clásicas de la teoría y de las funciones homogéneas generalizadas*».

Fundó en Madrid una pequeña escuela, cuyos principales representantes fueron en orden cronológico: Don Juan Augé, bondadosísima persona, ya fallecido, y catedrático durante muchos años de la Universidad de Barcelona; mi propio maestro Don Juan José Gutiérrez, que fue el único discípulo que recogió los temas en los que había trabajado Don Ricardo, para continuar su propia investigación; y finalmente esa auténtica leyenda de la Matemática española que es Don Manuel Valdivia, introductor en España de los Espacios Vectoriales Topológicos, creando en Valencia una potentísima escuela de Análisis Funcional hoy reconocida universalmente. Basta para afirmar esto el tener en cuenta que en los *Elementos de Matemáticas* de N. Bourbaki, para mí sin duda la obra fundamental sobre esta materia escrita durante el siglo XX, y que sin duda pasará a la historia como fiel reflejo de lo que fue la Matemática en este período, aparecen probados teoremas de Valdivia. En estos hombres, como afirmaba más arriba, está el germen que daría frutos espléndidos años después.

Sería totalmente injusto al hablar de los discípulos de Rey Pastor olvidar la figura de Don Pedro Puig Adam. Nacido en Barcelona el 12 de mayo de 1900, cursó la enseñanza media en el único instituto entonces existente en su Barcelona natal, acabándolo con premio extraordinario. Ingresó en la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona, simultaneando los dos primeros cursos de Ingeniería con los tres primeros años de la Facultad de Matemáticas. Termina la licenciatura también con premio extraordinario y pasa a Madrid para cursar el doctorado, allí conoce a Rey Pastor, de quien fue primero discípulo y luego amigo y colaborador. Con su tesis doctoral *Resolución de algunos problemas elementales en Mecánica Relativista Restringida*, obtiene de nuevo premio extraordinario. De este trabajo diría el Profesor Torroja Miret, en contestación al discurso de ingreso de Puig Adam en la Real Academia de Ciencias, lo siguiente:

«*Por cierto, el calificativo de elementales, aplicado a los problemas estudiados en este trabajo, y que nada, en verdad, exigía hacer constar, en su título, es una muestra, entre tantas, de aquella cualidad que he señalado en nuestro nuevo compañero y que tan simpático me lo hizo cuando estudiaba: su innata modestia*».

Atraído fuertemente por la docencia, obtuvo tras dura oposición la cátedra de Matemáticas en el instituto San Isidro de Madrid, concluyendo al mismo tiempo sus estudios de Ingeniería Industrial, de cuya escuela fue posteriormente Catedrático. Fue un hombre de vocación doble, por una parte un decidido entusiasta de la docencia, y por otra parte un buen investigador en Matemática Aplicada (recordaré, por ejemplo, un magnífico trabajo *Sobre la estabilidad del movimiento de las palas del autogiro*). Asimismo escribió en 1947 y 1951 sus conocidos *libros Geometría Métrica* y *Ecuaciones Diferenciales*. Pero nada mejor para conocer al Profesor Puig Adam que extraer algunas consideraciones suyas del prólogo de la última obra citada; en ese lugar dice Don Pedro:

«*En el incesante tráfico de abstracciones y generalizaciones que constituyen el desarrollo y la evolución de la Matemática, es difícil pronosticar cuáles serán las fronteras del actual "formalismo" que, iniciado en el movimiento axiomático de comienzos del siglo, ha desembocado en las bellísimas síntesis del Álgebra moderna y del Análisis abstracto: ahora bien, no cabe duda que la escuela formalista cultiva, con intensidad inigualada en la historia de la Matemática, el sentido penetrante de lo esencial, pero no de lo esencial metafísico, sino de lo esencial pragmático, buscando las leyes y las estructuras que relacionan los atributos de los conceptos y unificando los reinados conceptuales por la identidad de su «legislación». Este nuevo modo de pensar abstracto ha tenido su natural repercusión en el enfoque de los problemas concretos y al buscar asimismo en ellos los esquemas "legales" esenciales surgen analogías inesperadas que sugieren soluciones por isomorfismo, es decir, por reducción o transplante de un ámbito conceptual a otro de idéntica estructura "legal", pero de intuición más fácil o de recursos técnicos* *más conocidos. La transformación de Laplace es el ejemplo técnico más sencillo y fecundo que cabe mencionarse hoy día en este orden de ideas, y, para no citar más que una de sus múltiples aplicaciones, recordemos la sorprendente sencillez con que se trata hoy la estabilidad de un servomecanismo, reduciéndolo a la inocente tarea de averiguar si un punto del plano está dentro o fuera de un determinado recinto, con lo que, de paso, se evidencia el carácter esencialmente topológico de tales cuestiones de estabilidad.*

La economía y hallazgo de las soluciones aludidas, así como la revalorización de los recursos modernos del cálculo automático, han hecho posible encontrar soluciones tenidas hasta ahora por impracticables y permiten augurar cambios profundos en el contenido y carácter de los libros futuros de Matemática aplicada. Acaso no alcance a verlos el autor de esta modestísima obra, pero lo cierto es que al contemplar a mi humilde hija, nacida en momentos de revolución tan vertiginosa de ideas y métodos, presiento la rapidez de su envejecimiento. Si no alcanzara a renovarla le alienta la esperanza de que no falte entre los lectores presentes o futuros de ella quienes se encarguen de hacerlo cuando caduque definitivamente. Renovarse es vivir, y cada generación tiene el deber de mejorar el esfuerzo de los precedentes. Los nombres que el tiempo sepulte en el olvido sólo reviven en el germinar de nuevas semillas y este es el mejor y acaso el único homenaje que esperan.»

No se puede dar una lección mejor de claridad científica unida a una humildad maravillosa. Don Pedro Puig Adam falleció prematuramente en Madrid a la edad de sesenta años.

Otra figura estelar de la época que estamos comentando y especialmente querida por mí es la de Don Norberto Cuesta Dutari, por ser castellano-leonés y por producir un tipo de Matemática muy curiosa y a la vez de gran profundidad, y que voy a comentar rápidamente.

Don Norberto nació en Salamanca en 1907 y falleció en la misma ciudad en 1989. Hombre de cultura poco común, y admirador ferviente de los grandes escritores Francisco Quevedo y Baltasar Gracián, cursó el bachillerato en el colegio de los jesuitas en Tudela de Navarra, y él mismo relata en el último capítulo de su libro *La sinfonía del infinito y ya en el paraíso de Euler* la profunda impresión que le produjo en el curso 1919-1920 el descubrimiento del conocimiento racional, al entender los dos teoremas en los que se funda el cálculo de la raíz cuadrada. Estas demostraciones, que le hicieron experimentar la luminosidad de la evidencia, ya que podía saber algo con certeza absoluta, fueron, según cuenta él mismo, un descubrimiento íntimo, luminoso y esperanzador.

Cursó en primer lugar desde 1925 a 1929 en Salamanca la licenciatura en Ciencias Químicas y en tres cursos más realizados en Zaragoza la licenciatura en Ciencias Exactas (tal como se denominaba nuestra licenciatura entonces). Posteriormente marchó a Madrid donde, según afirmación propia, tuvo ocasión de oír las magníficas lecciones de Rey Pastor, y encontró dos compañeros estimulantes, el Profesor Sixto Ríos que fundaría posteriormente la gran escuela de la

Estadística española, y Don Luis Santaló, excelente matemático catalán que fue durante muchos años profesor de la Universidad de Buenos Aires.

En palabras del propio Don Norberto: «*En 1935, con ocasión de mis primeras oposiciones a Instituto, pude escuchar las lecciones del señor Barinaga (1890-1965). Explicaba el libro de Kamke "Diferencial Sleichungen reeller Funktionen". Por su rigor, sobriedad, orden y perfección estética, estimo estas lecciones como las mejores que jamás he oído. ¡Da grima pensar que el sectarismo cerrado y miope del ministro propagandista Ibáñez Martín privara a la Universidad de un maestro tan fuera de serie!*».

El año 1940 obtuvo la cátedra de Matemáticas del instituto de Ávila, pasando en 1950 al instituto Fray Luis de León de Salamanca; posteriormente obtuvo en 1958 la Cátedra de Análisis Matemático de la Universidad de Salamanca, en la que permaneció hasta su jubilación.

La materia que permanecerá siempre ligada al Profesor Cuesta, como autor y como investigador y en la que alcanzó fama internacional, es la relacionada con la noción de infinito introducida por Cantor y la aritmética con los números cardinales y ordinales transfinitos. Lo esencial de su labor en este terreno está contenido en su magnífica obra *La Matemática del Orden*, afortunadamente reeditada por la Universidad de Salamanca en 1994. Esta obra es equiparable en todos los conceptos a la del gran matemático polaco Wroclaw Sierpinski, *Números Cardinales y Ordinales*, considerada universalmente como la obra más completa de transfinitos que se haya escrito nunca. ¡Y todo esto realizado por un único hombre en la tremenda soledad del Instituto de Ávila!


D. Norberto Cuesta Dutari.

Son enormemente interesantes para nuestro objetivo las siguientes líneas del prólogo de *La Matemática del Orden*:

«*Gran osadía fue, sin duda, emprender esta obra: lo dificultoso del asunto, el absoluto aislamiento del autor, obligado a un monólogo sostenido, circunstancias esas hartas para juzgar temerario mi empeño. El autor satisfácese si su obra, con todos sus defectos, sirviera para que alguno de sus lectores, a quien el diálogo no es negado, y con medios más copiosos, nos diese en días no lejanos la construcción perfecta*».

Pero, siendo Don Norberto un auténtico modelo de trabajo vocacional en la soledad, no fue el único. Un pequeño grupo de Catedráticos de Instituto, desde la incomunicación más absoluta, lograron producir Matemáticas de un gran nivel, y yo simplemente me voy a limitar a poner unos pocos ejemplos que conozco personalmente: el de Don Juan Ochoa, destinado sucesivamente en Calatayud, Albacete y Segovia; asimismo el de Don Laureano Pérez-Cacho en Córdoba, y el de mi antiguo profesor Don Eduardo García-Rodeja en Lugo, posteriormente Catedrático de la Universidad de Santiago y al que le debo mucho en mi formación. Aportaron trabajos muy estimables, algunos de talla internacional, en esa durísima materia que es la Teoría de Números, y deberíamos pensar cuánta tenacidad, y cuánto esfuerzo y qué vocación tan enorme tendrían aquellos hombres para perseverar en el empeño y, dejándose llevar por la ilusión, proseguir en la lucha, alcanzando o no las metas propuestas, pues un hombre es lo que es no por lo que hace, sino por lo que intenta.

No quisiera concluir estas líneas dedicadas a los predecesores sin detenerme en la figura de Don Ramón María Aller Ulloa, prodigioso astrónomo y que en el año 1960 junto con el eminente médico D. Gregorio Marañón formaba el diminuto y selecto grupo de los catedráticos extraordinarios en España.

Bondadosísimo sacerdote, hombre humildísimo y sabio ejemplar, yo tuve la enorme fortuna de ser su alumno cuando él se encontraba en el ocaso de su vida. Fundó en su ciudad natal de Lalín (Pontevedra) un minúsculo observatorio, el cual convenientemente ampliado fue trasladado a Santiago, siendo el origen de la licenciatura de Matemáticas en esa Universidad.

Quizás sea el único científico español que tuvo una estatua en vida; dirigió varias tesis doctorales a profesores extranjeros, caso insólito en aquella época pues, dejando aparte el caso del eminente histólogo y premio Nobel de Medicina Don Santiago Ramón y Cajal, no se había dado nunca en la Ciencia española. Tuvo un gran prestigio internacional, hasta el punto de llevar su nombre uno de los cráteres de la Luna.

Su labor científica quedó concretada en la publicación de numerosos artículos sobre su especialidad, invención de aparatos cuya construcción logró por métodos increíbles, y finalmente un libro titulado «*Introducción a la astronomía*», que contiene mucho más de lo que su modesto título sugiere. La sección de Santiago, que pudo contar desde el mismo momento de su fundación con Don Ramón entre su cuadro de profesores, pudo así disponer de un auténtico lujo.

En este punto sería totalmente injusto olvidar la figura de D. Enrique Vidal Abascal, fundador y promotor de la sección de Matemáticas de la Universidad Compostelana, discípulo de D. Ramón y hombre de gran inquietud intelectual.

ÉPOCA ACTUAL

La situación de la Matemática española era, en torno a 1960, como sigue: Tres secciones clásicas de Matemáticas (Madrid, Barcelona y Zaragoza), que funcionaban desde el siglo XIX y constituían además los únicos lugares de España donde se impartía la licenciatura en Ciencia Físicas.

En las restantes nueve Universidades existentes en el país: Santiago, Oviedo, Valladolid, Salamanca, Valencia, Murcia, Granada, Sevilla y La Laguna; solamente existía una cátedra de Matemáticas, llamadas entonces especiales y dedicadas a la enseñanza de los futuros químicos.

Las Escuelas Técnicas Superiores no se integran en la Universidad hasta el año 1957.

La vida transcurría en los años cincuenta tranquila y placentera en las nueve Universidades citadas en segundo lugar, donde únicamente un pequeño grupo de estudiantes para los que la Matemática representaba solamente una ciencia auxiliar para sus intereses, la tomaban como una asignatura secundaria.

Pero algo iba a cambiar perturbando este sosiego. En 1957 apareció una ley en la que quedaban suprimidos los «terribles» exámenes de ingreso en las Escuelas Técnicas Superiores, incluyéndolas en la Universidad, y dando unos nuevos planes de estudio para ellas, en virtud de los cuales se creaba un curso llamado selectivo, que debía ser impartido por las Facultades de Ciencias y por las Escuelas. Dado que éstas eran pocas en número y la cantidad de candidatos era enorme, una verdadera multitud de estudiantes recaló en las Universidades provincianas para cursar el selectivo, haciendo inviable dar una enseñanza digna a todos ellos, pues los locales no estaban preparados, el profesorado era muy escaso, y los medios en general minúsculos. Las Facultades de Ciencias quedaron así desbordadas, multiplicando como mínimo por cinco el número de alumnos.

Simultáneamente la situación del profesorado no era buena en aquella época. El único funcionario docente estable en la Universidad era el catedrático, el resto del profesorado, que gravitaba alrededor del mismo, eran los profesores adjuntos y los profesores ayudantes.

Es curioso comentar su situación profesional y voy a hacerlo rápidamente.

Para ser profesor adjunto en aquella época se debía realizar un examen local, es decir, en la propia Universidad, lo cual daba derecho al candidato a ocupar la plaza durante cuatro años, renovable por otros cuatro si en el primer período se lograba realizar la tesis doctoral, y en el mejor de los casos al concluir los ocho años se volvía a empezar. Las obligaciones de tales profesores no estaban demasiado concretadas; dependían esencialmente del catedrático de la asignatura y oscilaban entre no hacer absolutamente nada y lo opuesto, o sea, tener que dar todas las clases. Por otra parte la retribución era muy magra y, salvo en el caso de las carreras profesionales (Medicina, Derecho, etc.) con las que se podía vivir cómodamente gracias a empleos conseguidos fuera de la Universidad, la subsistencia era poco menos que milagrosa. En cuanto al profesor ayudante, la retribución rozaba el ridículo, y la renovación del puesto era anual.

En lo que se refiere a las Matemáticas, estos cargos normalmente estaban cubiertos por catedráticos de instituto, o por algún recién licenciado mientras preparaba oposiciones, o por profesionales de otras materias relacionadas con las Matemáticas; por ejemplo, mi propio maestro, además de matemático, era meteorólogo.

Afortunadamente la ley General de Educación, promulgada en 1970 por el ministro José Luis Villar Palasí, vino a paliar esta situación, creando la figura estable del llamado entonces Profesor Adjunto de Universidad (hoy Profesor Titular), lo que supuso un alivio para muchos espléndidos profesionales, y la reparación de una injusticia histórica.

Para el desarrollo de la Universidad, esta fue una medida muy acertada, puesto que contribuyó en gran manera a fomentar la creación de equipos de investigación estables en un mismo lugar, evitando aquello del «monólogo sostenido», de lo que se lamentaba con muchísima razón el Profesor Cuesta.

Lo indicado anteriormente, y teniendo también en cuenta el desarrollo de España en la época de los sesenta, influyó para la creación de algunas secciones nuevas en las Universidades clásicas españolas.

D. Manuel Valdivia Ureña.

En lo que nos ocupa, se instalaron secciones de Ciencias Físicas en las Universidades de Valencia, Sevilla, Valladolid,... Esto unido al aumento del nivel de vida y, por consiguiente, a una mayor demanda de puestos docentes en la Universidad, hicieron inevitable la aparición de un segundo Catedrático de Matemáticas. Por ejemplo Don Manuel Valdivia en Valencia, Don Rafael Mallol en Salamanca, Don Juan José Gutiérrez Suárez en Valladolid.

De todas formas, la ignorancia sobre nuestra licenciatura en aquel tiempo era enorme. El caso que voy a referir es muy significativo por tratarse de una persona de amplia y profundísima cultura. Me refiero a Don José Carreres, catedrático jubilado de Anatomía en nuestra Universidad, con el que me ha unido y me sigue uniendo una estrechísima amistad que dura ya veinte años; pues bien, en algunas (como él las denominaba) «charlas filosóficas intranscendentes, para ir por casa», me comentó repetidas veces que al concluir los estudios de bachillerato en su Valencia natal, ignoraba que existiera una licenciatura dedicada exclusivamente al estudio de la Matemática; decía jocosamente: «*En mi juventud aquellos a los que se les daban bien las Matemáticas estudiaban para ingenieros*».

Después de esto, habituado a conversaciones profundas sobre algunos temas de Matemáticas con mis compañeros y conmigo, se interesó profundamente en el tema, llegando a tener bastante preparación, estudiando por su cuenta, de esa rama profundísima y enormemente complicada donde rozan la Filosofía y la Matemática, la Lógica Matemática, alcanzando amplios conocimientos sobre una cuestión tan compleja como es el Teorema de incompletitud de Gödel.

También me impresionó profundamente una clase práctica en la vida impartida por Don Alfonso Candau, como sabemos todos antiguo rector de nuestra Universidad, y que me resisto a dejar de relatar. Estábamos conjuntamente con otros compañeros en una tarde lluviosa de noviembre, creo recordar que en el año 1978, en un establecimiento público y dialogábamos en aquel momento acerca de la pureza de las definiciones, cuestión que no se respetaba en el lenguaje coloquial normal. Al ver nuestra expresión de duda, llamó a un empleado del establecimiento y con la campechanía y la bondad habitual en él, le preguntó si tenía claro lo que era un montón de granos de trigo.

- *Claro, Don Alfonso* –le contestó el empleado.
- *Supongo que estará usted de acuerdo* –prosiguió Don Alfonso– *que si de un montón de granos de trigo elimina un grano, sigue teniendo un montón de granos de trigo.*
- *Efectivamente* –respondió el empleado.
- *Pues bien, comencemos: si de un montón de granos de trigo, extraigo un grano de trigo, sigo teniendo un montón de granos de trigo y si así prosigo, llegará un momento que tendré tres granos de trigo, lo cual estará de acuerdo que no es un montón de granos de trigo.*

La cara de sorpresa del empleado fue tremenda y sólo atinó a responder:

- *Don Alfonso, ¡qué maravilloso es el saber!*

Es la mejor clase práctica de Matemáticas que a ese nivel he visto dar en mi vida.

En la creación de las secciones de Matemáticas influía de manera decisiva, por lo menos al principio, la materia propia del catedrático que estuviera presente en esos momentos.


D. Eduardo García-Rodeja.

En Santiago, por ejemplo, la presencia de un excelente algebrista y geómetra como era el Profesor García-Rodeja decantó muchas vocaciones hacia estas materias.

D. Miguel Martín Díaz.

Aquí en Valladolid la presencia del Profesor Gutiérrez Suárez logró por el contrario que la materia predominante fuera el Análisis Matemático.

Sólo la enorme fortuna de poder contar inmediatamente aquí con un hombre de la capacidad y la brillantez del Catedrático de Estadística Don Miguel Martín Díaz evitó esta situación que desde ningún punto de vista es deseable.

Otra cuestión que no me gustaría dejar de lado es el problema vocacional, tan decisivo y tan importante en la vida de una persona; es enormemente difícil, y lo ha sido siempre, que una licenciatura como la de Matemáticas responda en la realidad a la idea previa que un alumno al concluir el bachillerato tiene sobre la misma. Al contrario que en otras profesiones como pueden ser la Medicina, el Derecho, la Farmacia, etc., donde las personas que comienzan tienen una idea bastante aproximada acerca de cómo puede ser la licenciatura y en qué va a consistir su vida profesional, en las Matemáticas no es así.

La Matemática, en contra de la opinión sustentada por una parte de la sociedad, no es una ciencia complicada. Lo que es cierto es que se trata de una ciencia lenta, y que hay que ser extraordinariamente paciente si se quiere extraer el fruto apetecido; los conceptos son tan enormemente delicados que en muchos casos requieren una meditación profunda, ya que en su día fueron elaborados por mentes geniales y requieren un tiempo de sedimentación.

Por ejemplo, hasta que Agustín Cauchy aritmetizó el Análisis, ésta era una ciencia vaga y diluida en mil aspectos que distaban mucho de estar claros. Al establecer el rigor, Cauchy logró así explicar muchas de las paradojas que se plantearon los griegos, como la famosa de Zenón, relativa a Aquiles y la tortuga.

Como afirma el Profesor Ríos cuando expone el concepto de límite en su obra *Complementos de Matemáticas*:

«*Es el auténtico paso de la Aritmética al Análisis y no es extraño que el alumno encuentre serias dificultades en su asimilación, pero es fundamental para cualquier comprensión posterior, ya que cuando este concepto se tiene claro, todas las grandes ideas del Cálculo Infinitesimal como son: Funciones continuas, derivadas y diferenciales, integrales, etc., están ya al alcance de la mano. Por esto la paciencia y el rigor son tan importantes para un matemático*».

Esto es lo que la sociedad no comprende.

Muchas veces charlando con compañeros de otras profesiones y comentándoles que a veces estoy dos meses con un problema, la respuesta casi general es que ellos serían incapaces de hacerlo. Respecto a esto decir que hay un hecho expuesto repetidas veces por el genial matemático Enrique Poincaré en sus libros *La Ciencia y el Método, La Ciencia y la Hipótesis, El Valor de la Ciencia* y *Últimos Pensamientos*. Poincaré narra allí que ante un problema complicado existen tres fases: una primera de contacto con el problema, la cual normalmente no conduce a nada, salvo para que el aspirante a resolverlo se indigne; una segunda parte fundamental es el trabajo del subconsciente, que puede llevar más o menos tiempo, y una tercera fase, en la cual, tras volver a tantear el problema, la solución se presenta diáfana y clara. Yo mismo he experimentado estas tres fases a lo largo de mi vida profesional.

Por otro lado en la vocación de una persona influyen una gran cantidad de variables ajenas a ella (determinados profesores, libros, actitudes, etc.) que es muy difícil generalizar; cada individuo tiene una experiencia propia, y sólo al contemplar al final de la vida el trayecto seguido y reflexionar sobre él, se está en condiciones de ver que hechos concretos han influido de una manera determinante en la vida de cada cual. Si bien es cierto que yo podría referirme a mi caso particular, puesto que considero que no es este el lugar, voy a omitirlo.

De todas las formas creo que todo el mundo que ha impartido docencia estará de acuerdo en un hecho: ¡Enseñar es una de las mejores formas de aprender!

Para comprender el desarrollo de la Matemática española en el período que va desde 1960 hasta 2000 debemos dividirla en dos partes, una primera previa a la puesta en funcionamiento de la Ley de Reforma Universitaria en 1983 y una segunda que va desde esta época hasta fin de siglo.

La primera época 1960-1983 se puede dividir a su vez en dos: una a la que podríamos llamar «época de creación», que transcurre desde sus comienzos hasta aproximadamente 1975, seguida de una de «consolidación» desde 1975 hasta 1983.

A partir de la Ley de Reforma Universitaria el panorama cambia radicalmente y se puede hablar de un período de expansión sin precedentes en la Matemática española. Es a partir de entonces cuando la nueva generación de matemáticos españoles emprende la aventura de visitar los centros más prestigiosos del mundo, tanto universitarios (Harvard, París, Dundee...) como puramente investigadores (Instituto Isaac Newton en Cambridge, CNRS en París,...), y cuando no triunfando (cosa que sucedió en bastantes casos), haciendo un dignísimo papel. Todo esto conduciría a la espléndida realidad de hoy.

En el año 1964, las secciones de Ciencias Físicas creadas en algunas Universidades españolas estaban comenzando o se encontraban a medio camino en los estudios de licenciatura y, como he relatado más arriba, en la mayor parte de ellas, existía ya un segundo catedrático de Matemáticas. La personalidad de estos hombres vista desde la perspectiva actual era asombrosa, ellos querían que se crearan en sus respectivas Universidades los estudios de Matemáticas y, aunque la idea podría parecer una quimera, de lo que no hay duda es de que la fe, la obstinación y la pasión mueven montañas. Hoy parece totalmente utópico que sin consolidar unos estudios ya en funcionamiento se pretendiera comenzar otros nuevos, aunque fueran parientes muy próximos de los que se estaban realizando.

Si bien es cierto que en aquellos tiempos España había comenzado ya el despegue económico y que la creación de una sección de Matemáticas no era costosa (no requería grandes instalaciones y se podían aprovechar los edificios ya existentes, esto se hizo en muchos lugares, Valencia, Sevilla, Valladolid, Santiago...), los medios de profesorado eran limitadísimos, puesto que con el nivel medio de conocimientos que tenía un licenciado en Matemáticas de aquella época se estimaba que el tiempo necesario para formar un profesor universitario de Matemáticas, que pudiera tener responsabilidad propia, era un mínimo de diez años.

De todas formas, ¡qué tarea tan difícil es ser un gran profesor!

El mítico matemático francés Jean Dieudonné, uno de los más grandes de este siglo y que ha formado varias generaciones de matemáticos a través de sus libros, manifiesta en sus memorias que él se ponía nerviosísimo cuando explicaba delante de personas, y que prefería enseñar a través de libros. Lo mismo decía el gran matemático británico Hardy.

D. Antonio Valle Sánchez.

Aquí modestamente sí quiero recordar a mis propios profesores y por lo que yo presencié, hacer una mezcla con las cualidades que debe tener un matemático para ser un gran profesor.

Tal personaje ideal debería poseer: la palabra suave, tremendamente persuasiva y dar pausas al alumno para que medite el concepto como hacía D. José Martínez Salas, la intuición soberbia de D. Miguel Martín Díaz, la talla de auténtico orfebre de la pizarra de D. Eduardo García-Rodeja, la profundidad de D. Manuel Valdivia, la erudición monumental de D. Rafael Aguiló, el talento indiscutible para manejarse en ese mundo durísimo de las desigualdades de D. Juan José Gutiérrez Suárez, el entusiasmo para sus propios alumnos de D. Nacere Hayek. Y de los que conozco sólo a través de los libros, la claridad innata de D. Antonio Valle, la cultura profundísima de D. Norberto Cuesta, el trabajo paciente y minucioso de D. Pedro Puig Adam, y el saber enciclopédico de los grandes matemáticos contemporáneos franceses, Laurent Schwartz y Jean Dieudonné.

D. Nacere Hayek Kalil.

Sobre todo es admirable la capacidad de trabajo del Profesor Dieudonné, apenas entrevisto por mí en un viaje a París en 1979, el cual incorpora a su espléndida obra, *Fundamentos de Análisis Moderno* cerca de 5.000 problemas (con indicaciones para su resolución sumamente acertadas) aparte de haber redactado todos los problemas de todas las materias de ese tratado monumental que son los *Elementos de Matemáticas* de N. Bourbaki, emblemático pilar de la Matemática durante el siglo XX.

Y lo anterior se refiere solamente a las cualidades puramente técnicas, pero existen otras importantísimas para ser un gran profesor.

En primer lugar la humildad, porque por mucho que se sepa, ello será sólo una partícula insignificante en relación con lo que se ignora. La humildad y la modestia ennoblecen a una persona en vez de rebajarla.

En segundo lugar la honestidad y la honradez profesional en el aula son cualidades indispensables en un profesor, y esto también sirve para la enseñanza escrita a través de libros. Frases como: «un breve instante de reflexión» o «es inmediato que» a veces están plenamente justificadas, pero en otras ocasiones ocultan procesos sumamente tortuosos, ahogan el sentido crítico del alumno y le hacen dudar (por ejemplo, recuérdese cómo se explicaba el logaritmo en el bachillerato), dando por supuesto que el alumno comprende perfectamente lo que significan expresiones como $10^{\sqrt{2}}$.

Finalmente la bondad, que el alumno no sea un mero número en una lista, sino una persona que tiene sus propios problemas y sus preocupaciones. Y cuando ocasionalmente se le interrogue sobre alguna cuestión de la lección y la respuesta no sea la acertada, el profesor no se deje llevar por el enfado o la ironía; al fin y al cabo basta con que el docente recuerde no solamente su propia situación cuando era alumno, sino que también los grandes maestros (Riemann, Cauchy, etc.) cometieron errores.

Creo que deben bastar estas breves reflexiones para comprender la tarea titánica que estos hombres tenían por delante, porque el otorgamiento de la concesión para montar una sección no es más que papel mojado si no se cuenta con un profesorado competente para llevarlo a cabo, pensar de otra forma sería locura.

En resumen, la labor que deberían realizar estos hombres consistía en lo siguiente:

a) Un aumento tremendo del trabajo docente, ya que aparte de las asignaturas que deberían impartir en la sección de Ciencias Físicas se encontraban con un número mayor de ellas en la sección de Ciencias Matemáticas.
b) Formar simultáneamente al profesorado, el cual quería obtener de la forma más rápida posible el título de Doctor, imprescindible en esa época como en todas para atisbar la posibilidad de proseguir trabajando de una forma estable en la Universidad.
c) Elaborar los programas de todas las asignaturas de la licenciatura, de alguna de las cuales, por la propia exigencia de su especialización, no tenían más que un ligero recuerdo.
d) Hacer el papel de moderadores en los inevitables celos que se producían entre los jóvenes profesores del Departamento, y que a veces conducían a querellas internas de difícil solución.
e) Procurar que, pese a todo, las enseñanzas de la sección se dieran de una forma digna y coherente.

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

A partir de este momento voy a relatar lo que sucedió únicamente en la Universidad de Valladolid y ello por dos razones: La primera es que fui un espectador privilegiado y pude observar todo lo que sucedió aquí.

En segundo lugar, porque conversaciones mantenidas con compañeros de otras Universidades, pertenecientes a mi generación, como son el Profesor López Pellicer de la Universidad de Valencia, el Profesor Cufí Sobregrau de la Universidad Autónoma de Barcelona, conjuntamente con mi propia experiencia personal en Santiago, me llevan a pensar (con todos los riesgos que conlleva la extrapolación) que en todas las Universidades semejantes a la nuestra las cosas sucedían, en lo esencial, de la misma manera.

Cuando me incorporé a la Universidad de Valladolid en los comienzos del curso 1966-1967, existía un profundo convencimiento por parte del Profesor Gutiérrez Suárez, apoyado en todo momento por el Profesor Martínez Salas, de la necesidad de crear una sección de Matemáticas. Don Juan José puso inmediatamente esta idea en conocimiento del pequeño grupo que llegamos de Santiago (formado únicamente por cuatro personas), y nos preguntó si estábamos dispuestos a colaborar en la puesta en marcha de la sección; inmediatamente, con la vehemencia propia de la juventud, contestamos que sí, y yo puedo decir a título personal que es una de las decisiones más acertadas que he tomado en mi vida.

D. Juan José Gutiérrez Suárez.

Se comenzaron entonces las gestiones pertinentes, era en aquel tiempo Rector de esta Universidad el historiador Don Luis Suárez Fernández y Decano de la Facultad de Ciencias Don Rafael Gallego Andreu, fallecido prematuramente. Hubo que rellenar numerosos impresos, hacer un plan de estudios e innumerables gestiones en Madrid, y al fin en un Consejo de Ministros celebrado a principios de diciembre de 1967, siendo Ministro de Educación Don José Lora Tamayo, se otorga la anhelada concesión de la sección de Matemáticas. Se piensa que ésta funcione en su segundo curso (ya que el primero era el llamado curso selectivo, que se venía impartiendo con regularidad en la Facultad) en octubre de 1968. Este es el momento donde se debe de programar qué profesores explicarán las distintas asignaturas.

Este primer plan de estudios al que seguirán otros merece la pena recordarse:

SEGUNDO CURSO

Análisis Matemático I (Funciones de Variable Real)
Geometría Analítica
Fundamentos de Álgebra y Topología
Física Teórica I

TERCER CURSO

Análisis Matemático II (Ecuaciones Diferenciales)
Geometría Proyectiva
Estadística Matemática y Cálculo de Probabilidades
Física Teórica II

CUARTO CURSO

Análisis Matemático III (Funciones de Variable Compleja)
Álgebra
Geometría Diferencial
Mecánica Teórica

QUINTO CURSO

Análisis Matemático IV (Teoría de la Medida y Análisis Funcional)
Topología
Ecuaciones Funcionales
Variedades Diferenciables.

También figuraba a partir de cuarto curso una especialidad de Estadística, que de momento no se pensaba que funcionara, aunque la llegada posterior del Profesor D. Miguel Martín en 1970 hizo posible su puesta en marcha.

El programa que acabamos de exponer era muy semejante al que se impartía entonces en todas las Universidades españolas donde se cursaba en aquellos momentos la titulación en Matemáticas. Solamente en las tres ya citadas (Madrid, Barcelona y Zaragoza), donde la licenciatura llevaba bastante tiempo establecida, se podían cursar otras asignaturas optativas, como por ejemplo Teoría de Números, y en particular en todas ellas y en la de Santiago (esta última por las causas que ya comenté al hablar de la figura de D. Ramón Aller) tenían una materia que se impartía en segundo curso, Astronomía General, disciplina que, tal como se enfocaba entonces, el manejo de los ordenadores ha vuelto obsoleta.

Para poner en marcha el plan de estudios, se debía tener en cuenta fundamentalmente lo siguiente: el Profesor Martínez Salas debía dedicarse prioritariamente a impartir el curso selectivo, para lo cual era un maestro incomparable. Esto implicaba que D. Juan José Gutiérrez Suárez, junto con un pequeño grupo de muchachos con toda la ilusión del mundo en el alma, pero con unas lagunas tremendas en su formación, debía hacerse cargo de la docencia de los cursos superiores. ¡Y con aquel escasísimo bagaje se debería echar a andar una licenciatura completa!

Si bien es cierto que estaban dotadas una cátedra de Estadística y dos plazas de profesor agregado, una de Geometría Diferencial y otra de Álgebra, la única que se cubrió de forma efectiva fue la cátedra de Estadística, mientras por diversas razones las dos plazas de profesor agregado quedaron vacantes.

El plan de estudios anteriormente citado sufrió varias transformaciones al transcurrir los años; en primer lugar, la supresión del curso selectivo en 1973 obligó a la implantación de un primer año de Matemáticas para sustituirlo. Así desaparecieron las clásicas materias de Álgebra Lineal y Cálculo Infinitesimal, siendo sustituidas por un curso de Análisis Matemático, otro de Álgebra y un tercero de Geometría. Posteriormente en 1976, 1995 y 1999 se llevarían a cabo otras reformas, hasta llegar al plan de estudios hoy vigente.

Si se examina el programa expuesto más arriba, sorprenderá sin duda que no aparezca una materia tan fundamental como el Análisis Numérico, disciplina obligada hoy en todos los programas del mundo, pero no olvidemos que el citado plan se elaboró en 1968, y hasta 1970 no contó la Facultad de Ciencias con el primer ordenador, que fue instalado en el Departamento de Física Industrial, del cual era director D. Vicente Aleixandre.

Por fin la mañana del siete de octubre de 1968 emprenderíamos la delicadísima aventura consistente en cultivar esa difícil flor que es la mente de un matemático. El instante mágico había llegado, pero quedaba abierto el gran interrogante: ¿seríamos capaces de llegar al final con coherencia y sobre todo con dignidad?

Una de las cuestiones que de entrada extrañó mucho a los alumnos fue la introducción de un cierto tipo de problemas, a los que ellos denominaron inmediatamente como «problemas teóricos», y que se apartaban radicalmente de las cuestiones que se les habían propuesto hasta el momento.

Sobre este tipo de problemas, que a nivel de licenciatura por aquel entonces sólo se proponían en la Universidad de Barcelona, debo manifestar lo siguiente:

El gran matemático francés Jacques Hadamard, en su obra *Psicología de la invención en el campo matemático*, distingue tres clases de problemas matemáticos que son los siguientes:

a) Los problemas cuya solución no exija otra cosa que la aplicación correcta de cierto procedimiento rutinario.
b) Los problemas cuya solución pida que se apliquen inteligentemente determinados métodos más o menos corrientes.
c) Los problemas para los cuales los métodos corrientes no proporcionan solución alguna.

Ahora bien, para los de la clase a) sobra toda heurística; la única dificultad que presentan es dominar la teoría correspondiente y poner la atención necesaria para no confundirse en los cálculos.

Para los de la clase b) el arte de invención necesario se reduce al precepto de que se combinen inteligentemente los métodos disponibles.

En cuanto a los de la clase c) se encuentran más allá de lo que nos puedan decir los libros, y son problemas para matemáticos profesionales, que a veces tardan siglos en resolverse (recordemos el caso del gran teorema de Fermat) o todavía siguen abiertos como la prueba de la conjetura de Goldbach (demostrar que todo número par es suma de dos números primos).

Como afirma el propio Hadamard en la obra citada, no hay duda de que en los casos de un matemático corriente hay que pasar un severo entrenamiento con problemas del tipo b) si se pretende algún día realizar –como hizo él mismo– problemas del tipo c). Por lo demás el propio Hadamard admite que salvo la diferencia de nivel y de grado, resolver un problema del tipo b) o del tipo c) implica un proceso psicológico de la misma naturaleza.

No es por tanto de extrañar que un estudiante, al no sentirse arropado por la confortable rutina que le proporcionan los problemas del tipo a), en algunos casos sienta desaliento y quizás desista. Pero si queremos formar matemáticos competentes se debe insistir forzosamente en la proposición de problemas del tipo b), aunque por supuesto, dando al alumno unas prácticas de la suficiente calidad para lograr que el trayecto sea lo menos amargo posible.

Así fueron pasando los años entre 1968 y 1972. La carga docente era cada vez mayor, hasta que por fin el 10 de julio de 1972 tuvimos los primeros licenciados en Matemáticas por nuestra Universidad; ya nada volvería a ser como antes.

No hay mejor manera para resumir la situación de la sección en aquellos tiempos que el verso de uno de mis poetas favoritos el mejicano Amado Nervo, el cual en el poema *Fides* de su libro *Elevación* manifiesta:

¡Mientras veas resquicios de esperanza,
no te rindas! La suerte
gusta de acumular los imposibles,
para vencerlos en conjunto, siempre,
con el fatal y misterioso golpe
de su maza de Hércules.

A partir de 1972, el hecho de poder contar con nuestros propios licenciados, conjuntamente con la incorporación de varios compañeros procedentes de otras universidades (fundamentalmente de la Universidad Complutense de Madrid), hizo posible que la carga docente que sufríamos se aliviara de forma ostensible. Entre esta fecha y 1983, se entra en la fase más arriba llamada de «consolidación». Durante este período nuestros primeros alumnos elaboran sus tesis doctorales y, cosa no muy corriente en aquella época, sobre todo en Universidades de provincia como la nuestra, algunos marchaban después de realizar su tesis a prestigiosos centros extranjeros.

En este punto debo de confesar el temor con que seguíamos desde España la evolución de estos jóvenes, ¿lograrían un triunfo, pasarían desapercibidos o causarían lástima debido a su formación? Pues bien, nuestra alegría y nuestro orgullo fue muy grande cuando comprobamos que se daba el primero de los casos citados, y que fueron capaces al regresar a España de fundar sus propias escuelas, algunas de ellas de resonancia internacional.

También fue enorme el éxito de nuestros alumnos en los concursos a los cuerpos docentes de Enseñanza Media, y hay que hacer notar que en aquellos tiempos las oposiciones a Cátedras de Instituto eran durísimas y requerían un nivel muy sólido de conocimientos y muchas horas de preparación.

La gran alegría final se obtiene cuando varios de nuestros jovencísimos titulados obtuvieron plazas docentes universitarias (algunas del máximo nivel), y ante rivales difíciles y que provenían de Universidades con más medios que la nuestra.

Ellos lograron dar el impulso definitivo que necesitaba la Matemática española, para salir de su larga frustración de siglos, y aquí medito un momento ¿Qué hubiera dicho D. Julio Rey Pastor (al que tanto debe la Matemática española actual) si hubiera contemplado este florecimiento inusitado acerca del cual sólo tenía vagas esperanzas?

Por otra parte nos queda la enorme satisfacción de que todo el esfuerzo anterior que he tratado de relatar torpemente en estas páginas, ha sido reconocido por nuestros alumnos en forma muy gratificante para nosotros. Aquí en Valladolid, sólo conozco dos personas que por sus cargos han hecho declaraciones a los medios de comunicación acerca de la calidad de la enseñanza que recibieron en su licenciatura.

El Profesor Sanz Serna entrevistado por el Profesor Sánchez Giralda en un reportaje para la *Gaceta Matemática*, cuando es interrogado por éste acerca de los recuerdos que guarda de su licenciatura afirma: «*Técnicamente la enseñanza era muy sólida*».

Asimismo el Profesor Campillo López, actual Decano de la Facultad de Ciencias, manifestaba el curso pasado en una entrevista que concedió a la prensa: «*A mí en los años setenta me enseñaron muy bien las Matemáticas*».

Finalmente el Profesor Juan Luis Vázquez, actual presidente de la Sociedad Española de Matemática Aplicada y máximo responsable a nivel nacional de la organización del *2000-Año Mundial de las Matemáticas*, afirma en un discurso celebrado para marcar los objetivos de este acontecimiento:

«*Poco a poco, sobre todo a partir de los años setenta, comienza por fin el despertar de España a lo que podríamos llamar "realidad matemática". Tras una década de esfuerzo ingente de una generación que aprendió en las fuentes originales, que enseñó en sus clases los textos más actuales, que organizó seminarios de investigación, y que viajó o mandó a sus jóvenes alumnos al extranjero, que empezó a publicar en revistas internacionales reconocidas y a participar en los grandes eventos, llegan a partir de los años ochenta los años dorados de la ciencia original, lo que se traduce en las mil facetas de la vida matemática auténtica y que reflejan (aunque no se resuman) en la palabra mítica, "publicación": las mejores revistas empiezan a recibir artículos de autores españoles, primero tímidamente, luego en cascada*».

Desafortunadamente esta época de oro parece amenazada seriamente, por dos razones que voy a expresar brevísimamente a continuación:

La primera de ellas hace referencia al entronque de la Universidad con la Enseñanza Media; el bajísimo nivel que actualmente tienen los estudios de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria en nuestro país, obviamente la socialización y la masificación en las aulas, lleva el riesgo (como así se ha producido) de una clara disminución de la calidad. No podemos seguir ignorando que el nivel alcanzado por nuestros actuales bachilleres, tanto en Humanidades como en Ciencias, es bastante inferior al de tiempos pasados.

Pero mejor que lo pueda decir yo, lo expresa mi querido amigo el Profesor López Pellicer, Catedrático de la Universidad Politécnica de Valencia, el cual cuando ingresó en la Real Academia de Ciencias en 1997 en su discurso manifestaba lo siguiente:

«*El haber sido catedrático de instituto entre 1968 y 1975 me permitió entablar amistad con maestros en el sentido más profundo de la palabra. En aquella época se dedicaba mucho tiempo en Enseñanza Media a la Matemática. En mi opinión considero erróneas las reducciones horarias que ha sufrido la Matemática en Bachillerato y en muchas carreras universitarias, que no son compensables con textos de gran calidad, de los que todos conocemos ejemplos. La Matemática requiere la formación de hábitos mentales, que conllevan tiempo. La falta de formación matemática repercute en otras ciencias, impidiendo llegar al fondo de lo que trans-*

miten sus mensajes. Pienso que sin formación no hay aprendizaje, ya que el saber presupone siempre un conocimiento sólido de las materias básicas».

Yo pienso honestamente que si este gravísimo problema no se soluciona, nuestro país habrá perdido una vez más la oportunidad (y en este caso partiendo de una situación de privilegio como la actual) de contar entre las naciones que aportan resultados básicos a esta ciencia y tener al mismo tiempo un nivel de conocimientos que tanto esfuerzo y dedicación ha costado adquirir.

La segunda razón que quiero comentar es:

En la mayor parte de las Universidades que imparten nuestra licenciatura, se viene observando en estos últimos años una evolución que puede concretarse en dos etapas:

a) La licenciatura en Matemáticas –hablando en términos generales, pues siempre hay excepciones– ha dejado de atraer a los mejores estudiantes del área científico-técnica, beneficiándose otros estudios más aplicados (Ingenierías, Arquitectura, Informática, etc.). Este problema no queda reducido únicamente a nuestro país, ya que es mundial y podría atribuirse al colosal impacto de las nuevas tecnologías.
b) En los últimos cuatro o cinco años, se ha entrado en una etapa más preocupante, el número de estudiantes de Matemáticas no deja de decrecer en todo el país, y una parte de las plazas que se ocupan no responden a la primera preferencia manifestada por los alumnos. Además, volviendo a lo que comentaba antes, una gran parte del alumnado carece de una buena formación previa.

En resumen: la demanda no deja de decrecer tanto en cantidad como en calidad, y algo habrá que hacer para frenar este retroceso y que la situación altamente satisfactoria a la que se logró llegar a fines de siglo, no sea flor de un día.

Por otra parte parece que este mismo proceso afecta a otras licenciaturas de Ciencias, por ejemplo la de Ciencias Físicas.

Finalmente, quisiera dedicar unas brevísimas palabras a los muchos compañeros ausentes y los pocos presentes de mi generación:

No os preocupéis, queridos compañeros. Para que la Matemática española sea hoy lo que es hubo que pagar un alto precio; una parte muy importante del mismo consistió en sacrificar, científicamente, a una generación que fue la nuestra, emparedada entre la enorme calidad de nuestros maestros y la brillantez inusual de nuestros alumnos. Hablando en términos medievales: fuimos buenos vasallos, teniendo la enorme fortuna de tener buenos señores, y si bien es cierto que una gran parte de nosotros no fue capaz de vencer reyes moros, sí engendramos quien los venciera.

APÉNDICE

A) Número de alumnos matriculados y licenciados por curso en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Valladolid

Curso	Matriculados	Licenciados
1971-1972		15
1972-1973		18
1973-1974		26
1974-1975		19
1975-1976		37
1976-1977		26
1977-1978		34
1978-1979	236	46
1979-1980	266	42
1980-1981	327	33
1981-1982	328	37
1982-1983	342	30
1983-1984	314	33
1984-1985	309	33
1985-1986	266	39
1986-1987	274	35
1987-1988	275	30
1988-1989	246	18
1989-1990	289	31
1990-1991	319	35
1991-1992	328	30
1992-1993		26
1993-1994	347	40
1994-1995	326	25
1995-1996	315	30
1996-1997	324	34
1997-1998	301	27
1998-1999	287	46
1999-2000	230	21
2000-2001	212	28
2001-2002	195	

No se dispone de datos oficiales en los casos en que la casilla aparece en blanco

Instantánea tomada con motivo de la celebración del XXV aniversario de la licenciatura de la primera promoción de Matemáticas de la Universidad de Valladolid.

En primera fila, de izquierda a derecha: D. Manuel Arrate Peña, D. Francisco Bellot Rosado, D. José Martínez Salas, D. Miguel Martín Díaz, D. Antonio Pérez Gómez, D. Juan José Gutiérrez Suárez, D. Santiago López González y D. Santiago Pérez-Cacho García.

B) Relación de Doctores en Matemáticas por la Universidad de Valladolid
(Datos no oficiales recabados por el autor)

Curso 1969-70: D. Antonio Pérez Gómez.

Curso 1971-72: D. Santiago López González, D. Manuel Ledesma Jimeno, D. Juan Pedrosa González, D. Manuel Arrate Peña.

Curso 1973-74: D. Ángel Primo Martínez.

Curso 1974-75: D.ª Purificación Hervás Burgos, D. Gonzalo Allo Ayala, D. Félix Francisco López Fernández-Asenjo.

Curso 1975-76: D. Fernando Sáiz Zaldo, D. José María García Lafuente.

Curso 1976-77: D.ª Francisca Blanco Martín, D. José María Gambí Fernández, D. Jesús María Sanz Serna.

Curso 1977-78: D.ª María Adela Sanz Aguado, D. Santiago Pérez-Cacho García, D. Antonio Campillo López.

Curso 1978-79: D. Carlos Gabriel Matrán Bea, D. Juan Antonio Cuesta Albertos, D. Luis Antonio Sarabia Peinador, D. César Palencia de Lara, D. Fernando Castañeda Bravo.

Curso 1979-80: D. Francisco Javier Gallego Pinilla, D. Juan García Laguna, D. Bonifacio Salvador González, D. Miguel Revilla Ramos.

Curso 1980-81: D. José Manuel Souto Menéndez, D. José Luis Rojo García, D. Dionisio García Conde, D. Jesús Rojo García, D. Manuel Núñez Jiménez.

Curso 1981-82: D. Juan Manuel Nieto Vales, D. Jesús Sáez Aguado, D. José Antonio Menéndez Fernández, D. Jesús Martínez Hernando.

Curso 1982-83: D.ª María Cruz Valsero Blanco, D. Felipe Cano Torres, D. Jesús Manuel Domínguez Gómez, D. Antonio García García, D.ª María Dolores Soto Torres, D. Francisco Javier Finat Codes, D. José Ángel Hermida Alonso, D. Luis María Abia Llera.

Curso 1983-84: D. Ramón Fernández Lechón, D. Rafael Obaya García, D.ª María Josefa Fernández Bermejo.

Curso 1984-85: D. Valentín María González de Garibay y Pérez de Heredia, D.ª María Victoria Debán Miguel, D. Luis Borge González, D.ª María Piedad Guijarro Carranza, D. Pedro Camino Olea, D.ª Encarnación Reyes Iglesias, D. Juan Carlos López Marcos, D.ª Lourdes Barba Escribá, D. Ángel Granja Barón, D. Fernando Vadillo Arrollo.

Curso 1985-86: D. Félix Delgado de la Mata, D.ª Carolina Ana Núñez Jiménez.

Curso 1986-87: D. Julián Susperregui Lesaca, D.ª Sylvia Novo Martín, D. Alfonso Gordaliza Ramos.

Curso 1987-88: D. Tomás Ortega del Rincón, D. Carlos Marijuan López, D. Francisco Javier de Frutos Baraja.

Curso 1988-89: D.ª María Luisa Pérez Carrillo de Albornoz, D.ª María Teresa Pérez Rodríguez, D. Antonio Medina Cabrerizo.

Curso 1989-90: D.ª María del Sagrario Corazón Ortiz Vallejo, D. Julio García de la Fuente, D.ª Cristina Rueda Sabater, D. Isaías Alonso Mallo, D. Juan Bosco García Archilla, D. José Pérez Blanco.

Curso 1990-91: D. José Javier Güemes Alzaga, D. Carlos Galindo Pastor, D.ª Esperanza Alarcia Estévez, D.ª Rosa Arranz Sombría, D. Manuel Mariano Carnicer Arribas, D.ª Miriam Pisonero Pérez.

Curso 1991-92: D.ª María del Rosario González Dorrego, D. Carlos Munuera Gómez, D. Juan José Aparicio Pedreño, D.ª María del Carmen Martín Yagüez, D. Pablo Martín Ordóñez, D. Miguel Ángel López Marcos, D.ª María Paz Calvo Cabrero.

Curso 1992-93: D. José María Cano Torres, D. Luis Alberto Tristán Vega, D. Jesús Vigo Aguilar, D. Luis Floria Gimeno, D. Francisco Javier Galán Simón.

Curso 1993-94: D.ª Ana José Reguera López, D. Eusebio Arenal Gutiérrez, D. Jesús Hernández Isla, D. José Miguel Farto Álvarez, D.ª María Angeles Zurro Moro, D.ª Angela Isabel Barbero Díez, D.ª María del Pilar Pérez González.

Curso 1994-95: D. Ander Murúa Uría, D.ª María del Carmen Martínez Martínez, D. Félix Galindo Soto, D.ª Ana María Portillo de la Fuente, D. Cesáreo Jesús González Fernández, D. Miguel Alejandro Fernández Temprano.

Curso 1995-96: D. Honorato Díez Fernández, D. Javier Sanz Gil, D. Serafín Esteban Ortega Juncuas, D. Santiago Encinas Carrión, D. Manuel Morales Gómez, D.ª Julia María Martínez Rodríguez, D.ª María del Carmen Núñez Jiménez, D. Jorge Mozo Fernández.

Curso 1996-97: D.ª Begoña Cano Urdiales, D. Luis Ángel García Escudero, D.ª Ana Isabel Alonso Mena, D. José Enrique Marcos Naveira, D.ª María Sagrario Sánchez Pastor, D. Tomás Pérez Pérez, D. Eustasio del Barrio Tellado, D. Jesús María Rodríguez Rodríguez, D.ª María Araceli de Francisco Iribarren.

Curso 1997-98: D. Ángel Durán Martín, D. José Ignacio Farrán Martín, D.ª Julia Novo Martín, D.ª Josefa Fernández Sucasas, D. Javier Gómez Pérez, D.ª Ana Belén González Martínez.

Curso 1998-99: D.ª María Cristina Rodríguez Sánchez, D. Jorge Jiménez Meana, D. David Javier López Medina, D. Miguel Carriegos Vieira.

Curso 1999-00: D. Fernando Sanz Sánchez, D. Pedro Fortuny Ayuso, D. Andrés Sáez Schwedt.

Curso 2000-01: D.ª María Teresa Ramos García, D.ª Fuensanta Aroca Bisquert, D. Eduardo Cuesta Montero, D.ª Nuria Reguera López, D.ª María Jesús Pisabarro, D. Edgar Martínez Moro, D. Javier Ribón Hergueda, D.ª Nuria Corral Pérez.

Curso 2001-02: D.ª Amelia García Garrosa, D. Agustín Mayo Iscar, D. Eduardo Cuesta Montero, D. Oscar Angulo Torga.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Boyer, Carl B.: *Historia de las Matemáticas*. Ed. Alianza Universidad Textos. Madrid, 1968.

[2] Bruno, Joaquim: *Una reflexión sobre los estudios de Matemáticas y sus perspectivas*. La Gaceta. Barcelona, 1999.

[3] Cuesta, Norberto: *La Matemática del orden*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, 1959.

[4] Cuesta, Norberto: *La sinfonía del infinito*. Ed. Univ. de Salamanca, 1981.

[5] Dieudonné, Jean: *Abrégé d'histoire des Mathématiques 1700-1900* (2 Vols.). Ed. Hermann. París, 1978.

[6] Dieudonné, Jean: *El honor del espíritu humano*. Ed. Alianza Universidad, 1989.

[7] Grattan-Guinnes, Ivor: *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. The MIT Press. Cambridge (Ma), 1970.

[8] Haddamard, Jacques: *La heurística de la invención*. Ed. Princeton, 1942.

[9] Haddamard, Jacques: *Psicología de la invención en el campo matemático*. Ed. Princeton, 1945.

[10] Hairer E. & Warner, G.: *Analysis by its History*. Springer Verlag. Nueva York, 1996.

[11] López Pellicer, Manuel: *Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, 1997*.

[12] Martínez Naveira, Antonio: *Discurso Inaugural de la Universidad de Valencia*, curso 1998-1999.

[13] Newman, James. R. (Editor): *SIGMA. El mundo de las Matemáticas* (6 Vols.). Grijalbo. Barcelona, 1968.

[14] Niño, Engracia: *Historia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valladolid*. Ed. Universidad de Valladolid. 1967.

[15] Pioget, J. & Beth, E. W.: *Relaciones entre la Lógica formal y el pensamiento real*. Ed. Ciencia Nueva, S. L. Madrid, 1968.

[16] Poincaré, Henri: *La Ciencia y el Método*. Ed. Espasa Calpe. Madrid, 1963.

[17] Poincaré, Henri: *La Ciencia y la Hipótesis*. Ed. Espasa Calpe. Madrid, 1963.

[18] Poincaré, Henri: *El Valor de la Ciencia*. Ed. Espasa Calpe. Madrid, 1963.

[19] Poincaré, Henri: *Últimos Pensamientos*. Ed. Espasa Calpe. Madrid, 1963.

[20] Polya, Georg: *Matemáticas y razonamiento plausible*. Ed. Tecnos. Madrid, 1966.

[21] Polya, Georg: *How to solve it*. Princeton University Press. Princeton, 1977.

[22] Puig Adam, Pedro: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Madrid, 1950.

[23] Rey Pastor, Julio: *Discurso inaugural en la Universidad de Oviedo*, curso 1913-1914.

[24] Rey Pastor, Julio: *Análisis Matemático, tomo III*. Buenos Aires, 1959.

[25] Remmert, Reinhold: *Theory of Complex Functions*. Springer Velag. Berlín, 1989.

[26] Sánchez Giralda, Tomás: *Breve historia de la Sección de Matemáticas de la Universidad de Valladolid*. Sin publicar.

[27] Smith, David E.: *History of Mathematics* (2 Vols.). Ed. Dover. Nueva York, 1958.

[28] Tatón, René: *Los números y los espacios*. Ed. Planeta, Barcelona, 1980.

[29] Valdivia Ureña, Manuel: *Discurso pronunciado en su nombramiento como Doctor Honoris Causa por la Universidad de Alicante*. Alicante, 2000.

[30] Valverde, José María: *Historia de la Literatura Española*. Ed. Planeta, Barcelona, 1833.

[31] Vera, Francisco: *Historia de la Matemática en España*. Ed. Victoriano Suárez, Madrid, 1929.

[32] Vera, Francisco: *Los historiadores de la Matemática Española*. Ed. Victoriano Suárez, Madrid, 1935.

[33] Vinogradov, Ivan M. (Director): *Enciclopedia de las Matemáticas* (10 Vols.). Ed. MIR-Rubiños. Madrid, 1994.

ÍNDICE