



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**MÉTODO MATRICIAL DE ANÁLISIS DE
ESTRUCTURAS DE BARRAS
ESBELTAS.EFECTO DE TENSIONES
INICIALES Y/O DEFORMACIONES INICIALES.
FORMULACION GENERAL**

Autor:

Escribano Salgado, Melany

Tutor:

CACHO PÉREZ, MARIANO

Departamento de Construcciones Arquitectónicas,

Ingeniería del Terreno y Mecánica de Medios

Continuos y Teoría de Estructuras.

Valladolid, julio 2021.





AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor Mariano Cacho Pérez por su tiempo, dedicación y orientación a lo largo del desarrollo de este proyecto. En este tiempo he podido aplicar conocimientos adquiridos durante estos años de carrera, aprender más profundamente aspectos del área temática de análisis estructural y adquirir una base en el manejo del programa WolframMathematica.

Agradecer tanto a mis padres Juan Carlos y Marimar, como a mi hermano Juan Carlos por todo su apoyo y ayuda emocional, sufriendo mis suspensos como suyos y animándome a no tirar la toalla e intentar superarme día a día.

A mi pareja Álvaro por tener fe en mí incluso cuando ni yo misma la tenía. Y a mi gran familia por creer en mí a pesar de todos los años que me ha llevado conseguirlo.

A mis amigos y compañeros con los que he compartido vivencias, alegrías y pesares durante esta dura carrera.





Resumen

Estudio de la existencia de tensiones iniciales: distribución de tensiones normales de manera general, tensiones residuales, etc., y de deformaciones iniciales: barra doblada, falta de ajuste, carga térmica y distribución de deformaciones normales con formulación general y aplicado a pórticos de barras 2D esbeltas. Metodología y formulación general para su consideración de forma sistemática en el Método Directo de Rigidez (MDR) de análisis de estructuras de barras.

Palabras Clave

Tensiones iniciales, deformaciones generales, barras esbeltas, pórtico 2D, formulación general.

Abstract

Study of the existence of initial stresses: general normal stress distribution, residual stresses, etc., and of initial deformations: bent bar, lack of adjustment, thermal load and normal deformation distribution in its general formulation, applied to 2D frames of slender bars. Methodology and general formulation for systematic consideration in the Direct Stiffness Method (DSM) for the analysis of bar structures.

Keywords

Initial stresses, initial deformations, slender bars, 2D frames, general formulation





Índice

1	Introducción y Objetivos	13
1.1	Introducción	13
1.2	Objetivos	13
2	Formulación	17
2.1	Barra a tracción-compresión.....	17
2.2	Barra esbelta a flexión.	18
2.3	Desplazamientos.Funciones de forma	19
2.4	Deformaciones	20
2.4.1	Matriz de rigidez (aplicación del PDV)	20
2.5	Fuerzas equivalentes. Carga distribuida uniforme.	22
3	Metodología.....	27
3.1	Deformaciones iniciales	27
3.1.1	Barra doblada.....	27
3.1.2	Falta de ajuste	28
3.1.3	Carga térmica	29
3.1.4	Deformación inicial. Caso general.....	32
3.2	Tensiones iniciales	35
3.2.1	Tensiones iniciales. Caso general.....	35
3.2.2	Tensiones residuales	37
4	Aplicaciones Prácticas	43
4.1	Pórtico con cargas distribuidas.	45
4.2	Deformación inicial pilar izquierdo.	53
4.3	Deformación inicial dintel izquierdo.....	58
4.4	Tensión inicial pilar izquierdo	62
4.5	Tensión inicial dintel izquierdo	66
5	Conclusiones y líneas de futuro	75
5.1	Conclusiones	75
5.2	Líneas futuras.....	75
6	Presupuesto- Estudio Económico	79
6.1	Introducción.....	79
6.2	Costes directos.....	79



6.2.1	Mano de obra.....	79
6.2.2	Material amortizable.....	81
6.2.3	Material no amortizable	81
6.2.4	Costes directos totales.....	82
6.3	Costes indirectos.....	82
6.4	Costes totales.....	82
	Bibliografía	85
	Webgrafía.....	85
	Anexo 1: Cálculos metodología de los ejemplos.....	87



Índice de Ilustraciones

Ilustración 1: Barra cargada a tracción por una fuerza N.....	17
Ilustración 2: Distribución de tensiones internas uniforme N.	18
Ilustración 3: Ejemplo de flexión mecánica.....	18
Ilustración 4: Barra con carga distribuida uniforme.....	22
Ilustración 5: Reacciones en los apoyos.....	23
Ilustración 6: Deformación debido a la temperatura.....	30
Ilustración 7: Perfil IPE300.	33
Ilustración 8: Perfil de tensiones laminado en caliente.	38
Ilustración 9: Pórtico de estudio.	43
Ilustración 10: Pórtico con cargas distribuidas uniforme.....	46
Ilustración 11: Matriz de rigidez de la estructura.	47
Ilustración 12: Diagrama de axiles, $N_x(x)$	52
Ilustración 13: Diagrama de cortantes, $V_y(x)$	52
Ilustración 14: Diagrama de momento flector, $M_z(x)$	52
Ilustración 15: Diagrama de la deformada (x 100).....	53
Ilustración 16: Diagrama de axiles, $N_x(x)$	56
Ilustración 17: Diagrama de cortantes, $V_y(x)$	57
Ilustración 18: Diagrama de momento flector, $M_z(x)$	57
Ilustración 19: Diagrama de la deformada (x 1000).....	57
Ilustración 20: Diagrama de axil, $N_x(x)$	61
Ilustración 21: Diagrama de cortantes, $V_y(x)$	61
Ilustración 22: Diagrama del momento flector, $M_z(x)$	61
Ilustración 23: Diagrama de la deformada (x 200).....	62
Ilustración 24: Diagrama de axil, $N_x(x)$	65
Ilustración 25: Diagrama de cortante, $V_y(x)$	65
Ilustración 26: Diagrama de momento flector, $M_z(x)$	66
Ilustración 27: Diagrama de la deformada (x 2500).....	66
Ilustración 28: Diagrama de axil, $N_x(x)$	69
Ilustración 29: Diagrama de cortantes, $V_y(x)$	69
Ilustración 30: Diagrama de momento flector, $M_z(x)$	70
Ilustración 31: Diagrama de la deformada (x 2500).....	70





Capítulo 1





1 Introducción y Objetivos

1.1 Introducción

Este Trabajo Fin de Grado se desarrolla como parte de un estudio con el departamento de Construcciones Arquitectónicas, Ingeniería del Terreno y Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Analizaremos los efectos sobre un pórtico tipo de una nave industrial de posibles deformaciones y/o tensiones iniciales en alguna/as de sus barras, Para ello, se emplea el Método Directo de Rigidez y su formulación matricial se implementa con la ayuda del programa matemático de uso general Wolfram Mathematica.

Es frecuente en ingeniería abordar el diseño de soluciones para situaciones de proyecto y/o cargas, y ahí es donde se aprovecha la formulación del MDR, totalmente sistemático y por lo tanto relativamente fácil de programar cualquier caso en un ordenador. Dichas situaciones a las que nos referimos pueden ser la falta de ajuste de alguna barra, deformaciones iniciales, tensiones iniciales en la estructura o tensiones residuales.

Las tensiones residuales en el acero se deben a diferentes causas. Podemos destacar la soldadura, proceso de unión mediante altas temperaturas, procesos de fabricación como la laminación o moldeo, procesos de instalación y montaje

1.2 Objetivos

El objetivo principal es estudiar el efecto de deformaciones y tensiones iniciales en la estructura y caracterizar su comportamiento a través de su respuesta estructural (diagrama de esfuerzos y deformada de la estructura) en los casos prácticos.

Para el estudio de las deformaciones iniciales se hará en primer lugar las correspondientes comprobaciones para los casos: barra curva, falta de ajuste y cargas térmicas para ver el efecto que producen en las vigas.



En lo relativo a las tensiones iniciales se formula el caso general y se muestra cómo aplicarlo al caso particular de elemento barra con tensiones residuales que se incluye en un conjunto de barras sometido a cargas/acciones. Estas tensiones se producen como respuesta a procesos de deformación plástica (mecanizado, moldeo, laminación,...), enfriamientos no uniformes a elevada temperatura (soldadura) y transformaciones de fase.

Este trabajo se centra en el efecto del proceso de fabricación de las vigas de acero IPE300 debido a laminación en caliente y enfriamiento al aire.



Capítulo 2



2 Formulación

2.1 Barra a tracción-compresión

Consideraremos una barra (cilíndrica o prismática) en la que aplicaremos dos fuerzas en la dirección perpendicular a la sección, en la dirección del eje longitudinal de la barra por ello se denominan cargas axiales de mismo valor pero sentido opuesto. Por ello, dicha barra experimentará una deformación que será:

- Esfuerzo axial de tracción si la fuerza es hacia fuera de la barra o exterior de la sección. La deformación axial provocará un alargamiento longitudinal de la barra [8].
- Esfuerzo axial de compresión si dicha fuerza tiene un sentido hacia el interior de la barra [8]. Por ello la deformación axial en este caso provocará un acortamiento longitudinal de la barra.



Ilustración 1: Barra cargada a tracción por una fuerza N.

Estas tensiones las podemos llamar de tracción o compresión y sus unidades son $\frac{N}{m^2}$ o Pa. Por regla general se consideran positivas a las tensiones de tracción y negativas a las de compresión.

La deformación debe ser idéntica en ambos lados de la sección debido a la simetría del problema. Otro aspecto importante es que las secciones rectas deben seguir siendo rectas después de la tensión aplicada. Esto quiere decir que todas las fibras deben sufrir el mismo alargamiento y la misma deformación.

Como conclusión, si aplicamos la ley de Hooke obtenemos que la distribución de las tensiones internas sea uniforme en cada sección. También podemos destacar que en el caso de tracción-compresión la tensión máxima admisible se alcanza en

todos sus puntos, por ello empleamos el material en la plenitud de sus posibilidades.

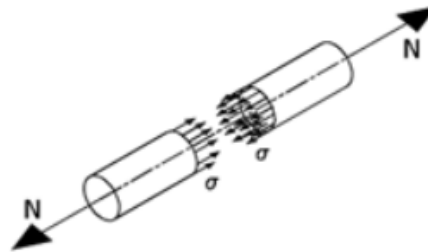


Ilustración 2: Distribución de tensiones internas uniforme N.

2.2 Barra esbelta a flexión.

Empezaremos definiendo lo que es la flexión, denominamos flexión a la deformación que experimenta una pieza alargada en la dirección perpendicular al eje longitudinal. Cuando decimos alargado nos referimos a que una dimensión es mucho mayor que las otras, un ejemplo claro son las vigas, diseñadas para trabajar principalmente a flexión [6].

Otro aspecto importante de la flexión es la denominada línea neutra, que forma una superficie curva en el material deformado por flexión, y separa la zona comprimida y la traccionada. En la línea neutra consideraremos que $y=0$ y $x=0$.

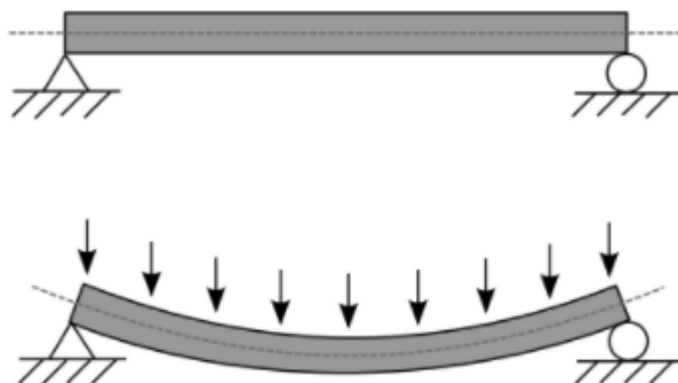


Ilustración 3: Ejemplo de flexión mecánica.

Nos basaremos en la hipótesis de Navier-Bernoulli se basa en que la deformación de una pieza recta sometida a flexión pura, las secciones rectas permanecen planas y normales a la deformada de la directriz.

Este enunciado lo podemos reducir a que la proporcionalidad entre las deformaciones longitudinales de la viga con la curvatura, variando linealmente con la distancia a la línea neutra.

En conclusión, las tensiones normales de la viga originadas por flexión (flexión pura) varían linealmente con la distancia a la línea neutra, produciéndose los máximos alargamientos en las fibras más alejadas de la línea neutra. Lo mismo ocurre con las tensiones, siendo las máximas en las zonas más alejadas de dicha línea neutra.

2.3 Desplazamientos. Funciones de forma

Aproximación del desplazamiento longitudinal para la barra trabajando a tracción y compresión:

$$N_u = \left\{ \frac{1}{2}(1-\xi), \frac{1}{2}(1+\xi) \right\} \quad (1)$$

El comportamiento mecánico de la barra a flexión se describe mediante polinomios de Hermite:

$$N_u = \left\{ \frac{1}{2} N_v = \left\{ \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3), \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3) \right\} \right\} \quad (2)$$

$$N_\theta = \left\{ \frac{1}{8}(1-\xi-\xi^2+\xi^3), \frac{1}{8}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3) \right\} \quad (3)$$

Donde se ha empleado la coordenada normalizada ξ , por lo que se debe tener en cuenta el jacobiano de la transformación a la hora de evaluar las integrales:

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2} \quad (4)$$

2.4 Deformaciones

En el problema de barras esbeltas trabajando a tracción/compresión-flexión las deformaciones normales se calculan mediante la matriz de transformación deformaciones-desplazamientos. Dicho tensor es un tensor simétrico empleado en la mecánica de sólidos deformables que caracteriza el cambio de volumen y forma de un cuerpo.

Las deformaciones de cada elemento las obtenemos derivando los desplazamientos de los elementos (N_u , N_v , N_θ) con respecto a las coordenadas x , y , z . En nuestro estudio empleamos la coordenada normalizada por lo que debemos tener cuidado a la hora de realizar las derivadas al ser necesario multiplicar por el jacobiano de la transformación para tenerlo en las coordenadas de estudio.

$$B = \left[\frac{dN_u}{d\xi} \frac{1}{J} \quad y \frac{dN_v}{d\xi^2} \frac{1}{J^2} \quad y \frac{dN_\theta}{d\xi^2} \frac{1}{J^2} \right] \quad (5)$$

2.4.1 Matriz de rigidez (aplicación del PDV)

Continuamos con las funciones anteriormente descritas para calcular el campo de desplazamiento, de tal manera que el Principio de los Desplazamientos Virtuales (PDV) nos quedaría:

$$\int_V (\delta\varepsilon)^T \sigma dV = \int_V (\delta\varepsilon)^T B^T E B dV = \sum_{i=1}^N (\delta u_i)^T F_i + \int_V (\delta u)^T q dV \quad (6)$$

siendo:

$$\delta u(\xi) = N \delta u \quad (7)$$

Sustituyendo obtendremos:

$$K_i = F + f; \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Donde deberemos sustituir los siguientes valores:

$$K_i = F + f; \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde:

$$\begin{aligned} K_{ii} &= \int_V (B_i)^T E B_j dV \\ f_i &= \sum_{i=1}^N (\delta u_i)^T F_i \\ A &= \int_A dA \\ I_z &= \int_A y^2 dA \\ dV &= Adx = A J d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

Obteniendo así una matriz de rigidez:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (11)$$

2.5 Fuerzas equivalentes. Carga distribuida uniforme.

El caso particular de carga distribuida uniforme es muy frecuente al ser una aproximación a la realidad que nos simplifica los cálculos, tiene como función el valor de la constante que llamaremos “q”.

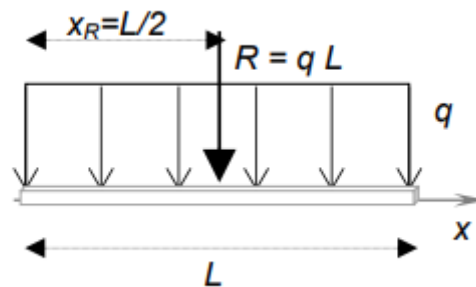


Ilustración 4: Barra con carga distribuida uniforme.

Cuya resultante la podemos calcular de la siguiente manera:

$$R = \int_0^L q \, dx = qL \quad (12)$$

Y el punto en el que actúa la resultante lo calcularemos mediante:

$$x_R = \frac{\int_0^L q \, dx}{qL} = \frac{q \frac{L^2}{2}}{qL} = \frac{L}{2} \quad (13)$$

Para calcular las reacciones en los extremos consideraremos una barra bi-empotrada en la que actúa la carga distribuida uniforme y mediante las ecuaciones de equilibrio de sumatorio de fuerzas y momentos obtendremos los axiles, cortantes y momentos.

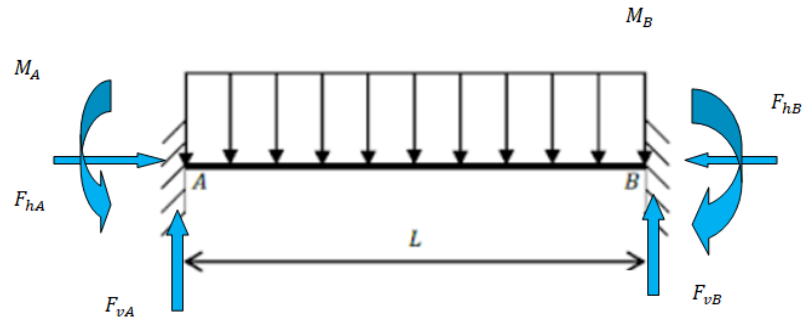


Ilustración 5: Reacciones en los apoyos.

Obteniendo así un vector de fuerzas equivalentes:

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{pmatrix} \quad (14)$$





Capítulo 3



3 Metodología

3.1 Deformaciones iniciales

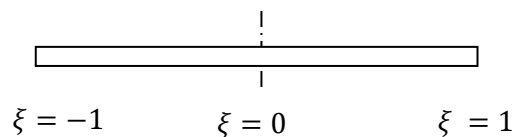
3.1.1 Barra doblada

En este apartado consideraremos que la barra tiene un defecto de forma, la barra inicialmente no es recta, presenta una pequeña curvatura inicial.

Comenzamos definiendo los vectores de desplazamiento transversal y longitudinal y el giro en función de la coordenada generalizada:

$$\begin{aligned} N_u &= \left\{ \frac{1}{2}(1 - \xi), \frac{1}{2}(1 + \xi) \right\} \\ N_v &= \left\{ \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3), \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \right\} \\ N_\theta &= \left\{ \frac{1}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3), \frac{1}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

A continuación, definimos una ecuación para el caso general de barra doblada, la elegiremos de tercer grado y consideraremos tres condiciones de contorno para resolverla. Se plantea para el caso general de apoyo fijo en la izquierda ($\xi = -1$) y libre en la derecha ($\xi = +1$), de tal manera que la barra se curva de con curvatura convexa. Para ello damos las condiciones de desplazamiento longitudinal y transversal en el apoyo fijos son nulos y en el extremo libre, consideramos el longitudinal de valor $\delta 0$ y el transversal $\theta_0 \frac{L}{2}$ (multiplico por $\frac{L}{2}$ para tenerlo en función de la variable generalizada ξ en vez de x), obtenido la ecuación:



$$f(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \\ f(+1) = \delta\theta \\ f'(+1) = \frac{\theta_0 L}{2} \end{cases} \quad (16)$$

Obteniendo así un desplazamiento transversal inicial debido a las deformaciones iniciales por barra curva:

$$v_0 = f(\xi) = -\frac{1}{8}(2\delta_0(-2 - \xi) - L\theta_0(-1 - \xi))(1 + \xi)^2 \quad (17)$$

Se calculan las fuerzas equivalentes. Dicho vector lo obtenemos con la integral de longitud sobre la barra:

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{12I_z E \delta_0}{L^3} + \frac{6I_z E \theta_0}{L^2} \\ -\frac{6I_z E \delta_0}{L^2} + \frac{2I_z E \theta_0}{L} \\ 0 \\ \frac{12I_z E \delta_0}{L^3} - \frac{6I_z E \theta_0}{L^2} \\ -\frac{6I_z E \delta_0}{L^2} + \frac{4I_z E \theta_0}{L} \end{pmatrix} \quad (18)$$

3.1.2 Falta de ajuste

Vamos a obtener el vector de fuerzas equivalentes debido a la falta de ajuste de una barra, refiriéndonos a falta de ajuste a que la barra no tenga la longitud nominal, bien intencionadamente seguramente por fallo de su fabricación pudiendo ser exceso o defecto de longitud.

Seguidamente se considera que la barra es corta y lo generalizamos con una ecuación de primer grado y dos condiciones de contorno para su resolución. Para la obtención de las variables a y b volvemos a considerar un apoyo fijo (izquierda) y otro libre (derecha), obteniendo así las condiciones de desplazamiento transversal en el empotramiento (-1) nulo y en el apoyo libre (+1) lo consideramos $-\lambda_0$ (al ser corta la barra).

$$f(\xi) = a + b\xi \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(+1) = \lambda_0 \end{cases} \quad (19)$$

Obteniendo así un desplazamiento longitudinal inicial debido a la falta de ajuste:

$$u_0 = \frac{1}{2} \lambda_0 (1 + \xi) \quad (20)$$

De la misma manera que en el caso de barra curva obtenemos a partir de integral de la matriz de forma y seguidamente se realiza la integral de longitud de la matriz de rigidez obtenida en toda la barra para calcular el vector de fuerzas equivalentes debido a la falta de ajuste de la barra de manera generalizada:

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} \frac{AE\lambda_0}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{AE\lambda_0}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

3.1.3 Carga térmica

A continuación, vamos a calcular el vector equivalente resultante debido a las deformaciones por efecto de cargas térmicas y variación lineal en el canto. Los cambios de temperatura provocan cambios en las dimensiones, de tal manera que un aumento de temperatura provoca la dilatación del material y un descenso su contracción.

Vamos a considerar $T_1 > T_2$, lo que se puede traducir a que las fibras de arriba se deforman o alargan más que la de abajo y por ello la curvatura será hacia abajo y de forma convexa [6].

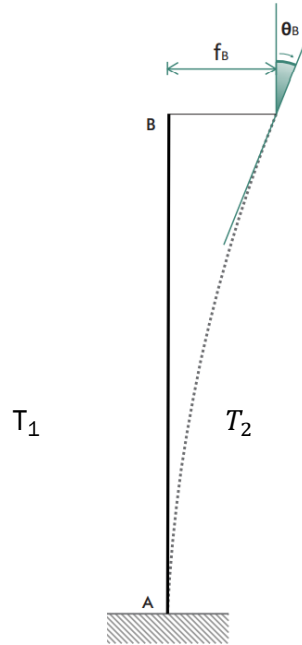


Ilustración 6: Deformación debido a la temperatura.

Giro (θ_b): es el ángulo que forma la tangente de la deformada en el punto B con la dirección original de la barra

Flecha (δ_b): el desplazamiento que sufre el punto B en dirección perpendicular a la directriz de la barra

Para ello definimos los valores de los desplazamientos longitudinales y transversales de la barra considerando un extremo empotrado y otro libre.

Primero evaluamos el desplazamiento longitudinal desde el extremo empotrado, en el que su valor es cero, al extremo libre, considerándolo como la derivada del desplazamiento en el punto B:

$$u = N_u\{0, \delta u_B\} \quad (22)$$

Seguidamente realizamos los para el caso de desplazamiento transversal, en este caso lo evaluamos desde cero, que sería el extremo empotrado, al libre en el que las derivadas del desplazamiento transversal y giro las consideramos negativas al tener en nuestro caso de estudio la condición $T_1 > T_2$:

$$v = N_v\{0, -\delta v_B\} + N_\theta\{0, -\delta \theta_B\} \quad (23)$$

Calculamos la ecuación de las deformaciones virtuales en función de las derivadas de los desplazamientos longitudinal y transversal:

$$\delta\varepsilon = \frac{2}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} + y \frac{2}{L} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad (24)$$

Definimos la variación lineal de la temperatura en el canto como:

$$T(y) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{h} y \quad (25)$$

Emplearemos la ecuación general de la deformación inicial debido a la temperatura, que la define como el producto entre el coeficiente de dilatación térmica por la temperatura:

$$\varepsilon_0 = \alpha T \quad (26)$$

El coeficiente de dilatación térmica para nuestro caso de estudio, acero S275, tiene un valor de $1.2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Continuamos los cálculos aplicando el PTV para obtener la energía de deformación, para ello hacemos la integral de área a la ecuación de deformaciones virtuales:

$$E_{def} = \int_{-1}^{+1} E \delta\varepsilon J \varepsilon_0 d\xi \quad (27)$$

De esta manera obtenemos la siguiente energía de deformación para nuestro caso de estudio:

$$E_{def} = \frac{1}{2} A (T_1 + T_2) E \alpha \delta u_B + \frac{I_z (-T_1 + T_2) E \alpha \delta u_B}{h} \quad (28)$$

Una vez conseguida la energía de deformación, podemos obtener los vectores fuerzas equivalentes en el nodo [B] derivando dicha energía de deformación con respecto a los desplazamientos y giro en el nodo.

$$F_{eq_B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_{def}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial E_{def}}{\partial v_2} \\ \frac{\partial E_{def}}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Asegurando el equilibrio en la barra obtendremos los vectores en el nodo [A], mediante un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, obteniendo finalmente el vector de fuerzas equivalentes debido a carga térmica en la barra:

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(AT_1 + T_2)E\alpha \\ 0 \\ \frac{I_z(-T_1 + T_2)E\alpha}{h} \\ \frac{1}{2}A(T_1 + T_2)E\alpha \\ 0 \\ \frac{I_z(-T_1 + T_2)E\alpha}{h} \end{pmatrix} \quad (30)$$

3.1.4 Deformación inicial. Caso general.

Para acabar este apartado, calcularemos las deformaciones iniciales de una barra. Para ello comenzaremos de la misma manera que el caso de carga térmica, definiendo los vectores de desplazamiento, considerándolos en el eje x positivo y en el eje z e y negativo as suponer $T_1 > T_2$:

$$\begin{aligned} u &= N_u\{0, \delta u_B\} \\ v &= N_v\{0, -\delta v_B\} + N_\theta\{0, -\delta \theta_B\} \end{aligned} \quad (31)$$

Definimos la ecuación de deformaciones virtuales mediante las derivadas del desplazamiento longitudinal y la derivada segunda del desplazamiento transversal como se puede ver en la ecuación(24).

La temperatura total la consideraremos dato y se regirá por una ecuación elegida en especial para nuestro estudio y que será la siguiente:

$$T = \frac{10^6 T_0 x^2 y z^2}{L^5} (C^\circ) \quad (32)$$

Continuamos con los cálculos en nuestra sección de los momentos de inercia, en nuestro caso para un perfil IPE 300 [3], cuyos parámetros muestro a continuación:

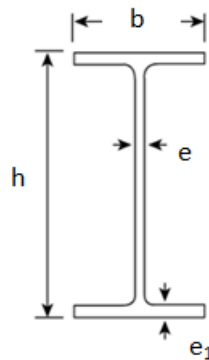


Ilustración 7: Perfil IPE300.

$$h = 300 \text{ mm}$$

$$b = 150 \text{ mm}$$

$$e = 7.1 \text{ mm}$$

$$e_1 = 10.7 \text{ mm}$$

Realizamos los cálculos, para ello dividimos el perfil en tres triángulos rectángulos, que serían el ala superior (1), ala inferior (3) y en el alma (2). Calculamos las características de cada barra de manera independiente. Obteniendo así la magnitud estática de la sección como la suma los tres momentos anteriores.

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_{\frac{h}{2}-e_1}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 z^2 dz dy \\ I_2 = \int_{-(\frac{h}{2}-e_1)}^{\frac{h}{2}-e_1} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} y^2 z^2 dz dy \\ I_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{-(\frac{h}{2}-e_1)} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 z^2 dz dy \end{array} \right. \quad (33)$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1.26 \times 10^{-7} [m^6]$$

Por último, calculamos la energía de deformación mediante un PTV, con la integral de tensiones y deformaciones reales en el volumen. En nuestro caso al ser un problema lineal, haremos la integral en el área, para calcularlo debemos hacer la integral de la ecuación de deformaciones virtuales, como el producto del número de Young por las deformaciones virtuales y las deformaciones iniciales, para ξ entre los valores(-1,+1), obteniendo una energía de deformación:

$$\begin{aligned} E_{def} &= \int_{-1}^1 E \delta \epsilon J \epsilon_0 d\xi = \\ &= \frac{1}{27L^4} 31250 [(2e_1 - h)^3 + 2b^3 e_1 (4e_1^2 - 6e_1 h + 3h^2)] * \\ &\quad * T_0 E \alpha (6\delta v_2 - 5L\delta \theta_2) \end{aligned} \quad (34)$$

Una vez calculada la energía de deformación, podemos obtener los vectores fuerzas equivalentes en el nodo [B] derivando la energía de deformación con respecto a los desplazamientos y giro en dicho nodo.

$$F_{eq_B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_{def}}{\partial u_B} \\ \frac{\partial E_{def}}{\partial v_B} \\ \frac{\partial E_{def}}{\partial \theta_B} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Realizamos el equilibrio en la barra para obtener el vector de fuerzas en el nodo [A], mediante un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, obteniendo finalmente el vector de fuerzas equivalentes debido a carga térmica en la barra:

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4901.76 \\ -4901.76 \\ 0 \\ 4901.76 \\ -24508.80 \end{pmatrix} \quad (36)$$

3.2 Tensiones iniciales

3.2.1 Tensiones iniciales. Caso general.

Para el caso de tensiones iniciales, empleamos el modelo de barras en el que consideramos que las tensiones en el eje z e y son muy pequeñas y despreciables en comparación a las del eje x.

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \text{ frente a } \sigma_x \quad (37)$$

También empleamos la teoría de la elasticidad lineal considerando barras esbeltas.

Comenzamos los cálculos de la misma manera que los apartados anteriores, definimos los vectores de desplazamiento y el de deformaciones virtuales. La tensión inicial la debemos considerar dato, por ello he elegido la siguiente función:

$$\sigma_0 = \frac{f_y x^2 y z^2}{0.1 L^5} = \frac{25000 x^2 y z^2}{L^3} (Pa) \quad (38)$$

La energía de deformación la calculamos mediante un PTV, para ello realizamos la integral de longitud a lo largo de la barra del producto de las deformaciones virtuales y la tensión inicial. Pero antes necesitamos calcular los parámetros característicos de la barra por los que multiplicamos la energía de deformación, siendo "1" el factor que multiplica a la derivada del desplazamiento longitudinal y el parámetro "y" el que multiplica al transversal, pero que no debemos de confundir con las inercias al tener las mismas unidades.

Estos parámetros se deben calcular para las alas superior (1) e inferior (3), ambas iguales, y para el alma (2) siendo el parámetro final la suma de las tres. En nuestro caso, al hacer las cuentas observamos que “ x_0 ” el cual multiplica por factor 1 (parámetro empleado en Mathematica para agrupar términos) nos da cero, pero no es lo general, es debido a la distribución de tensiones iniciales elegida, por lo que en la integral sustuiremos “ x_0 ” por cero.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{\frac{h}{2}-e_1}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} yz^2 dz dy \\
 A_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-e_1} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} yz^2 dz dy \\
 A_3 &= A_1
 \end{aligned} \tag{39}$$

$x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 0$ para nuestro caso en particular

El cálculo del otro parámetro también lo realizamos en las tres zonas en las que dividimos la sección: ala superior (1), alma (2) y ala inferior (3). En este caso nos da un valor diferente de cero y por el cual sustuiremos “ y ” en el PTV.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\frac{h}{2}-e_1}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 z^2 dz dy \\
 I_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-e_1} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} y^2 z^2 dz dy \\
 I_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}-e_1} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 z^2 dz dy
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$y = I_1 + I_2 + I_3 = 1.26 \times 10^{-7} [m^6]$$

Para calcular la energía de deformación debemos realizar la integral de longitud al ser un problema lineal del producto de la energía de deformación y la tensión inicial a lo largo de la coordenada generalizada:

$$\begin{aligned}
 E_{def} &= \int_{-1}^1 \delta \varepsilon J \sigma_0 d\xi \\
 E_{def} &= [-e^3(2e_1 - h) + 2b^3 e_1(4e_1^2 - 6e_1 h + 3h^2)] \delta \theta_B
 \end{aligned} \tag{41}$$

Una vez conocida la energía de deformación podemos calcular las resultantes en los extremos, realizando la derivada de dicha energía con respecto al desplazamiento longitudinal, transversal y giro del extremo de la derecha, obteniendo así el vector de fuerzas equivalentes de dicho extremo. Mediante equilibrio en la barra obtendremos el vector de fuerzas equivalentes en el otro extremo al tener un sistema de ecuaciones.

$$F_{eq_B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_{def}}{\partial u_B} \\ \frac{\partial E_{def}}{\partial v_B} \\ \frac{\partial E_{def}}{\partial \theta_B} \end{pmatrix} \quad (42)$$

Finalmente, obtendremos el vector de fuerzas equivalentes en dicha barra en coordenadas locales.

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2674.57 \\ -2674.57 \\ 0 \\ 2674.57 \\ -13372.90 \end{pmatrix} \quad (43)$$

3.2.2 Tensiones residuales

Comenzaremos definiendo las tensiones residuales, como aquellas tensiones que permanecen después de ser causadas por fuerzas externas, en las piezas metálicas se producen como respuesta a los procesos de deformación plástica. Son auto equilibradas, es decir, si en un punto son de compresión en otro son de tracción, así mantiene el equilibrio mecánico.

En este apartado estudiaremos las tensiones residuales debidas al proceso de fabricación de las vigas IPE 300.

Dicha fabricación se lleva a cabo mediante el proceso de laminado en caliente con enfriamiento al aire. Estas tensiones se producen al enfriarse más rápido las alas que el alma al tener más aire alrededor.

Comenzamos los cálculos definiendo lo mismo que en los casos anteriores, vectores de desplazamientos y deformaciones virtuales. El siguiente paso sería definir la distribución de tensiones en el ala superior considerando el valor máximo $0.2 \cdot f_y$, dándose en los extremos y en la mitad del ala, siendo negativo en los extremos como podemos ver en la siguiente figura [1]:

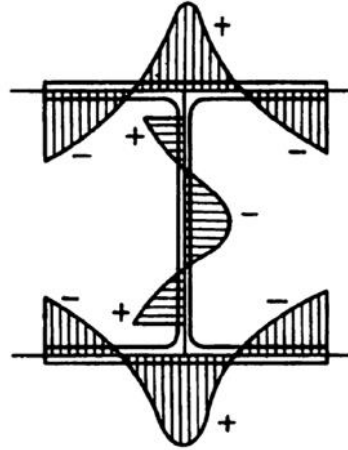


Ilustración 8: Perfil de tensiones laminado en caliente.

Obteniendo la siguiente distribución de tensiones en el ala superior e inferior al ser idénticas por simetría:

$$f(z) = 0.2 - \frac{0.8z}{b} \quad (44)$$

Al realizar el cálculo del parámetro característico que multiplicará a la energía de deformación nos vuelve a ocurrir que sale cero tanto en las alas como en el alma. Lo debemos de calcular de manera independiente en cada zona y después sumarlos para obtenerlo, que en nuestro caso nos saldrá cero. El cálculo en el ala sería la integral de área de la distribución anteriormente obtenida y poniendo los límites de integración para los ejes z e y y considerando la mitad del ala y multiplicando por dos el valor obtenido:

$$A_1 = 2 \int_{\frac{h}{2}-e_1}^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} f(z) dy dz = 0 \quad (45)$$

$$A_3 = A_1 = 0 \text{ por simetría}$$

Nos faltaría calcularlo en el alma, considerando también media barra, desde el origen de coordenadas que el centro y el extremo de arriba:

$$A_2 = 2 \int_0^{\frac{h}{2}-e_1} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} f(z) dy dz = 0 \quad (46)$$

$$x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

A continuación repetiremos los calculo pero en el alma siendo de nuevo el valor máximo de la tensión $0.2 \cdot f_y$. En este caso las condiciones de contorno son el valor máximo con signo positivo en los extremos del alma y negativo en el centro, considerando el centro como el origen de coordenadas (véase en la figura anterior). La distribución de tensiones obtenida es:

$$f(y) = 0.2 - \frac{0.8y}{e_1 - 0.5h} \quad (47)$$

Calculamos el parámetro “y” como el caso anterior pero usando la tensión de distribución nueva, como la suma de los parámetros de manera independiente de las alas y alma. Este parámetro lo emplearemos en la integral para la obtención de la energía de deformación que realizamos a continuación:

$$I_1 = 2 \int_{\frac{h}{2}-e_1}^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} y f(y) dy dz = 0$$

$$I_3 = I_1 = 0 \text{ por simetría}$$

$$I_2 = 2 \int_0^{\frac{h}{2}-e_1} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} y f(y) dy dz = 9.18479 \times 10^{-6} [m^4] \quad (48)$$

$$y = I_1 + I_2 + I_3 = 9.18479 \times 10^{-6} [m^4]$$

Continuamos con la distribución de tensiones en el eje x para después multiplicarlas por el límite elástico y así obtener las tensiones iniciales. Para ello definimos un polinomio de segundo grado y damos como condiciones de contorno que en los extremos la tensión sea cero al no ejercer esfuerzo sobre la barra ninguna fuerza externa y en el centro consideramos la tensión máxima y de valor igual a 1, obteniendo una distribución:

$$f(x) = 2(1 + \xi) + (1 - \xi)^2 \quad (49)$$

Por lo tanto la tensión inicial la podemos definir de manera general como:

$$\sigma_0 = f(x)f_y \quad (50)$$

Realizamos el PTV para el cálculo de la energía de deformación haciendo la integral de longitud del producto de las deformaciones virtuales y las tensiones iniciales, sustituyendo los parámetros por los valores calculados anteriormente, y obtenemos la siguiente energía de deformación:

$$E_{def} = \int_{-1}^1 \delta \varepsilon \sigma_0 d\xi \quad (51)$$
$$E_d = ef_y[-0.04444e_1^2 + 0.04444e_1h - 0.01111h^2]\delta\theta_B$$

Para finalizar calculamos el vector de fuerzas equivalentes en el extremo de la derecha con las derivadas de la energía de deformación con respecto los desplazamientos y el giro de dicho extremo:

$$F_{eq_B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_{def}}{\partial u_B} \\ \frac{\partial E_{def}}{\partial v_B} \\ \frac{\partial E_{def}}{\partial \theta_B} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Mediante equilibrio en la barra conseguiremos las fuerzas equivalentes del otro extremo. Nos quedaría entonces el siguiente vector fuerzas equivalentes de la barra en coordenadas locales:

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1683.88 \\ 0 \\ 0 \\ -1683.88 \end{pmatrix} \quad (53)$$



Capítulo 4



4 Aplicaciones Prácticas

En este apartado del proyecto llevaremos a la práctica los casos anteriormente explicados. Realizaremos los cálculos en una estructura típica de una nave industrial, pero simplificada a dos pilares y dos dinteles para ver de manera más rápida y eficaz los resultados a los que queremos llegar. Continuaremos empleando vigas IPE 300 de acero S275 tanto para los pilares como las vigas.

Resolveremos cinco problemas mediante el Método Directo de Rigidez de manera independiente para abarcar todos los casos, de tal manera que si en un algún momento se requiere que en la estructura actúen varios de los casos solo debemos emplear superposición y obtendremos el resultado. Los MDR los clasificaremos de la siguiente manera:

- Sobre el pórtico actúan las fuerzas del viento y nieve, actuando como cargas distribuidas (q_v y q_n).
- Consideraremos que en el pilar izquierdo hay una deformación inicial.
- Consideraremos que en el dintel izquierdo hay una deformación inicial.
- Consideraremos que en el pilar izquierdo tenemos una tensión inicial.
- Consideraremos que en el dintel izquierdo tenemos una tensión inicial.

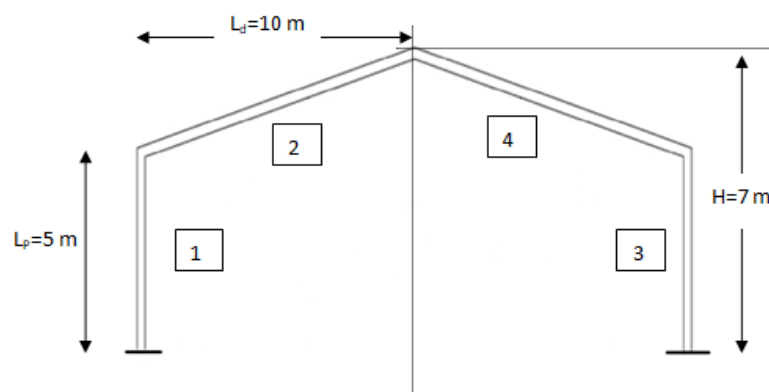


Ilustración 9: Pórtico de estudio.

Los cálculos de los MDR los estructuraremos de la siguiente manera

- Definimos la matriz de rigidez para cada elemento en coordenadas locales, siendo dicha matriz de manera general:

$$(K_i)_l = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z E}{L^3} & \frac{6I_z E}{L^2} & 0 & -\frac{12I_z E}{L^3} & \frac{6I_z E}{L^2} \\ 0 & \frac{6I_z E}{L^2} & \frac{4I_z E}{L} & 0 & -\frac{6I_z E}{L^2} & \frac{2I_z E}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I_z E}{L^3} & -\frac{6I_z E}{L^2} & 0 & \frac{12I_z E}{L^3} & -\frac{6I_z E}{L^2} \\ 0 & \frac{6I_z E}{L^2} & \frac{2I_z E}{L} & 0 & -\frac{6I_z E}{L^2} & \frac{4I_z E}{L} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Debemos de tener en cuenta el ángulo que forman los ejes de las coordenadas locales con las globales para así hacer el cambio de coordenadas. La matriz giro necesaria corresponde a:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Por último realizamos el cambio obtenido así la matriz de rigidez en globales:

$$(K_i)_g = T^T (K_i)_l T \quad (56)$$

- Calculamos las fuerzas de empotramiento debidas a las cargas distribuidas, la deformación o la tensión iniciales dependiendo del caso de estudio. Dichas fuerzas las calcularemos de manera independiente en cada elemento en locales.

Para ello consideraremos que ambos extremos de las barras están empotrados y realizaremos el equilibrio en la barra con sumatorio de fuerzas y momentos para obtener las resultantes en los extremos en función de las cargas que actúen en el elemento.

Una vez calculadas las fuerzas de empotramiento con la matriz de giro anteriormente explicada calcularemos las fuerzas de equilibrio de cada barra en coordenadas globales.

$$(F_{eq_i})_g = -T^T (F_{emp_i})_l \quad (57)$$

- Definimos el vector desplazamiento de la estructura como los movimientos de los nudos, este será u_{est} .
- Definimos el vector fuerzas de las fuerzas existentes en los nodos (F_{est}).
- Aplicamos las condiciones de contorno con las reacciones sobre la estructura conocidas o los movimientos impedidos, como los pilares al estar empotrados tienen movimientos nulos.

$$F_{est} + F_{eq} = K_{est} + u_{est} \quad (58)$$

- Planteamos la ecuación matricial y obtenemos los desplazamientos y las fuerzas de la estructura.
- Dibujamos los diagramas de axil, cortante y momento flector.
- Dibujamos la deformada de la estructura.

4.1 Pórtico con cargas distribuidas.

$$q_{viento} = 5 \frac{kN}{m}$$
$$q_{nieve} = 2 \frac{kN}{m}$$

Nuestro caso de estudio se basará en la aparición de cargas distribuidas sobre la estructura. La carga distribuida lateral corresponderá a la equivalente de la carga del viento y la vertical a la de la nieve. Ambas cargas tendrán un valor de:

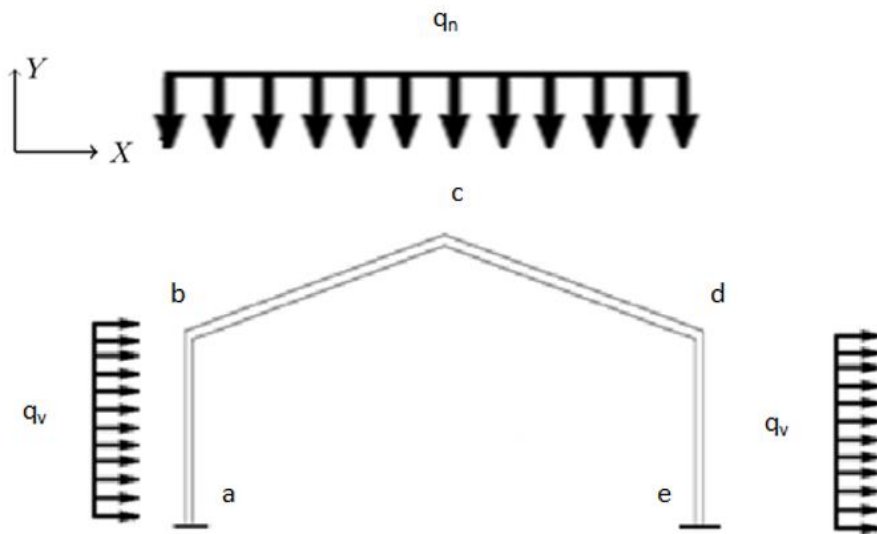


Ilustración 10: Pórtico con cargas distribuidas uniforme.

Comenzaremos el caso de cargas distribuidas con la obtención de las matrices de rigidez de cada elemento. Seguiremos las pautas anteriormente descritas de manera que, primero las calculamos en coordenadas y locales y con la matriz de giro obtenemos las de coordenadas globales elemento a elemento:

- Elemento 1: el ángulo formado por los ejes locales y globales es $\alpha_1=90^\circ$

$$K_1 \begin{bmatrix} 1685.38 & 0 & -4213.44 & -1685.38 & 0 & -4213.44 \\ 0 & 225960 & 0 & 0 & -225960 & 0 \\ -4213.44 & 0 & 14044.8 & 4213.44 & 0 & 7022.4 \\ -1685.38 & 0 & 04213.44 & 1685.38 & 0 & -4213.44 \\ 0 & -225960 & 0 & 0 & 225960 & 0 \\ -4213.44 & 0 & 7022.4 & 4213.44 & 0 & 14044.8 \end{bmatrix}$$

- Elemento 2: el ángulo formado por los ejes locales y globales es $\alpha_2=11.3^\circ$

$$K_2 \begin{bmatrix} 106533 & 21266.8 & -198.635 & -106533 & -21266.8 & -198.635 \\ 21266.8 & 4452 & 993.177 & -21266.8 & -4452 & 993.177 \\ -198.635 & 993.177 & 6886.03 & 198.635 & -993.177 & 3443.01 \\ -106533 & -21266.8 & 198.635 & 106533 & 21266.8 & 198.635 \\ -21266.8 & -4452 & -993.177 & 21266.8 & 4452 & -993.177 \\ -198.635 & 993.177 & 3443.01 & 198.635 & -993.177 & 6886.03 \end{bmatrix}$$

- Elemento 3: el ángulo formado por los ejes locales y globales es $\alpha_3=90^\circ$

$$K_3 \begin{bmatrix} 1685.38 & 0 & -4213.44 & -1685.38 & 0 & -4213.44 \\ 0 & 225960 & 0 & 0 & -225960 & 0 \\ -4213.44 & 0 & 14044.8 & 4213.44 & 0 & 7022.4 \\ -1685.38 & 0 & 04213.44 & 1685.38 & 0 & -4213.44 \\ 0 & -225960 & 0 & 0 & 225960 & 0 \\ -4213.44 & 0 & 7022.4 & 4213.44 & 0 & 14044.8 \end{bmatrix}$$

- Elemento 4: el ángulo formado por los ejes locales y globales es $\alpha_4=-11.3^\circ$

$$K_4 \begin{bmatrix} 106533 & -21266.8 & -198.635 & -106533 & 21266.8 & -198.635 \\ -21266.8 & 4452 & -993.177 & 21266.8 & -4452 & -993.177 \\ -198.635 & -993.177 & 6886.03 & 198.635 & 993.177 & 3443.01 \\ -106533 & 21266.8 & 198.635 & 106533 & -21266.8 & 198.635 \\ 21266.8 & -4452 & 993.177 & -21266.8 & 4452 & 993.177 \\ -198.635 & -993.177 & 3443.01 & 198.635 & 993.177 & 6886.03 \end{bmatrix}$$

Finalmente obtendremos una matriz de rigidez estructural:

$$\begin{bmatrix} 1685.38 & 0. & -4213.44 & -1685.38 & 0. & -4213.44 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 225960. & 0. & 0. & -225960. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -4213.44 & 0. & 14044.8 & 4213.44 & 0. & 7022.4 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -1685.38 & 0. & 4213.44 & 108218. & 21266.8 & 4014.8 & -106533. & -21266.8 & -198.635 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -225960. & 0. & 21266.8 & 230412. & 993.177 & -21266.8 & -4452. & 993.177 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -4213.44 & 0. & 7022.4 & 4014.8 & 993.177 & 20930.8 & 198.635 & -993.177 & 3443.01 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -106533. & -21266.8 & 198.635 & 213065. & 0. & 397.271 & -106533. & 21266.8 & 198.635 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -21266.8 & -4452. & -993.177 & 0. & 8903.99 & 0. & 21266.8 & -4452. & 993.177 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -198.635 & 993.177 & 3443.01 & 397.271 & 0. & 13772.1 & -198.635 & -993.177 & 3443.01 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -106533. & 21266.8 & -198.635 & 108218. & -21266.8 & 4014.8 & -1685.38 & 0. & 4213.44 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 21266.8 & -4452. & -993.177 & -21266.8 & 230412. & -993.177 & 0. & -225960. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 198.635 & 993.177 & 3443.01 & 4014.8 & -993.177 & 20930.8 & -4213.44 & 0. & 7022.4 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -1685.38 & 0. & -4213.44 & 1685.38 & 0. & -4213.44 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -225960. & 0. & 0. & 225960. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 4213.44 & 0. & 7022.4 & -4213.44 & 0. & 14044.8 & 0. \end{bmatrix}$$

Ilustración11: Matriz de rigidez de la estructura.

Calculamos las fuerzas de empotramiento debidas en nuestro caso cargas distribuidas. Lo realizaremos en cada barra de manera individual en coordenadas locales, y después con la matriz de giro obtendremos las fuerzas equivalentes:

- Elemento 1: el ángulo formado por los ejes locales y globales es $\alpha_1=90^\circ$

$$F_{eq_1} = T * F_{emp_1} = T * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 2.083 \\ 0 \\ 2.5 \\ -2.083 \end{pmatrix}$$

- Elemento 2: el ángulo formado por los ejes locales y globales es $\alpha_2=11.3^\circ$

$$F_{eq_2} = T * F_{emp_2} = T * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 5 \\ 8.498 \\ 1 \\ 5 \\ -8.498 \end{pmatrix}$$

- Elemento 3: el ángulo formado por los ejes locales y globales es $\alpha_3=90^\circ$

$$F_{eq_3} = T * F_{emp_3} = T * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 2.083 \\ 0 \\ 2.5 \\ -2.083 \end{pmatrix}$$

- Elemento 4: el ángulo formado por los ejes locales y globales es $\alpha_4=-11.3^\circ$

$$F_{eq_2} = T * F_{emp_2} = T * \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ -5 \\ -8.498 \\ 1 \\ -5 \\ 8.498 \end{pmatrix}$$

Obteniendo un vector fuerzas equivalentes de la estructura ensamblando todos los anteriores:

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ -2.083 \\ 2.5 \\ -5.099 \\ -6.415 \\ 0 \\ -10.198 \\ 0 \\ 2.5 \\ -5.099 \\ 10.581 \\ 2.5 \\ 0 \\ -2.083 \end{pmatrix}$$

Continuamos los cálculos definiendo el vector desplazamiento (U_{est}) y el de las fuerzas en los nodos (F_{est}).

Para el caso del vector desplazamiento sabemos que los nodos “a” y “e” están empotrados, por lo cual sus desplazamientos y giros serán nulos, siendo la incógnita el resto de nodos:



$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \\ u_c \\ v_c \\ \theta_c \\ u_d \\ v_d \\ \theta_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para la definición del vector de las fuerzas en los nodos será al contrario, solo tendremos en cuenta las fuerzas en los nodos empotrados al ser las únicas reacciones existentes por el empotramiento anteriormente definido:

$$F_{est} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{pmatrix}$$

Con estos vectores definimos nuestras condiciones de contorno, pudiendo así emplear la ecuación matricial para resolver nuestro sistema:

$$F_{est} + F_{eq} = K_{est} + u_{est}$$

Para su resolución seleccionamos las ecuaciones en las que son incógnita los desplazamientos, en nuestro caso serian

la 4,5,6,7,8,9,10,11 y 12, y al ser las únicas incógnitas en el sistema de ecuaciones obtendríamos que los desplazamientos son (m):

$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.001056 \\ -0.000044 \\ -0.001077 \\ 0.002684 \\ -0.01919 \\ 0.000239 \\ 0.006424 \\ -0.000046 \\ 0.000116 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Realizamos el siguiente sistema de ecuaciones pero esta vez seleccionado únicamente las ecuaciones en las que la incógnita son las fuerzas de los nodos, serían las ecuaciones 1, 2, 3, 13, 14 y 15, obteniendo así dichas fuerzas (N):

$$F_{est} = \begin{pmatrix} 3.819 \\ 9.950 \\ -9.933 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -13.819 \\ 10.446 \\ 29.973 \end{pmatrix}$$

Continuamos realizando los diagramas de axiles, cortantes y momentos flectores para que los cálculos sean más visuales y ver donde se dan los máximos en la estructura.

Los cálculos estarán en la parte de Anexos como código del programa empleado en los cálculos, Wolfram Mathematica,

a continuación mostraremos los diagramas de esfuerzos y la deformada de la estructura:

- Axil

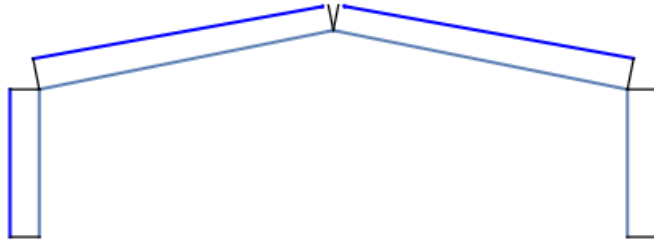


Ilustración 12: Diagrama de axiles, $N_x(x)$.

- Cortante

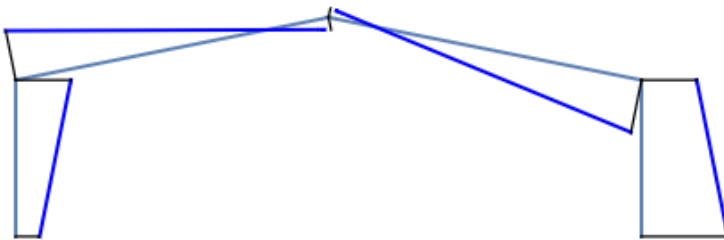


Ilustración 13: Diagrama de cortantes, $V_y(x)$.

- Momento flector

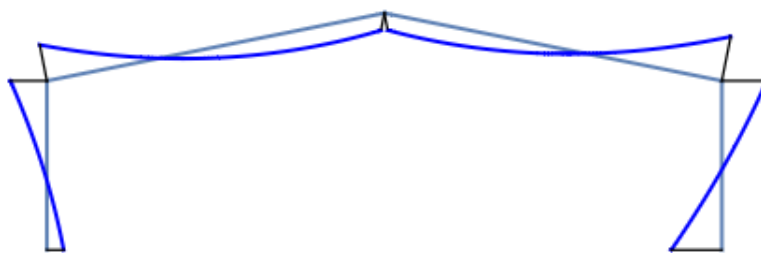


Ilustración 14: Diagrama de momento flector, $M_z(x)$.

El máximo momento flector se da en la barra 3 (pilar de la derecha) y tiene un valor de $M_{m\acute{a}x}=29.973$ (kNm).

Para finalizar los cálculos dibujaremos la deformada de la estructura para las cargas distribuidas que afectan a la estructura y así poder ver el punto que sufre el máximo

desplazamiento. Como se puede ver el máximo desplazamiento ocurre en la segunda barra (dintel de la izquierda) para la coordenada $x=9.76$ (m) y tiene un valor de $\delta=0.019$ (m).

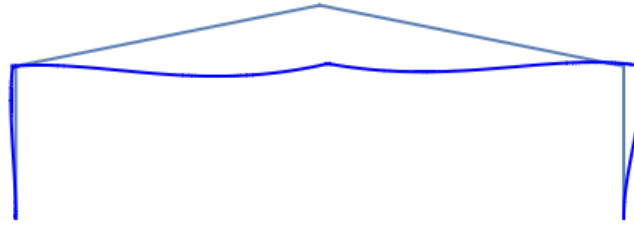


Ilustración 15: Diagrama de la deformada (x 100).

4.2 Deformación inicial pilar izquierdo.

El siguiente caso de aplicación práctica corresponde con que él en pilar izquierdo de la estructura tenemos una deformación inicial.

Seguiremos la metodología de resolución del punto anterior, empezando por el cálculo de la matriz de rigidez. Como podemos observar en la definición general de la matriz de rigidez, solo depende del área, la inercia y la longitud de las barras y del módulo de Young (A , I_z , L , E).

Esto quiere decir que con respecto al caso práctico anterior la matriz de rigidez tanto elemental como la de la estructura no varía.

Las fuerzas de empotramiento para deformación inicial están calculadas y demostradas en el apartado de deformaciones iniciales. Debemos tener en cuenta de la deformación inicial solo se tendrá en cuenta en el pilar de la izquierda, barra a-b, por ello solo esa barra tendrá fuerzas de empotramiento y tendrán un valor de:

$$F_{emp_{a-b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.6351 \\ 2.1959 \\ 0 \\ -2.63519 \\ 10.98 \end{pmatrix}$$



Calculamos las fuerzas equivalentes con las fuerzas de empotramiento anteriores y la matriz de giro. De la misma manera que ocurre con las de empotramiento, estas fuerzas equivalentes solo existirán en la barra a-b.

$$F_{eq_{a-b}} = \begin{pmatrix} 2.6351 \\ 0 \\ -2.1959 \\ -2.6351 \\ 0 \\ -10.98 \end{pmatrix}$$

El vector fuerzas equivalente de la estructura nos quedará:

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} 2.6351 \\ 0 \\ -2.1959 \\ -2.6351 \\ 0 \\ -10.98 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definimos de la misma manera el vector desplazamiento y fuerzas de la estructura, siendo las incógnitas de nuestro problema:

$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \\ u_c \\ v_c \\ \theta_c \\ u_d \\ v_d \\ \theta_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_{est} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x2} \\ F_{x2} \\ M_2 \end{pmatrix}$$

Con los vectores anteriores quedarían definidas nuestras condiciones. Aplicamos la ecuación matricial en la resolución de nuestro sistema.

$$F_{est} + F_{eq} = K_{est} * u_{est}$$

Para la resolución diferenciamos dos sistemas de ecuaciones. El primero el que formarían las ecuaciones en las que los desplazamientos son incógnitas, serán las ecuaciones 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12 del sistema. Obteniendo así los siguientes desplazamientos:

$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.000377 \\ 0.000057 \\ -0.000526 \\ -0.000148 \\ -0.001154 \\ 0.000126 \\ 0.000079 \\ -0.000057 \\ 0.000020 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Repetimos la operación, pero esta vez con las ecuaciones en las que las incógnitas son las fuerzas de la estructura, ecuaciones 1, 2, 3, 13, 14 y 15. El vector fuerzas de la estructura nos quedara:

$$F_{est} = \begin{pmatrix} 0.219 \\ -0.130 \\ -3.091 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.219 \\ 0.130 \\ 0.477 \end{pmatrix}$$

Para continuar con el estudio realizaremos los diagramas de axiles, cortantes y momentos flectores. Con ellos poder visualizar los puntos donde son máximos y en los cálculos realizados con Mathematica se verá el valor exacto, estos códigos estarán en el apartado Anexos.

- Axil

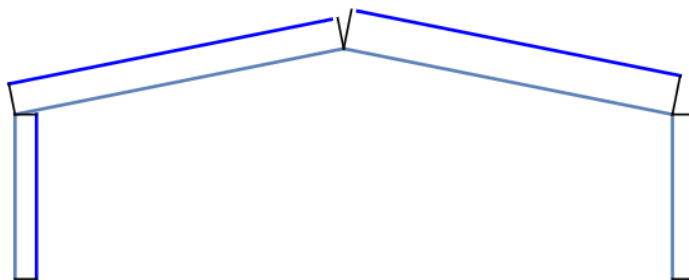


Ilustración 16: Diagrama de axiles, $N_x(x)$.

- Cortante

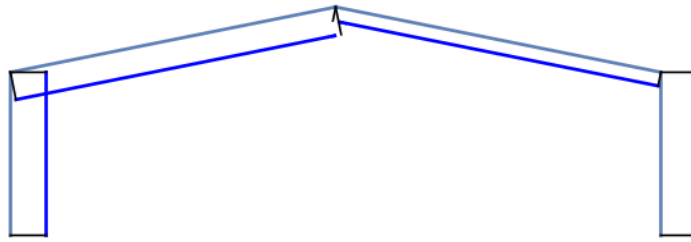


Ilustración 17: Diagrama de cortantes, $V_y(x)$.

- Momento flector

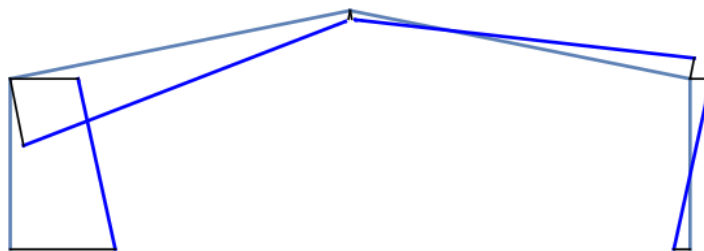


Ilustración 18: Diagrama de momento flector, $M_z(x)$.

Como se puede observar el momento máximo se da en el pilar donde actúa la deformación inicial, barra a-b. El valor del momento máximo será $M_{\text{máx}}=3.0916$ (kNm) y se da en el nodo a. La aparición de deformación inicial en el pilar supone un incremento del 10.31% del momento flector con respecto al caso de cargas distribuidas uniformes.

Finalizando con el estudio, dibujaremos la deformada de la estructura bajo el efecto de tensión inicial en el pilar izquierdo. Podremos ver qué punto sufre el mayor desplazamiento y como en el caso de los diagramas, mediante el programa Mathematica obtendremos de forma numérica el punto y el valor de desplazamiento que sufre:

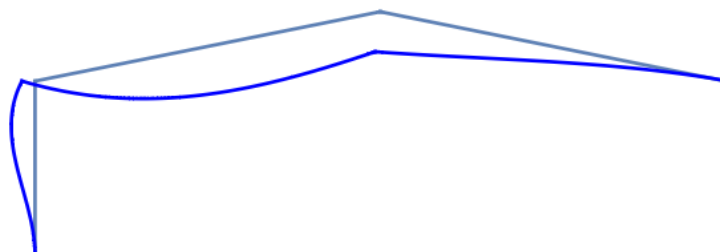


Ilustración19: Diagrama de la deformada (x 1000).

El desplazamiento máximo se puede ver que ocurre en el dintel de la izquierda, barra b-c. Tiene un valor de $\delta=0.0014$ (m) y el punto exacto de la barra en el que ocurre es el $x=6.365$ (m).

4.3 Deformación inicial dintel izquierdo.

En el siguiente caso de estudio la deformación inicial actuara en el dintel de la izquierda.

La metodología a seguir es la misma de los apartados anteriores, y como en el caso en el que la deformación actúa en el pilar la matriz de rigidez no cambia al no variar ningún factor del que depende (A, I_z , L, E).

Esto quiere decir que con respecto al caso práctico de cargas distribuidas, las matrices de rigidez tanto elemental como la de la estructura sigue sin variar.

Las fuerzas de empotramiento para deformación inicial están calculadas y demostradas en el apartado de deformaciones iniciales. La deformación inicial solo se tendrá en cuenta en el dintel de la izquierda, barra b-c, por ello solo esa barra tendrá fuerzas de empotramiento y tendrán un valor de:

$$F_{emp_{b-c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.6351 \\ 2.1959 \\ 0 \\ -2.63519 \\ 10.98 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el vector fuerzas equivalentes de la estructura será:

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.516 \\ -2.584 \\ -2.195 \\ -0.516 \\ 2.584 \\ -10.98 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definimos nuestras incógnitas con el vector desplazamiento y fuerzas de la estructura:

$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \\ u_c \\ v_c \\ \theta_c \\ u_d \\ v_d \\ \theta_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_{est} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x2} \\ F_{x2} \\ M_2 \end{pmatrix}$$

Mediante la ecuación matricial resolveremos nuestro sistema, separando las ecuaciones de desplazamiento y fuerzas de la estructura a calcular.

Nuestro primer sistema constaría de las ecuaciones del sistema 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. De esta manera nos darán los siguientes desplazamientos:



$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5168 \\ -2.5840 \\ -2.1959 \\ -0.5168 \\ 2.5840 \\ -10.98 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El segundo sistema estará formado por las ecuaciones 1, 2, 3, 13, 14, 15, y nos darán las fuerzas:

$$F_{est} = \begin{pmatrix} -1.613 \\ 0.618 \\ 3.383 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.613 \\ -0.618 \\ -4.717 \end{pmatrix}$$

Realizaremos los diagramas de axiles, cortantes y momentos flectores. Con ellos poder visualizar los puntos donde son máximos y en los cálculos realizados con Mathematica se verá el valor exacto, se ubicarán en el apartado Anexos.

- Axil

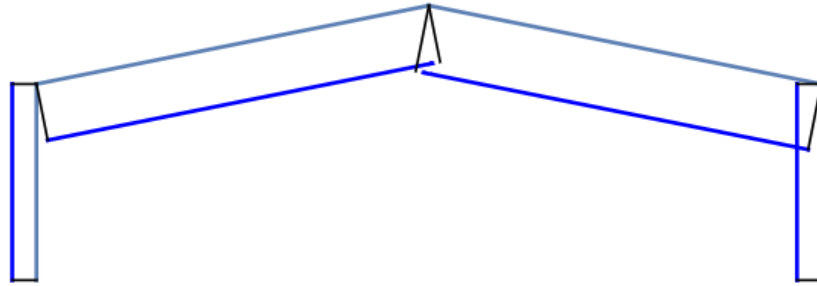


Ilustración 20: Diagrama de axil, $N_x(x)$.

- Cortante

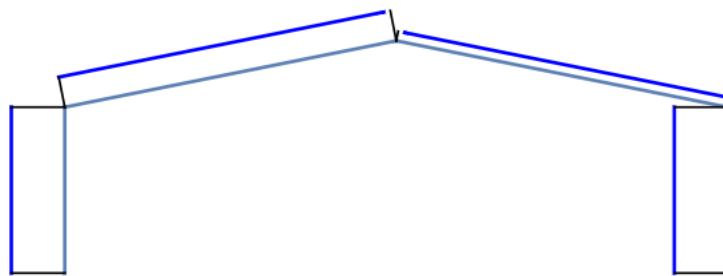


Ilustración 21: Diagrama de cortantes, $V_y(x)$.

- Momento flector

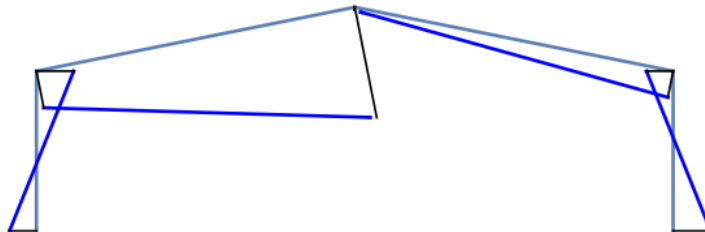


Ilustración 22: Diagrama del momento flector, $M_z(x)$.

El momento máximo ocurrirá en la barra donde actúa la deformación inicial, barra b-c. El valor del momento máximo será $M_{m\acute{a}x}=14.0911$ (kNm) y se da en el nodo c. El efecto de deformación inicial en el dintel supone un incremento del 47.01% del momento flector con respecto al caso de carga distribuida uniforme.

Dibujamos la deformada de la estructura bajo el efecto de tensión inicial en el dintel izquierdo. De esta manera se puede ver qué punto sufre el mayor desplazamiento y como en el caso de los diagramas, mediante el programa Mathematica

obtendremos de forma numérica el punto y el valor de desplazamiento que sufre.

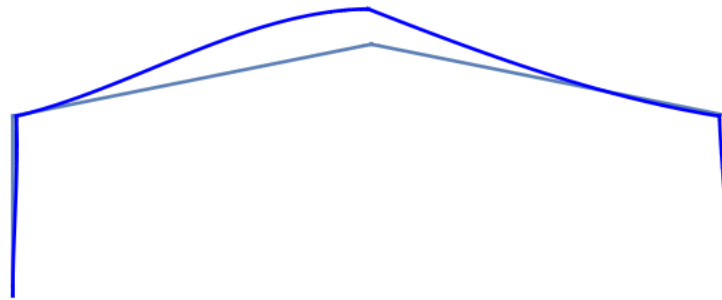


Ilustración23: Diagrama de la deformada (x 200).

El desplazamiento máximo ocurre en el dintel de la izquierda, barra b-c. Su punto exacto en la barra es el $x=8.48$ (m) y el desplazamiento tiene un valor de $\delta=0.0056$ (m).

Hacemos la comparación con el caso en el que la deformación inicial ocurre en el pilar.

Como se puede observar en los diagramas de esfuerzos axil y cortante no hay diferencia significativa.

En el caso del diagrama de momento flector la diferencia ocurre en las barras en las que tenemos deformación principalmente. En el caso de deformación inicial en el pilar el momento máximo ocurre en el pilar en el que afecta la deformación y tiene un valor de $M_{m\acute{a}x}=3.0916$ (kNm). En la estructura en la que la deformación afecta al dintel, el momento máximo aparece en dicho dintel y tiene un valor de $M_{m\acute{a}x}=14.0911$ (kNm).

En la comparativa de los desplazamientos máximos a través de la deformada, podemos decir que es mayor en el caso de deformación inicial en el dintel, siendo dicho desplazamiento $\delta=0.0058$ (m) y cuando afecta al pilar es $\delta=0.0014$ (m)

4.4 Tensión inicial pilar izquierdo

Este caso de estudio se basará en la aparición de tensión inicial en el pilar izquierdo de la estructura, barra a-b. Los pasos a seguir serán los mismos que en todos los casos de aplicación práctica anteriormente descritos.

Comenzamos con el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura. Como depende de los mismos factores que los estudios anteriores (A , I_z , L , E), la matriz de rigidez estructural sigue sin variar.

La fuerza externa que actúa sobre la estructura es la tensión inicial en la barra a-b, por ello solo habrá fuerzas de empotramiento en esa barra, por lo tanto las fuerzas equivalentes de la estructura nos quedaran cero en todas las barras a excepción del pilar izquierdo:

$$F_{eq_{a-b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.683 \\ 0 \\ 0 \\ 1.683 \end{pmatrix} \quad F_{eq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.683 \\ 0 \\ 0 \\ -1.683 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definimos los vectores desplazamiento y fuerzas en la estructura y aplicamos nuestras condiciones de contorno. Estas condiciones son apoyos empotrados y como únicas fuerzas las reacciones y momentos en dichos apoyos(a, d):

$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \\ u_c \\ v_c \\ \theta_c \\ u_d \\ v_d \\ \theta_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_{est} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x2} \\ F_{x2} \\ M_2 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la ecuación matricial para resolver nuestro sistema. Para la resolución lo volvemos a dividir en dos sistemas, diferenciando las ecuaciones con incógnitas en desplazamientos y el otro con las fuerzas.

Nuestro primer sistema constara de las ecuaciones 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Obtendremos los siguientes desplazamientos de la estructura al resolver el sistema:

$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.000238 \\ 2.21 \times 10^{-7} \\ -0.000137 \\ 0.000242 \\ -0.000030 \\ 0.000048 \\ 0.000247 \\ -2.21 \times 10^{-7} \\ -0.000056 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la misma manera agrupamos las ecuaciones 1, 2, 3, 13, 14 y 15. Obteniendo las siguientes fuerzas de la estructura:

$$F_{est} = \begin{pmatrix} 0.179 \\ -0.050 \\ -1.648 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.179 \\ 0.050 \\ 0.646 \end{pmatrix}$$

Seguidamente, realizamos los diagramas de axil, cortante y momento flector. Únicamente expondremos los diagramas, los cálculos estarán en los códigos de Mathematica disponibles en Anexos.

- Axil

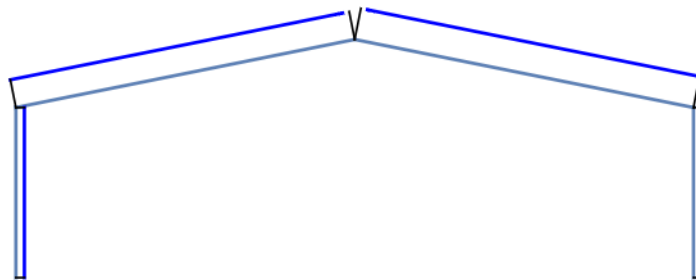


Ilustración 24: Diagrama de axil, $N_x(x)$.

- Cortante

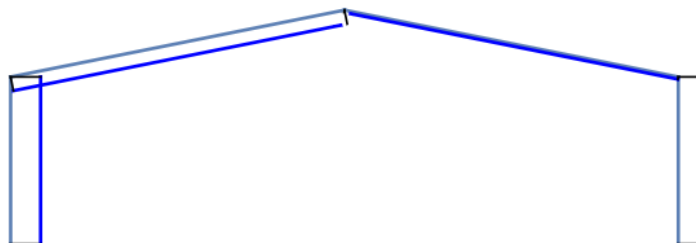
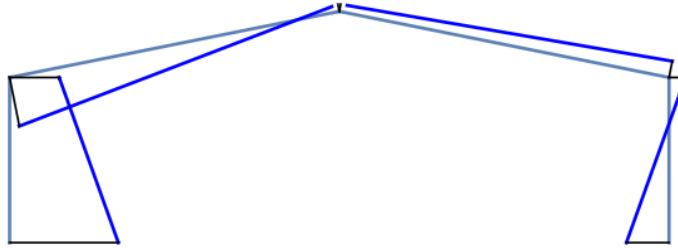


Ilustración 25: Diagrama de cortante, $V_y(x)$.

- Momento flector

Ilustración 26: Diagrama de momento flector, $M_z(x)$.

El momento máximo ocurrirá en la barra donde actúa la tensión inicial, (barra a-b), exactamente en el nodo a. El momento máximo será $M_{\text{máx}}=57.157$ (kNm), Este valor es mucho mayor comparándolo el caso de deformación en el pilar. La aparición de tensión inicial en el pilar supone un incremento del 52.43% del momento flector con respecto del caso de carga distribuida uniforme.

Finalizamos el estudio con la deformada de la estructura bajo la acción de tensión residual en el pilar izquierdo (barra a-b). En este diagrama podemos ver el punto de máximo desplazamiento y el comportamiento de la estructura:

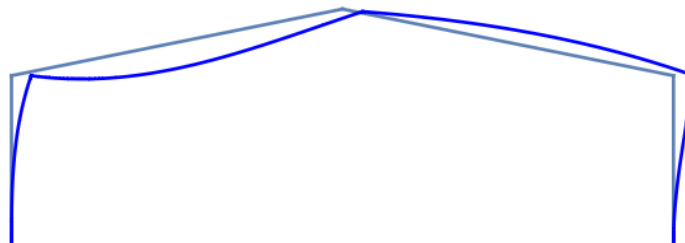


Ilustración 27: Diagrama de la deformada (x 2500).

Como se puede observar, el punto de máximo desplazamiento se encuentra en la barra b-c, en la coordenada $x=4.227$ (m) y tiene un valor de $\delta=0.000255$ (m).

4.5 Tensión inicial dintel izquierdo

Nuestra última aplicación práctica se tendremos tensión inicial en el dintel izquierdo, barra b-c.

La estructura sigue siendo la misma que en los casos anteriores, por ello la matriz rigidez tanto de cada barra como rigidez no variara.

En relación a las fuerzas de empotramiento, únicamente las tendremos en la barra donde actúa la tensión inicial y por consiguiente las fuerzas equivalentes serán:

$$F_{eq_{b-c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.683 \\ 0 \\ 0 \\ 1.683 \end{pmatrix} \quad F_{eq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.683 \\ 0 \\ 0 \\ -1.683 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definimos los vectores desplazamiento y fuerzas en la estructura y aplicamos nuestras condiciones de contorno. Estas condiciones son apoyos empotrados y como únicas fuerzas las reacciones y momentos en dichos apoyos (a, d) siendo nuestras incógnitas las siguientes:

$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \\ u_c \\ v_c \\ \theta_c \\ u_d \\ v_d \\ \theta_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_{est} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x2} \\ F_{x2} \\ M_2 \end{pmatrix}$$

Agrupamos las ecuaciones en las que las incógnitas son desplazamientos (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12) formando el sistema del que obtendremos los desplazamientos:

$$u_{est} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.000359 \\ 2.26 \times 10^{-7} \\ 0.000186 \\ -0.000363 \\ 0.000030 \\ -0.00019 \\ -0.00036 \\ -2.26 \times 10^{-7} \\ 0.000104 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema del que obtendremos las fuerzas lo formaran las ecuaciones 1, 2, 3, 13, 14 y 15. Las fuerzas serán las siguientes:

$$F_{est} = \begin{pmatrix} -0.179 \\ -0.051 \\ -0.205 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.179 \\ 0.051 \\ -0.816 \end{pmatrix}$$

Realizaremos los diagramas de axil, cortante y momento flector para ver el comportamiento de la estructura en estas condiciones.

- Axil

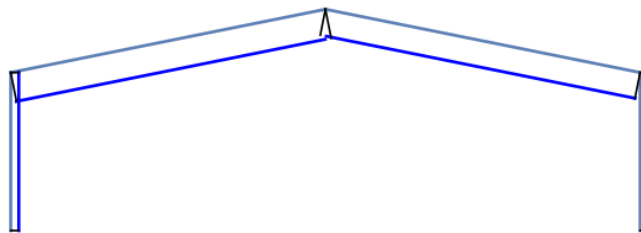


Ilustración 28: Diagrama de axil, $N_x(x)$.

- Cortante

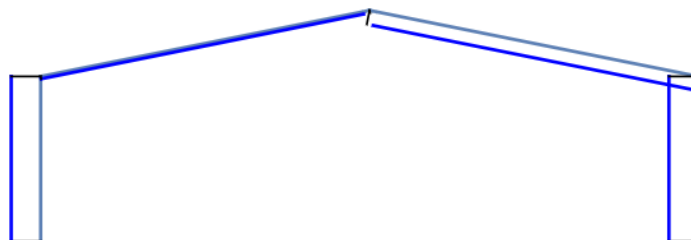
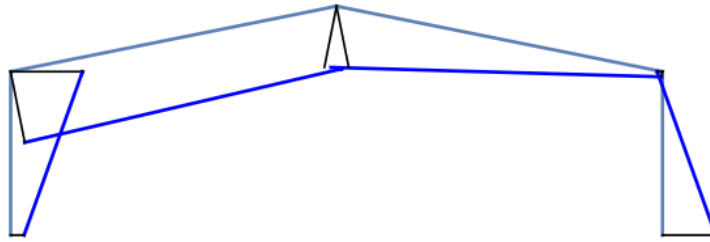


Ilustración 29: Diagrama de cortantes, $V_y(x)$.

- Momento flector

Ilustración 30: Diagrama de momento flector, $M_z(x)$.

Como se puede comprobar en los cálculos el máximo momento flector ocurre en la barra donde actúa la tensión inicial (barra b-c) en el nodo b. Este momento máximo tiene un valor de $M_{\max}=56.8443$ (kNm). La aparición de tensión inicial en el dintel supone un incremento del 52.72% del momento flector con respecto al caso de carga distribuida uniforme.

Para finalizar el estudio realizaremos el diagrama de la deformada y así se podrá comprobar el punto que sufre el mayor desplazamiento.

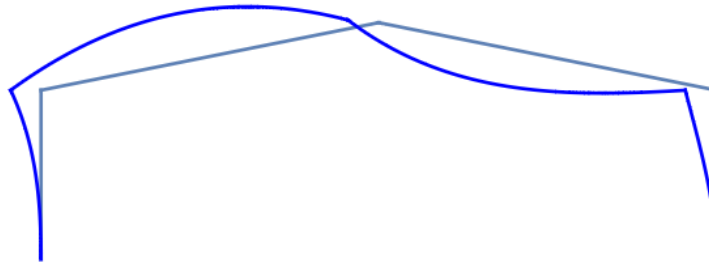


Ilustración31: Diagrama de la deformada (x 2500).

El máximo desplazamiento se da en la barra b-c, donde tenemos la tensión inicial, en la coordenada $x=5.278$ (m) y tiene un valor de $\delta=0.000492$ (m).

Compararemos los esfuerzos y los desplazamientos de los casos con tensión inicial en pilar y dintel.

Como se puede observar en los diagramas de esfuerzos axial y cortante no podemos decir que haya una diferencia significativa.

En el caso del diagrama de momento flector la diferencia vuelve a ser entre las barras en las que tenemos tensión principalmente. En el caso con tensión inicial en el pilar el momento máximo ocurre en la barra afectada y tiene un valor de $M_{\max}=57.157$ (kNm). En la estructura en la que la tensión afecta



al dintel, el momento máximo aparece en dicho dintel y tiene un valor de $M_{\text{máx}}=56.8443$ (kNm). Como podemos ver los valores son muy similares y mucho mayores que en los casos que tenemos deformación inicial.

Realizando la comparativa de los desplazamientos máximos a través de la deformada, podemos decir que es mayor en el caso de tensión inicial en el dintel, siendo casi el doble que cuando afecta al pilar con un valor de $\delta=0.000495$ (m) y cuando afecta al pilar es $\delta=0.000255$ (m)





Capítulo 5



5 Conclusiones y líneas de futuro

5.1 Conclusiones

El objetivo de nuestro estudio es evaluar el efecto de las deformaciones y tensiones iniciales en barras esbeltas y comprobar la respuesta de la estructura, tipo nave industrial en nuestro caso, a través de los diagramas de esfuerzo y deformada de dicha estructura. Se han realizado las correspondientes comparaciones entre los casos de deformación inicial en pilar con respecto al efecto cuando es en el dintel y así poder ver donde el impacto es mayor, llegando a la conclusión que el desplazamiento máximo ocurrirá en el caso con deformación inicial actúa en el dintel.

De la misma manera se ha realizado el estudio con las aplicaciones prácticas en las que afecta una tensión inicial a la estructura, siendo en este caso el desplazamiento máximo cuando dicha tensión inicial afecta al pilar, pero para el momento flector máximo será muy similar en ambos casos.

Se ha cumplido el objetivo de cálculo con la ayuda del programa Wolfram Mathematica del efecto en vigas de los casos de barra curva, falta de ajuste y cargas térmicas. También se ha modelado los códigos correspondientes a los casos de tensión inicial generalizada y para tensiones residuales. Tanto las deformaciones como las tensiones se han incluido en un conjunto de barras solicitadas por cargas mecánicas y se ha analizado su efecto.

Con la consideración de todos los casos estudiados se ha intentado englobar de manera simplificada los posibles casos de aparición de carga y/o efectos sobre una estructura de manera independiente. En caso de que en un estudio futuro se produzcan varios efectos de manera simultánea solo debemos aplicar el principio de superposición de efectos.

5.2 Líneas futuras

Para posteriores estudios se propone realizar una investigación enfocada en el estudio de las tensiones residuales, como pueden ser por ejemplo debido a la soldadura o algún proceso de fabricación como por ejemplo la laminación.



Es un tema del que he podido encontrar poca información pero con el cual se podría conocer mejor la respuesta de una estructura en deformaciones y/o tensiones.

Respecto al material, se ha utilizado vigas de acero IPE 300 al ser comúnmente empleadas por sus buenas características. Se podría considerar cualquier otro tipo de viga o material para ampliar el estudio. Los códigos de Mathematica están con los parámetros de nuestra viga pero fácilmente se podría modificar introduciendo los nuevos valores a tener en cuenta. Y obtener así los diagramas de esfuerzos y deformada correspondientes al nuevo material.

Este estudio se ha realizado para vigas de acero IPE 300, pero si se diera el caso de que las barras fueran de otro material o forma solo habría que cambiar las características a las de la barra de estudio introduciéndolo en los códigos de Mathematica y se obtendrán los nuevos resultados



Capítulo 6



6 Presupuesto- Estudio Económico

6.1 Introducción

Este apartado ha sido creado para determinar cuáles serían los costes teóricos necesarios para poder llevar a cabo este proyecto y así poder analizar su viabilidad.

El proyecto se basa en el estudio de los efectos de deformaciones y tensiones iniciales en la estructura aplicando un método de resolución de problemas de cálculo mediante la ayuda informática del programa Wolfram Mathematica. Para su realización consideraremos mucho más importante la aportación humana a la material, al necesitar un buen dominio de programación con Wolfram Mathematica y únicamente un ordenador.

Los costes totales se dividen por regla general en costes directos y costes indirectos:

$$\text{Costes totales} = \text{Costes directos} + \text{Costes indirectos}$$

- Costes directos: son aquellos que pueden ser asignados de forma directa al cálculo del precio final del producto/servicio que se ofrece. Un ejemplo de estos costes directos serían los costes de mano de obra y material.
- Costes indirectos: son aquellos que afectan al proceso de producción pero no a al producto final de forma directa. Destacamos los costes de explotación (internet, agua, electricidad,...) y de administración.

6.2 Costes directos

6.2.1 Mano de obra

Consideramos que son los gastos destinados a los trabajadores que participan en el proyecto. Para nuestro estudio solo sería necesario un ingeniero

Los costes de mano de obra los dividimos en:

- Sueldo bruto del ingeniero.
- Coste de la seguridad social.
- Coste de formación en riesgos laborales.

Realizamos el cálculo de los días de trabajo del ingeniero en un año, son un total de 222 días laborales, a razón de 8



horas diarias. El ingeniero trabaja un total de 1776 horas anuales.

Días totales en un año	365
Fines de semana	104
Días festivos reconocidos	11
Días laborales de vacaciones	22
Días de asuntos personales	6
Total días útiles de trabajo	22
A razón de 8 horas diarias	1776 horas/año

La siguiente tabla mostrara los costes anuales que supone tener un trabajador:

Salario bruto	32000€/año
Prestación a la seguridad social (30%)	96000€/año
Formación en riesgos laborales	150€/año
Total	41750€/año
Coste de mano de obra por hora	23.50€/hora

Distribuimos el tiempo empleado para la realización de nuestro estudio y las actividades realizadas. Para ello diferenciamos las horas de equipo empleadas para calcular los costes del material amortizable y las horas empleadas por el ingeniero:

fase	Horas ingeniero	Horas equipo
Análisis previo	50	-
Estudios preliminares	85	60
Familiarización Wolfram Mathematica	15	30
Análisis general del programa	30	80
Escritura del programa	100	350
Puesta a punto y correcciones	30	80
Validación de resultados	30	60
Preparación de la documentación	75	75
Nº total de horas	400	735

Por todo lo expuesto anteriormente, el coste de que un ingeniero trabaje 400 con un sueldo de 23.50€/hora, supone un coste de mano de obra de 9400€.

6.2.2 Material amortizable

Estos costes están asociados a las licencias software y al equipo informático empleado en el proyecto. Suponemos una amortización lineal media de 3 años.

Para nuestro estudio el material amortizable empleado sería:

- Ordenador portátil Asus GL553VD-DM064T
- Licencia de software Wolfram Mathematica

La estimación de vida útil de los materiales amortizables adquiridos la consideramos de 3 años, que son 1776 horas laborales por año, los equipos y licencias tendrán un uso de vida útil de 5328 horas. Desglosamos el desembolso inicial del material, la utilización y el coste de amortización de cada uno:

Material	Desembolso inicial	Coste/hora	Horas empleadas	Coste de amortización
Ordenador portátil	945	0.177€/hora	735	130.09€
Wólfram Mathematica	8300	1.55€/hora	600	930€
Total				1060.09€

Los costes totales del material amortizable son mil sesenta euros con nueve céntimos.

6.2.3 Material no amortizable

Este coste lo formarían los gastos derivados de la realización del estudio:

Material de representación grafica	140€
Encuadernación	80€
Total	220€

Por lo tanto, los gastos del material no amortizable serían de ciento cincuenta euros.

6.2.4 Costes directos totales

Los costes directos totales que nos supondría la realización del estudio serían:

Mano de obra	9400€
Material amortizable	1060.09€
Material no amortizable	220€
Total	10680.09€

Los costes directos totales ascenderán a un valor de diez mil seiscientos ochenta euros con nueve céntimos.

6.3 Costes indirectos

Los costes indirectos englobarían los gastos de las actividades de la empresa que no se pueden atribuir a ninguna actividad específica. Los dividimos en costes administrativos y de explotación (electricidad, internet, telefonía,...):

Costes administrativos	200€
Costes de explotación	500€
Total	700€

Los costes indirectos ascenderían a seiscientos euros.

6.4 Costes totales

Para concluir el estudio económico del proyecto fin de carrera, mostraremos en la siguiente tabla los costes directos e



indirectos, obteniendo así los costes totales de la realización del estudio:

Costes directos	10680.09€
Costes indirectos	700€
Costes totales	11380.09€
+21% IVA	13769.09€

Los costes totales del proyecto, aplicando el 21% de IVA, asciende a trece mil setecientos sesenta y nueve euros con nueve céntimos.





Bibliografía y webgrafía

Bibliografía

[1] Valladares Valdivieso, Rolando Daniel. Alivio de tensiones mediante vibraciones subarmónicas en uniones soldadas de acero al carbono, 2017.

[2] Cacho Pérez, Mariano. Magdaleno González, Álvaro. Del Caño Sánchez, Juan Carlos. Modelado numérico de sistemas sólidos. ISBN: 978-84-1320-126-9

[3] Catalogo técnico vigas de acero- BEKAERT

[4] Lozano Mondragón, Francisco A. Ramírez Camacho, Jessica. Durante Ramírez, Abraham. Manual. Introducción a la programación en Mathematica.

[5] Jarcia Rodero, Gorka. Trabajo Fin de Máster en Ingeniería de Materiales y Fabricación. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y Telecomunicación

[6] De Justo Moscardó, Enrique. Delgado Trujillo, Antonio. Fernández Serrano, Antonia. Bacón Hurtado, María Concepción. Tema 8: Deformaciones Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e Ingeniería del terreno. E.T.S de Arquitectura. Universidad de Sevilla.

[7] García Rodero, Gorka. Alivio de tensiones residuales: Tratamiento térmico vs Vibración. Trabajo Fin de Máster en Ingeniería de Materiales y Fabricación. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicaciones. Septiembre 2014

Webgrafía

[8] DPM04. Resistencia de materiales Tracción- compresión.
https://ikastaroak.birt.eus/edu/argitalpen/backupa/20200331/1920k/es/DFM/DPM/DPM04/es_DFM_DPM04_Contentidos/website_21_traccincompresin.html (fecha de última consulta: julio de 2021)

[9] Matriz de transformación deformaciones-desplazamientos B.
<https://www.thefinitelement.com/matriz-deformaciones-desplazamientos-b> (fecha de última consulta: julio de 2021)



Anexos

Anexo 1: Cálculos metodología de los ejemplos

En este anexo mostraremos los cálculos realizados con el programa Wolfram Mathematica de la metodología necesaria para el estudio, para comprobar que los resultados sean correctos.

A continuación se dispondrán imágenes de los códigos de los cálculos.

- Matriz de rigidez

```

In[ ]:= Nu = {1/2 * (1 - xi), 1/2 * (1 + xi)};
Nv = {1/4 * (2 - 3 xi + xi^3), 1/4 * (2 + 3 xi - xi^3)};
No = {L/8 * (1 - xi - xi^2 + xi^3), L/8 * (-1 - xi + xi^2 + xi^3)};

In[ ]:=
In[ ]:= (*matriz de rigidez elemental *)

mB = {{(2/L) D[Nu[[1]], xi], 0, 0, (2/L) D[Nu[[2]], xi], 0, 0},
{0, (2/L)^2 D[Nv[[1]], {xi, 2}], (2/L)^2 D[No[[1]], {xi, 2}], 0, (2/L)^2 D[Nv[[2]], {xi, 2}],
(2/L)^2 D[No[[2]], {xi, 2}]};

int = vE Transpose[mB].DiagonalMatrix[{A, Iz}].mB;
mK = Integrate[int L/2, {xi, -1, +1}];
MatrixForm[mK]

```

$$\begin{pmatrix}
 \frac{A v E}{L} & 0 & 0 & -\frac{A v E}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12 I z v E}{L^3} & \frac{6 I z v E}{L^2} & 0 & -\frac{12 I z v E}{L^3} & \frac{6 I z v E}{L^2} \\
 0 & \frac{6 I z v E}{L^2} & \frac{4 I z v E}{L} & 0 & -\frac{6 I z v E}{L^2} & \frac{2 I z v E}{L} \\
 -\frac{A v E}{L} & 0 & 0 & \frac{A v E}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12 I z v E}{L^3} & -\frac{6 I z v E}{L^2} & 0 & \frac{12 I z v E}{L^3} & -\frac{6 I z v E}{L^2} \\
 0 & \frac{6 I z v E}{L^2} & \frac{2 I z v E}{L} & 0 & -\frac{6 I z v E}{L^2} & \frac{4 I z v E}{L}
 \end{pmatrix}$$

- Carga distribuida

```

In[ ]:= Nu = {1 / 2 × (1 - ξ), 1 / 2 × (1 + ξ)};
          Nv = {1 / 4 × (2 - 3 ξ + ξ^3), 1 / 4 × (2 + 3 ξ - ξ^3)};
          Nθ = {L / 8 (1 - ξ - ξ^2 + ξ^3), L / 8 (-1 - ξ + ξ^2 + ξ^3)};

In[ ]:=
In[ ]:= mN = {
              {Nu[[1]], 0, 0, Nu[[2]], 0, 0},
              {0, Nv[[1]], Nθ[[1]], 0, Nv[[2]], Nθ[[2]]}
            };

In[ ]:=
In[ ]:= (* fuerzas equivalentes --> carga distribuida (q) *)

int = Transpose[mN] . {0, q};
      |transposición
mK = Integrate[int L / 2, {ξ, -1, +1}];
      |integra
MatrixForm[mK]
      |forma de matriz
MatrixForm=
      (
      0
      L q
      2
      L^2 q
      12
      0
      L q
      2
      - L^2 q
      12
      )
  
```

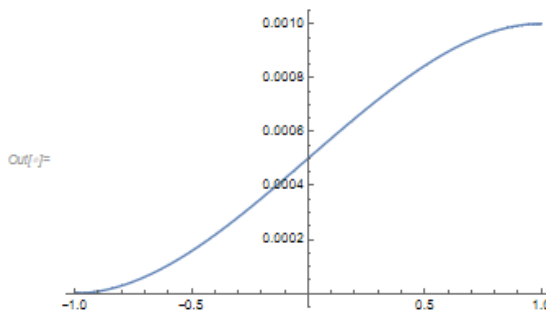
Continuamos con los códigos de Mathematica en el estudio de las deformaciones iniciales.

- Barra doblada

```
In[ ]:= Nu = {1/2 * (1 - xi), 1/2 * (1 + xi)};
NV = {1/4 * (2 - 3 * xi + xi^3), 1/4 * (2 + 3 * xi - xi^3)};
N0 = {L/8 * (1 - xi - xi^2 + xi^3), L/8 * (-1 - xi + xi^2 + xi^3)};
```

```
In[ ]:= (+ barra doblada -)
f[xi_] := a + b * xi + c * xi^2 + d * xi^3
sol = Solve[{f[-1] == 0, f'[-1] == 0, f[+1] == 0, f'[+1] == 0}, {a, b, c, d}][[1]];
v0 = Simplify[f[xi] /. sol]
Plot[v0 /. {L -> 6, 0 -> 0.001, 0 -> 0}, {xi, -1, +1}]
```

$$\text{Out[]} = -\frac{1}{8} \times (2 \cdot 0 \cdot (-2 + \xi) - L \cdot 0 \cdot (-1 - \xi)) \cdot (1 + \xi)^2$$



```
In[ ]:=
```

```
In[ ]:= (+ vector fuerzas equivalentes +)
```

```
mB = {
  {(2/L) D[Nu[[1]], xi], 0, 0, (2/L) D[Nu[[2]], xi], 0, 0},
  {0, (2/L)^2 D[NV[[1]], {xi, 2}], (2/L)^2 D[N0[[1]], {xi, 2}], 0, (2/L)^2 D[NV[[2]], {xi, 2}],
  (2/L)^2 D[N0[[2]], {xi, 2}]};
```

```
int = vE Transpose[mB].DiagonalMatrix[{A, Iz}].{0, (2/L)^2 D[v0, {xi, 2}]};
```

```
mK = Integrate[int/L/2, {xi, -1, +1}];
```

```
MatrixForm[mK]
```

$$\text{Out[]} = \text{MatrixForm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{12 I z v E 0}{L^3} - \frac{6 I z v E 0}{L^2} & -\frac{6 I z v E 0}{L^2} - \frac{2 I z v E 0}{L} \\ 0 & 0 \\ \frac{12 I z v E 0}{L^3} - \frac{6 I z v E 0}{L^2} & -\frac{6 I z v E 0}{L^2} - \frac{4 I z v E 0}{L} \end{pmatrix}$$



Falta de ajuste

```

In[ ]:= Nu = {1/2*(1-ξ), 1/2*(1+ξ)};
        Nv = {1/4*(2-3ξ+ξ^3), 1/4*(2+3ξ-ξ^3)};
        Nθ = {L/8*(1-ξ-ξ^2+ξ^3), L/8*(-1-ξ+ξ^2+ξ^3)};

```

```

In[ ]:= (+ barra corta +)
        f[ξ_] := a+b ξ
        sol = Solve[{f[-1] == 0, f[+1] == -λ0}, {a, b}][[1]];
        u0 = Simplify[f[ξ] /. sol]

```

$$\text{Out[]} = -\frac{1}{2} \lambda_0 (1 - \xi)$$

```

In[ ]:=

```

```

In[ ]:= (+ vector fuerzas equivalentes +)

```

```

mB = {
  {(2/L) D[Nu[[1]], ξ], 0, 0, (2/L) D[Nu[[2]], ξ], 0, 0},
  {0, (2/L)^2 D[Nv[[1]], {ξ, 2}], (2/L)^2 D[Nθ[[1]], {ξ, 2}], 0, (2/L)^2 D[Nv[[2]], {ξ, 2}], (2/L)^2 D[Nθ[[2]], {ξ, 2}]}
};

```

```

int = VE Transpose[mB].DiagonalMatrix[{A, Iz}].{(2/L) D[u0, ξ], 0};

```

```

VF = Integrate[int L/2, {ξ, -1, +1}];

```

```

MatrixForm[VF]

```

$$\text{Out[]} \text{MatrixForm} = \begin{pmatrix} \frac{A \vee E \lambda_0}{L} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{A \vee E \lambda_0}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Carga térmica

```

In[ ]:= Nu = {1/2*(1-ξ), 1/2*(1+ξ)};
Nv = {1/4*(2-3*ξ+ξ^3), 1/4*(2+3*ξ-ξ^3)};
Nθ = {L/8*(1-ξ-ξ^2+ξ^3), L/8*(-1+ξ+ξ^2+ξ^3)};

In[ ]:= (* desplazamientos *)
u = Nu.{0, δu2};
v = Nv.{0, -δv2}+Nθ.{0, -δθ2}; (* supuesto T1>T2 *)

In[ ]:= (* deformaciones "virtuales" *)
δε = a0 (2/L) D[u, ξ] + y (2/L)^2 D[v, {ξ, 2}];

In[ ]:= T = (T1+T2) / 2 + y (T1 - T2) / h
ε0 = α T;

Out[ ]:= T1 - T2 (T1 - T2) y
2 h

In[ ]:= (* energia deformacion (PTV) *)
int = VE δε ε0;
Ed = Simplify[Expand[Integrate[int L/2, {ξ, -1, 1}]] /. a0 -> A /. y^2 -> Iz /. y -> 0]
(* simplifica expand integra *)

Out[ ]:= 1 A (T1 - T2) VE α δu2 + Iz (-T1 - T2) VE α δθ2
2 h

In[ ]:= (* vector fuerzas equivalentes *)
VF2 = {D[Ed, δu2], D[Ed, δv2], D[Ed, δθ2]};
(* deriva deriva deriva *)

(* equilibrio *)
VF1 = Table[0, {3}];
(* tabla *)
VF1[[1]] = -VF2[[1]];
VF1[[2]] = -VF2[[2]];
VF1[[3]] = -VF2[[2]] L - VF2[[3]];
VF = Join[VF1, VF2];
(* junta *)

MatrixForm[VF]
(* forma de matriz *)

Out[ ]:= MatrixForm[
  (-1/2 A (T1 - T2) VE α
   0
   -Iz (-T1 - T2) VE α
   1/2 A (T1 - T2) VE α
   0
   Iz (-T1 - T2) VE α)

```

- Deformación inicial caso general

```

In[ ]:= Nu = {1/2*(1 - xi), 1/2*(1 + xi)};
          NV = {1/4*(2 - 3*xi + xi^3), 1/4*(2 + 3*xi - xi^3)};
          Ntheta = {L/8*(1 - xi - xi^2 + xi^3), L/8*(-1 - xi + xi^2 + xi^3)};

In[ ]:= (* desplazamientos *)
u = Nu.{theta, delta u2};
v = NV.{theta, -delta v2} + Ntheta.{theta, -delta theta2}; (* supuesto T1>T2 *)

In[ ]:= (* deformaciones "virtuales" *)
delta epsilon = x0*(2/L)*D[u, xi] + y*(2/L)^2*D[v, {xi, 2}];

In[ ]:=

In[ ]:= T = 10^6*T0*x^2*y*z^2/L^5; (* eC *)
epsilon0 = alpha*T;

In[ ]:= X = Nu.{theta, L} (* interpolacion geometria *)

Out[ ]:= 1/2*L*(1 + xi)

In[ ]:=

In[ ]:= (* seccion -> perfil IPE300 *)
IPE300 = {h -> 0.3, b -> 0.15, e -> 7.1*10^-3, e1 -> 10.7*10^-3};

In[ ]:= I1 = Integrate[Integrate[y^2*z^2, {y, h/2 - e1, h/2}], {z, -b/2, b/2}]; (* ala superior *)

I2 = Integrate[Integrate[y^2*z^2, {y, -(h/2 - e1), h/2 - e1}], {z, -e/2, e/2}]; (* alma *)

I3 = Integrate[Integrate[y^2*z^2, {y, -h/2, -(h/2 - e1)}], {z, -b/2, b/2}]; (* ala interior *)

Iyz2 = Simplify[I1 + I2 + I3]
Iyz2 /. IPE300 (* m^6 *)

Out[ ]:= 1/144*(-e^3*(2*e1 - h)^3 - 2*b^3*e1*(4*e1^2 - 6*e1*h - 3*h^2))
Out[ ]:= 1.26045*10^-7

In[ ]:= datos = {L -> 6, vE -> 2.1*10^11, alpha -> 1.2*10^-5, T0 -> 20};

In[ ]:= (* energia deformacion (PTV) *)
int = vE*delta epsilon*epsilon0;
Ed = Simplify[Expand[Integrate[int*L/2, {xi, -1, 1}]] /. x0 -> 0 /. y -> y^2*z^2 -> Iyz2 /. y -> 0]

Out[ ]:= 1/27*31250*(-e^3*(2*e1 - h)^3 - 2*b^3*e1*(4*e1^2 - 6*e1*h - 3*h^2))*T0*vE*alpha*(6*delta v2 - 5*L*delta theta2)

In[ ]:= (* vector fuerzas equivalentes *)
VF2 = {D[Ed, delta u2], D[Ed, delta v2], D[Ed, delta theta2]};
(* equilibrio *)
VF1 = Table[0, {3}];
VF1[[1]] = -VF2[[1]];
VF1[[2]] = -VF2[[2]];
VF1[[3]] = -VF2[[2]]*L - VF2[[3]];
VF = Join[VF1, VF2];

```

```
MatrixForm[vF /. IPE300 /. datos]
forma de matriz
Out[ ]:= MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4901.76 \\ -4901.76 \\ 0 \\ 4901.76 \\ -24508.8 \end{pmatrix}$$

```

Los siguientes cálculos corresponden con el estudio realizado con la tensión inicial.

- Tensión inicial

```
In[ ]:= (* definiciones *)
In[ ]:= Nu = {1/2*(1 - xi), 1/2*(1 + xi)};
Nv = {1/4*(2 - 3*xi + xi^3), 1/4*(2 + 3*xi - xi^3)};
N0 = {L/8*(1 - xi - xi^2 + xi^3), L/8*(-1 - xi + xi^2 + xi^3)};

In[ ]:= (* desplazamientos *)
u = Nu.{0, du2};
v = Nv.{0, -dv2} + N0.{0, -d02}; (* supuesto T1>T2 *)

In[ ]:= (* deformaciones "virtuales" *)
d0 = x0*(2/L)*D[u, xi] + y*(2/L)*2*D[v, {xi, 2}];

In[ ]:=
Out[ ]:=

$$\frac{25000. fy y z^2 (1 + \xi)^2}{L^3}$$


In[ ]:=
In[ ]:= (* seccion -> perfil IPE300 *)
In[ ]:= IPE300 = {h -> 0.3, b -> 0.15, e -> 7.1*10^-3, e1 -> 10.7*10^-3};

In[ ]:= A1 = Integrate[Integrate[x0*y*z^2, {y, h/2 - e1, h/2}], {z, -b/2, b/2}]; (* ala superior *)
A2 = Integrate[Integrate[x0*y*z^2, {y, -(h/2 - e1), h/2 - e1}], {z, -e/2, e/2}]; (* alma *)
A3 = Integrate[Integrate[x0*y*z^2, {y, -h/2, -(h/2 - e1)}], {z, -b/2, b/2}]; (* ala inferior *)

A0 = Simplify[A1 + A2 + A3]
A0 /. IPE300 (* m^6 *)

Out[ ]:= 0

In[ ]:= I1 = Integrate[Integrate[y^2*z^2, {y, h/2 - e1, h/2}], {z, -b/2, b/2}]; (* ala superior *)
I2 = Integrate[Integrate[y^2*z^2, {y, -(h/2 - e1), h/2 - e1}], {z, -e/2, e/2}]; (* alma *)
I3 = Integrate[Integrate[y^2*z^2, {y, -h/2, -(h/2 - e1)}], {z, -b/2, b/2}]; (* ala inferior *)

Iyz2 = Simplify[I1 + I2 + I3]
Iyz2 /. IPE300 (* m^6 *)
```

```

Out[ ]:=  $\frac{1}{144} (-e^3 (2 e1 - h)^3 - 2 b^3 e1 (4 e1^2 - 6 e1 h - 3 h^2))$ 

Out[ ]:= 1.26045 × 10-7

In[ ]:=

In[ ]:= datos = {L → 6, VE → 2.1 × 1011, α → 1.2 × 10-5, fy → 275 × 106};

In[ ]:= (* energia deformacion (PTV) *)
int = δe c0;
Ed = Simplify[Expand[Integrate[int L/2, {ξ, -1, 1}]] /. x0 → 1 /. y ^ 2 z ^ 2 → Iy z2 /. y → 0]
Out[ ]:= 0. +  $\frac{694.444 fy (-e^3 (2 e1 - h)^3 - 2 b^3 e1 (4 e1^2 - 6 e1 h - 3 h^2)) \delta v2}{L^4} - \frac{578.704 fy (-e^3 (2 e1 - h)^3 - 2 b^3 e1 (4 e1^2 - 6 e1 h - 3 h^2)) \delta \theta 2}{L^3}$ 

In[ ]:= (* vector fuerzas equivalentes *)
VF2 = {D[Ed, δu2], D[Ed, δv2], D[Ed, δθ2]};
(* equilibrio *)
VF1 = Table[0, {3}];
VF1[[1]] = -VF2[[1]];
VF1[[2]] = -VF2[[2]];
VF1[[3]] = -VF2[[2]] L - VF2[[3]];
VF = Join[VF1, VF2];
MatrixForm[VF /. IPE300 /. datos]
forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2674.57 \\ -2674.57 \\ 0 \\ 2674.57 \\ -13372.9 \end{pmatrix}$$

Out[ ]:= MatrixForm=

```

- Tension residual

```

In[ ]:= (* definiciones *)

In[ ]:= Nu = {1/2 × (1 - ξ), 1/2 × (1 + ξ)};
Nv = {1/4 × (2 - 3 ξ + ξ^3), 1/4 × (2 + 3 ξ - ξ^3)};
Nθ = {L/8 (1 - ξ - ξ^2 + ξ^3), L/8 (-1 - ξ + ξ^2 + ξ^3)};

In[ ]:= (* desplazamientos *)
u = Nu.{0, δu2};
v = Nv.{0, -δv2} + Nθ.{0, -δθ2}; (* supuesto T1>T2 *)

In[ ]:= (* deformaciones "virtuales" *)
δe = x0 (2/L) D[u, ξ] + y (2/L)^2 D[v, {ξ, 2}];

In[ ]:=

In[ ]:= x = Nu.{0, L}; (* interpolacion geometria *)
x

Out[ ]:=  $\frac{1}{2} L (1 + \xi)$ 

In[ ]:=

In[ ]:= (* seccion → perfil IPE300 *)

In[ ]:= IPE300 = {h → 0.3, b → 0.15, e → 7.1 × 10-3, e1 → 10.7 × 10-3};

```

```

In[ ]:= (* ala superior *)
f0 = 0.2;
f[z_] := c + d z
sol = Solve[{f[0] == f0, f[b/2] == -f0}, {c, d}] [1];
      |resuelve
wsup = f[z] /. sol

Out[ ]:= 0.2 -  $\frac{0.8 z}{b}$ 

In[ ]:= I1 = Integrate[Integrate[ywsup, {y, h/2 - e1, h/2}], {z, 0, b/2}] (* ala superior *)
      |Integra |Integra
Out[ ]:= 0.

In[ ]:=

In[ ]:= (* alma *)
f[y_] := c + d y
sol = Solve[{f[0] == -f0, f[h/2 - e1] == f0}, {c, d}] [1];
      |resuelve
walma = f[y] /. sol

Out[ ]:= -0.2 -  $\frac{0.4 y}{1. e1 - 0.5 h}$ 

I2 = Simplify[Integrate[Integrate[ywalma, {y, 0, h/2 - e1}], {z, -e/2, e/2}] (* alma *)
      |simplifica |Integra |Integra
Out[ ]:= e (0.0333333 e12 - 0.0333333 e1 h + 0.00833333 h2)

In[ ]:= I3 = I1; (* ala interior *)

Iz2 = 2 (I1 + I2 + I3);
Iz2 /. IPE300 (* m^4 *)

Out[ ]:= 9.18479 × 10-6

In[ ]:=

In[ ]:= datos = {L → 6, vE → 2.1 × 1011, α → 1.2 × 10-5, fy → 275 × 106};

In[ ]:= f[x_] := a + c x + d x2
sol = Solve[{f[0] == 0, f[L/2] == 1, f[L] == 0}, {a, c, d}] [1];
      |resuelve
wx = f[x] /. sol

Out[ ]:= 2 × (1 + ξ) - (1 + ξ)2

In[ ]:= σ0 = wx fy;

In[ ]:= δε

Out[ ]:=  $\frac{x0 \delta u2}{L} + \frac{4 y \left( \frac{3 \delta v2 \xi}{2} - \frac{1}{8} L \delta \sigma2 (2 - 6 \xi) \right)}{L^2}$ 

In[ ]:= (* energia deformacion (PTV) *)
int = δε σ0;
Ed = Simplify[Expand[Integrate[int L/2, {ξ, -1, 1}]] /. x0 → 0 /. y → Iz2]
      |simplifica |expand- |Integra
Out[ ]:= 0. - e fy (-0.0444444 e12 + 0.0444444 e1 h - 0.0111111 h2) δσ2

```



```

m[2]= (* vector fuerzas equivalentes *)
VF2 = {D[Ed, δu2], D[Ed, δv2], D[Ed, δθ2]};
      [deriva      [deriva      [deriva
(* equilibrio *)
VF1 = Table[0, {3}];
      [tabla
VF1[[1]] = -VF2[[1]];
VF1[[2]] = -VF2[[2]];
VF1[[3]] = -VF2[[2]] L - VF2[[3]];
VF = Join[VF1, VF2];
      [junta
MatrixForm[VF /. IPE300 /. datos]
      [forma de matriz

```

$$\text{MatrixForm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1683.88 \\ 0 \\ 0 \\ -1683.88 \end{pmatrix}$$

Para finalizar los cálculos faltaría mostrar los códigos de los casos prácticos en los que sobre el pórtico actúan tensiones y/o deformaciones: carga distribuida, deformación inicial en el pilar y dintel izquierdo, tensión inicial en el pilar y dintel derecho. Estos códigos se adjuntarán junto a los anteriores mostrados en una carpeta debido a que al ser extensos alargarían el informe de nuestro estudio.