



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**Aplicación de diagramas de interacción
axil-momento (NM) al cálculo plástico de
pórticos 2D de barras esbeltas**

Autor:

Bello de Val, Daniel

Tutor:

Cacho Pérez, Mariano

Valladolid, julio de 2021

Resumen

Durante el desarrollo de este trabajo de fin de grado, se busca una resolución lo más simplificada posible de los problemas clásicos de rótulas plásticas con la diferencia de que se tendrá en cuenta el esfuerzo axial producido en las estructuras, realizando a su vez, una continua comparación entre el problema completo y simplificado, con el fin de reflejar la importancia de este tipo de esfuerzos, y el claro error que se comete en los casos en los que no se tienen en cuenta.

Palabras clave

Rótulas plásticas.

Esfuerzos axiales.

Método directo.

Momento plástico reducido.

Carga de colapso.

Abstract

During the development of this final degree project, a solution is sought as simplified as possible of the classic problems of plastic joints with the difference that the axial force produced in the structures will be taken into account, making a continuous comparison between the complete problem and the simplified problem, in order to reflect the importance of this type of effort, and the big error that is made in the cases where they are not taken into account.

Keywords

Plastic joints.

Axial force.

Direct method.

Reduced plastic moment.

Collapse load.

Agradecimientos

Antes de comenzar la redacción del documento, me gustaría realizar un inciso, recordando a aquellas personas que han sido imprescindibles para mí en este periodo.

En primer lugar, a mis padres y hermana, sin los cuales cualquier objetivo cumplido hubiera resultado simplemente imposible.

En segundo lugar, a Mariano Cacho, mi tutor, por haber confiado en mí y haberme dado esta oportunidad de desarrollar este interesante proyecto.

En tercer lugar, a mis amigos, incansables compañeros de batalla en los buenos y malos momentos.

Por último, a Elena, esa persona que estuvo a mi lado diariamente, levantando mi moral en todo instante.

Muchas gracias a todos por esta ayuda tan imprescindible.

Índice

| | |
|---|----|
| Resumen | 3 |
| Palabras clave | 3 |
| Abstract..... | 3 |
| Keywords | 3 |
| Agradecimientos..... | 4 |
| Índice de figuras..... | 8 |
| Índice de ecuaciones | 9 |
| Índice de tablas..... | 10 |
| CAPÍTULO 1: Introducción | 11 |
| Introducción..... | 12 |
| Motivación del trabajo | 12 |
| Objetivos..... | 12 |
| Estructura del documento | 13 |
| Contexto histórico | 13 |
| CAPÍTULO 2: Metodología y recursos de trabajo | 15 |
| Cálculo plástico y elástico | 16 |
| Ensayo de tracción. Diagrama tensión deformación..... | 16 |
| Comportamiento plástico y elástico | 17 |
| Tipos de estructuras | 18 |
| Grado de Hiperestaticidad..... | 18 |
| Estructuras isostáticas | 19 |
| Estructuras hiperestáticas | 19 |
| Mecanismos..... | 20 |
| Formulación y base teórica..... | 21 |
| Momento plástico reducido en sección rectangular maciza | 22 |
| Momento plástico reducido en sección en doble T | 23 |
| Teoremas y métodos de resolución de problemas | 29 |
| Teorema del límite superior. Método cinemático..... | 29 |
| Teorema del Límite inferior. Método estático | 29 |
| Método directo..... | 30 |
| CAPÍTULO 3: Ejemplos de validación | 35 |
| Ejemplo 1: Pórtico biempotrado con cargas puntuales. | 36 |

| | |
|--|-----|
| Ejemplo 1.1: Resolución sin el efecto reductor del axil en el momento plástico | 37 |
| Ejemplo 1.2: Resolución considerando el efecto reductor del axil en el momento plástico.... | 43 |
| Ejemplo 1.3: Comparación de resultados | 48 |
| Ejemplo 2: Pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales..... | 49 |
| Ejemplo 2.1: Resolución sin el efecto reductor del axil en el momento plástico. | 50 |
| Ejemplo 2.2: Resolución considerando el efecto reductor del axil en el momento plástico, | 55 |
| Ejemplo 2.3: Comparación de resultados | 60 |
| Ejemplo 3: Pórtico biempotrado con carga distribuida. | 61 |
| Ejemplo 3.1: Resolución sin el efecto reductor del axil en el momento plástico. | 62 |
| Ejemplo 3.2: Resolución considerando el efecto reductor del axil en el momento plástico. | 68 |
| Ejemplo 3.3: Comparación de resultados. | 75 |
| Ejemplo 3.4: Ventajas e inconvenientes del método..... | 76 |
| CAPÍTULO 4: Problema de aplicación..... | 77 |
| Problema de aplicación 1: Pórtico a dos aguas capaz de soportar la acción lateral del viento y la carga superior del peso de un sólido equivalente a la nieve. | 78 |
| Problema de aplicación 1.1: Resolución sin el efecto reductor del axil en el momento plástico. | 80 |
| Problema de aplicación 1.2: Resolución considerando el efecto reductor del axil en el momento plástico. | 86 |
| Problema de aplicación 1.3: Comparación de resultados..... | 90 |
| CAPÍTULO 5: Conclusiones y líneas futuras..... | 91 |
| Conclusiones | 92 |
| Líneas futuras..... | 93 |
| CAPÍTULO 6: Estudio económico del proyecto | 95 |
| CAPÍTULO 7: Bibliografía | 97 |
| Bibliografía | 98 |
| CAPÍTULO 8: Anexos..... | 101 |
| Anexo 1. Códigos generados en Wolfram Mathematica. | 102 |
| Anexo 1.1. Ejemplo 1..... | 103 |
| | 104 |
| Anexo 1.2. Ejemplo 2..... | 106 |
| Anexo 1.3. Ejemplo 3..... | 109 |

| | |
|---|-----|
| Anexo 1.4. Problema de aplicación | 113 |
| | 113 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1 Diagrama Tensión-Deformación | 16 |
| Figura 2 Ejemplos de estructuras isostáticas | 19 |
| Figura 3 Ejemplo de estructura hiperestática | 19 |
| Figura 4 Ejemplo de mecanismo | 20 |
| Figura 5 Distribución de tensiones en sección rectangular maciza | 22 |
| Figura 6 Distribución de tensiones normales en perfil en doble T | 23 |
| Figura 7 Vista en corte de perfil en doble T | 23 |
| Figura 8 Evolución real del axil plástico frente al momento flector plástico en sección rectangular maciza | 26 |
| Figura 9 Evolución del axil plástico frente al momento flector plástico según normas EC3 y EAE | 27 |
| Figura 10 Comparación gráfico real con el de las normas EC3 y EAE | 27 |
| Figura 11 Comparación zonas de incidencia del momento plástico reducido en alma y alas .. | 28 |
| Figura 12 Pórtico biempotrado con cargas puntuales | 36 |
| Figura 13 EQ1 para pórtico biempotrado con cargas puntuales | 38 |
| Figura 14 EQ2 para pórtico biempotrado con cargas puntuales | 38 |
| Figura 15 Cargas de colapso en pórtico biempotrado con cargas puntuales | 39 |
| Figura 16 Comprobación de seguridad del mecanismo de colapso en pórtico biempotrado con cargas puntuales | 39 |
| Figura 17 Mecanismo combinado en pórtico biempotrado con cargas puntuales | 40 |
| Figura 18 Pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales | 49 |
| Figura 19 EQ1 pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales | 51 |
| Figura 20 EQ2 pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales | 51 |
| Figura 21 Cargas de colapso pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales | 52 |
| Figura 22 Comprobación de seguridad pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales ... | 52 |
| Figura 23 Pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo | 61 |
| Figura 24 EQ1 pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo | 63 |
| Figura 25 EQ2 pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo | 63 |
| Figura 26 Cargas de colapso pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo..... | 64 |
| Figura 27 Comprobación de seguridad pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo | 64 |
| Figura 28 Combinación de mecanismos pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo | 65 |
| Figura 29 Nave industrial | 78 |

Índice de ecuaciones

| | |
|--|----|
| Ecuación 1 Momento plástico de una sección | 21 |
| Ecuación 2 Factor de forma | 21 |
| Ecuación 3 Momento elástico de una sección | 21 |
| Ecuación 4 Axil plástico de una sección..... | 21 |
| Ecuación 5 Momento plástico reducido en sección rectangular maciza..... | 22 |
| Ecuación 6 Área de una sección | 23 |
| Ecuación 7 Axil plástico en una sección..... | 23 |
| Ecuación 8 Momento estático en una sección | 24 |
| Ecuación 9 Axil en las alas de una sección en doble T..... | 24 |
| Ecuación 10 Momento flector en las alas de una sección en doble T..... | 24 |
| Ecuación 11 Axil en el alma de una sección en doble T..... | 25 |
| Ecuación 12 Momento flector en el alma de una sección en doble T..... | 25 |
| Ecuación 13 Igualdad de axil en las alas a un axil determinado, N_a | 25 |
| Ecuación 14 Igualdad de axil en el alma a un axil determinado, N_a | 25 |
| Ecuación 15 Valor de "c" en las alas en sección de doble T | 25 |
| Ecuación 16 Valor de "c" en el alma en sección de doble T | 25 |
| Ecuación 17 Valor del momento plástico reducido en las alas | 26 |
| Ecuación 18 Valor del momento plástico reducido en el alma | 26 |
| Ecuación 19 Grado de Hiperestaticidad | 31 |
| Ecuación 20 Ecuaciones de equilibrio..... | 31 |
| Ecuación 21 Comprobación de la seguridad del mecanismo | 32 |
| Ecuación 22 Cálculo de ECs..... | 33 |
| Ecuación 23 Coeficiente de seguridad..... | 34 |
| Ecuación 24 Sección en IPE 300..... | 37 |
| Ecuación 25 Área para perfil IPE300..... | 43 |
| Ecuación 26 Relación entre carga lateral y carga superior en nave industrial | 81 |
| Ecuación 27 Valor de la longitud BC en nave industrial | 81 |

Índice de tablas

| | |
|--|----|
| Tabla 1 Planteamiento general de problemas de rótulas plásticas | 33 |
| Tabla 2 Planteamiento general pórtico biempotrado con cargas puntuales sin considerar el efecto reductor del esfuerzo axil | 41 |
| Tabla 3 Planteamiento general pórtico biempotrado con cargas puntuales considerando el efecto reductor del esfuerzo axil | 45 |
| Tabla 4 Comparación de resultados en pórtico biempotrado con cargas puntuales | 48 |
| Tabla 5 Planteamiento general pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales sin considerar el efecto reductor del esfuerzo axil..... | 53 |
| Tabla 6 Planteamiento general pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales considerando el efecto reductor del esfuerzo axil..... | 57 |
| Tabla 7 Comparación de resultados pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales | 60 |
| Tabla 8 Planteamiento general pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo sin considerar el efecto reductor del esfuerzo axil | 66 |
| Tabla 9 Planteamiento general pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo considerando el efecto reductor del esfuerzo axil..... | 71 |
| Tabla 10 Comparación de resultados pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo..... | 75 |
| Tabla 11 Planteamiento general nave industrial sin considerar el efecto reductor del esfuerzo axil | 84 |
| Tabla 12 Planteamiento general nave industrial considerando el efecto reductor del esfuerzo axil | 88 |
| Tabla 13 Comparación de resultados en nave industrial..... | 90 |
| Tabla 14 Conclusiones..... | 92 |

CAPÍTULO 1: Introducción

Introducción

Este Trabajo de Fin de Grado supone una ampliación del estudio y conocimiento acerca del cálculo de rótulas plásticas ya comenzado en la asignatura *Estructuras y Construcciones Industriales*, donde se realizan este tipo de problemas aplicando dos métodos diferentes de trabajo, aplicando además una simplificación del esfuerzo axial frente al Momento Flector la cual será tema de discusión a lo largo del desarrollo del Trabajo de Fin de Grado.

Esta simplificación supone claramente una ventaja a la hora de simplificar, tanto el cálculo como el planteamiento del problema y es realizada ya que, el efecto del esfuerzo axial se considera despreciable frente al del flector, ya que es, este último, proporcionalmente menor.

Motivación del trabajo

Durante el estudio de la asignatura, he podido observar cómo se normaliza el hecho de despreciar el efecto axial, por ser proporcionalmente muy inferior al valor del momento flector, y en otros métodos de trabajo como en el MDR no se realiza esa operación.

Estos hechos me llevaron a comenzar un estudio concreto en esta área, llevándome a una conclusión determinada en base a mi trabajo, la cual se mostrará al final del documento.

Objetivos

El principal objetivo del TFG es investigar y comprobar la validez de la simplificación del esfuerzo axial en los problemas de cálculo plástico, estudiando cuál es la variación en el resultado final y el error relativo para cada caso.

Se realizarán para ello 4 ejemplos prácticos, cada uno con unas propiedades diferentes. En todos ellos, se realizará la resolución previamente obviando el esfuerzo axial y posteriormente teniéndolo en cuenta.

Mediante este método de trabajo, podremos comprobar el nivel de error cometido en cada tipo concreto de problema, buscando obtener unas conclusiones lo más concisas posibles.

Estructura del documento

Este documento tratará de explicar paulatinamente los conceptos básicos del cálculo plástico, realizando una introducción en el área del cálculo plástico, pasando por la descripción de los diferentes métodos de trabajo, antes de pasar a la parte meramente experimental.

Contexto histórico

Los primeros informes y publicaciones que versaron sobre el cálculo plástico datan de principios del siglo XX, provenientes de países centro europeos, como Alemania y Hungría, donde se realizaban estudios sobre materiales dúctiles, observando las respuestas de los materiales cuando estos eran llevados a su límite, y comprobando cómo algunos de ellos, seguían soportando esfuerzos más allá de la primera deformación producida.

Más adelante, entrados ya los años 40, se realizaron los primeros ensayos en pórticos, donde se generaron las primeras que pasaron a generar las leyes de construcción en obras civiles que se utilizan en la actualidad desde aproximadamente los años 50.

CAPÍTULO 2: Metodología y recursos de trabajo

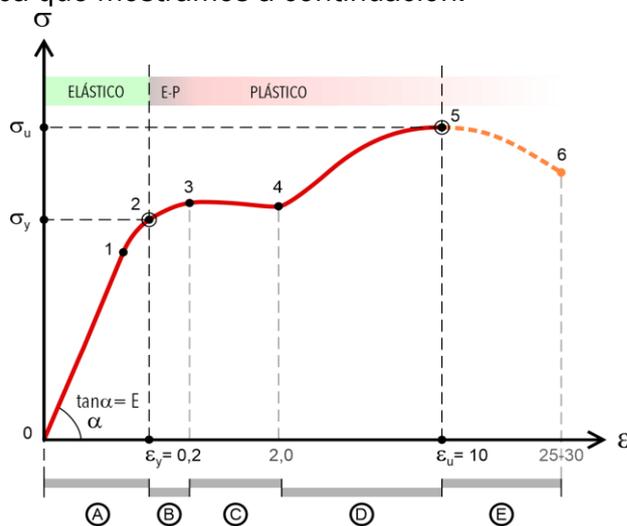
Cálculo plástico y elástico

Ensayo de tracción. Diagrama tensión deformación

Para iniciarnos en el tema, es importante describir la diferencia entre ambos conceptos, lo que será determinante para entender la posterior explicación.

Como hipótesis, trabajaremos con materiales dúctiles, como por ejemplo el acero, ya que son los materiales capaces de soportar cargas una vez superado el límite elástico.

Para ello, acudiremos al diagrama tensión-deformación de los materiales, generado tras un ensayo de tracción sobre una probeta determinada. El resultado del ensayo genera la gráfica que mostramos a continuación.



En él, podemos observar las diferentes etapas de comportamiento que va sufriendo el material, y que describiremos brevemente a continuación:

- 1. Etapa elástica lineal.** En esta etapa, observamos el comportamiento lineal del material, donde vemos cómo el material sigue manteniendo su forma a medida que se va aumentando el valor de la tensión aplicada. Se observa cómo el material resiste y tiene una absoluta recuperación. Decimos que se sigue manteniendo la llamada Ley de Hooke:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{F}{A * E}$$

La proporcionalidad exacta dura desde el punto de partida hasta el punto 1, el llamado límite de proporcionalidad.

La segunda etapa llega desde el límite de proporcionalidad (punto 1), hasta el llamado límite elástico (punto 2). En esta zona, la proporcionalidad ya no es exacta, aunque se producen esfuerzos que provocan una deformación unitaria nunca superior al 0,2%.

2. **Etapa viscoelástica.** Esta es la parte en la que comienza la transición de material plástico a elástico. Comienza en el límite elástico y finaliza en el límite de fluencia. Comienzan las primeras deformaciones permanentes, dejándose de cumplir la Ley de Hooke.
3. **Etapa de fluencia.** En esta zona, el comportamiento del material ya es plástico, pues se producen grandes variaciones de longitud para esfuerzos relativamente bajos. Las deformaciones en esta zona son totalmente permanentes. Algunos materiales no sufren esta etapa.
4. **Etapa de acritud.** En esta etapa, el material sufre un endurecimiento en frío, donde el material genera una resistencia a sufrir nuevas dislocaciones, la cual provoca un endurecimiento del material. Esta zona finaliza en el límite de rotura (punto 5).
5. **Etapa de estricción.** Es la etapa final del ensayo de tracción, y en ella se considera que el material ya está roto a efectos de resistencia. Se observa cómo se produce un aumento de la deformación sin aplicar esfuerzo. Este alargamiento se conoce como alargamiento de rotura.

Comportamiento plástico y elástico

Con esta documentación, pretendemos diferenciar las dos zonas de estudio:

- **Comportamiento plástico.** Se trata de una zona en la cual, el material genera una respuesta lineal al aumento de la tensión. Se inicia cuando la tensión aplicada es nula, y finaliza en el llamado límite elástico.

La característica principal de esta zona es la completa, o prácticamente completa (99,8 %) recuperación del material ante la aplicación de una determinada fuerza.

- **Comportamiento plástico.** En esta etapa, no existe la proporcionalidad entre esfuerzo y deformación, ya que se ha superado el límite elástico del material. Se observa cómo el material sufre deformaciones permanentes.

Como ya hemos comentado anteriormente, algunos materiales no soportan cargas una vez superado el límite elástico, motivo por el cual, trabajaremos con materiales siempre dúctiles, ya que sabemos que estos son capaces de resistirlos.

Es importante destacar cómo las estructuras hiperestáticas soportan mayor carga que las isostáticas.

Tipos de estructuras

En función del número de libertades que tenga un sistema podemos diferenciar tres tipos: estructuras isostáticas, hiperestáticas y mecanismos.

Grado de Hiperestaticidad

Se conoce como grado de Hiperestaticidad de una estructura determinada al número de fuerzas que cuyo valor se desconoce y que no puede ser determinado mediante ecuaciones de equilibrio.

Para calcular este valor, se suele acudir a la siguiente expresión que indicaremos para el caso de una estructura longitudinal o para pórticos:

a. Estructura longitudinal.

En el caso de una estructura longitudinal, la expresión se reduce a la siguiente:

$$GH = R - (2 + L)$$

b. Pórtico

Si la estructura en cuestión es un pórtico, la expresión pasa a ser:

$$GH = R - (3 + L)$$

Siendo en ambos casos:

- R: número de reacciones totales que aparecen en la estructura, sabiendo que:
- Empotramientos: 3 reacciones (longitudinal, perpendicular y momento).
- Apoyo fijo: 2 reacciones (longitudinal y perpendicular a la barra).
- Apoyo móvil: 1 reacción (longitudinal a la barra).

El resultado de esa expresión determina el tipo de estructura con la que pasaremos a trabajar, siendo:

- Estructura isostática si $GH=0$.
- Estructura hiperestática si $GH>0$.
- Mecanismo si $GH<0$.

Estructuras isostáticas

Este tipo de estructuras se producen cuando el grado de Hiperestaticidad es nulo, por lo cual podemos considerar que todos sus nudos son articulados o que funcionan como tal.

Esto indica que podemos calcular por equilibrio todas las incógnitas de fuerzas existentes. Mostraremos a continuación, varios ejemplos de este tipo de estructuras:

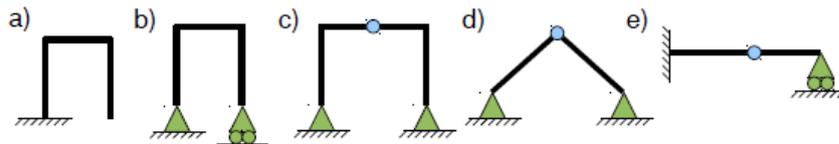


Figura 2 Ejemplos de estructuras isostáticas

Vemos como todas ellas podrían resolverse únicamente mediante el equilibrio.

Estructuras hiperestáticas

En este caso, el grado de Hiperestaticidad es superior a 0, lo cual indica que tenemos que obtener alguna ecuación extra, o alguna incógnita añadida para resolver el problema en cuestión.

El sistema resultante sería indeterminado, lo cual indica que existirán infinitas combinaciones estáticamente admisibles para resolver las incógnitas planteadas.

A continuación, mostramos un ejemplo:

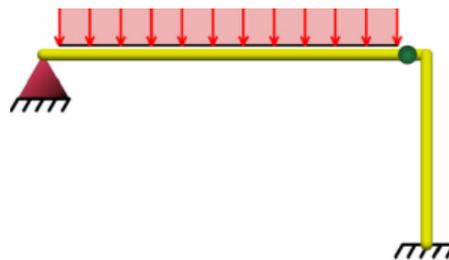


Figura 3 Ejemplo de estructura hiperestática

Mecanismos

Se trata del último caso posible, y en este, el valor de GH es negativo, lo que indica que existen menos incógnitas que ecuaciones. La estructura será, por tanto, inestable.

Mostramos un ejemplo de este caso:

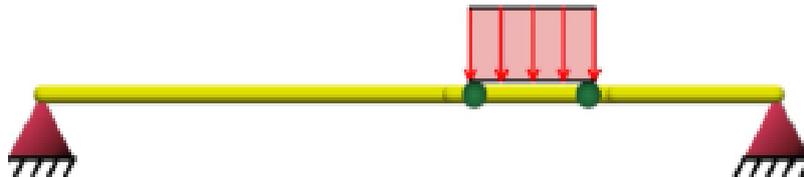


Figura 4 Ejemplo de mecanismo

Formulación y base teórica

En este apartado hablaremos sobre el momento plástico reducido y cómo puede ir variando este, teniendo en cuenta el efecto y la deformación asociados al efecto axial aplicado.

Para comenzar a trabajar es necesario conocer el valor del límite plástico en cada una de las secciones:

Para el cálculo del momento plástico:

$$M_p = W_{pl} * \sigma_y = 2 * m * \sigma_y$$

Ecuación 1 Momento plástico de una sección

Si nos dan el factor de forma:

$$\lambda = \frac{M_p}{M_e}$$

Ecuación 2 Factor de forma

$$M_p = W_z * \sigma_y = \frac{I_z}{\frac{h}{2}} * \sigma_y$$

Ecuación 3 Momento elástico de una sección

Para el cálculo del axial plástico:

$$N_p = A * \sigma_y$$

Ecuación 4 Axial plástico de una sección

Momento plástico reducido en sección rectangular maciza

Comenzaremos hablando del caso particular de las secciones rectangulares macizas, las cuales son las más sencillas y ayudarán a la comprensión del método.

o Sección rectangular

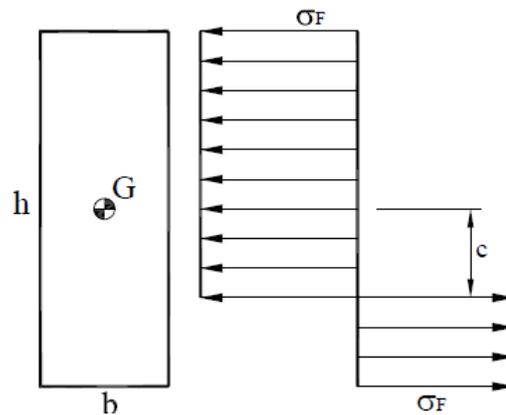


Figura 5 Distribución de tensiones en sección rectangular maciza

Podemos observar la estructura y distribución de tensiones de una sección rectangular maciza, así como los valores de su axil y flector plástico.

Si atendemos a la gráfica mostrada en la figura 5, podremos, por lo tanto, podremos despejar el valor de M_{pn} , teniendo el resto de sus variables conocidas:

$$M_{pn} = M_p + \left[1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 \right]$$

Ecuación 5 Momento plástico reducido en sección rectangular maciza

Momento plástico reducido en sección en doble T

Para la resolución de nuestros casos, utilizaremos frecuentemente el perfil en doble T, ya que es el más adecuado para casos de pórticos, los cuales serán los más habituales en la experimentación.

Mostramos a continuación su geometría y la correspondiente distribución de tensiones normales:

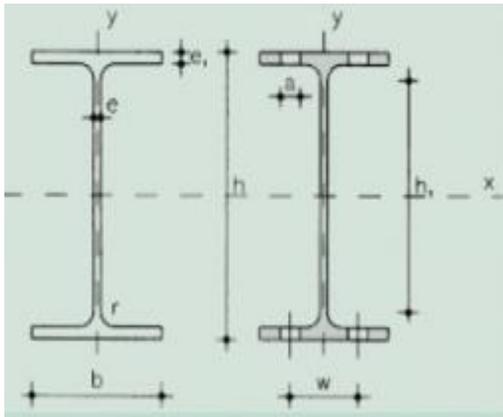


Figura 7 Vista en corte de perfil en doble T

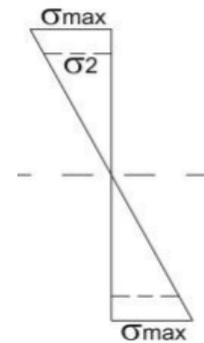


Figura 6 Distribución de tensiones normales en perfil en doble T

Siendo “c” el valor en el eje y que va desde el centro de gravedad en sentido positivo del eje vertical, podemos definir:

$$A = b * h - (h - 2e_1) * (b - e)$$

Ecuación 6 Área de una sección

Con ello, podemos definir el axil plástico:

$$N_p = A * \sigma_F = [b * h - (h - 2e_1) * (b - e)] * \sigma_F$$

Ecuación 7 Axil plástico en una sección

Para el momento estático:

$$m = \frac{h}{2} * b * \frac{h}{4} - \frac{1}{2}(h - 2e_1) * (b - e)$$

Ecuación 8 Momento estático en una sección

Sabiendo que

Obtenemos el valor del momento plástico acudiendo a la expresión de la ecuación (1).

Para obtener el valor del axil, estudiaremos el perfil en dos zonas (las dos alas y el alma)

- Alas (superior e inferior tienen ecuaciones idénticas)

$$N_{X1} = \left[b * e_1 + (h - 2e_1)e + b * \left(c - \left(\frac{h}{2} - e_1 \right) \right) + b * \left(\frac{h}{2} - c \right) \right] * \sigma_F$$

Ecuación 9 Axil en las alas de una sección en doble T

$$M_{Z1} = \left\{ 2b * \left(\frac{h}{2} - c \right) * \left(\frac{1}{2} * \left[\frac{h}{2} - c \right] + c \right) \right\} * \sigma_F$$

Ecuación 10 Momento flector en las alas de una sección en doble T

- Alma

$$N_{X2} = \left[e * \left(\frac{h}{2} - e_1 + c \right) - e * \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) \right] * \sigma_F$$

Ecuación 11 Axil en el alma de una sección en doble T

$$M_{Z2} = \left\{ e \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) \left(\frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} - e_1 - c \right] + c \right) + b e_1 * \left(\frac{1}{2} * (h - e_1) \right) \right\} * \sigma_F$$

Ecuación 12 Momento flector en el alma de una sección en doble T

Por último, para obtener los valores de Mpn1 (alas) y Mpn2 (alma), debemos seguir el siguiente procedimiento resuelto por el software Wolfram Mathematica:

- Igualamos N_{X1} y N_{X2} a un valor determinado del axil, al que denominaremos Na , por tanto:

$$N_{X1} = Na$$

Ecuación 13 Igualdad de axil en las alas a un axil determinado, Na

$$N_{X2} = Na$$

Ecuación 14 Igualdad de axil en el alma a un axil determinado, Na

- Despejamos de la igualdad anterior el valor de “c” para cada uno de los dos casos.

Para el caso de las alas:

$$c = \frac{Na + (2ee_1 - 2be_1 + bh - eh)\sigma_F}{2b\sigma_F}$$

Ecuación 15 Valor de "c" en las alas en sección de doble T

Para el del alma:

$$c = \frac{Na}{2e\sigma_F}$$

Ecuación 16 Valor de "c" en el alma en sección de doble T

- Sustituimos el valor de “c” en cada uno de los dos casos. Por tanto, resulta:

$$M_{PN1} = - \frac{(Na + (-2be_1 + 2ee_1 + 2bh - eh)\sigma_F)(Na - (2be_1 + e(-2e_1 + h))\sigma_F)}{4b\sigma_F}$$

Ecuación 17 Valor del momento plástico reducido en las alas

$$M_{PN2} = - \frac{Na^2 + e * (-4be_1 * (e_1 - h) + e * (-2e_1 + h)^2)\sigma_F^2}{4e\sigma_F}$$

Ecuación 18 Valor del momento plástico reducido en el alma

En el caso de tener en cuenta el axil plástico, es necesario calcular el valor de M_{pn} (Momento plástico reducido), cuyo procedimiento desarrollaremos a continuación:

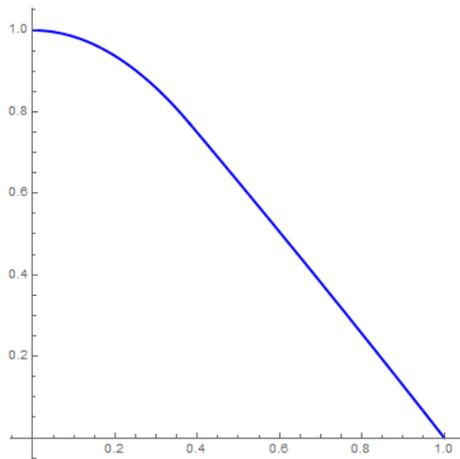


Figura 8 Evolución real del axil plástico frente al momento flector plástico en sección rectangular maciza

En la gráfica, se muestra cuál es la evolución real del momento plástico reducido (eje de ordenadas) en función del valor del axil (eje de abscisas) en un punto determinado.

Sin embargo, la norma utilizada es la que rigen la EC3 y EA3, donde muestran esta comparación de manera más sencilla, pero con cierto error cometido.

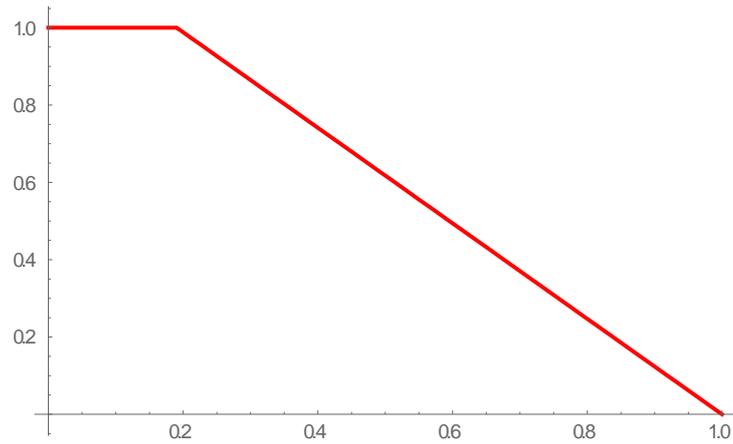


Figura 9 Evolución del axil plástico frente al momento flector plástico según normas EC3 y EAE

Si comparamos ambos gráficos:

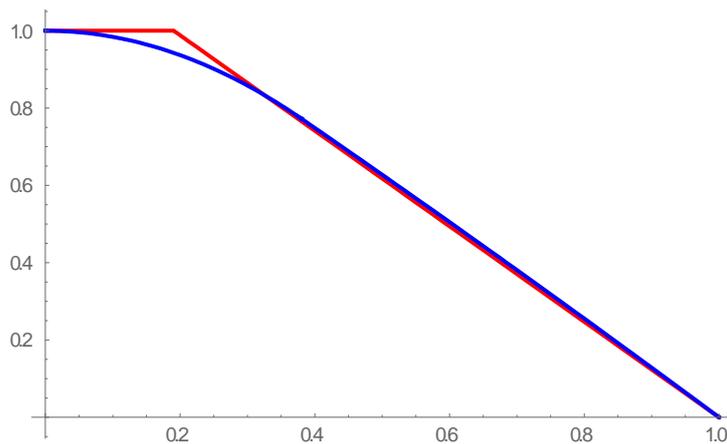


Figura 10 Comparación gráfico real con el de las normas EC3 y EAE

Se observa cómo se comete cierto error, pero se genera un gráfico mucho más simplificado.

Tras estas demostraciones, podemos decir que conociendo los valores del axil plástico límite (N_p), del flector plástico límite (M_p) y el valor del axil en el punto en cuestión, podemos obtener cuál es el valor del momento plástico reducido (M_{pn}).

Para concluir este apartado, mostramos un nuevo gráfico donde aparece la comparación de las zonas de incidencias del momento plástico reducido para el alma y las alas.

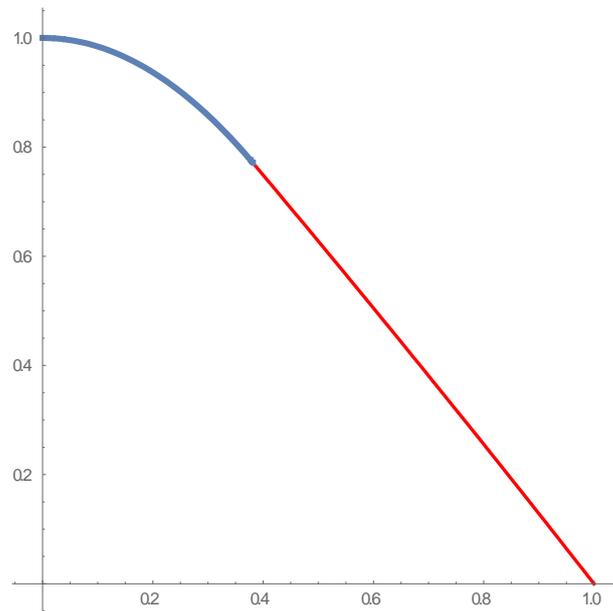


Figura 11 Comparación zonas de incidencia del momento plástico reducido en alma y alas

Se observa cómo la zona de incidencia de las alas (rojo) es mucho mayor que la del alma (azul).

Teoremas y métodos de resolución de problemas

Para la generación de este estudio, se han utilizado los dos principales métodos de resolución de ejercicios de cálculo plástico. A continuación, procederemos a explicarlos de manera concisa.

Teorema del límite superior. Método cinemático

Este teorema enuncia que una carga basada en un cierto mecanismo de colapso será siempre igual o mayor a la carga límite real.

Concluye diciendo que sólo en el mecanismo de colapso real podremos encontrar el verdadero valor de la carga límite.

Método cinemático

Es un medio de resolución de problemas de rótulas plásticas basado en el teorema del límite superior y enuncia que se deben tener en cuenta todos los mecanismos de colapso posibles, calculando la carga de colapso para cada uno de ellos.

La verdadera carga de colapso será la menor de todas, y debe cumplir siempre que $M < M_p$.

Teorema del Límite inferior. Método estático

En este caso, el teorema enuncia que la carga límite real será aquella que sea estrictamente menor que el valor del límite plástico (M_p) y que haya sido calculada en base a un diagrama de equilibrio.

Como en el caso anterior, el verdadero valor de la carga límite de colapso aparece en el diagrama de equilibrio del mecanismo de colapso.

Método estático

Es un método de resolución basado en el teorema del límite inferior, y dicta que debemos estudiar varios casos de diagramas de equilibrio, en los que existan varios puntos candidatos a rótulas plásticas. La mayor de ellas para cada caso será la carga de colapso para ese diagrama concreto.

La carga de colapso definitiva será la mayor de todos los casos estudiados.

Método directo

Se trata del método más importante de resolución de problemas de rótulas plásticas. Indicaremos el procedimiento de este:

1) Cálculo del momento plástico, axil plástico, momento plástico reducido y axil para cada una de las secciones.

En este documento en concreto, utilizaremos siempre el mismo perfil, un perfil en doble T, el IPE300 concretamente. Para ello mostraremos las expresiones utilizadas, ya que el procedimiento ha sido explicado con anterioridad.

Para calcular el momento plástico máximo acudimos a la ecuación (1):

$$M_p = W_{pl} * \sigma_e = S * \sigma_e$$

Para el axil plástico máximo, ecuación (4):

$$N_p = A * \sigma_e$$

Para el momento plástico reducido en el alma, ecuación (17):

$$M_{PN1} = - \frac{(Na + (-2be_1 + 2ee_1 + 2bh - eh)\sigma_F)(Na - (2be_1 + e(-2e_1 + h))\sigma_F)}{4b\sigma_F}$$

Para el momento plástico reducido en las alas, ecuación (18):

$$M_{PN2} = - \frac{Na^2 + e * (-4be_1 * (e_1 - h) + e * (-2e_1 + h)^2)\sigma_F^2}{4e\sigma_F}$$

2) Cálculo del Grado de Hiperestaticidad (GH) de la estructura.

Ya explicado anteriormente. En nuestro caso siempre vamos a trabajar con pórticos, por tanto, la expresión será la siguiente:

$$GH = R - (3 + L)$$

Ecuación 19 Grado de Hiperestaticidad

3) Cálculo del Número Posible de Rótulas Plásticas (NPR).

Para calcular este valor, debemos conocer las secciones candidatas:

- Empotramientos.
- Zonas con cargas puntuales aplicadas.
- Zonas con cambios de dirección de las barras.
- Zonas de intersección con cargas distribuidas.

4) Cálculo del número de ecuaciones de equilibrio (EQ).

La expresión en este caso es muy trivial:

$$EQ = NPR - GH$$

Ecuación 20 Ecuaciones de equilibrio

5) Cálculo de esfuerzos axiales (en el caso de tener en cuenta su efecto).

Se trata de calcular los esfuerzos axiales para cada una de las barras realizando un equilibrio general a toda la estructura (si es isostática), o aplicando los métodos de cálculo de esfuerzos ya conocido, como pudiera ser el MDR.

6) Comprobación de que el mecanismo de colapso es seguro.

Determinaremos si el mecanismo de colapso determinado es seguro. Para ello, se debe cumplir que el momento plástico de la o las rótulas que no llegarían a formarse es menor, en valor absoluto al valor del momento plástico límite.

$$|M_i| < M_{pn}$$

Ecuación 21 Comprobación de la seguridad del mecanismo

7) Plantear y resolver la tabla.

Una vez recopilada esa serie de datos, se pasa a resolver la siguiente tabla:

| Sección | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | ... | n |
|---------|---|---|---|---|-----|-----|---|
| Mi | | | | | | | |
| Ni | | | | | | | |
| θi | | | | | | | |
| EC1 | | | | | | | |
| EC2 | | | | | | | |
| ... | | | | | | | |
| ... | | | | | | | |
| ECN | | | | | | | |

Tabla 1 Planteamiento general de problemas de rótulas plásticas

En ella, se plantean tantas ECs como número de GH se obtenga, y tanto número de secciones como zonas candidatas a rótulas plásticas existan.

8) Planteamiento de las diferentes ECs.

Se plantean tantas ECs como valor numérico tiene el GH.

Para calcular estas aplicamos la siguiente expresión:

$$\frac{L}{6EI} * (m_i * (2M_i + M_{i+1}) + m_{i+1} * (2M_{i+1} + M_i)) + m_i * \theta_1 + m_{i+1} * \theta_{i+1} = 0$$

Ecuación 22 Cálculo de ECs

9) Resolución final de las incógnitas generadas.

Finalmente, resolvemos las ecuaciones, sabiendo que uno de los giros debe ser nulo, y ese será la última rótula plástica.

Es muy importante destacar que el signo de cada giro debe coincidir con el de su momento plástico en el instante de fallo.

10) **Cálculo del coeficiente de seguridad.**

Pasamos, finalmente a calcular el coeficiente de seguridad de la estructura.
Definimos el coeficiente de seguridad como:

$$\lambda_c = \frac{P_c}{P_e}$$

Ecuación 23 Coeficiente de seguridad

CAPÍTULO 3: Ejemplos de validación

Ejemplo 1: Pórtico biempotrado con cargas puntuales.

Se procederá a la resolución de un problema simple formado por un pórtico empotrado en ambos extremos al que se le aplican dos cargas de valor “P”, una en el centro del dintel, hacia abajo, mientras que la otra en la esquina superior derecha, hacia la derecha.

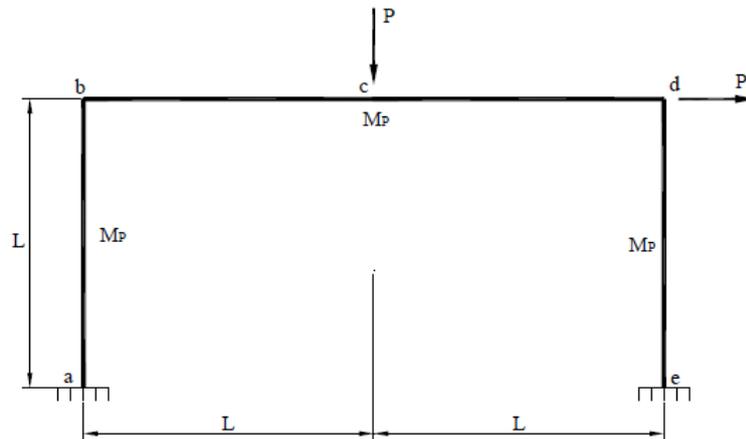


Figura 12 Pórtico biempotrado con cargas puntuales

El paso previo para comenzar será elegir el tipo de perfil con el que trabajar.

Se trata de una estructura de un pórtico, con lo cual, elegiremos un perfil en doble T, el más adecuado en estos casos.

El perfil elegido es un IPE 300.

De este tipo de perfil conocemos los siguientes datos:

- $h = 0.3 \text{ m}$
- $b = 0.15 \text{ m}$
- $e = 7.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $e_1 = 1.07 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- $I_z = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

Tomaremos un material S275, lo que nos indica que $\sigma_e = 275 \text{ MPa}$.

Por último, la longitud $L = 5 \text{ m}$.

Ejemplo 1.1: Resolución sin el efecto reductor del axil en el momento plástico

1. Cálculo del momento plástico para cada sección

Para el caso concreto del IPE 300:

$$S = 2 * \left(\frac{b * h}{8} - \frac{(b - e)}{8} * (-2e_1 + h)^2 \right)$$

Ecuación 24 Sección en IPE 300

Para calcular el momento plástico, acudimos a la ecuación (1)

$$M_p = S * \sigma_e = 165577,05 \text{ Nm}$$

2. Calculo el GH de la estructura en cuestión:

Ecuación (19)

$$GH = R - (3 + L)$$

En este caso tenemos que:

- R=6 (3 reacciones en los empotramientos “a” y “e”).
- L=0 (no existe ninguna rótula u otro elemento que proporcione libertad).

Con lo cual, es elemental descifrar que GH=3.

3. Calculo el número posible de rótulas plásticas:

En este caso son 5 (existe una posible rótula plástica en los puntos “a”, “b”, “c”, “d” y “e”).

4. Cálculo de EQ:

Ecuación (20):

$$EQ = NPR - GH = 2$$

5. Plantear diferentes mecanismos de colapso posibles y las ecuaciones de los mecanismos posibles:

A continuación, se muestran los dos mecanismos de fallo con sus respectivas ecuaciones:

- Mecanismo de colapso 1:

○ EQ1 (MC1)

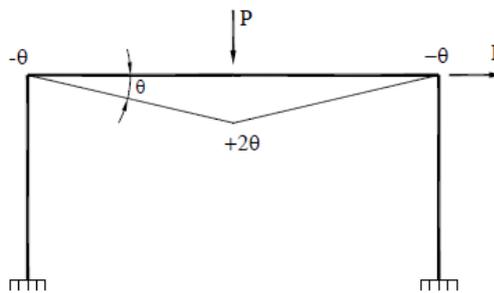


Figura 13 EQ1 para pórtico biempotrado con cargas puntuales

$$EQ1 \rightarrow PL = -M_b + 2M_c - M_d$$

- Mecanismo de colapso 2:

○ EQ2 (MC2)

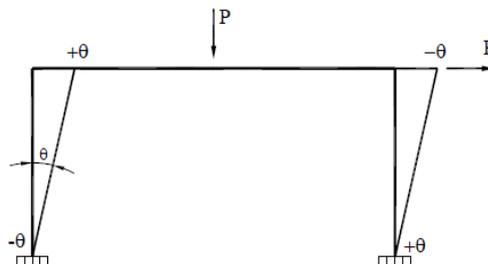


Figura 14 EQ2 para pórtico biempotrado con cargas puntuales

$$EQ2 \rightarrow PL = -M_a + M_b + M_d + M_e$$

Realizaremos un pequeño inciso sobre el criterio seguido para decretar el signo de cada uno de los giros acumulados.

Si nos situamos en el interior de la estructura, el pórtico, en este caso:

- a) Si el giro acumulado viene hacia nuestra posición, se considera negativo
- b) Si, por el contrario, el giro se aleja de nuestra posición se considerará positivo.

6. Cálculo de la carga de colapso límite para cada mecanismo y determinación de la carga de colapso límite.

o **Cargas de colapso**

| | |
|---|---------------------------|
| <p>MC1:</p> $M_b = -M_p$ $M_c = +M_p$ $M_d = -M_p$ | $P_{c1} = \frac{4M_p}{L}$ |
| <p>MC2:</p> $M_a = -M_p$ $M_b = +M_p$ $M_d = -M_p$ $M_e = +M_p$ | $P_{c2} = \frac{4M_p}{L}$ |

Figura 15 Cargas de colapso en pórtico biempotrado con cargas puntuales

7. Comprobación de que el mecanismo de colapso es seguro:

o **Ensayo**

| | |
|---|---|
| <p>MC1:</p> $M_b = -M_p$ $M_c = +M_p$ $M_d = -M_p$ | $EQ2 \rightarrow M_a < M_p$ |
| <p>MC2:</p> $M_a = -M_p$ $M_b = +M_p$ $M_d = -M_p$ $M_e = +M_p$ | $EQ2 \rightarrow M_e < M_p$ $EQ1 \rightarrow M_c < M_p$ |

Figura 16 Comprobación de seguridad del mecanismo de colapso en pórtico biempotrado con cargas puntuales

Se comprueba que ninguno de los dos mecanismos es seguro por sí solo.

Pasamos a comprobar si la combinación de ambas proporcionaría seguridad al mecanismo.

○ **Combinaciones**

MC1+MC2:

$$\begin{aligned} M_a &= -M_p \\ M_c &= +M_p \\ M_d &= -M_p \\ M_e &= +M_p \end{aligned}$$

$$\text{EQ1: } P \cdot L = -M_b + 2 \cdot M_p + M_p$$

$$\text{EQ2: } P \cdot L = M_p + M_b + M_p + M_p$$

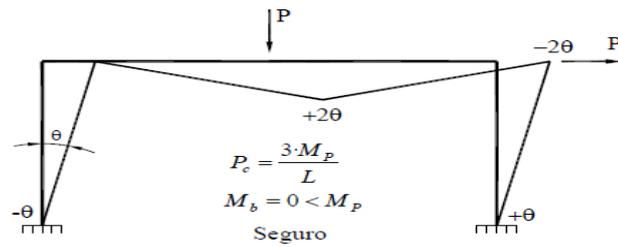


Figura 17 Mecanismo combinado en pórtico biempotrado con cargas puntuales

Vemos que la combinación es segura. Este sería por tanto el mecanismo de colapso.

Obtendríamos, por tanto, los valores de los momentos y la carga en el instante de colapso:

- $M_a = -M_p = -165577,05 \text{ Nm}$
- $M_b = 0 \text{ Nm}$
- $M_c = M_p = 165577,05 \text{ Nm}$
- $M_d = -M_p = -165577,05 \text{ Nm}$
- $M_e = M_p = 165577,05 \text{ Nm}$
- $P_c = \frac{3 \cdot M_p}{L} = 99346.23 \text{ N}$

8. Plantear tabla

Con los resultados obtenidos podemos desarrollar la tabla (1), que resultará como se muestra a continuación:

| Sección | a | b | c | d | e |
|------------|------------|---|------------|------------|------------|
| M_i | $-M_p$ | 0 | M_p | $-M_p$ | M_p |
| θ_i | θ_a | 0 | θ_c | θ_d | θ_e |
| EC1 | 1 | 1 | 0,5 | 0 | 0 |
| EC2 | 0 | 0 | 0,5 | 1 | 1 |
| EC3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Tabla 2 Planteamiento general pórtico biempotrado con cargas puntuales sin considerar el efecto reductor del esfuerzo axial

9. Planteamiento de las ECs

Con los datos de la tabla, planteamos las 3 ECs, ecuación (22):

$$\frac{L}{6EI} * (m_i * (2M_i + M_{i+1}) + m_{i+1} * (2M_{i+1} + M_i)) + m_i * \theta_1 + m_{i+1} * \theta_{i+1} = 0$$

- EC1 (ma=1; mb=1; mc=0,5; md=0; me=0)

$$\frac{-M_p L}{12EI} + \theta_a + 0,5\theta_c = 0$$

- EC2 (ma=0; mb=0; mc=0,5; md=1 me=1)

$$\frac{M_p L}{12EI} * +0,5\theta_c + \theta_d + \theta_e = 0$$

- EC3 (ma=0; mb=1; mc=1; md=1; me=0)

$$\frac{M_p L}{12EI} + \theta_c + \theta_d = 0$$

10. Resolución de ecuaciones

Resolviendo las ecuaciones anteriores, y teniendo en cuenta la restricción de que el signo de cada giro debe coincidir con el de su momento plástico en el instante de fallo, obtenemos los resultados finales:

- $\theta_a = 0 \text{ rad}$ (última rótula plástica)
- $\theta_b = 0 \text{ rad}$ (rótula que no llega a formarse)
- $\theta_c = \frac{M_p L}{6EI} = 7.86 * 10^{-3} \text{ rad}$
- $\theta_d = -\frac{M_p L}{4EI} = -11.79 * 10^{-3} \text{ rad}$
- $\theta_e = \frac{M_p L}{12EI} = 3.93 * 10^{-3} \text{ rad}$

Ejemplo 1.2: Resolución considerando el efecto reductor del axil en el momento plástico

En esta segunda forma de resolver el problema, realizaremos operaciones adicionales, y otras muchas ya indicadas previamente, que sólo serán indicadas.

1. **Cálculo del momento plástico, axil plástico, momento plástico reducido y axil para cada una de las secciones.**

$$A = ((bh - (b - e) * (2e_1 + h))\sigma_e = 5,188 * 10^{-3}m^2$$

Ecuación 25 Área para perfil IPE300

Ecuación (4):

$$N_p = A * \sigma_e = 1426716,5 N$$

El axil para cada tramo (perfil IPE 300), ya explicado anteriormente, ecuaciones (9), (10), (11), (12):

$$N_{X1} = \left[b * e_1 + (h - 2e_1)e + b * \left(c - \left(\frac{h}{2} - e_1 \right) \right) + b * \left(\frac{h}{2} - c \right) \right] * \sigma_F$$

$$M_{Z1} = \left\{ 2b * \left(\frac{h}{2} - c \right) * \left(\frac{1}{2} * \left[\frac{h}{2} - c \right] + c \right) \right\} * \sigma_F$$

$$N_{X2} = \left[e * \left(\frac{h}{2} - e_1 + c \right) - e * \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) \right] * \sigma_F$$

$$M_{Z2} = \left\{ e \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) \left(\frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} - e_1 - c \right] + c \right) + be_1 * \left(\frac{1}{2} * (h - e_1) \right) \right\} * \sigma_F$$

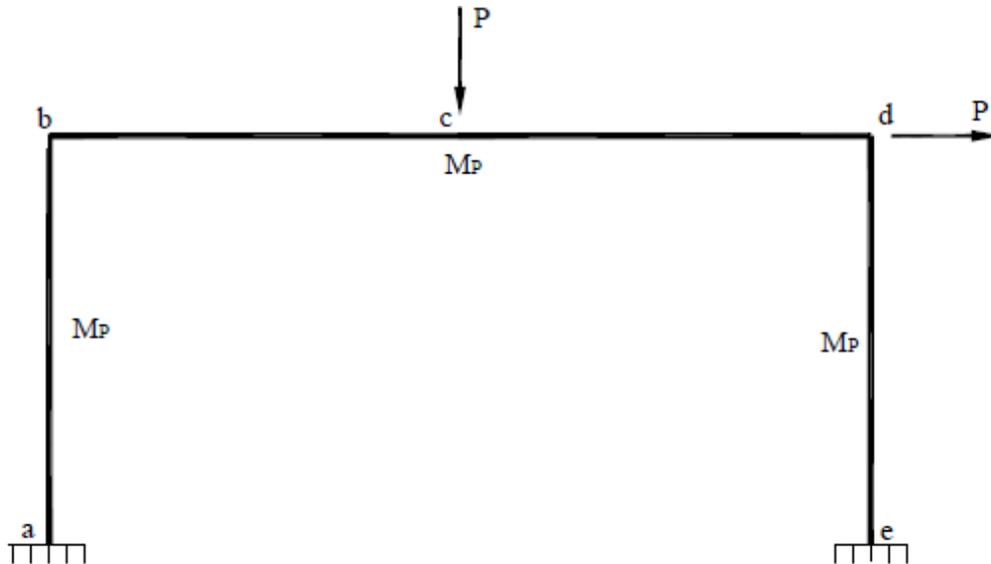
2. GH=3

3. NPR=5

4. EQ=2

5. Cálculo de esfuerzos axiles de toda la estructura.

Mostramos, a continuación, la figura (12):



En este apartado, sólo tenemos que realizar equilibrio, tanto en el dintel BD, como en el pilar AB, obteniendo:

- Equilibrio dintel BD:

$$\sum M_b = 0 \rightarrow M_b + M_d + 2L * R_{ye}$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow R_{ya} = P - R_{ye}$$

Despejando obtengo:

$$R_{ye} = \frac{1}{2L} * (PL - M_b - M_d)$$

$$R_{ya} = P - R_{ye}$$

- Equilibrio pilar AB:

$$\sum M_b = 0 \rightarrow M_a + M_b + R_{xa} * L$$

Despejando obtenemos:

$$R_{xa} = -\frac{1}{L} * (M_a + M_b)$$

6. EQs:

$$EQ1 \rightarrow P * L = -M_b + 2M_c - M_d$$

$$EQ2 \rightarrow P * L = -M_a + M_b - M_d + M_e$$

7. Planteo tabla

| Sección | a | b | c | d | e |
|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| M _i | -M _a | M _b | M _c | -M _d | M _e |
| N _i | -R _{ye} | -R _{ye} | -R _{xa} | -R _{ye} | -R _{ye} |
| Θ _i | Θ _a | Θ _b | Θ _c | Θ _d | Θ _e |
| EC1 | 1 | 1 | 0.5 | 0 | 0 |
| EC2 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | 1 |
| EC3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Tabla 3 Planteamiento general pórtico biempotrado con cargas puntuales considerando el efecto reductor del esfuerzo axial

8. Planteo Ecs

EC1 (m_a=1; m_b=1; m_c=0,5; m_d=0; m_e=0)

$$\frac{L}{6EI} * [3M_a + 5,5M_b + 3M_c + 0,5M_d] + \vartheta_a + \vartheta_b + 0,5\vartheta_c = 0$$

EC2 (m_a=0; m_b=0; m_c=0,5; m_d=1; m_e=1)

$$\frac{L}{6EI} * [0,5M_b + 3M_c + 5,5M_d + 3M_e] + 0,5\vartheta_c + \vartheta_d + \vartheta_e = 0$$

EC3 ($m_a=0$; $m_b=1$; $m_c=1$; $m_d=1$; $m_e=0$)

$$\frac{L}{6EI} * [M_a + 5M_b + 6M_c + 5M_d + M_e] + \vartheta_b + 0,5\vartheta_c + \vartheta_d = 0$$

9. Resolución de las ecuaciones

Previamente, necesitamos conocer el orden de formación, con lo que planteamos un sistema formado por las 2 EQs y las 3 ECs, asumiendo nulos los valores de los 5 giros.

Es importante destacar que estos valores no son los definitivos, ya que esta estimación solo nos indica el orden de formación de las propias rótulas.

Planteamos y resolvemos por tanto este sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas:

$$EQ1: P * L = -M_b + 2M_c - M_d$$

$$EQ2: P * L = -M_a + M_b - M_d + M_e$$

$$EC1: \frac{L}{6EI} * [3M_a + 5,5M_b + 3M_c + 0,5M_d] + \vartheta_a + \vartheta_b + 0,5\vartheta_c = 0$$

$$EC2: \frac{L}{6EI} * [0,5M_b + 3M_c + 5,5M_d + 3M_e] + 0,5\vartheta_c + \vartheta_d + \vartheta_e = 0$$

$$EC3: \frac{L}{6EI} * [M_a + 5M_b + 6M_c + 5M_d + M_e] + \vartheta_b + 0,5\vartheta_c + \vartheta_d = 0$$

Obteniendo de estos los siguientes resultados:

$$M_a = -0.2125LP$$

$$M_b = -0.0125LP$$

$$M_c = 0.3LP$$

$$M_d = -0.3875LP$$

$$M_e = -0.4125LP$$

Esto nos indica que la última rótula plástica en formarse sería “b”.

Como el mecanismo es completo, la estructura alcanza el fallo plástico con GH+1 rótulas, por tanto, con 4.

Decimos entonces que la rótula b no llega a formarse.

Con estos datos pasamos a la resolución final, donde igualaremos cada momento al valor del momento máximo en cada sección.

En este caso, al tener toda la sección el mismo perfil, sabemos que el límite plástico va a aparecer en las alas, por tanto:

$$M_a = -M_{X1}$$

$$M_c = M_{X1}$$

$$M_d = -M_{X1}$$

$$M_e = M_{X1}$$

Sustituyendo los valores y despejando, obtengo los valores finales de momentos, giros y carga crítica en el instante de colapso:

$$P_c = 22834,8N$$

$$\theta_a = 0 \text{ rad (última rótula plástica)}$$

$$\theta_b \text{ (rótula que no llega a formarse)}$$

$$\theta_c = 3.30838 * 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\theta_d = -9.41147 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_e = 4.50589 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_a = -62411,6 \text{ Nm}$$

$$M_b = 8032,42 \text{ Nm}$$

$$M_c = 50169,9 \text{ Nm}$$

$$M_d = -21865,4 \text{ Nm}$$

$$M_e = 21865,4 \text{ Nm}$$

Se puede comprobar cómo coinciden los signos de giros y momentos, lo que nos indica que la resolución es compatible y, por lo tanto, es la solución del problema plástico.

Ejemplo 1.3: Comparación de resultados

Realizados los problemas, pasamos a realizar la comparación entre ambos métodos:

| | Sin considerar el efecto reductor del axil | Considerando efecto reductor del axil | Reducción de la carga de colapso por el efecto del axil (%) |
|------------|--|---------------------------------------|---|
| P_c | 99346,23 | 22834,8 | 77,01 |
| θ_a | 0 | 0 | - |
| θ_b | 0 | 0 | - |
| θ_c | 0,00786 | 0,000330838 | 95,79 |
| θ_d | -0,01179 | -0,00941147 | 20,17 |
| θ_e | 0,00393 | 0,00450589 | 14,65 |
| M_a | -165577,05 | -62411,6 | 62,3 |
| M_b | 0 | 8031,42 | - |
| M_c | 165577,05 | 50169,9 | 69,7 |
| M_d | -165577,05 | -21865,4 | 86,79 |
| M_e | 165577,05 | 21865,4 | 86,79 |

Tabla 4 Comparación de resultados en pórtico biempotrado con cargas puntuales

Como se puede observar, en este primer ejemplo, aparecen unas reducciones del efecto axil notoriamente considerables, siendo muy destacable la reducción de la carga crítica.

Ejemplo 2: Pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales.

Se procederá a la resolución de un problema formado por un pórtico empotrado en su extremo izquierdo, mientras que tiene un apoyo fijo en el derecho.

Se le aplican dos cargas: una de valor “P” en el centro del dintel, hacia abajo, mientras que la otra en la esquina superior derecha, hacia la derecha y de valor P/6.

A continuación, se muestra una ilustración del problema:

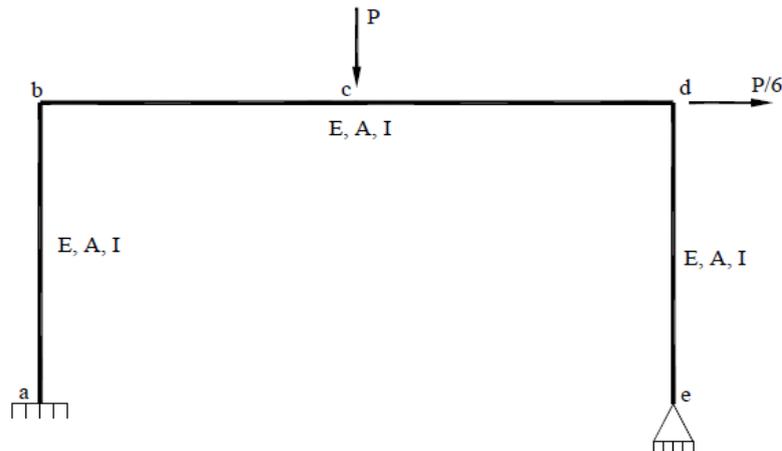


Figura 18 Pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales

El perfil con el que trabajar será nuevamente un IPE 300.

De este tipo de perfil conocemos los siguientes datos:

- $h = 0.3 \text{ m}$
- $b = 0.15 \text{ m}$
- $e = 7.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $e_1 = 1.07 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- $I_z = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

Tomaremos un material S275, lo que nos indica que $\sigma_e = 275 \text{ MPa}$.

Por último, $L = 5 \text{ m}$.

Ejemplo 2.1: Resolución sin el efecto reductor del axil en el momento plástico.

1. Cálculo del momento plástico para cada sección

Para el caso del IPE 300, ecuación (24):

$$S = 2 * \left(\frac{b * h}{8} - \frac{(b - e)}{8} * (-2e_1 + h)^2 \right)$$

Ecuación (1):

$$M_p = S * \sigma_e = 165577,05 Nm$$

2. Calculo el GH de la estructura en cuestión:

Ecuación (19):

$$GH = R - (3 + L) = 2$$

3. Calculo el número posible de rótulas plásticas:

En este caso son 4 (existe una posible rótula plástica en los puntos “a”, “b”, “c” y “d”).

En el punto “e” tenemos un apoyo móvil, que nunca ofrece momento alguno, lo cual hace que funcione como una rótula elástica, impidiendo así la existencia de rótula plástica alguna.

Con ese dato sabemos también que $M_e=0$.

4. Cálculo de EQ:

Ecuación (20):

$$EQ = NPR - GH = 2$$

5. Plantear diferentes mecanismos de colapso posibles y las ecuaciones de los mecanismos posibles:

A continuación, se muestran los dos mecanismos de fallo con sus respectivas ecuaciones:

- Mecanismo de colapso 1:

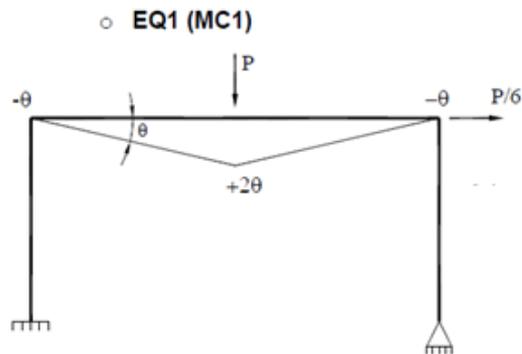


Figura 19 EQ1 pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales

$$EQ1 \rightarrow PL = -M_b + 2M_c - M_d$$

- Mecanismo de colapso 2:

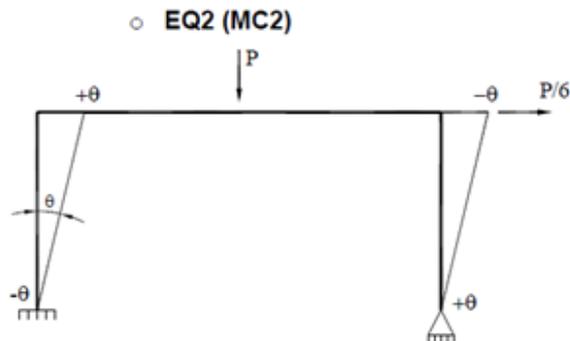


Figura 20 EQ2 pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales

$$EQ2 \rightarrow \frac{PL}{6} = -M_a + M_b - M_d$$

6. Cálculo de la carga de colapso límite para cada mecanismo y determinación de la carga de colapso límite.

o **Cargas de colapso**

MC1:

$$M_b = -M_p$$

$$M_c = +M_p$$

$$M_d = -M_p$$

$$P_{c1} = \frac{4M_p}{L}$$

MC2:

$$M_a = -M_p$$

$$M_b = +M_p$$

$$M_d = -M_p$$

$$P_{c2} = \frac{18M_p}{L}$$

Figura 21 Cargas de colapso pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales

7. Comprobación de que el mecanismo de colapso es seguro:

o **Ensayo P_{cmin}**

$$M_b = -M_p$$

$$M_c = +M_p$$

$$M_d = -M_p$$

$$P_{c1} = \frac{4M_p}{L}$$

$$M_a = -\frac{2M_p}{3} \rightarrow |M_a| < M_p$$

Figura 22 Comprobación de seguridad pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales

Se comprueba que el primer mecanismo es seguro por sí solo.

Podemos determinar, por tanto, que EC1 es el mecanismo en el instante de colapso.

Obtendríamos, por tanto, los valores de los momentos y la carga en el instante de colapso:

- $M_a = -\frac{2M_p}{3} = -110384,7 \text{ Nm}$
- $M_b = -M_p = -165577,05 \text{ Nm}$
- $M_c = M_p = 165577,05 \text{ Nm}$
- $M_d = -M_p = -165577,05 \text{ Nm}$
- $M_e = 0 \text{ Nm}$
- $P_c = \frac{4M_p}{L} = 132461,64 \text{ N}$

8. Plantear tabla

Con los resultados obtenidos podemos desarrollar la tabla, que resultará como se muestra a continuación:

| Sección | a | b | c | d | e |
|------------|-------------|------------|------------|------------|---|
| M_i | $-(2M_p)/3$ | $-M_p$ | M_p | $-M_p$ | 0 |
| θ_i | 0 | θ_b | θ_c | θ_d | 0 |
| EC1 | 1 | 1 | 0.5 | 0 | 0 |
| EC2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Tabla 5 Planteamiento general pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales sin considerar el efecto reductor del esfuerzo axial

9. Planteamiento de las ECs

Con los datos de la tabla, planteamos las 3 ECs:

$$\frac{L}{6EI} * (m_i * (2M_i + M_{i+1}) + m_{i+1} * (2M_{i+1} + M_i)) + m_i * \theta_1 + m_{i+1} * \theta_{i+1} = 0$$

- EC1 ($m_a=1$; $m_b=1$; $m_c=0.5$; $m_d=0$; $m_e=0$)

$$\frac{-5M_p L}{EI} + \theta_b + 0,5\theta_c = 0$$

- EC2 ($m_a=0$; $m_b=1$; $m_c=1$; $m_d=1$; $m_e=0$)

$$\frac{-14M_p L}{3EI} + \theta_b + \theta_c + \theta_d = 0$$

10. Resolución de ecuaciones

Resolviendo las ecuaciones anteriores, y teniendo en cuenta la restricción de que el signo de cada giro debe coincidir con el de su momento plástico en el instante de fallo, obtenemos los resultados finales:

- $\theta_a = 0 \text{ rad}$ (*rótula que no llega a formarse*)
- $\theta_b = 0 \text{ rad}$ (*última rótula plástica*)
- $\theta_c = \frac{10M_p L}{EI} = 0,4716 \text{ rad}$
- $\theta_d = -\frac{16M_p L}{3EI} = -0,2515 \text{ rad}$

Ejemplo 2.2: Resolución considerando el efecto reductor del axil en el momento plástico,

En esta segunda forma de resolver el problema, realizaremos operaciones adicionales, y otras muchas ya indicadas previamente, que sólo serán indicadas.

1. Cálculo del momento plástico, axil plástico, momento plástico reducido y axil para cada una de las secciones.

Ecuaciones (25) y (4):

$$A = ((bh - (b - e) * (2e_1 + h))\sigma_e = 5,188 * 10^{-3}m^2$$

$$N_p = A * \sigma_e = 1426716,5 N$$

El axil para cada tramo (perfil IPE 300), ya explicado anteriormente:

Ecuaciones (9), (10), (11) y (12):

$$N_{X1} = \left[b * e_1 + (h - 2e_1)e + b * \left(c - \left(\frac{h}{2} - e_1 \right) \right) + b * \left(\frac{h}{2} - c \right) \right] * \sigma_F$$

$$M_{Z1} = \left\{ 2b * \left(\frac{h}{2} - c \right) * \left(\frac{1}{2} * \left[\frac{h}{2} - c \right] + c \right) \right\} * \sigma_F$$

$$N_{X2} = \left[e * \left(\frac{h}{2} - e_1 + c \right) - e * \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) \right] * \sigma_F$$

$$M_{Z2} = \left\{ e \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) \left(\frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} - e_1 - c \right] + c \right) + be_1 * \left(\frac{1}{2} * (h - e_1) \right) \right\} * \sigma_F$$

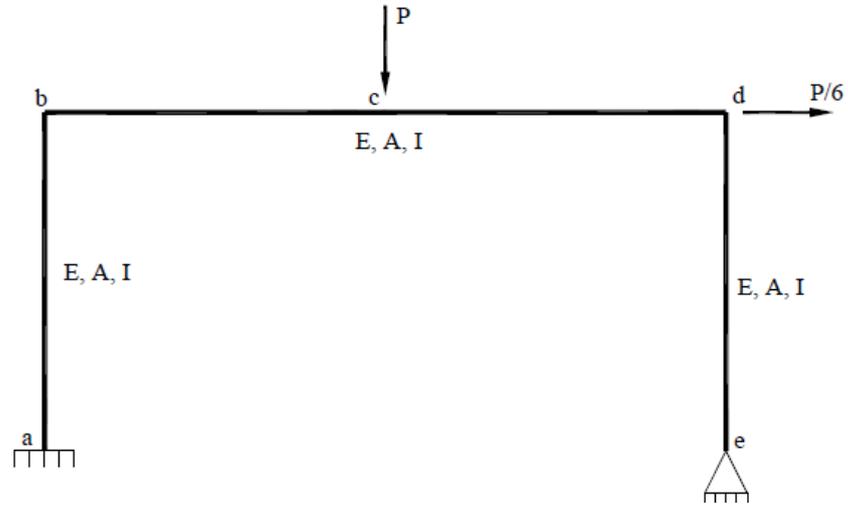
2. GH=2

3. NPR=4

4. EQ=2

5. Cálculo de esfuerzos axiles de toda la estructura.

Figura (18):



En este apartado, sólo tenemos que realizar equilibrio, tanto en el dintel BD, como en el pilar AB, obteniendo:

- Equilibrio dintel BD:

$$\sum M_b = 0 \rightarrow M_b + M_d + 2L * R_{ye}$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow R_{ya} = P - R_{ye}$$

Despejando obtengo:

$$R_{ye} = \frac{1}{2L} * (PL - M_b - M_d)$$

$$R_{ya} = P - R_{ye}$$

- Equilibrio pilar AB:

$$\sum M_b = 0 \rightarrow M_a + M_b + R_{xa} * L$$

Despejando obtenemos:

$$R_{xa} = -\frac{1}{L} * (M_a + M_b)$$

6. EQs:

$$EQ1 \rightarrow P * L = -M_b + 2M_c - M_d$$

$$EQ2 \rightarrow \frac{P * L}{6} = -M_a + M_b - M_d + M_e$$

7. Planteo tabla

| Sección | a | b | c | d | e |
|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| M _i | M _a | M _b | M _c | M _d | 0 |
| N _i | -R _{ye} | -R _{ye} | -R _{xa} | -R _{ye} | -R _{ye} |
| θ _i | θ _a | θ _b | θ _c | θ _d | 0 |
| EC1 | 1 | 1 | 0.5 | 0 | 0 |
| EC2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Tabla 6 Planteamiento general pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales considerando el efecto reductor del esfuerzo axial

8. Planteo Ecs

EC1 (m_a=1; m_b=1; m_c=0,5; m_d=0; m_e=0)

$$\frac{L}{6EI} * [3M_a + 5,5M_b + 3M_c + 0,5M_d] + \vartheta_a + \vartheta_b + 0,5\vartheta_c = 0$$

EC2 (m_a=0; m_b=1; m_c=1; m_d=1; m_e=0)

$$\frac{L}{6EI} * [M_a + 5M_b + 6M_c + 5M_d + M_e] + \vartheta_b + \vartheta_c + \vartheta_d = 0$$

9. Resolución de las ecuaciones

Previamente, necesitamos conocer el orden de formación, con lo que planteamos un sistema formado por las 2 EQs y las 2 ECs, asumiendo nulos los valores de los 4 giros.

Planteamos y resolvemos por tanto este sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$EQ1 \rightarrow P * L = -M_b + 2M_c - M_d$$

$$EQ2 \rightarrow \frac{P * L}{6} = -M_a + M_b - M_d + M_e$$

$$EC1 \rightarrow \frac{L}{6EI} * [3M_a + 5,5M_b + 3M_c + 0,5M_d] + \vartheta_a + \vartheta_b + 0,5\vartheta_c = 0$$

$$EC2 \rightarrow \frac{L}{6EI} * [M_a + 5M_b + 6M_c + 5M_d + M_e] + \vartheta_b + \vartheta_c + \vartheta_d = 0$$

Obteniendo de estos los siguientes resultados:

$$M_a = -0,0464LP$$

$$M_b = -0,1245LP$$

$$M_c = 0.3154LP$$

$$M_d = -0.2447LP$$

$$M_e = 0$$

Esto nos indica que la última rótula plástica en formarse sería "a".

Como el mecanismo es completo, la estructura rompe con GH+1 rótulas, por tanto, con 3.

Decimos entonces que la rótula "a" no llega a formarse.

Con estos datos pasamos a la resolución final, donde igualaremos cada momento al valor del momento máximo en cada sección.

En este caso, al tener toda la sección el mismo perfil, sabemos que el límite plástico va a aparecer en las alas, por tanto:

$$M_a = M_{X1}$$

$$M_c = M_{X1}$$

$$M_d = M_{X1}$$

$$M_e = M_{X1}$$

Sustituyendo los valores y despejando, obtengo los valores finales de momentos, giros y carga crítica en el instante de colapso:

$$P_c = 28487,9 \text{ N}$$

$$\theta_a = (\text{rótula que no llega a formarse})$$

$$\theta_b = 0 \text{ rad (última rótula plástica)}$$

$$\theta_c = 16,9 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_d = -9 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_a = -23739,9 \text{ Nm}$$

$$M_b = -35609,9 \text{ Nm}$$

$$M_c = 35609,9 \text{ Nm}$$

$$M_d = -35609,9 \text{ Nm}$$

$$M_e = 0 \text{ Nm}$$

Se puede comprobar cómo coinciden los signos de giros y momentos, lo que nos hace pensar que la solución es compatible y, por tanto, es el resultado final del problema.

Ejemplo 2.3: Comparación de resultados

Resueltos ambos casos, realizamos la comparación entre ellos:

| | Sin considerar el efecto reductor del axil | Considerando efecto reductor del axil | Reducción de la carga de colapso por el efecto del axil (%) |
|------------|--|---------------------------------------|---|
| P_c | 132461,64 | 28487,9 | 78,49 |
| θ_a | 0 | 0 | - |
| θ_b | 0 | 0 | - |
| θ_c | 0,4716 | 0,0169 | 96,42 |
| θ_d | -0,2515 | -0,009 | 96,42 |
| M_a | -110384,7 | -23739,9 | 78,49 |
| M_b | -165577,05 | -35609,9 | 78,49 |
| M_c | 165577,05 | 35609,9 | 78,49 |
| M_d | -165577,05 | -35609,9 | 78,49 |
| M_e | 0 | 0 | - |

Tabla 7 Comparación de resultados pórtico empotrado-apoyado con cargas puntuales

En este caso, vemos cómo la reducción de la carga de colapso por el efecto axil es ligeramente superior, aunque manteniéndose los valores prácticamente en los mismos baremos.

Ejemplo 3: Pórtico biempotrado con carga distribuida.

Se procederá a la resolución de un problema formado por un pórtico biempotrado.

Se le aplica una carga de valor “q”, de tipo distribuida, a lo largo de todo el pilar izquierdo.

A continuación, se muestra una ilustración del problema:

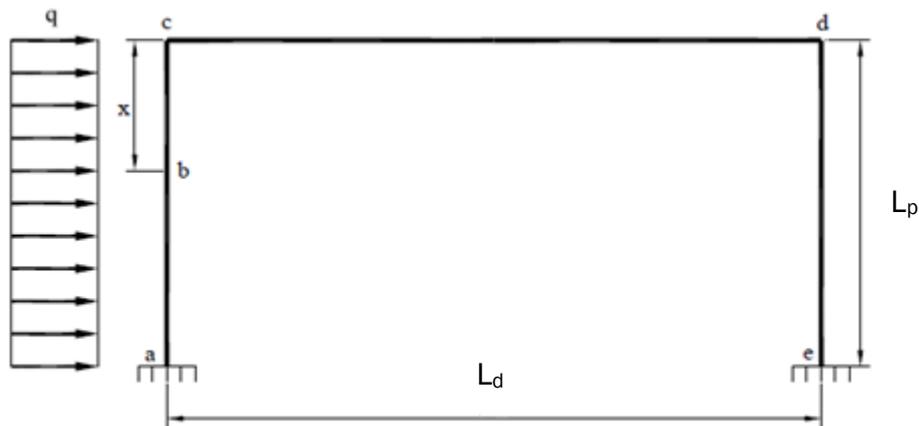


Figura 23 Pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo

El perfil con el que trabajar será nuevamente un IPE 300.

De este tipo de perfil conocemos los siguientes datos:

- $h = 0.3 \text{ m}$
- $b = 0.15 \text{ m}$
- $e = 7.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $e_1 = 1.07 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- $I_z = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

Tomaremos un material S275, lo que nos indica que $\sigma_e = 275 \text{ MPa}$.

Por último:

- $L_p = 5 \text{ m}$.
- $L_d = 20 \text{ m}$.

Ejemplo 3.1: Resolución sin el efecto reductor del axil en el momento plástico.

1. Cálculo del momento plástico para cada sección

Para el caso del IPE 300, ecuaciones (24) y (1):

$$S = 2 * \left(\frac{b * h}{8} - \frac{(b - e)}{8} * (-2e_1 + h)^2 \right)$$

$$M_p = S * \sigma_e = 165577,05 \text{ Nm}$$

2. Calculo el GH de la estructura en cuestión:

Ecuación (19):

$$GH = R - (3 + L) = 3$$

3. Calculo el número posible de rótulas plásticas:

En este caso son 4 rótulas que tendremos en cuenta de forma explícita (“a”, “c”, “d” y “e”).

Para el caso del punto “b”, lo tomaremos como una rótula implícita, esto quiere decir que su expresión será dependiente de los valores de los puntos “a” y “c”.

Su expresión la desarrollamos más adelante.

4. Cálculo de EQ:

Ecuación (20):

$$EQ = NPR - GH = 1$$

5. Plantear diferentes mecanismos de colapso posibles y las ecuaciones de los mecanismos posibles:

A continuación, se muestran los dos mecanismos de fallo con sus respectivas ecuaciones. Nos valdría con el primer mecanismo, pero, como comprobaremos posteriormente, ninguno de los dos es seguro por sí mismo, con lo que procederemos a realizar el cálculo de ambos

- Mecanismo de colapso 1:

○ EQ1 (MC1)



Figura 24 EQ1 pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo

$$EQ1: \frac{q * L_p^2}{2} = -M_a + M_c - M_d + M_e$$

- Mecanismo de colapso 2:

○ EQ2 (MC2)

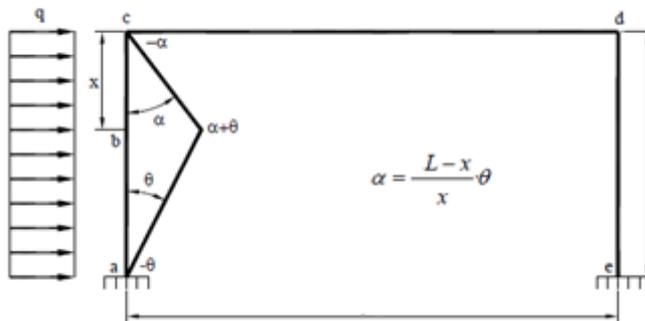


Figura 25 EQ2 pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo

$$\frac{q}{2} * [x(L - x) + (L - x)^2] = -M_a + \frac{L}{x} M_b - \frac{L - x}{x} M_c$$

6. Cálculo de la carga de colapso límite para cada mecanismo y determinación de la carga de colapso límite.

o Cargas de colapso

MC1:

$$\begin{aligned} M_a &= -M_p \\ M_c &= +M_p \\ M_d &= -M_p \\ M_e &= +M_p \end{aligned}$$

$$q_{c1} = \frac{8M_p}{L_p^2}$$

MC2:

$$\begin{aligned} M_a &= -M_p \\ M_b &= +M_p \\ M_c &= -M_p \end{aligned}$$

$$q_{c2} = \frac{4Mp}{(L-x)*x} \rightarrow \frac{\partial q_{c2}}{\partial x} = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$q_{c2} = \frac{16M_p}{L_p^2}$$

Figura 26 Cargas de colapso pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo

7. Comprobación de que el mecanismo de colapso es seguro:

o Ensayo

MC1:

$$\begin{aligned} M_a &= -M_p \\ M_c &= +M_p \\ M_d &= -M_p \\ M_e &= +M_p \end{aligned}$$

$$q_{c1} = \frac{8 \cdot M_p}{L^2}$$

$$\text{EQ2: } M_b = \left(1 + \frac{2 \cdot x}{L} - \frac{4 \cdot x^2}{L^2}\right) \cdot M_p$$

$$\frac{\partial M_b}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{4}$$

$$M_b = \frac{5 \cdot M_p}{4} > M_p$$

NO Seguro

Figura 27 Comprobación de seguridad pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo

Se comprueba que el mecanismo no es seguro por sí mismo.

Pasamos a comprobar si la combinación de ambas proporcionaría seguridad al mecanismo.

○ **Combinaciones**

MC1+MC2:

$$M_a = -M_p$$

$$M_b = +M_p$$

$$M_d = -M_p$$

$$M_e = +M_p$$

Figura 28 Combinación de mecanismos pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo

$$M_c = \frac{qL^2}{2} - 3M_p \rightarrow q_{c3} = \frac{4M_p * (2L - x)}{L(L^2 - x^2)}$$

$$\frac{\partial q_{c3}}{\partial x} = 0 \rightarrow M_c = (\sqrt{3} - 1)M_p < M_p$$

$$q_{c3} = 2 * \frac{(2 + \sqrt{3})}{L_p^2} * M_p$$

Vemos que la combinación es segura. Este sería por tanto el mecanismo de colapso.

Obtendríamos, por tanto, los valores de los momentos y la carga en el instante de colapso:

- $M_a = -M_p = -165577,05 \text{ Nm}$
- $M_b = M_a = 165577,05 \text{ Nm}$
- $M_c = (\sqrt{3} - 1)M_p = 121211 \text{ Nm}$
- $M_d = -M_p = -165577,05 \text{ Nm}$
- $M_e = M_p = 165577,05 \text{ Nm}$
- $q_c = 2 * \frac{(2 + \sqrt{3})}{L_p^2} * M_p = 49435,4 \text{ N/m}$

8. Plantear tabla

Con los resultados obtenidos podemos desarrollar la tabla, que resultará como se muestra a continuación:

| Sección | a | b | c | d | e |
|------------|------------|------------|-------------------|------------|------------|
| M_i | $-M_p$ | 0 | $(\sqrt{3}-1)M_p$ | $-M_p$ | M_p |
| θ_i | θ_a | θ_b | 0 | θ_d | θ_e |
| EC1 | 1 | $m_b(x)$ | 1 | 0 | 0 |
| EC2 | 0 | $m_b(x)$ | 0 | 1 | 1 |
| EC3 | 1 | $m_b(x)$ | 0 | 0 | 1 |

Tabla 8 Planteamiento general pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo sin considerar el efecto reductor del esfuerzo axial

Como dijimos anteriormente, la expresión de m_b es dependiente de los valores de m_a y m_c , y su distribución es del tipo lineal y será la siguiente:

$$m_b(x) = \frac{m_c - m_a}{L_p} * x + m_a$$

9. Planteamiento de las ECs

Con los datos de la tabla, planteamos las 3 ECs:

$$\frac{L}{6EI} * (m_i * (2M_i + M_{i+1}) + m_{i+1} * (2M_{i+1} + M_i)) + m_i * \theta_1 + m_{i+1} * \theta_{i+1} = 0$$

- EC1 ($m_a=1$; $m_b= m_b(x)$; $m_c=1$; $m_d=0$; $m_e=0$)

$$\frac{L_d}{6EI} * [2M_c + M_d] + \frac{L_p}{6EI} * \left[3M_a + 3M_c + \frac{L_p^2 q}{2} \right] + \theta_a + \theta_b + \theta_c = 0$$

- EC2 ($m_a=0$; $m_b= m_b(x)$; $m_c=0$; $m_d=1$; $m_e=1$)

$$\frac{L_d}{6EI} * [M_c + M_d] + \frac{L_p}{6EI} * [3M_d + M_e] + \theta_d + \theta_e = 0$$

- EC3 ($m_a=1$; $m_b= m_b(x)$; $m_c=0$; $m_d=0$; $m_e=1$)

$$\frac{L_p}{6EI} * \left[2M_a + M_c + M_d + 2M_e + \frac{L_p^2 q}{4} \right] + \theta_a + \left(1 - \frac{x}{L_p}\right)\theta_b + \theta_e = 0$$

10. Resolución de ecuaciones

Resolviendo las ecuaciones anteriores, y teniendo en cuenta la restricción de que el signo de cada giro debe coincidir con el de su momento plástico en el instante de fallo, obtenemos los resultados finales:

- $\theta_a = -5,78451 * 10^{-5} \text{ rad}$
- $\theta_b = 2,0406 * 10^{-5} \text{ rad}$
- $\theta_c = 0 \text{ rad}$ (*rótula que no llega a formarse*)
- $\theta_d = 0 \text{ rad}$ (*última rótula plástica*)
- $\theta_e = 3,98616 * 10^{-5} \text{ rad}$

Ejemplo 3.2: Resolución considerando el efecto reductor del axil en el momento plástico.

En esta segunda forma de resolver el problema, realizaremos operaciones adicionales, y otras muchas ya indicadas previamente, que sólo serán indicadas.

1. Cálculo del momento plástico, axil plástico, momento plástico reducido y axil para cada una de las secciones.

Ecuaciones (25) y (4):

$$A = ((bh - (b - e) * (2e_1 + h))\sigma_e = 5,188 * 10^{-3}m^2$$

$$N_p = A * \sigma_e = 1426716,5 N$$

El axil para cada tramo (perfil IPE 300), ya explicado anteriormente, ecuaciones (9), (10), (11) y (12):

$$N_{X1} = \left[b * e_1 + (h - 2e_1)e + b * \left(c - \left(\frac{h}{2} - e_1 \right) \right) + b * \left(\frac{h}{2} - c \right) \right] * \sigma_F$$

$$M_{Z1} = \left\{ 2b * \left(\frac{h}{2} - c \right) * \left(\frac{1}{2} * \left[\frac{h}{2} - c \right] + c \right) \right\} * \sigma_F$$

$$N_{X2} = \left[e * \left(\frac{h}{2} - e_1 + c \right) - e * \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) \right] * \sigma_F$$

$$M_{Z2} = \left\{ e * \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) * \left(\frac{1}{2} * \left[\frac{h}{2} - e_1 - c \right] + c \right) + be_1 * \left(\frac{1}{2} * (h - e_1) \right) \right\} * \sigma_F$$

2. GH=3

3. NPR=4

4. EQ=1

5. Cálculo de esfuerzos axiles de toda la estructura.

A continuación, mostramos de nuevo la estructura del problema:

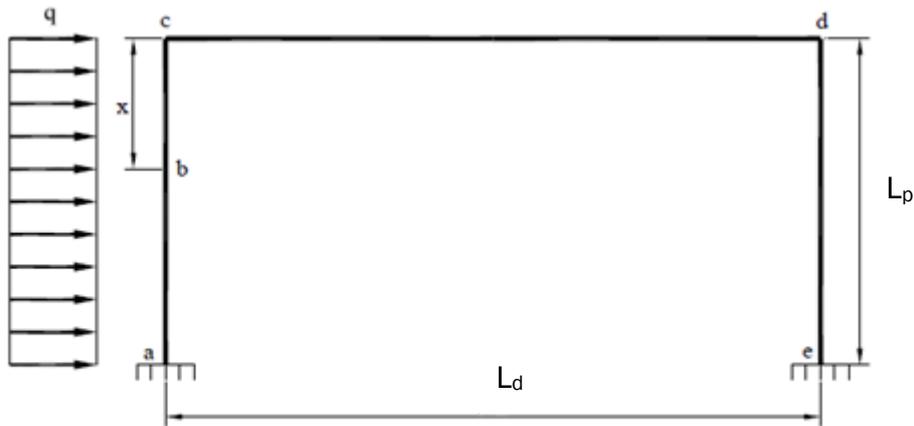


Figura 29 Pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo

En este apartado, sólo tenemos que realizar equilibrio, tanto en el dintel BD, como en el pilar AB, obteniendo:

- Equilibrio del pórtico completo:

$$\sum M_a = 0 \rightarrow M_a + M_e + L_d * R_{ye} = \frac{qL_p^2}{2}$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow R_{ya} = -R_{ye}$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow R_{xe} = -R_{xa} - qL_p$$

Despejando obtengo:

$$R_{ye} = -\frac{1}{L_d} * (M_a + M_e - \frac{qL_p^2}{2})$$

$$R_{ya} = -R_{ye}$$

- Equilibrio pilar AC:

$$\sum M_a = 0 \rightarrow M_a + M_c + R_{xa} * L_p + \frac{qL_p^2}{2}$$

Despejando obtenemos:

$$R_{xa} = -\frac{1}{L_p} * (M_a + M_c + \frac{qL_p^2}{2})$$

$$R_{xe} = -R_{xa} - qL_p$$

Calcularemos también el cortante de la barra AC, ya que de él dependerá el axil del dintel:

$$V_{ac} = R_{xa} + q * L_p$$

Por último, definimos el valor de los tres esfuerzos axiles:

$$N_{ac} = -R_{ya}$$

$$N_{cd} = -V_{ac}$$

$$N_{de} = -R_{ye}$$

6. EQs:

Como ya sabemos, solo hay una en este caso:

$$EQ1 \rightarrow \frac{qL_p^2}{2} = -M_a + M_c - M_d + M_e$$

7. Planteo tabla

| Sección | a | b | c | d | e |
|----------------------|------------------|--------------------|------------------|------------------|------------------|
| M_i | M _a | M _b | M _c | M _d | M _e |
| N_i | -R _{ya} | -R _{ya} | -V _{ac} | -R _{ye} | -R _{ye} |
| Θ_i | Θ _a | Θ _b | Θ _c | Θ _d | Θ _e |
| EC1 | 1 | m _b (x) | 1 | 0 | 0 |
| EC2 | 0 | m _b (x) | 0 | 1 | 1 |
| EC3 | 1 | m _b (x) | 0 | 0 | 1 |

Tabla 9 Planteamiento general pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo considerando el efecto reductor del esfuerzo axial

Sabemos que, en este caso, el valor de m_b es lineal, y dependiente de los momentos en a y c y del valor de la distancia, x, recorrida. La expresión resultante será:

$$m_b(x) = \frac{mc - ma}{3L}x + m_a$$

8. Planteo Ecs

- EC1 (ma=1; mb= mb(x); mc=1; md=0; me=0)

$$\frac{L_d}{6EI} * [2M_c + M_d] + \frac{L_p}{6EI} * \left[3M_a + 3M_c + \frac{L_p^2 q}{2} \right] + \theta_a + \theta_b + \theta_c = 0$$

- EC2 (ma=0; mb= mb(x); mc=0; md=1; me=1)

$$\frac{L_d}{6EI} * [M_c + M_d] + \frac{L_p}{6EI} * [3M_d + M_e] + \theta_d + \theta_e = 0$$

- EC3 (ma=1; mb= mb(x); mc=0; md=0; me=1)

$$\frac{L_p}{6EI} * \left[2M_a + M_c + M_d + 2M_e + \frac{L_p^2 q}{4} \right] + \theta_a + \left(1 - \frac{x}{L_p} \right) \theta_b + \theta_e = 0$$

9. Resolución de las ecuaciones

Previamente, necesitamos conocer el orden de formación, con lo que planteamos un sistema formado por las EQ y las 3 ECs, asumiendo nulos los valores de los 5 giros. Sabemos que Mb será nulo en este caso

Es importante destacar que estos valores no son los definitivos, ya que esta estimación solo nos indica el orden de formación de las propias rótulas.

Planteamos y resolvemos por tanto este sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$EQ1 \rightarrow \frac{qL_p^2}{2} = -M_a + M_c - M_d + M_e$$

$$EC1: \frac{L_d}{6EI} * [2M_c + M_d] + \frac{L_p}{6EI} * \left[3M_a + 3M_c + \frac{L_p^2 q}{2} \right] + \theta_a + \theta_b + \theta_c = 0$$

$$EC2: \frac{L_d}{6EI} * [M_c + M_d] + \frac{L_p}{6EI} * [3M_d + M_e] + \theta_d + \theta_e = 0$$

$$EC3: \frac{L_p}{6EI} * \left[2M_a + M_c + M_d + 2M_e + \frac{L_p^2 q}{4} \right] + \theta_a + \left(1 - \frac{x}{L_p}\right)\theta_b + \theta_e = 0$$

Debemos considerar también el valor de M_b , que será dependiente de x .

$$M_b = M_a + \frac{(-M_a + M_c) * x}{L_p} + \frac{q * L_p * x}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Calculamos el máximo relativo, que quedará definido como:

$$\frac{\partial M_b}{\partial x} = 0 \rightarrow x = \frac{-2M_a + 2M_c + L_p^2 q}{2L_p * q}$$

Juntando ambas expresiones obtenemos el valor de M_b máximo, que será el que consideremos:

$$M_{b_{\max}} = M_a + \frac{-2M_a + 2M_c + qL_p^2}{4} + \frac{(-M_a + M_c)(-2M_a + 2M_c + qL_p^2)}{2q * L_p^2} - \frac{(-2M_a + 2M_c + L_p^2 q)^2}{8q * L_p^2}$$

Obteniendo de estos los siguientes resultados:

$$M_a = -6,50463 q$$

$$M_b = 1,60687 q$$

$$M_c = 1,13426 q$$

$$M_d = -1,36574 q$$

$$M_e = 3,49537 q$$

Esto nos indica que la última rótula plástica en formarse sería "a".

Como el mecanismo es completo, la estructura rompe con GH+1 rótulas, por tanto, con 4.

Decimos entonces que la rótula "a" no llega a formarse.

Con estos datos pasamos a la resolución final, donde igualaremos cada momento al valor del momento máximo en cada sección.

En este caso, al tener toda la sección el mismo perfil, sabemos que el límite plástico va a aparecer en las alas, por tanto:

$$M_a = M_{X2}$$

$$M_c = M_{X1}$$

$$M_d = M_{X1}$$

$$M_e = M_{X2}$$

Sustituyendo los valores y despejando, obtengo los valores finales de momentos, giros y carga crítica en el instante de colapso:

$$q_c = 22834,8N/m$$

$$\theta_a = 0 \text{ rad (última rótula plástica)}$$

$$\theta_b = 0 \text{ rad (rótula que no llega a formarse)}$$

$$\theta_c = -10,7717 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_d = -7,86752 * 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\theta_e = -20,4669 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_a = 38898,6 \text{ Nm}$$

$$M_b = 50439,5 \text{ Nm}$$

$$M_c = 0 \text{ Nm}$$

$$M_d = 0 \text{ Nm}$$

$$M_e = 149133 \text{ Nm}$$

Se puede comprobar cómo coinciden los signos de giros y momentos, lo que nos hace pensar que la solución es compatible y, por lo tanto, es el resultado final del problema.

Ejemplo 3.3: Comparación de resultados.

| | Sin considerar el efecto reductor del axil | Considerando efecto reductor del axil | Reducción de la carga de colapso por el efecto del axil (%) |
|------------|--|---------------------------------------|---|
| q_c | 49435,4 | 22834,8 | 53,81 |
| θ_a | 5,7845E-05 | 0 | - |
| θ_b | 2,04E-05 | 0 | - |
| θ_c | 0 | -1,08E-02 | - |
| θ_d | 0 | -7,87E-04 | - |
| θ_e | 3,99E-05 | -2,05E-02 | - (*) |
| M_a | -165577,05 | 38898,6 | 123,49 |
| M_b | 165577,05 | 50439,5 | 69,54 |
| M_c | 121211 | 0 | - |
| M_d | -165577,05 | 0 | - |
| M_e | 165577,05 | 149133 | 9,934 |

Tabla 10 Comparación de resultados pórtico biempotrado con carga distribuida sobre el pilar izquierdo

(*) Particularmente despreciaremos el error relativo para el caso del θ_e , ya que el valor de este para el caso inicial es prácticamente nulo, lo cual genera un error exponencialmente alto.

Por ello, considero inválido el resultado de esa muestra.

Se puede observar claramente como se ha reducido el valor de la reducción de la carga de colapso por el efecto axil respecto a los problemas de cargas puntuales.

Ejemplo 3.4: Ventajas e inconvenientes del método.

En este apartado realizamos un breve análisis del método de resolución, en el cual tenemos en cuenta la reducción de la carga de colapso producida por el efecto axil.

Ventajas

Entre las ventajas del método, se encuentra la aproximación de este medio de resolución de problemas a la realidad, ya que, en una estructura cualquiera sometida a una determinada carga, siempre aparecerá el esfuerzo axil.

Otra de las ventajas es que, además de hacer más realista el problema, somos capaces de obtener resultados más concretos, que nos muestran cómo es posible llegar al colapso plástico de una estructura con un valor menor de carga.

Inconvenientes

El principal inconveniente, como ya hemos ido mencionando durante la resolución, es la complejidad del método de resolución, que exige de un software matemático para realizarlo, lo que complica considerablemente la resolución de este tipo de problemas.

CAPÍTULO 4: Problema de aplicación

Problema de aplicación 1: Pórtico a dos aguas capaz de soportar la acción lateral del viento y la carga superior del peso de un sólido equivalente a la nieve.

En este caso, se procederá a la resolución de un problema más adaptado a una situación real.

Trabajaremos con un pórtico biempotrado, de dos aguas, capaz de soportar la acción lateral del viento en ambos pilares, y la acción superior de una carga, que podría ser equivalente a la del peso de la nieve sobre su dintel.

Ambas cargas, serán representadas por fuerzas distribuidas, como se muestra a continuación.

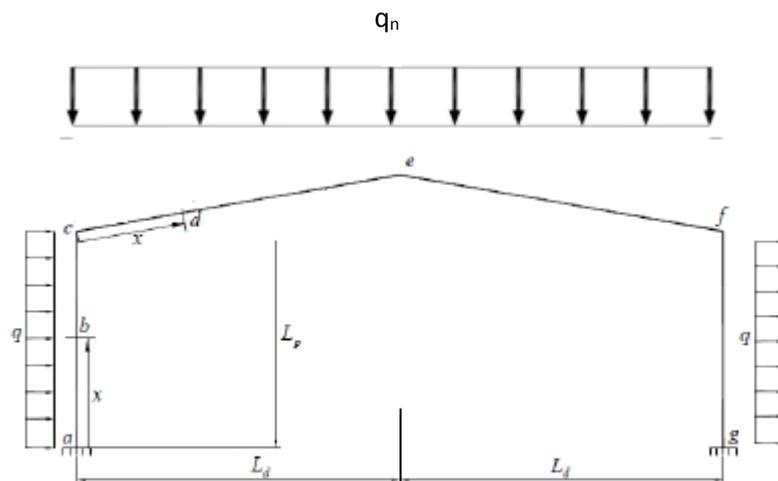


Figura 30 Nave industrial

El perfil de trabajo será el utilizado en los casos anteriores, un IPE 300.

De este tipo de perfil conocemos los siguientes datos:

- $S = 628 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
- $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
- $I_z = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

En este caso, tomaremos directamente el valor de S , para simplificar un poco los cálculos

Tomaremos un material S275, lo que nos indica que $\sigma_e = 275 \text{ MPa}$.

El resto de los datos de interés serán:

- $L_p = 5$ m.
- $L_d = 10$ m.
- $H = 7$ m.
- $q_n = 2000$ N/m (nieve).
- $q = 5000$ N/m (viento).

Problema de aplicación 1.1: Resolución sin el efecto reductor del axil en el momento plástico.

1. Cálculo del momento plástico para cada sección

Para el caso concreto del IPE 300, ecuación (1):

$$M_p = S * \sigma_e = 172700 \text{ Nm}$$

2. Calculo el GH de la estructura en cuestión:

Ecuación (19):

$$GH = R - (3 + L) = 3$$

3. Calculo el número posible de rótulas plásticas:

En este caso son 5 (existe una posible rótula plástica en los puntos “a”, “b”, “c”, “d” y “e”).

4. Cálculo de EQ:

Ecuación (20):

$$EQ = NPR - GH = 2$$

5. Plantear diferentes mecanismos de colapso posibles y las ecuaciones de los mecanismos posibles:

A continuación, se muestran los dos mecanismos de fallo con sus respectivas ecuaciones:

▪ Mecanismo de colapso 1:

En este caso, el mecanismo de colapso lo forman las rótulas “a”, “b”, “d” y “e”.

$$EQ1: -M_a + M_b - M_d + M_e = q_v * L_p^2$$

▪ Mecanismo de colapso 2:

En este caso, el mecanismo de colapso lo forman las rótulas “a”, “b”, “c” y “d”.

Antes, definimos tanto la relación entre la carga lateral y la del viento, como el valor de la longitud “bc”.

$$q_n = 2,5q_v$$

Ecuación 26 Relación entre carga lateral y carga superior en nave industrial

$$L_{bc} = \frac{L_d}{\cos \beta}$$

Ecuación 27 Valor de la longitud BC en nave industrial

$$EQ2: -M_a + 2,25M_b - 2,5M_c + 1,25M_d = q_v * L_p^2 - 12,5 \frac{L_d * q_v}{\cos \beta}$$

6. Cálculo de la carga de colapso límite para cada mecanismo y determinación de la carga de colapso límite.

MC1:

$$M_a = -M_p$$

$$M_b = M_p$$

$$M_d = -M_p$$

$$M_e = M_p$$

$$q_{c1} = \frac{4M_p}{L_p^2}$$

MC2:

$$M_a = -M_p$$

$$M_b = M_p$$

$$M_c = -M_p$$

$$M_d = M_p$$

$$q_{c2} = \frac{7M_p}{L_p^2 - 12,5 \frac{L_d}{\cos \beta}}$$

7. Comprobación de que el mecanismo de colapso es seguro:

En este caso, el mecanismo de colapso parecería ser el segundo, donde fallarían “a”, “b”, “c” y “d”.

Sin embargo, la existencia de múltiples cargas distribuidas obliga a estudiar las posibles rótulas implícitas, en las zonas internas de las respectivas barras, ya que el momento plástico en ellas podría alcanzarse antes que en alguna de las rótulas explícitas. Estos momentos implícitos resultarían:

$$M_f = M_a + \frac{(-2Ma + 2Mb + qv * L_p^2)}{4} + \frac{(-Ma + Mb)(-2Ma + 2Mb + qv * L_p^2)}{2qv * L_p^2} - \frac{(-2Ma + 2Mb + qv * L_p^2)^2}{8qv * L_p^2}$$

$$M_g = M_b + \frac{(2 \cos \beta (Mc - Mb) + qv * L_a^2)}{4 \cos \beta} + \frac{(-Mb + Mc)(2 \cos \beta (Mc - Mb) + qv * L_a^2)}{2qv * L_a^2} - \frac{(2 \cos \beta (Mc - Mb) + qv * L_a^2)^2}{8qv * L_a^2 \cos \beta}$$

M_h y M_i serán idénticas a M_g y M_f respectivamente, cambiando sus puntos de origen y destino.

Obtendríamos, por tanto, los valores de los momentos y la carga en el instante de colapso:

- $M_a = -59443,3 \text{ Nm}$
- $M_b = -Mp = -172700 \text{ Nm}$
- $M_c = Mp = 162621 \text{ Nm}$
- $M_d = -Mp = -172700 \text{ Nm}$
- $M_e = Mp = 172700 \text{ Nm}$
- $q_c = 9285,73 \text{ N/m}$

En cuanto a las posibles rótulas plásticas en las zonas intermedias:

- M_f (pilar ab) = $-59426,3 \text{ Nm}$
- M_g (dintel bc) = $Mp = 172700 \text{ Nm}$
- M_h (dintel cd) = $Mp = 172700 \text{ Nm}$
- M_i (pilar de) = 285974 Nm

Podemos comprobar cómo, en nuestro caso, la plastificación se produce en 5 puntos, de los cuales 3 son explícitos (b, d y e) y dos son implícitos (g y h).

El mecanismo de colapso quedará definido entonces por esos 5 puntos.

8. Plantear tabla

Con los resultados obtenidos podemos desarrollar la tabla, que resultará como se muestra a continuación:

| Sección | a | b | c | d | e |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| M_i | $-M_a$ | $-M_p$ | M_p | $-M_p$ | M_e |
| θ_i | θ_a | θ_b | θ_c | θ_d | θ_e |
| EC1 | m_a | m_b | m_c | m_d | m_e |
| EC2 | m_a | m_b | m_c | m_d | m_e |
| EC3 | m_a | m_b | m_c | m_d | m_e |

Tabla 11 Planteamiento general nave industrial sin considerar el efecto reductor del esfuerzo axial

Debemos, además definir las rótulas que se definen de manera implícita, en función del valor de los puntos situados a sus extremos:

$$m_f = \frac{m_b - m_a}{L_p} * x_1 + m_a$$

$$m_g = \frac{m_c - m_b}{L_{bc}} * x_2 + m_b$$

$$m_h = \frac{m_d - m_c}{L_{bc}} * x_3 + m_c$$

$$m_i = \frac{m_e - m_d}{L_p} * x_4 + m_d$$

9. Resolución de ecuaciones

Resolviendo las ecuaciones anteriores, y teniendo en cuenta la restricción de que el signo de cada giro debe coincidir con el de su momento plástico en el instante de fallo, obtenemos los resultados finales:

- $\theta_a = 0 \text{ rad}$ (*rótula que no llega a formarse*)
- $\theta_b = -15,3646 * 10^{-3} \text{ rad}$
- $\theta_c = 0 \text{ rad}$ (*última rótula plástica*)
- $\theta_d = -78,7063 * 10^{-3} \text{ rad}$
- $\theta_e = 30,2842 * 10^{-3} \text{ rad}$

Problema de aplicación 1.2: Resolución considerando el efecto reductor del axil en el momento plástico.

En esta segunda forma de resolver el problema, realizaremos operaciones adicionales, y otras muchas ya indicadas previamente, que sólo serán indicadas.

1. Cálculo del momento plástico, axil plástico, momento plástico reducido y axil para cada una de las secciones.

Ecuaciones (25) y (4):

$$A = ((bh - (b - e) * (2e_1 + h))\sigma_e = 5,188 * 10^{-3}m^2$$

$$N_p = A * \sigma_e = 1426716,5 N$$

El axil para cada tramo (perfil IPE 300), ya explicado anteriormente, ecuaciones (9), (10), (11) y (12):

$$N_{X1} = \left[b * e_1 + (h - 2e_1)e + b * \left(c - \left(\frac{h}{2} - e_1 \right) \right) + b * \left(\frac{h}{2} - c \right) \right] * \sigma_F$$

$$M_{Z1} = \left\{ 2b * \left(\frac{h}{2} - c \right) * \left(\frac{1}{2} * \left[\frac{h}{2} - c \right] + c \right) \right\} * \sigma_F$$

$$N_{X2} = \left[e * \left(\frac{h}{2} - e_1 + c \right) - e * \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) \right] * \sigma_F$$

$$M_{Z2} = \left\{ e * \left(\frac{h}{2} - e_1 - c \right) * \left(\frac{1}{2} * \left[\frac{h}{2} - e_1 - c \right] + c \right) + be_1 * \left(\frac{1}{2} * (h - e_1) \right) \right\} * \sigma_F$$

2. GH=3

3. NPR=5

4. EQ=2

5. Cálculo de esfuerzos axiles de toda la estructura.

- Equilibrio estructura:

$$\sum M_a = 0 \rightarrow M_a + M_e + 2L_d * R_{ye} - \frac{2q_v L_p^2}{2} - \frac{qv(2L_d)^2}{2}$$

$$\sum Fv = 0 \rightarrow R_{ya} = 2q_v L_D - R_{ye}$$

Despejando obtengo:

$$R_{ye} = -\frac{1}{2L_d} * (M_a + M_e - \frac{2q_v L_p^2}{2} - \frac{qv(2L_d)^2}{2})$$

$$R_{ya} = 2q_v L_D - R_{ye}$$

- Equilibrio pilar AB:

$$R_{xa} = -\frac{1}{L_p} * (M_a + M_b + \frac{qL_p^2}{2})$$

- Equilibrio pilar DE:

$$R_{xe} = -\frac{1}{L_p} * (M_d + M_e + \frac{qL_p^2}{2})$$

- Cortantes:

$$V_b = R_{xa} + qL_p$$

$$V_d = R_{xe} + qL_p$$

- Axiles:

$$N_{ab} = -R_{ya}$$

$$N_{bc} = -R_{ya} \sin \beta - V_b \cos \beta + q_v \sin \beta * x$$

$$N_{cd} = -R_{ye} \sin \beta - V_d \cos \beta + q_v \sin \beta * (L_{bc} - x)$$

$$N_{de} = -R_{ye}$$

6. EQs:

$$EQ1: -M_a + M_b - M_d + M_e = q_v * L_p^2$$

$$EQ2: -M_a + 2,25M_b - 2,5M_c + 1,25M_d = q_v * L_p^2 - 12,5 \frac{L_d * q_v}{\cos \beta}$$

7. Planteo tabla

| Sección | a | b | c | d | e |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| M _i | M _a | M _b | M _c | M _d | M _e |
| N _i | N _a | N _b | N _c | N _d | N _e |
| Θ _i | Θ _a | Θ _b | Θ _c | Θ _d | Θ _e |
| EC1 | m _a | m _b | m _c | m _d | m _e |
| EC2 | m _a | m _b | m _c | m _d | m _e |
| EC3 | m _a | m _b | m _c | m _d | m _e |

Tabla 12 Planteamiento general nave industrial considerando el efecto reductor del esfuerzo axial

Debemos, además definir las rótulas que se definen de manera implícita, en función del valor de los puntos situados a sus extremos:

$$m_f = \frac{m_b - m_a}{L_p} * x_1 + m_a$$

$$m_g = \frac{m_c - m_b}{L_{bc}} * x_2 + m_b$$

$$m_h = \frac{m_d - m_c}{L_{bc}} * x_3 + m_c$$

$$m_i = \frac{m_e - m_d}{L_p} * x_4 + m_d$$

8. Resolución de las ecuaciones

Con estos datos pasamos a la resolución final, donde igualaremos cada momento al valor del momento en cada sección.

En este caso, al tener toda la sección el mismo perfil, sabemos que el límite plástico va a aparecer en las alas, por tanto:

$$M_a = M_{X1}$$

$$M_b = M_{X1}$$

$$M_c = M_{X1}$$

$$M_d = M_{X1}$$

$$M_e = M_{X1}$$

Sustituyendo los valores y despejando, obtengo los valores finales de momentos, giros y carga crítica en el instante de colapso:

$$q_{vc} = 1282,81 \text{ N/m}$$

$$\theta_a = 0 \text{ rad (rótula que no llega a formarse)}$$

$$\theta_b = -8,34307 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_c = 0 \text{ rad (última rótula plástica)}$$

$$\theta_d = -6,477357 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_e = 1,23535 * 10^{-3} \text{ rad}$$

$$M_a = 13425,5 \text{ Nm}$$

$$M_b = -13425,5 \text{ Nm}$$

$$M_c = 20399,2 \text{ Nm}$$

$$M_d = -29460,6 \text{ Nm}$$

$$M_e = 29460,6 \text{ Nm}$$

Se puede comprobar cómo coinciden los signos de giros y momentos, lo que nos hace pensar que la resolución puede ser correcta.

Problema de aplicación 1.3: Comparación de resultados.

Realizados los problemas, pasamos a realizar la comparación entre ambos métodos:

| | Sin considerar el efecto reductor del axil | Considerando efecto reductor del axil | Reducción de la carga de colapso por el efecto del axil (%) |
|------------|--|---------------------------------------|---|
| q_n | 9285,73 | 1282,81 | 86,19 |
| θ_a | 0 | 0 | - |
| θ_b | -1,55E-02 | -8,34E-03 | 46,07 |
| θ_c | 0 | 0 | - |
| θ_d | -7,87E-02 | -6,48E-03 | 91,78 |
| θ_e | 3,03E-02 | 1,24E-03 | 95,92 |
| M_a | -59443,3 | 13425,5 | 122,59 |
| M_b | -172700 | -13425,5 | 92,23 |
| M_c | 162621 | 20399,2 | 87,46 |
| M_d | -172700 | -29460,6 | 82,94 |
| M_e | 172700 | 29460,6 | 82,94 |

Tabla 13 Comparación de resultados en nave industrial

Se observa como los valores de reducción de carga de colapso por efecto axil son los más altos que hemos encontrado, algo que tiene sentido, ya que, a mayor esbeltez de las barras, el valor del efecto axil tiene una importancia mayor.

CAPÍTULO 5: Conclusiones y líneas futuras

Conclusiones

Para realizar las conclusiones del proyecto, aplicaremos razonamientos en base a los diferentes resultados obtenidos en los diferentes modelos, mostrando a continuación una tabla con las diferentes medias aritméticas de las variaciones de resultados en los tres parámetros más destacados.

A continuación, mostramos una tabla donde aparecen las diferentes variaciones de resultados tanto en cargas, momentos como giros para los 4 casos prácticos realizados.

| | Media de variaciones de resultados en cargas (%) | Media de variaciones de resultados en momentos (%) | Media de variaciones de resultados en giros (%) |
|-------------|--|--|---|
| Ejemplo 1 | 77,01 | 76,40 | 33,77 |
| Ejemplo 2 | 78,49 | 78,49 | 48,21 |
| Ejemplo 3 | 53,81 | 67,65 | - |
| Problema1 | 86,19 | 93,63 | 77,96 |
| Media total | 73,88 | 79,04 | 53,31 |

Tabla 14 Conclusiones

Se puede comprobar, por tanto, que el error cometido al despreciar el esfuerzo axial es considerablemente alto.

Importante es el hecho de que sea mayor en el problema de aplicación real, lo que nos hace destacar que los errores son mayores en este tipo de problemas, ya que cuanto más esbelta sea una estructura, será predominante la flexión, y, por tanto, la reducción por efecto axial es mayor

Por otra parte, es fácil observar el nivel de laboriosidad del proceso y que, sin un software matemático, sería enormemente costoso realizar la resolución de un problema, lo cual hace comprensible que se realice la simplificación para enseñar el método.

Podemos concluir, por tanto, que es imprescindible tener en cuenta el efecto reductor del axial, para conseguir resultados más precisos, trabajando siempre en el lado de la seguridad estructural.

Líneas futuras

La experimentación en este tipo de problemas es muy abierta, y siempre existen nuevos campos de visión para avanzar en estos.

Uno de los puntos de partida más importantes podría ser el desarrollo de un método de cálculo de estructuras más sencillo, con el cual tratar de implantar este en el mundo docente, para así poder realizar un método preciso a la vez de eficaz en la enseñanza.

Una posibilidad sería la de tratar de sistematizar este tipo de problemas mediante el método paso a paso, usando la formulación matricial.

Otra línea de estudio para el futuro puede ser la comprobación del efecto que el esfuerzo cortante puede tener en este tipo de problemas, siempre buscando la mayor exactitud en este tipo de análisis.

CAPÍTULO 6: Estudio económico del proyecto

En este apartado, nos centraremos en realizar un presupuesto estimado del Trabajo de Fin de Grado realizado.

En nuestro caso, el proyecto está basado en la experimentación individual, el diseño del proyecto y el trabajo individual con el que realizar el proyecto.

A la hora de realizar los cálculos, tenemos en cuenta el trabajo total en horas realizado en cada uno de los tres apartados anteriormente descritos, desglosando el valor económico estimado en cada uno de ellos.

Para estimar los costes, se ha buscado la máxima objetividad posible ya que, en el día de la elaboración de este documento no poseo la titulación de ingeniero, he decidido tomar como salario el SMI (Salario Mínimo Interprofesional) que, a día de elaboración de este era de 7,28 €/hora.

A continuación, pasamos a mostrar el presupuesto del proyecto realizado.

| | Número de horas | Precio por hora (€) | Total (€) |
|--------------------|-----------------|---------------------|---------------|
| Investigación | 125 | 7,28 | 910 |
| Diseño de proyecto | 45 | 7,28 | 327,6 |
| Trabajo personal | 100 | 7,28 | 728 |
| Presupuesto final | | | 1945,6 |

Concluimos, por tanto, que el presupuesto final del proyecto elaborado será de 1.945,60 €

CAPÍTULO 7: Bibliografía

Bibliografía

- [1] Barcelonatech, U. P. (Febrero de 2021). *Proyecto de una nueva pista de ensayos de ruido exterior en el Centro Técnico de SEAT, S.A.* Obtenido de <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/17004/Anexo%20I%20-%20COSTE%20DEL%20PROYECTO.pdf?sequence=10&isAllowed=y#:~:text=Se%20considera%20que%20el%20un,ingeniero%20junior%2030%20%E2%82%AC%2Fhora>.
- [2] Basset, L. (Febrero de 2021). *Clasificación estática de las estructuras.* Obtenido de [https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/16447/Clasificaci%C3%B3n%20est%C3%A1tica%20de%20las%20estructuras.pdf?sequence=1#:~:text=El%20grado%20de%20indeterminaci%C3%B3n%20est%C3%A1tica%20\(GIE\)%20o%20grado%20de%20hiperestaticidad,de%20inc%C3%B3gnitas%2](https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/16447/Clasificaci%C3%B3n%20est%C3%A1tica%20de%20las%20estructuras.pdf?sequence=1#:~:text=El%20grado%20de%20indeterminaci%C3%B3n%20est%C3%A1tica%20(GIE)%20o%20grado%20de%20hiperestaticidad,de%20inc%C3%B3gnitas%2)
- [3] Ingemecanica. (Marzo de 2021). *Prontuario de perfiles metálicos.* Obtenido de <https://ingemecanica.com/tutoriales/prontuariodeperfiles.html#inicio>
- [4] Ingenieros, T. U. (Abril de 2021). *Resistencia de las secciones Flexión y esfuerzo axial combinados.*
- [5] Nordeste, U. N. (Marzo de 2021). *Estabilidad II.* Obtenido de Capítulo VII. Tensiones de corte en la flexión: <http://ing.unne.edu.ar/pub/Capitulo07-A05.pdf>
- [6] Rus Carlborg, G. (Marzo de 2021). *Cálculo plástico de Estructuras de Barras. Tercera edición.* Obtenido de https://www.ugr.es/~grus/docencia/ae/download/libro_plasticidad.pdf
- [7] Universidad de Valladolid, & Área de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. (Febrero de 2021). *Apuntes para una breve introducción a la Resistencia de Materiales y temas relacionados.*
- [8] Universidad de Valladolid, & Estructuras y Construcciones Industriales. (Mayo de 2021). *Análisis límite de estructuras de barras. Cálculo plástico.*
- [9] Vortize arquitectos. (Marzo de 2021). *Diagrama Tensión-Deformación.* Obtenido de <http://www.vortize.com/blog/diagrama-tension-deformacion/>

[10] Wikipedia. (Abril de 2021). *Ley de elasticidad de Hooke*. Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_elasticidad_de_Hooke

CAPÍTULO 8: Anexos

Anexo 1. Códigos generados en Wolfram Mathematica.

Anexo 1.1. Ejemplo 1

NPR = 5;
GH = 3;
EQ = NPR - GH = 2

eq = Table[0, {EQ}];
|tabla
eq[[1]] = P L == -Mb + 2 Mc - Md;
eq[[2]] = P L == -Ma + Mb - Md + Me;

PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))

ecs = Table[0, {GH}];
|tabla

ma = 1; mb = 1; mc = 1/2; md = 0; me = 0;
ecs[[1]] = PFV1[Ma, Mb, ma, mb, L, vE Iz] + PFV1[Mb, Mc, mb, mc, L, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, L, vE Iz] + PFV1[Md, Me, md, me, L, vE Iz] + ma 0a + mb 0b + mc 0c + md 0d + me 0e == 0

$$\frac{L(3Ma + 3Mb)}{6 Iz vE} + \frac{L(2Mb + Mc + \frac{1}{2}(Mb + 2Mc))}{6 Iz vE} + \frac{L(2Mc + Md)}{12 Iz vE} + 0a + 0b + \frac{0c}{2} == 0 \quad (*ec1*)$$

ma = 0; mb = 0; mc = 1/2; md = 1; me = 1;

ecs[[2]] = PFV1[Ma, Mb, ma, mb, L, vE Iz] + PFV1[Mb, Mc, mb, mc, L, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, L, vE Iz] + PFV1[Md, Me, md, me, L, vE Iz] + ma 0a + mb 0b + mc 0c + md 0d + me 0e == 0

$$\frac{L(Mb + 2Mc)}{12 Iz vE} + \frac{L(Mc + 2Md + \frac{1}{2}(2Mc + Md))}{6 Iz vE} + \frac{L(3Md + 3Me)}{6 Iz vE} + \frac{0c}{2} + 0d + 0e == 0 \quad (*ec2*)$$

ma = 0; mb = 1; mc = 1; md = 1; me = 0;

ecs[[3]] = PFV1[Ma, Mb, ma, mb, L, vE Iz] + PFV1[Mb, Mc, mb, mc, L, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, L, vE Iz] + PFV1[Md, Me, md, me, L, vE Iz] + ma 0a + mb 0b + mc 0c + md 0d + me 0e == 0

$$\frac{L(Ma + 2Mb)}{6 Iz vE} + \frac{L(3Mb + 3Mc)}{6 Iz vE} + \frac{L(3Mc + 3Md)}{6 Iz vE} + \frac{L(2Md + Me)}{6 Iz vE} + 0b + 0c + 0d == 0 \quad (*ec3*)$$

IPE300 = {h -> 30, b -> 15, e -> 0.71, e1 -> 1.07}; (* cm *)

S275 = {σF -> 275}; (* MPa *)

datos = {L -> 5, vE -> 2.1 × 10¹¹, Iz -> 8360 × 10⁻⁸}; (* m *)

Nx = Table[0, {2}]; (* axil *)

|tabla

Mz = Table[0, {2}]; (* flector *)

|tabla

(* Lnp en ala superior *) (*Idéntico al del ala inferior, lo llamaremos alas a partir de ahora*)

Nx[[1]] = (b e1 + (h - 2 e1) e + b (c - (h/2 - e1)) - b (h/2 - c)) σF (* ala superior *)

Mz[[1]] = 2 b (h/2 - c) (1/2 (h/2 - c) + c) σF

(* Lnp en alma *)

Nx[[2]] = (e (h/2 - e1 + c) - e (h/2 - e1 - c)) σF

Mz[[2]] = 2 (e (h/2 - e1 - c) (1/2 (h/2 - e1 - c) + c) + b e1 (1/2 (h - e1))) σF

(*Definimos a continuación las cuatro ecuaciones resultantes*)

$$\left(b e1 + b \left(c + e1 - \frac{h}{2}\right) - b \left(-c + \frac{h}{2}\right) + e (-2 e1 + h)\right) \sigma F \quad (*Nx1*)$$

$$2 b \left(c + \frac{1}{2} \left(-c + \frac{h}{2}\right)\right) \left(-c + \frac{h}{2}\right) \sigma F \quad (*Mz1*)$$

$$\left(-e \left(-c - e1 + \frac{h}{2}\right) + e \left(c - e1 + \frac{h}{2}\right)\right) \sigma F \quad (*Nx2*)$$

$$2 \left(e \left(c + \frac{1}{2} \left(-c - e1 + \frac{h}{2}\right)\right) \left(-c - e1 + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} b e1 (-e1 + h)\right) \sigma F \quad (*Mz2*)$$

```

(* estuerzos plasticos *)
A = b h - (h - 2 e1) (b - e);
Np = A σF (*Axil máximo*)

S = 2 (b h / 2 h / 4 - 1 / 2 (h - 2 e1) (b - e) 1 / 4 (h - 2 e1));
Mp = S σF (*Flector máximo*)

(b h - (b - e) (-2 e1 + h)) σF

2 ( (b h^2 / 8 - 1 / 8 (b - e) (-2 e1 + h)^2) σF

sol1 = Solve[Nx[[1]] == Na, c][[1]];
      |resuelve
N0 = Nx[[1]] /. c -> (h / 2 - e1)
Simplify[Mz[[1]] /. sol1]
      |simplifica

e (-2 e1 + h) σF

- (Na + (-2 b e1 + 2 e e1 + 2 b h - e h) σF) (Na - (2 b e1 + e (-2 e1 + h)) σF)
  |-----|-----|
  4 b σF                                     (*Mpn1*) (*Alas*)

sol2 = Solve[Nx[[2]] == Na, c][[1]];
      |resuelve
Nx[[2]] /. c -> 0
Nx[[2]] /. c -> (h / 2 - e1)
Simplify[Mz[[2]] /. sol2]
      |simplifica

0

e (-2 e1 + h) σF

-Na^2 + e (-4 b e1 (e1 - h) + e (-2 e1 + h)^2) σF^2
  |-----|-----|
  4 e σF                                     (*Mpn2*) (*Alma*)

Mpn = Piecewise[{{Simplify[Mz[[1]] /. sol1], N0 < Na < Np}, {Simplify[Mz[[2]] /. sol2], 0 < Na < N0}}].
      |función a trozos |simplifica                                     |simplifica

{
  - (Na + (-2 b e1 + 2 e e1 + 2 b h - e h) σF) (Na - (2 b e1 + e (-2 e1 + h)) σF) (*Mpn1*) (*Alas*)
  |-----|-----|
  -Na^2 + e (-4 b e1 (e1 - h) + e (-2 e1 + h)^2) σF^2
  |-----|-----|
  0
  |-----|-----|
  0 < Na < e (-2 e1 + h) σF
  |-----|-----|
  True
}

e (-2 e1 + h)
(b h - (b - e) (-2 e1 + h)) σF (*Np*)

(* axiles *)

R2e = 1 / (2 L) (P L - Mb - Md);
R2a = P - R2e;
R1a = - (Ma + Mb) / L;

|

sol = Solve[Join[eq, ecs] /. {oa -> 0, ob -> 0, oc -> 0, od -> 0, oe -> 0}, {Ma, Mb, Mc, Md, Me}][[1]]
      |resuelve junta
sol // N
      |valor numérico
{Ma -> - 17 LP / 80, Mb -> - LP / 80, Mc -> 3 LP / 10, Md -> - 31 LP / 80, Me -> 33 LP / 80}

```

```

MC = Table[0, {4}];
[tabla]

MC[[1]] = Me == Mz[[1]] /. Solve[{Nx[[1]] == R2e}, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos
[resolver]

Me == 8250  $\left(15 + \frac{-1.0948283499999999 \times 10^6 + Mb + Md - 5 P}{82500}\right) \left(\frac{1}{2} \left(15 + \frac{-1.0948283499999999 \times 10^6 + Mb + Md - 5 P}{82500}\right) + \frac{1.0948283499999999 \times 10^6 - Mb - Md + 5 P}{82500}\right)$ 

MC[[2]] = Md == -Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == R2e, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos
[resolver]

Md == -8250  $\left(15 + \frac{-1.09483 \times 10^6 + Mb + Md - 5 P}{82500}\right) \left(\frac{1}{2} \left(15 + \frac{-1.09483 \times 10^6 + Mb + Md - 5 P}{82500}\right) + \frac{1.09483 \times 10^6 - Mb - Md + 5 P}{82500}\right)$ 

MC[[3]] = Mc == Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == R1a, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos
[resolver]

Mc == 8250  $\left(15 + \frac{-547414. + Ma + Mb}{41250}\right) \left(\frac{547414. - Ma - Mb}{41250} + \frac{1}{2} \left(15 + \frac{-547414. + Ma + Mb}{41250}\right)\right)$ 

MC[[4]] = Ma == -Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == R2a, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos
[resolver]

Ma == -8250  $\left(15 + \frac{-1.09483 \times 10^6 - Mb - Md - 5 P}{82500}\right) \left(\frac{1}{2} \left(15 + \frac{-1.09483 \times 10^6 - Mb - Md - 5 P}{82500}\right) + \frac{1.09483 \times 10^6 + Mb + Md + 5 P}{82500}\right)$ 

sol = Solve[Join[eq, ecs, MC] /. {0a -> 0, 0b -> 0} /. IPE300 /. S275 /. datos, {P, 0c, 0d, 0e, Ma, Mb, Mc, Md, Me}][[5]] // Quiet
[resolver] [junta] [silencio]

{P -> 22834.8, 0c -> 0.000330838, 0d -> -0.00941147, 0e -> 0.00450589, Ma -> -62411.6, Mb -> 8031.42, Mc -> 50169.9, Md -> -21865.4, Me -> 21865.4}

```

```
(* solucion *)
```

```
P1 = P /. sol
```

```
22834.8
```

```
Pc = 3 Mp / L /. IPE300 /. S275 /. datos
```

```
99346.2
```

```
(* reduccion *)
```

```
(Pc - P1) / Pc 100 (* % *)
```

```
77.015
```

Anexo 1.2. Ejemplo 2

```
NPR = 4;
GH = 2;
EQ = NPR - GH
2
```

```
eq = Table[0, {EQ}];
[tabla]
eq[[1]] = P L == -Mb + 2 Mc - Md;
eq[[2]] = P / 6 L == -Ma + Mb - Md;
```

```
PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))
```

```
ecs = Table[0, {GH}];
[tabla]
```

```
ma = 1; mb = 1; mc = 1/2; md = 0; me = 0;
ecs[[1]] = PFV1[Ma, Mb, ma, mb, L, vE Iz] + PFV1[Mb, Mc, mb, mc, L, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, L, vE Iz] + PFV1[Md, Me, md, me, L, vE Iz] + ma a + mb b + mc c + md d + me e == 0
L (3 Ma + 3 Mb) / (6 Iz vE) + L (2 Mb + Mc + 1/2 (Mb + 2 Mc)) / (6 Iz vE) + L (2 Mc - Md) / (12 Iz vE) + a + b + c / 2 == 0
```

```
ma = 0; mb = 1; mc = 1; md = 1; me = 0;
ecs[[2]] = PFV1[Ma, Mb, ma, mb, L, vE Iz] + PFV1[Mb, Mc, mb, mc, L, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, L, vE Iz] + PFV1[Md, Me, md, me, L, vE Iz] + ma a + mb b + mc c + md d + me e == 0
L (Ma + 2 Mb) / (6 Iz vE) + L (3 Mb + 3 Mc) / (6 Iz vE) + L (3 Mc + 3 Md) / (6 Iz vE) + L (2 Md - Me) / (6 Iz vE) + b + c + d == 0
```

```
IPE300 = {h -> 30, b -> 15, e -> 0.71, e1 -> 1.07}; (* cm *)
S275 = {σF -> 275}; (* MPa *)
datos = {L -> 5, vE -> 2.1 * 10^11, Iz -> 8360 * 10^-8}; (* m *)
```

```
Nx = Table[0, {2}]; (* axil *)
[tabla]
```

```
Mz = Table[0, {2}]; (* flector *)
[tabla]
```

```
(* Lnp en ala superior *)
```

```
Nx[[1]] = (b e1 + (h - 2 e1) e + b (c - (h/2 - e1)) - b (h/2 - c)) σF (* ala superior *)
Mz[[1]] = 2 b (h/2 - c) (1/2 (h/2 - c) + c) σF
```

```
(* Lnp en alma *)
```

```
Nx[[2]] = (e (h/2 - e1 + c) - e (h/2 - e1 - c)) σF
Mz[[2]] = 2 (e (h/2 - e1 - c) (1/2 (h/2 - e1 - c) + c) + b e1 (1/2 (h - e1))) σF
```

$$\left(b e1 + b \left(c + e1 - \frac{h}{2} \right) - b \left(-c + \frac{h}{2} \right) + e (-2 e1 + h) \right) \sigma F$$

$$2 b \left(c + \frac{1}{2} \left(-c + \frac{h}{2} \right) \right) \left(-c + \frac{h}{2} \right) \sigma F$$

$$\left(-e \left(-c - e1 + \frac{h}{2} \right) + e \left(c - e1 + \frac{h}{2} \right) \right) \sigma F$$

$$2 \left(e \left(c + \frac{1}{2} \left(-c - e1 + \frac{h}{2} \right) \right) \left(-c - e1 + \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{2} b e1 (-e1 + h) \right) \sigma F$$

```
(* esfuerzos plasticos *)
A = b h - (h - 2 e1) (b - e);
Mp = A σF

S = 2 (b h / 2 h / 4 - 1 / 2 (h - 2 e1) (b - e) 1 / 4 (h - 2 e1));
Mp = S σF

(b h - (b - e) (-2 e1 + h)) σF
2 ( (b h^2 / 8 - 1 / 8 (b - e) (-2 e1 + h)^2) σF

sol1 = Solve[Nx[[1]] == Na, c][[1]];
[resolvere]
N0 = Nx[[1]] /. c -> (h / 2 - e1)
Simplify[Mz[[1]] /. sol1]
[simplifica]
e (-2 e1 + h) σF
(Na + (-2 b e1 + 2 e e1 + 2 b h - e h) σF) (Na - (2 b e1 + e (-2 e1 + h)) σF)
4 b σF
```

```
sol2 = Solve[Nx[[2]] == Na, c][[1]];
[resolvere]
Nx[[2]] /. c -> 0
Nx[[2]] /. c -> (h / 2 - e1)
Simplify[Mz[[2]] /. sol2]
[simplifica]
0
e (-2 e1 + h) σF
```

$$\frac{-Na^2 + e (-4 b e1 (e1 - h) + e (-2 e1 + h)^2) \sigma F^2}{4 e \sigma F}$$

```
Mpn = Piecewise[{{Simplify[Mz[[1]] /. sol1], N0 < Na < Np}, {Simplify[Mz[[2]] /. sol2], 0 < Na < N0}}]
[función a trozos] [simplifica] [simplifica]
{ (Na - (-2 b e1 + 2 e e1 - 2 b h - e h) σF) (Na - (2 b e1 + e (-2 e1 + h)) σF) / (4 b σF) e (-2 e1 + h) σF < Na < (b h - (b - e) (-2 e1 + h)) σF
  (-Na^2 + e (-4 b e1 (e1 - h) + e (-2 e1 + h)^2) σF^2 / (4 e σF) 0 < Na < e (-2 e1 + h) σF
  0 True
```

```
(* axiles *)
R2e = 1 / (2 L) (P L - Mb - Md);
R2a = P - R2e;
R1a = - (Ma + Mb) / L;
```

```
(* analisis elastico-lineal *)
```

```
sol = Solve[Join[eq, ecs, {Me == 0}]] /. {θa -> 0, θb -> 0, θc -> 0, θd -> 0, θe -> 0}, {Ma, Mb, Mc, Md, Me}][[1]]
[resolvere] [junta]
sol // N
[valor numérico]
{Ma -> -11 L P / 237, Mb -> -59 L P / 474, Mc -> 299 L P / 948, Md -> -58 L P / 237, Me -> 0}
{Ma -> -0.0464135 L P, Mb -> -0.124473 L P, Mc -> 0.315401 L P, Md -> -0.244726 L P, Me -> 0.}
```

```

MC = Table[0, {3}];
|tabla

MC[1] = Mc == Mz[1] /. Solve[{Nx[1] == R1a}, c][1] /. IPE300 /. S275 /. datos
|resuelve
Mc == 8250 (15 +  $\frac{-547414. + Ma + Mb}{41250}$ ) (  $\frac{547414. - Ma - Mb}{41250} + \frac{1}{2}$  (15 +  $\frac{-547414. + Ma + Mb}{41250}$ ) )

MC[2] = Mb == -Mz[1] /. Solve[Nx[1] == R1a, c][1] /. IPE300 /. S275 /. datos
|resuelve
Mb == -8250 (15 +  $\frac{-547414. + Ma + Mb}{41250}$ ) (  $\frac{547414. - Ma - Mb}{41250} + \frac{1}{2}$  (15 +  $\frac{-547414. + Ma + Mb}{41250}$ ) )

MC[3] = Md == -Mz[1] /. Solve[Nx[1] == R1a, c][1] /. IPE300 /. S275 /. datos
|resuelve
Md == -8250 (15 +  $\frac{-547414. + Ma + Mb}{41250}$ ) (  $\frac{547414. - Ma - Mb}{41250} + \frac{1}{2}$  (15 +  $\frac{-547414. + Ma + Mb}{41250}$ ) )

sol = Solve[Join[eq, ecs, MC, {Me == 0}] /. {θa → 0, θb → 0} /. IPE300 /. S275 /. datos, {P, θd, θc, Ma, Mb, Mc, Md, Me}][1] // Quiet
|resuelve |junta |silencio
{P → 28487.9, θd → -0.00901493, θc → 0.016903, Ma → -23739.9, Mb → -35609.9, Mc → 35609.9, Md → -35609.9, Me → 0.}

(* comprobar *)

c0 = (h/2 - e1) /. IPE300 (* cota union ala-alma *)
M0 = Mz[1] /. c → c0 /. IPE300 /. S275 /. datos
13.93

```

```

127690.

Mc /. sol
c1 = c /. Solve[{Nx[1] == R1a}, c][1] /. IPE300 /. S275 /. datos /. sol
|resuelve
Mc < M0 /. sol
c1 > c0
35609.9
14.7094
True
True

(* solucion *)

P1 = P /. sol
28487.9

Pc = 4 Mp / L /. IPE300 /. S275 /. datos (*Mp*)
132462.

(* reduccion *)
(Pc - P1) / Pc 100 (* % *)
78.4935

```

Anexo 1.3. Ejemplo 3

```

NPR = 4; (* secciones: a, c, d y e *)
GH = 3;
EQ = NPR - GH

1

eq = Table[0, {EQ}];
[tabla]
eq[[1]] = 9 q L^2 / 2 == -Ma + Mc - Md + Me

9 L^2 q
2 == -Ma + Mc - Md + Me

PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))
PFV2[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_] := L / (6 EI) ((ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma)) + q L^2 / 4 (ma + mb))

ecs = Table[0, {GH}];
[tabla]

ma = 1; mc = 1; md = 0; me = 0; mb = (mc - ma) / (3 L) x + ma; (* lineal *)
ecs[[1]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x, vE Iz] + PFV2[Mb, Mc, mb, mc, 3 L - x, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, 5 L, vE Iz] + PFV1[Md, Me, md, me, 3 L, vE Iz] + ma oa + mb ob + mc oc + md od + me oe == 0

5 L (2 Mc + Md) + (3 Mb + 3 Mc + 1/2 q (3 L - x)^2) (3 L - x) + x (3 Ma + 3 Mb + 9 x^2 / 2) + oa + ob + oc == 0

ma = 0; mc = 0; md = 1; me = 1; mb = (mc - ma) / (3 L) x + ma;
ecs[[2]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x, vE Iz] + PFV2[Mb, Mc, mb, mc, 3 L - x, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, 5 L, vE Iz] + PFV1[Md, Me, md, me, 3 L, vE Iz] + ma oa + mb ob + mc oc + md od + me oe == 0

ma = 0; mc = 0; md = 1; me = 1; mb = (mc - ma) / (3 L) x + ma;
ecs[[2]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x, vE Iz] + PFV2[Mb, Mc, mb, mc, 3 L - x, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, 5 L, vE Iz] + PFV1[Md, Me, md, me, 3 L, vE Iz] + ma oa + mb ob + mc oc + md od + me oe == 0

5 L (Mc + 2 Md) + L (3 Md + 3 Me) + od + oe == 0

ma = 1; mc = 0; md = 0; me = 1; mb = (mc - ma) / (3 L) x + ma;
ecs[[3]] = PFV2[Ma, Mb, ma, mb, x, vE Iz] + PFV2[Mb, Mc, mb, mc, 3 L - x, vE Iz] + PFV1[Mc, Md, mc, md, 5 L, vE Iz] + PFV1[Md, Me, md, me, 3 L, vE Iz] + ma oa + mb ob + mc oc + md od + me oe == 0

L (Md + 2 Me) + (3 L - x) ((2 Mb + Mc) (1 - x/3L) + 1/4 q (3 L - x)^2 (1 - x/3L)) + x (2 Ma + Mb + (Ma + 2 Mb) (1 - x/3L) + 1/4 q x^2 (2 - x/3L)) + oa + (1 - x/3L) ob + oe == 0

(* analisis elastico-lineal *)
Mz = (Mc - Ma) / (3 L) x + Ma + q (3 L) / 2 x - q x^2 / 2 (* parabolico *)
Ma + (-Ma + Mc) x / 3 L + 3 L q x / 2 - q x^2 / 2

x1 = Solve[D[Mz, x] == 0, x][[1]]
[resolver derivada]
{x -> (-2 Ma + 2 Mc + 9 L^2 q) / (6 L q)}

Mmax = Mz /. x1
Ma + 1/4 (-2 Ma + 2 Mc + 9 L^2 q) + (-Ma + Mc) (-2 Ma + 2 Mc + 9 L^2 q) / (18 L^2 q) - (-2 Ma + 2 Mc + 9 L^2 q)^2 / (72 L^2 q)

Mb = Mmax;
sol = Solve[Join[eq, ecs] /. {oa -> 0, ob -> 0, oc -> 0, od -> 0, oe -> 0} /. x1, {Ma, Mc, Md, Me}][[1]]
[resolver junta]
sol // N

```

$$\left\{ \begin{aligned} M_a &\rightarrow -\frac{1305 L^2 q}{598}, M_c \rightarrow \frac{1197 L^2 q}{2392}, M_d \rightarrow -\frac{1611 L^2 q}{2392}, M_e \rightarrow \frac{342 L^2 q}{299} \end{aligned} \right\}$$

$$\{ M_a \rightarrow -2.18227 L^2 q, M_c \rightarrow 0.500418 L^2 q, M_d \rightarrow -0.673495 L^2 q, M_e \rightarrow 1.14381 L^2 q \}$$

Mb / . sol // N
[valor numérico]

$$0.683896 L^2 q$$

(* primera RP, → seccion "a" *)

(* Mpn, momento plastico reducido (N·m) *)

IPE300 = {h → 30, b → 15, e → 0.71, e1 → 1.07}; (* cm *)

S275 = {σF → 275}; (* MPa *)

datos = {L → 1, vE → 2.1 × 10¹¹, Iz → 8360 × 10⁻⁸}; (* m *)

Nx = Table[0, {2}]; (* axil *)
[tabla]

Mz = Table[0, {2}]; (* flector *)
[tabla]

(* Lnp en ala superior *)

Nx[[1]] = (b e1 + (h - 2 e1) e + b (c - (h/2 - e1)) - b (h/2 - c)) σF (* ala superior *)

Mz[[1]] = 2 b (h/2 - c) (1/2 (h/2 - c) + c) σF

(* Lnp en alma *)

Nx[[2]] = (e (h/2 - e1 + c) - e (h/2 - e1 - c)) σF

Mz[[2]] = 2 (e (h/2 - e1 - c) (1/2 (h/2 - e1 - c) + c) + b e1 (1/2 (h - e1))) σF

$$\left(b e1 + b \left(c + e1 - \frac{h}{2} \right) - b \left(-c + \frac{h}{2} \right) + e (-2 e1 + h) \right) \sigma F$$

$$2 b \left(c + \frac{1}{2} \left(-c + \frac{h}{2} \right) \right) \left(-c + \frac{h}{2} \right) \sigma F$$

$$\left(-e \left(-c - e1 + \frac{h}{2} \right) + e \left(c - e1 + \frac{h}{2} \right) \right) \sigma F$$

$$2 \left(e \left(c + \frac{1}{2} \left(-c - e1 + \frac{h}{2} \right) \right) \left(-c - e1 + \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{2} b e1 (-e1 + h) \right) \sigma F$$

(* esfuerzos plasticos *)

$$A = b h - (h - 2 e1) (b - e);$$

$$N_p = A \sigma F$$

$$S = 2 (b h / 2 h / 4 - 1 / 2 (h - 2 e1) (b - e) 1 / 4 (h - 2 e1));$$

$$M_p = S \sigma F$$

$$(b h - (b - e) (-2 e1 + h)) \sigma F$$

$$2 \left(\frac{b h^2}{8} - \frac{1}{8} (b - e) (-2 e1 + h)^2 \right) \sigma F$$

sol1 = Solve[Nx[[1]] == Na, c] [[1]];
[resuelve]

N0 = Nx[[1]] /. c → (h/2 - e1)

Simplify[Mz[[1]] /. sol1]

[simplifica]

0

$e(-2e_1 + h) \sigma F$

$$-\frac{Na^2}{4e\sigma F} + \frac{1}{4} e(-2e_1 + h)^2 \sigma F + b e_1(-e_1 + h) \sigma F$$

`Mpn = Piecewise[{{Simplify[Mz[[1]] /. sol1], N0 < Na < Np}, {Simplify[Mz[[2]] /. sol2], 0 < Na < N0}}]`
[función a trozos |simplifica] [simplifica]

$$\begin{cases} -\frac{(Na - (-2be_1 - 2ee_1 - 2bh - eh) \sigma F)(Na - (-2be_1 - e(-2e_1 + h)) \sigma F)}{4b\sigma F} & e(-2e_1 + h) \sigma F < Na < (bh - (b - e)(-2e_1 + h)) \sigma F \\ -\frac{Na^2}{4e\sigma F} + \frac{1}{4} e(-2e_1 + h)^2 \sigma F + b e_1(-e_1 + h) \sigma F & 0 < Na < e(-2e_1 + h) \sigma F \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

`(* reacciones *)`

`R2e = -(Mc + Md) / (5 L);`

`R2a = -R2e;`

`R1a = -(Ma + Mc + q (3 L)^2 / 2) / (3 L);`

`(* cortante, barra ac *)`

`Vc = R1a + q (3 L);`

`(* axiles *)`

`Nac = -R2a;`

`Ncd = -Vc;`

`Nde = -R2e;`

`MC = Table[0, {4}];`
[tabla]

`MC[[1]] := Mc == Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == -Ncd, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos`
[resuelve]

`MC[[2]] := Md == -Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == -Ncd, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos`
[resuelve]

`MC[[3]] := Ma == -Mz[[1]] /. Solve[{Nx[[1]] == Nac}, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos`
[resuelve]

`MC[[4]] := Me == Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == Nde, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos`
[resuelve]

`(* paso 1 *)`

`sol = Solve[Join[eq, ecs, MC[[{1, 2}]], {Ncd == -Np}]] /. {0a -> 0, 0b -> 0, 0e -> 0} /. x1 /. IPE300 /. S275 /. datos, {q, 0c, 0d, Ma, Mc, Md, Me}][[1]] /. datos //`
[resuelve] [junta]

`Quiet (* primera RP, -> seccion "c" y "d", la barra "ac" plastifica T/C *)`
[silencioso]

`{q -> 5853.2, 0c -> 0.000656384, 0d -> -0.000843922, Ma -> -16462.1, Mc -> 0., Md -> 0., Me -> 9877.27}`

`Mb /. sol /. datos`

925.994

`Nac /. sol /. datos`

`Ncd /. sol /. datos (* Nx=Np, agotada a T/C --> Mpn=0 *)`

`Nde /. sol /. datos`

0.

-14267.2

0.

-14267.2

0.

(* ya no podemos aplicar más carga, el dintel es muy corto, aumentar a 2(5L) y 4(5L) *)

(* carga colapso *)

$$q_c = \frac{2 \left(2 M_p + \sqrt{3} M_p \right)}{9 L^2} /. IPE300 /. S275 /. datos$$

137320.

q1 = q /. sol

5853.2

(* reduccion *)

(qc - q1) / qc 100 (* % *)

95.7376

Anexo 1.4. Problema de aplicación

```

NPR = 5; (* secciones: a, b, c, d y e *)
GH = 3;
EQ = NPR - GH
2|

eq = Table[0, {EQ}];
|tabla
Lbc = Ld / Cos[β];
|coseno
eq[[1]] = q Lp^2 / 2 + q Lp^2 / 2 == -Ma + Mb - Md + Me

θa = -1.0;
θb = 2.25;
θc = -2.5;
θd = 1.25;

eq[[2]] = q Lp^2 / 2 - q Lbc 12.5 / 2 - q Lbc 12.5 / 2 + q Lp^2 / 2 == Ma θa + Mb θb + Mc θc + Md θd
Lp^2 q == -Ma + Mb - Md + Me
Lp^2 q - 12.5 Ld q Sec[β] == -1. Ma + 2.25 Mb - 2.5 Mc + 1.25 Md

Clear[θa, θb, θc, θd]
|borra
PFV1[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_, q_] := L / (6 EI) (ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma))
PFV2[Ma_, Mb_, ma_, mb_, L_, EI_, q_] := L / (6 EI) ((ma (2 Ma + Mb) + mb (2 Mb + Ma)) + q L^2 / 4 (ma + mb))

rM = {Ma, Mb, Mc, Md, Me};
mEQ = Normal[CoefficientArrays[eq /. q → 0, rM]][[2]];
|normal |arreglos de coeficientes

MatrixForm[mEQ] (*matriz de coeficientes*)
|forma de matriz
rixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & -1. & 0 & 1. & -1. \\ 1. & -2.25 & 2.5 & -1.25 & 0 \end{pmatrix}$$


vn0 = NullSpace[mEQ];
|espacio nulo
MatrixForm[vn0]
|forma de matriz
rixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.174346 & 0.638618 & 0.663187 & 0.316339 & -0.147932 \\ -0.633666 & -0.32294 & 0.258223 & 0.590807 & 0.280081 \\ 0.546492 & 0.00363135 & -0.0898169 & 0.251024 & 0.793885 \end{pmatrix}$$


vM = {ma, mb, mc, md, me};

(* ecuaciones de compatibilidad *)
ecs = {};
Do[
|repite
v0 = Table[vM[[j]] → vn0[[i]][[j]], {j, NPR}];
|tabla
mf = (mb - ma) / Lp x1 + ma /. v0; (* lineal *)
mg = (mc - mb) / Lbc x2 + mb /. v0;
mh = (md - mc) / Lbc x3 + mc /. v0;
mi = (me - md) / Lp x4 + md /. v0;
ecs = Join[ecs, {
|junta
PFV2[Ma, Mb, ma, mb, Lp, vE Iz, q] +
PFV2[Mb, Mc, mb, mc, Lbc, vE Iz, q Cos[β]] +

```

```

PFV2[Ma, Mb, ma, mb, Lp, vE Iz, q] +
PFV2[Mb, Mc, mb, mc, Lbc, vE Iz, q Cos[β]] +
PFV2[Mc, Md, mc, md, Lbc, vE Iz, q Cos[β]] + PFV2[Md, Me, md, me, Lp, vE Iz, q] + ma θa + mb θb + mc θc + md θd + me θe + mf θf + mg θg + mh θh + mi θi == 0 /. v0
}
]
, {i, GH}]

```

(* pilar izquierdo --> tramo "ab" *)

Mz1 = (Mb - Ma) / Lp x1 + Ma + q Lp / 2 x1 - q x1^2 / 2 ; (* parabolico *)

xm1 = Solve[D[Mz1, x1] == 0, x1] [[1]]

Mf = Mz1 /. xm1

$$\left\{ x1 \rightarrow \frac{-2 Ma + 2 Mb + Lp^2 q}{2 Lp q} \right\}$$

$$Ma + \frac{1}{4} (-2 Ma + 2 Mb + Lp^2 q) + \frac{(-Ma + Mb) (-2 Ma + 2 Mb + Lp^2 q)}{2 Lp^2 q} - \frac{(-2 Ma + 2 Mb + Lp^2 q)^2}{8 Lp^2 q}$$

(* dintel izquierdo --> tramo "bc" *)

Mz2 = (Mc - Mb) / Lbc x2 + Mb + q Cos[β] Lbc / 2 x2 - q Cos[β] x2^2 / 2 ;

xm2 = Solve[D[Mz2, x2] == 0, x2] [[1]]

Mg = Mz2 /. xm2

$$\left\{ x2 \rightarrow \frac{(Ld^2 q - 2 Mb Cos[\beta] + 2 Mc Cos[\beta]) Sec[\beta]}{2 Ld q} \right\}$$

$$Mb + \frac{(-Mb + Mc) (Ld^2 q - 2 Mb Cos[\beta] + 2 Mc Cos[\beta])}{2 Ld^2 q} + \frac{1}{4} (Ld^2 q - 2 Mb Cos[\beta] + 2 Mc Cos[\beta]) Sec[\beta] - \frac{(Ld^2 q - 2 Mb Cos[\beta] + 2 Mc Cos[\beta])^2 Sec[\beta]}{8 Ld^2 q}$$

(* dintel derecho --> tramo "fh" *)

Mz3 = (Md - Mc) / Lbc x3 + Mc + q Cos[β] Lbc / 2 x3 - q Cos[β] x3^2 / 2 ;

xm3 = Solve[D[Mz3, x3] == 0, x3] [[1]]

Mh = Mz3 /. xm3

$$\left\{ x3 \rightarrow \frac{(Ld^2 q - 2 Mc Cos[\beta] + 2 Md Cos[\beta]) Sec[\beta]}{2 Ld q} \right\}$$

$$Mc + \frac{(-Mc + Md) (Ld^2 q - 2 Mc Cos[\beta] + 2 Md Cos[\beta])}{2 Ld^2 q} + \frac{1}{4} (Ld^2 q - 2 Mc Cos[\beta] + 2 Md Cos[\beta]) Sec[\beta] - \frac{(Ld^2 q - 2 Mc Cos[\beta] + 2 Md Cos[\beta])^2 Sec[\beta]}{8 Ld^2 q}$$

(* pilar derecho --> tramo "ij" *)

Mz4 = (Me - Md) / Lp x4 + Md + q Lp / 2 x4 - q x4^2 / 2 ; (* parabolico *)

xm4 = Solve[D[Mz4, x4] == 0, x4] [[1]]

Mi = Mz4 /. xm4

$$\left\{ x4 \rightarrow \frac{-2 Md + 2 Me + Lp^2 q}{2 Lp q} \right\}$$

$$Md + \frac{1}{4} (-2 Md + 2 Me + Lp^2 q) + \frac{(-Md + Me) (-2 Md + 2 Me + Lp^2 q)}{2 Lp^2 q} - \frac{(-2 Md + 2 Me + Lp^2 q)^2}{8 Lp^2 q}$$

(* reacciones *)

R1a = -(Ma + Mb + q Lp^2 / 2) / Lp;

R1e = -(Md + Me + q Lp^2 / 2) / Lp;

R2e = -(Ma + Me - 2 q Lp^2 / 2 - q (2 Ld)^2 / 2) / (2 Ld);

R2a = q 2 Ld - R2e;

```

Vb = R1a + q Lp; (* barra "ab" *)
Vd = R1e + q Lp; (* barra "de" *)

Nab = -R2a;
Nbc = -R2a Sin[beta] - Vb Cos[beta] + q Sin[beta] x;
Ncd = Vd Cos[beta] - R2e Sin[beta] + q Sin[beta] (Lbc - x);
Nde = -R2e;

(* Mpn, momento plastico reducido (N.m) *)

IPE300 = {h -> 30, b -> 15, e -> 0.71, e1 -> 1.07}; (* cm *)
S275 = {sigmaF -> 275 * 10^3}; (* MPa *)
datos = {Lp -> 5.0, Ld -> 10.0, H -> 7.0, beta -> ArcTan[(H - Lp) / Ld], vE -> 2.1 * 10^8, Iz -> 8360.0 * 10^-8, Mp -> 628.0 * 275 * 10^-3}; (* unidades: kN, m *)

(* m *)

Nx = Table[0, {2}]; (* axil *)
Mz = Table[0, {2}]; (* flector *)

(* Lnp en ala superior *)
Nx[[1]] = (b e1 + (h - 2 e1) e + b (c - (h/2 - e1)) - b (h/2 - c)) sigmaF (* ala superior *)
Mz[[1]] = 2 b (h/2 - c) (1/2 (h/2 - c) + c) sigmaF

(* Lnp en alma *)
Nx[[2]] = (e (h/2 - e1 + c) - e (h/2 - e1 - c)) sigmaF
Mz[[2]] = 2 (e (h/2 - e1 - c) (1/2 (h/2 - e1 - c) + c) + b e1 (1/2 (h - e1))) sigmaF
(b e1 + b (c + e1 - h/2) - b (-c + h/2) + e (-2 e1 + h)) sigmaF
2 b (c + 1/2 (-c + h/2)) (-c + h/2) sigmaF
(-e (-c - e1 + h/2) + e (c - e1 + h/2)) sigmaF
2 (e (c + 1/2 (-c - e1 + h/2)) (-c - e1 + h/2) + 1/2 b e1 (-e1 + h)) sigmaF

(* esfuerzos plasticos *)
A = b h - (h - 2 e1) (b - e);
Np = A sigmaF

S = 2 (b h/2 h/4 - 1/2 (h - 2 e1) (b - e) 1/4 (h - 2 e1));
Mp = S sigmaF
(b h - (b - e) (-2 e1 + h)) sigmaF
2 (b h^2/8 - 1/8 (b - e) (-2 e1 + h)^2) sigmaF

sol1 = Solve[Nx[[1]] == Na, c][[1]];
N0 = Nx[[1]] /. c -> (h/2 - e1)
Simplify[Mz[[1]] /. sol1]

```

$$e(-2e1+h) \sigma F$$

$$\frac{(Na + (-2be1 + 2ee1 + 2bh - eh) \sigma F) (Na - (2be1 + e(-2e1+h)) \sigma F)}{4b \sigma F}$$

```
sol2 = Solve[Nx[[2]] == Na, c][[1]];
[resuelve]
```

```
Nx[[2]] /. c -> 0
Nx[[2]] /. c -> (h/2 - e1)
Simplify[Mz[[2]] /. sol2]
[simplifica]
```

$$0$$

$$e(-2e1+h) \sigma F$$

$$-\frac{Na^2}{4e \sigma F} + \frac{1}{4} e(-2e1+h)^2 \sigma F + be1(-e1+h) \sigma F$$

```
Mpn = Piecewise[{{Simplify[Mz[[1]] /. sol1], N0 < Na < Np}, {Simplify[Mz[[2]] /. sol2], 0 < Na < N0}}]
[función a trozos [simplifica] [simplifica]
```

$$\begin{cases} -\frac{(Na + (-2be1 + 2ee1 + 2bh - eh) \sigma F) (Na - (2be1 + e(-2e1+h)) \sigma F)}{4b \sigma F} & e(-2e1+h) \sigma F < Na < (bh - (b-e)(-2e1+h)) \sigma F \\ -\frac{Na^2}{4e \sigma F} + \frac{1}{4} e(-2e1+h)^2 \sigma F + be1(-e1+h) \sigma F & 0 < Na < e(-2e1+h) \sigma F \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
sol0 = Solve[Join[eq, ecs] /. {oa -> 0, ob -> 0, oc -> 0, od -> 0, oe -> 0, of -> 0, og -> 0, oh -> 0, oi -> 0} /. xm1 /. xm2 /. xm3 /. xm4 /. q -> 1 /. datos, {Ma, Mb, Mc, Md, Me}][[1]] // Quiet
[resuelve- [junta] [silencio]
```

{Ma -> 6.79589, Mb -> -19.2654, Mc -> 7.5797, Md -> -26.7065, Me -> 24.3548}

```
MC = Table[0, {9}];
[tabla]
```

```
MC[[1]] = Ma == Mz[[1]] /. Solve[{Nx[[1]] == Abs[Nab]}, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos;
[resuelve [valor absoluto]
```

```
MC[[2]] = -Mz[[1]] == Mb /. Solve[Nx[[1]] == Abs[Nab], c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos;
[resuelve [valor absoluto]
```

```
MC[[3]] = Mc == Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == Max[Abs[Nbc] /. x -> Lbc], Abs[Ncd] /. x -> 0], c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos;
[resuelve [má- [valor absoluto] [valor absoluto]
```

```
MC[[4]] = Md == -Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == -Nde, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos;
[resuelve]
```

```
MC[[5]] = Me == Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == -Nde, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos;
[resuelve]
```

```
MC[[6]] = Mf == Mz[[1]] /. Solve[{Nx[[1]] == -Nab}, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos;
[resuelve]
```

```
MC[[7]] = Mg == Mz[[1]] /. Solve[{Nx[[1]] == -Nb}, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos;
[resuelve]
```

```
MC[[8]] = Mh == Mz[[2]] /. Solve[Nx[[2]] == Ncd, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos;
[resuelve]
```

```
MC[[9]] = Mi == Mz[[1]] /. Solve[Nx[[1]] == -Nde, c][[1]] /. IPE300 /. S275 /. datos;
[resuelve]
```

```
Edef := PFV2[Ma, Mb, Ma, Mb, Lp, vE Iz, q] +
PFV2[Mb, Mc, Mb, Mc, Lbc, vE Iz, q Cos[β]] +
[coseno]
PFV2[Mc, Md, Mc, Md, Lbc, vE Iz, q Cos[β]] + PFV2[Md, Me, Md, Me, Lp, vE Iz, q] + Ma oa + Mb ob + Mc oc + Md od + Me oe + Mf of + Mg og + Mh oh + Mi oi;
[coseno]
```

(* energía deformacion *)

(* paso 1 *)

```
sol = Solve[Join[eq, ecs, {MC[[4]]}] /. {oa -> 0, ob -> 0, oc -> 0, od -> 0, oe -> 0, of -> 0, og -> 0, oh -> 0, oi -> 0} /. IPE300 /. S275 /. datos, {q, Ma, Mb, Mc, Md, Me}] // Quiet;
```

```

sol1 = sol[[2]]
(* primera RP, → seccion "d" *)
{q → 1.2418, Ma → 8.43914, Mb → -23.9238, Mc → 9.41248, Md → -33.1641, Me → 30.2439}

Nab /. sol1 /. datos
Nbc /. sol1 /. x → 0 /. datos
Ncd /. sol1 /. x → 0 /. datos
Nde /. sol1 /. datos
-12.7999
-8.59128
3.74006
-12.0361

Np /. IPE300 /. S275 /. datos
14.2672

N0 = Nx[[1]] /. c → (h - 2 e1) / 2 /. IPE300 /. S275 /. datos
5.43967

(* barra "ab" *)
Ma /. sol1 /. datos
Mf /. sol1 /. datos (* rotula plastica *)
Mb /. sol1 /. datos

Mz[[1]] /. Solve[{Nx[[1]] == -Nab, c}][[1]] /. sol1 /. IPE300 /. S275 /. datos
|_resuelve
8.43914
13.0067
-23.9238

21.8784

(* barra "bc" *)
Mb /. sol1 /. datos
Mg /. sol1 /. datos (* rotula plastica *)
Mc /. sol1 /. datos

-Mz[[1]] /. Solve[{Nx[[1]] == -Nbc /. x → 0, c}][[1]] /. sol1 /. IPE300 /. S275 /. datos
|_resuelve
-23.9238
12.9619
9.41248
-83.1858

(* barra "cd" *)
Mc /. sol1 /. datos
Mh /. sol1 /. datos (* rotula plastica *)
Md /. sol1 /. datos

-Mz[[2]] /. Solve[{Nx[[2]] == -Nbc /. x → 0, c}][[1]] /. sol1 /. IPE300 /. S275 /. datos
|_resuelve
9.41248
11.1113
-33.1641
-71.0698

(* barra "de" *)
Md /. sol1 /. datos
Mi /. sol1 /. datos (* rotula plastica *)

```

```

Md /. sol1 /. datos
Mi /. sol1 /. datos (* rotula plastica *)
Me /. sol1 /. datos

-Mz[[1]] /. Solve[{Nx[[1]] == -Nde}, c][[1]] /. sol1 /. IPE300 /. S275 /. datos
[resolver]

-33.1641
67.1744
30.2439
-33.1641

xm4 /. sol1 /. datos
{x4 -> 12.7123}

Lbc /. datos
10.198

Nde

$$-\frac{Ma - Me + 2 Ld^2 q + Lp^2 q}{2 Ld}$$

(* VOY POR AQUI *)
(* paso 2 *)

sol1 =
Solve[Join[eq, ecs, MC[[{4, 5}]], {-Np < Nbc < Np} /. x -> 0] /. {oa -> 0, ob -> 0, oc -> 0, oe -> 0, of -> 0, og -> 0, oh -> 0, oi -> 0} /. IPE300 /. S275 /. datos, {q, od, Ma, Mb, Mc, Md, Me}][[
[resolver: junta]
1]] // Quiet
[silencioso]

{q -> 1.25461, od -> -0.000942144, Ma -> 7.97512, Mb -> -24.6076, Mc -> 10.1028, Md -> -31.9739, Me -> 31.9739}

Nab /. sol1 /. datos
Nbc /. sol1 /. x -> 0 /. datos
Ncd /. sol1 /. x -> Lbc /. datos
Nde /. sol1 /. datos

-12.9753
-8.88216
0.699294
-12.1169

(* paso 3 *)

sol1 = Solve[Join[eq, ecs, MC[[{2, 4, 5}]]] /. {oa -> 0, ob -> 0, oc -> 0, of -> 0, og -> 0, oh -> 0, oi -> 0} /. IPE300 /. S275 /. datos, {q, od, oe, Ma, Mb, Mc, Md, Me}][[3]] // Quiet
[resolver: junta]
(* tercera RP, -> seccion "b" *)

{q -> 1.24247, od -> -0.00251572, oe -> 0.000719808, Ma -> 4.60398, Mb -> -24.6827, Mc -> 11.7861, Md -> -30.1743, Me -> 30.1743}

Nab /. sol1 /. datos
Nbc /. sol1 /. x -> 0 /. datos
Ncd /. sol1 /. x -> 0 /. datos
Nde /. sol1 /. datos

-12.6106
-9.45676
3.13056
-12.2389

```

```

sol1 = Solve[Join[eq, ecs, MC[{{1, 2, 4, 5}}]] /. {oa → 0, oc → 0, of → 0, og → 0, oh → 0, oi → 0} /. IPE300 /. S275 //. datos, {q, od, oe, ob, Ma, Mb, Mc, Md, Me}][[2]] // Quiet
[resue Junta
(* tercera RP, → seccion "e" *)
{q → 1.28281, od → -0.00647357, oe → 0.00123535, ob → -0.00834307, Ma → 13.4255, Mb → -13.4255, Mc → 20.3992, Md → -29.4606, Me → 29.4606}

Nab /. sol1 /. datos
Nbc /. sol1 /. x → 0 //. datos
Ncd /. sol1 /. x → 0 //. datos
Nde /. sol1 /. datos
-13.3689
-5.76659
3.30062
-12.2873

(* MC: d, e, b y a *)

qc = q /. sol1
1.28281

(* reduccion *)
(9.28573 - qc) / 9.28573 100 (* % *)
86.1852

```