Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Un Método Símplex en Programación Lineal Multiobjetivo

Autor:

Diego Del Río Gómez

Tutor/es:

Pedro César Álvarez Esteban

Índice general

Resumen

En este Trabajo Final de Grado se estudia el algoritmo símplex multiobjetivo propuesto por Ehrgot en [1] para calcular las soluciones eficientes de un problema de optimización lineal multiobjetivo.

El Capítulo 1 contiene de forma resumida el conocido método símplex introducido por Dantzig en 1947 para resolver problemas de optimización lineales. Además del algoritmo símplex y su variante de las dos fases, se estudian resultados y definiciones de programación lineal que luego serán utilizados para el método símplex que se expondrá en el Capítulo 3.

En el Capítulo 2, se hace una introducción a los problemas de optimización mulitobjetivo, es decir, problemas donde se tiene más de una función para optimizar simultáneamente. Se muestra que los puntos eficientes son las "soluciones" de este tipo de problemas y los puntos no dominados son lo análogo a los valores óptimos de las funciones objetivo en los problemas de optimización uniobjetivo. También se explica el método escalar de suma ponderada que permite resolver problemas de optimización multiobjetivo resolviendo en su lugar uno con un solo objetivo. Este capítulo concluye con la exposición de otros métodos para resolver problemas de optimización multiobjetivo entre los que destaca el método de Benson.

En el Capítulo 3 se estudian los problemas de optimización lineales multiobjetivo. Tras definir este tipo de problemas y sus puntos eficientes y no dominados, se introducen y demuestran los principales teoremas que permiten justificar el método símplex multiobjetivo. Se explicará el algoritmo símplex multiobjetivo que permite calcular las soluciones eficientes básicas de un problema de optimización lineal multiobjetivo. Este algoritmo se basa en tres fases. En la primera se determina si el problema es o no factible, si es factible, en la segunda fase se determina si el conjunto de puntos eficientes es vacío o no. Por último, si el conjunto de puntos eficientes no es vacío se calculan todas las bases eficientes para caracterizar dicho conjunto. También se ve un ejemplo de resolución de un problema mediante el uso de dicho algoritmo.

Por último, en el Capítulo 4 se implementa el algoritmo símplex multiobjetivo con el sofware Xpress. Se comprueba su funcionamiento con varios problemas test y se exponen las conclusiones de dichas pruebas.

Capítulo 1

El Método Símplex

Este capítulo comienza con la introducción de los problemas de optimización lineal, también llamados, programas lineales. La programación lineal surge como un modelo matemático desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial para planificar los gastos y los retornos, a fin de reducir los costos al ejército y aumentar las pérdidas del enemigo. Estudiaremos el Algoritmo Símplex, propuesto por Dantzig en 1947. Consiste en un procedimiento para resolver problemas de optimización lineales con un objetivo. Aunque existen otros, sigue siendo uno de los métodos más utilizados para resolver este tipo de problemas con el ordenador por su eficiencia. Desafortunadamente, existen ejemplos de problemas en los que el número de operaciones del algoritmo crece exponencialmente respecto a la dimensión del problema.

Este capítulo resulta fundamental para el objetivo del TFG que es presentar un algoritmo símplex multiobjetivo. Para resolver el tipo de problemas que presentamos en el Capítulo 3 utilizaremos el Algoritmo Símplex que exponemos a continuación.

Las explicaciones y resultados del primer capítulo se encuentran en los libros de Dantzig y Tapa [2][3] así como en Padberg [5].

1.1. Introducción a la programación lineal

La programación matemática (o teoría de optimización) es la rama de las matemáticas que trabaja con las técnicas de maximizar o minimizar una función objetivo sujeta a restricciones sobre los valores de las variables. Un caso especial es la **programación lineal** que trata sobre el proceso de maximizar o minimizar una función objetivo lineal en varias variables sujeta a restricciones lineales, que pueden ser de igualdad o desigualdad.

La programación lineal resulta fundamental para la economía entre otras aplicaciones. Podemos entender las restricciones como los recursos finitos que debemos utilizar y la función objetivo como, por ejemplo, los gastos que debemos minimizar para producir algo o el beneficio que debemos maximizar. Con el siguiente ejemplo ilustramos la importancia de la programación lineal y las aplicaciones que puede tener en la vida real.

Ejemplo 1.1 (Problema de la dieta[4])**.** Una granja consume diariamente un mínimo de 800 kg de un alimento específico, el cuál es una mezcla de maíz y soja con las composiciones de la Tabla (1.1).

	Kg por Kg de forraje		
Forraje	Proteína	Fibra	Costo(€/Kg)
Maíz	0.09	0.2	0.30
Soja	0.60	0.06	0.90

Tabla 1.1: Kg por Kg de forraje.

Las necesidades dietéticas del alimento especial son un mínimo de 30 % de proteína y un máximo de 5 % de fibra. El objetivo es determinar la mezcla diaria de alimento a un costo mínimo. Las variables de decisión del modelo son:

$$x_1 = \text{Kg de maíz en la mezcla diaria}$$
$$x_2 = \text{Kg de soja en la mezcla diaria}$$

El objetivo es minimizar el costo diario total (en euros) de la mezcla de alimento, es decir,

$$\text{Minimizar } z = 0.3x_1 + 0.9x_2$$

Las restricciones representan la cantidad diaria de la mezcla y las necesidades dietéticas, la granja requiere un mínimo de 800 Kg de alimento al día, es decir,

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

La cantidad de proteína contenida en x_1 Kg de maíz y en x_2 Kg de soja es $(0.09x_1 + 0.6x_2)$ Kg. Esta cantidad debe ser al menos igual al 30 % de la mezcla de alimentos total $(x_1 + x_2)$ Kg, es decir,

$$0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3\,(x_1 + x_2)$$

Asimismo, la necesidad de fibra de 5 % máximo se representa como sigue

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05\,(x_1 + x_2)$$

Las restricciones se simplifican cambiando los términos en x_1 y x_2 al lado izquierdo de cada desigualdad, dejando sólo una constante del lado derecho. El modelo completo es

$$\text{Minimizar } z = 0.3x_1 + 0.9x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 800 \\ 0.21x_1 - 30x_2 &\leq 0 \\ 0.03x_1 - 0.01x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La Figura 1.1 muestra la solución gráfica del modelo.

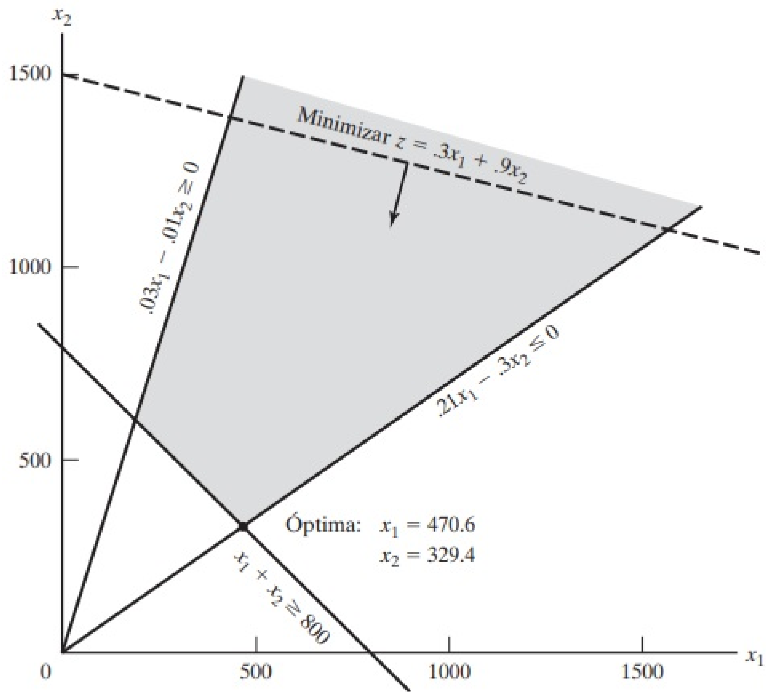

Figura 1.1: Solución gráfica del problema de la dieta [4].

Definición 1.2. Un problema de optimización lineal en **forma estándar** trata de encontrar valores $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$ y mín z satisfaciendo:

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & = z(\text{Min}) \\ a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \tag{1.1}$$

En notación matricial y vectorial podemos escribirlo como:

$$\begin{array}{lrcll} \text{Minimizar} & c^T x & = & z & \\ \text{sujeto a} & Ax & = & b, & A : m \times n, \\ & x & \geq & 0 & \end{array} \tag{1.2}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector cuyas componentes son las variables x_i, $i = 1, \dots, n$, $c \in \mathbb{R}^n$ es el vector cuyas componentes son los coeficientes de las variables x_i de la función z que queremos optimizar, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz donde cada a_{ij} representa el coeficiente de la j-ésima variable de la restricción i-ésima, y $b \in \mathbb{R}^m$ es el vector de los valores del lado derecho de las restricciones.

A las variables $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$ se las llama variables de decisión, $c \in \mathbb{R}^n$ es el vector de costes, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de restricciones y z es la función objetivo.

Definición 1.3. El conjunto $\mathcal{X}$ de los posibles valores que pueden tomar las variables x_i, $i = 1, \dots, n$, cumpliendo las restricciones sobre los valores de dichas variables se llama conjunto factible, es decir, en el problema (1.2) tenemos:

$$\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}.$$

Al conjunto de valores que puede tomar la función objetivo, cumpliendo las restricciones sobre el valor de las variables, lo llamamos conjunto factible en el espacio objetivo y lo denotamos por $\mathcal{Y}$,

$$\mathcal{Y} := c\mathcal{X} := \{c^T x : x \in \mathcal{X}\}.$$

Dado un problema de maximización siempre lo podemos convertir en uno de minimización y viceversa mediante la igualdad:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$$

Si queremos sustituir una restricción $\geq$ por una $\leq$ o viceversa tendremos que multiplicar los coeficientes de ambos lados de la restricción por -1.

Si queremos poner las restricciones en forma de igualdad, que será la forma que utilizaremos, tendremos que sustituir las restricciones $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ por $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i^s = b_i$, a la variable $x_i^s \geq 0$ la llamaremos variable de holgura.

Partiendo de un problema de minimización o maximización, que llamamos problema primal, podemos asociarle uno de maximización o minimización respectivamente, que llamamos dual, siguiendo los pasos que resumimos en la Tabla 1.2.

Primal	Dual
Minimizar el Objetivo Primal	Maximizar el Objetivo Dual
Coeficientes del Objetivo	Lado Derecho de las Restricciones
Lado Derecho de las Restricciones	Coeficientes del Objetivo
Matriz de Coeficientes	Matriz Traspuesta de Coeficientes
Restricciones del Primal:	Variables del Dual:
Iésima Inecuación: $\geq$	$y_i \geq 0$
Iésima Inecuación: $\leq$	$y_i \leq 0$
Iésima Ecuación: $=$	y_i sin restricción de signo
Variables del Primal:	Restricciones del Dual:
$x_j \geq 0$	Iésima Inecuación: $\leq$
$x_j \leq 0$	Iésima Inecuación: $\geq$
x_j sin restricción de signo	Iésima Ecuación: $=$

Tabla 1.2: Correspondencia entre el problema primal y el dual.

Siguiendo las relaciones de la Tabla 1.2, al problema (1.1), podemos asociarle su problema dual que definimos a continuación:

Definición 1.4. El **problema dual** del problema (1.1) consiste en encontrar valores π_1, π_2, …, π_m y $\max v$ satisfaciendo:

$$\begin{array}{ccccccccl}
b_1\pi_1 & + & b_2\pi_2 & + & \cdots & + & b_m\pi_m & = v(\text{Max}) \\
a_{11}\pi_1 & + & a_{21}\pi_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\pi_m & \leq c_1 \\
a_{12}\pi_1 & + & a_{22}\pi_2 & + & \cdots & + & a_{m2}\pi_m & \leq c_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{1n}\pi_1 & + & a_{2n}\pi_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\pi_m & \leq c_m
\end{array} \tag{1.3}$$

En notación matricial:

$$\begin{array}{llcll} \text{Maximizar} & b^T\pi & = & v & \\ \text{sujeto a} & A^T\pi & \leq & c, & A : n \times m \end{array} \tag{1.4}$$

donde $\pi \in \mathbb{R}^m$ está formado por las variables de decisión del problema dual, $b \in \mathbb{R}^m$ es el vector de costes del dual (lado derecho de las restricciones en el primal), v es la función objetivo, $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es la matriz de restricciones del dual (matriz traspuesta del primal) y $c \in \mathbb{R}^n$ es el lado derecho de las restricciones (vector de coses del primal).

Definición 1.5. Denotamos con $\mathcal{U}$ al conjunto factible del problema lineal dual (1.3), es decir:

$$\mathcal{U} := \left\{u \in \mathbb{R}^m : A^T u \leq c\right\}.$$

El problema (1.2) y su dual (1.4) pueden no estar acotados, o dicho de otra forma, es posible que la función objetivo crezca o decrezca infinitamente. También puede suceder que no sean factibles, es decir, que $\mathcal{X} := \emptyset$ o $\mathcal{U} := \emptyset$.

Notemos que dado un problema primal, el dual de su dual es otra vez el primal. El motivo por el que hemos introducido el problema dual es la relación que hay entre el problema primal (1.2) y su dual (1.4) que mostramos en el Teorema 1.6. Una utilidad de esta relación es que podemos encontrar la solución a un problema resolviendo su dual, que puede ser más fácil de resolver.

Teorema 1.6 (Dualidad en Programación Lineal [2])**.**

I. *(Dualidad débil). Dado $x \in \mathcal{X}$ y $u \in \mathcal{U}$ soluciones factibles de (1.2) y de (1.4) respectivamente. Entonces:*

$$b^T u \leq c^T x$$

II. *Si (1.2) no está acotado, entonces (1.4) es no factible y viceversa.*

III. *Es posible que ambos (1.2) y (1.4) sean no factibles.*

IV. *(Dualidad fuerte). Si ambos (1.2) y (1.4) son factibles, i.e. $\mathcal{X} \neq \emptyset$ y $\mathcal{U} \neq \emptyset$, entonces:*

$$\min_{x\in\mathcal{X}} c^T x = \max_{u\in\mathcal{U}} b^T u$$

y $b^T\hat{u} = c^T\hat{x}$ para cada solución óptima $\hat{x} \in \mathcal{X}$ de (1.2) y para cada solución óptima $\hat{u} \in \mathcal{U}$ de (1.4).

1.2. Algoritmo Símplex

Consideramos sin pérdida de generalidad, ya que podemos expresar cualquier problema lineal de esta forma, el problema lineal:

$$\min\left\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\right\} \tag{1.5}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$ y A es una matriz de dimensiones $m \times n$. Asumiremos que el rango de A es m y que $b \geq 0$.

Definición 1.7. Una submatriz $m \times m$ invertible $A_{\mathcal{B}}$ de A decimos que es una matriz básica, donde $\mathcal{B}$ es el conjunto de índices de las columnas de A que definen la submatriz $A_{\mathcal{B}}$. A $\mathcal{B}$ lo llamamos base. Consideramos $\mathcal{N} := \{1, \ldots, n\} \backslash \mathcal{B}$ el conjunto de índices de las columnas no básicas. Una variable x_i se llama básica si $i \in \mathcal{B}$, si $i \in \mathcal{N}$, a la variable x_i la llamamos no básica.

Con la definición anterior podemos dividir A, c y x en una parte básica y una parte no básica, i.e. $A = (A_{\mathcal{B}}, A_{\mathcal{N}})$, $c^T = \left(c_{\mathcal{B}}^T, c_{\mathcal{N}}^T\right)$ y $x = \left(x_{\mathcal{B}}^T, x_{\mathcal{N}}^T\right)^T$. Esto nos permite escribir las restricciones $Ax = b$ como:

$$(A_{\mathcal{B}}, A_{\mathcal{N}}) \left(x_{\mathcal{B}}^T, x_{\mathcal{N}}^T\right)^T = b$$

Dado que $A_{\mathcal{B}}$ es invertible obtenemos:

$$x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} \left(b - A_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}}\right) \tag{1.6}$$

Estableciendo $x_{\mathcal{N}} = 0$ en (1.6) obtenemos $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b$. A $(x_{\mathcal{B}}, 0)$ lo llamamos una solución básica del problema lineal (1.5). Si además tenemos que $x_{\mathcal{B}} \geq 0$ decimos que $(x_{\mathcal{B}}, 0)$ es una solución básica factible. Podemos calcular el valor de la función objetivo en $x = \left(x_{\mathcal{B}}^T, x_{\mathcal{N}}^T\right)^T$ como sigue:

$$\begin{aligned} \left(c_{\mathcal{B}}^T, c_{\mathcal{N}}^T\right) \left(x_{\mathcal{B}}^T, x_{\mathcal{N}}^T\right)^T &= c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}} \\ &= c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} b + \left(c_{\mathcal{N}}^T - c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}}\right) x_{\mathcal{N}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

El vector $\bar{c}^T = c^T - c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} A$ se llama vector de costes reducidos. Escribiendo $\bar{c} = (\bar{c}_{\mathcal{B}}, \bar{c}_{\mathcal{N}})$ siempre tenemos que $\bar{c}_{\mathcal{B}} = 0$. Esto es debido a que las columnas t_i, cuyos índices son los de la base $\mathcal{B}$ de la matriz $A_{\mathcal{B}}^{-1} A$ están formados por ceros y un uno en la posición i de la columna t_i para cada $i \in \mathcal{B}$. Luego los elementos de $c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} A$ serán iguales a los de c^T en las posiciones $i \in \mathcal{B}$.

En la práctica, es computacionalmente muy costoso invertir matrices, por lo que para obtener los valores $x_{\mathcal{B}}$ y $\bar{c}^T$ lo haremos mediante un procedimiento de pivotaje del problema original (1.1). En este procedimiento realizaremos operaciones elementales en el sistema de ecuaciones formado por la función objetivo y las restricciones de (1.1). Obteniendo un sistema equivalente, es decir, un sistema cuyo conjunto de soluciones sea el mismo que el de (1.1). Con operaciones elementales nos referimos a intercambiar dos filas, multiplicar una fila por un número real distinto de cero y sumar a una fila otra fila multiplicada por un número real.

En primer lugar, para cada columna de $A_{\mathcal{B}}$ elegimos un término $a_{rs} \neq 0$ llamado pivote y efectuamos las operaciones:

I. Remplazamos la r-ésima ecuación por la r-ésima ecuación multiplicada por $1/a_{rs}$

II. Para cada $i = 1, \ldots, m$ excepto $i = r$, remplazamos la i-ésima ecuación por la suma de la i-ésima ecuación y la r-ésima multiplicada por $(-a_{is})$.

Después de ordenar las variables obtenemos unas restricciones equivalentes a $Ax = b$ escritas como:

$$I x_{\mathcal{B}} + \bar{A} x_{\mathcal{N}} = \bar{b} \tag{1.8}$$

A continuación pasamos la variable z hacia el otro lado de la primera ecuación de (1.1) y para cada $i \in \mathcal{B}$ restamos a la primera ecuación la i-ésima ecuación multiplicada por c_i. De esta forma obtenemos el sistema:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
-z & & & & + & \bar{c}_{m+1}x_{m+1} & +\cdots+ & \bar{c}_j x_j & +\cdots+ & \bar{c}_n x_n & = & -\bar{z}_0 \\
& x_1 & & & + & \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} & +\cdots+ & \bar{a}_{1j}x_j & +\cdots+ & \bar{a}_{1n}x_n & = & \bar{b}_1 \\
& & x_2 & & + & \bar{a}_{2,m+1}x_{m+1} & +\cdots+ & \bar{a}_{2j}x_j & +\cdots+ & \bar{a}_{2n}x_n & = & \bar{b}_2 \\
& & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & & x_m & + & \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} & +\cdots+ & \bar{a}_{mj}x_j & +\cdots+ & \bar{a}_{mn}x_n & = & \bar{b}_m
\end{array} \tag{1.9}$$

El sistema anterior es equivalente a (1.1) y a simple vista podemos ver el valor de $x_{\mathcal{B}} = \bar{b}$, $\bar{c}^T$ y el del valor de la función objetivo $\bar{z}_0$.

Dada una solución básica factible $(x_{\mathcal{B}}, 0)$. De la primera fila de (1.9) o de (1.7) es claro que si para algún $s \in \mathcal{N}$, $\bar{c}_s < 0$ el valor de $c^T x$ decrecerá si el valor de x_s aumenta de cero. Este aumento está limitado por las restricciones de no negatividad $x_{\mathcal{B}} \geq 0$. Vemos en (1.8) que para cada variable básica x_j, $j \in \mathcal{B}$,

$$x_j = \bar{b}_j - \bar{a}_{js}x_s \geq 0 \tag{1.10}$$

donde $\bar{a}_{js}$ es el elemento de $\bar{A}$ en la fila j y columna s. Si $\bar{a}_{js} \leq 0$ entonces (1.10) es cierto para todo $x_s \geq 0$, y el valor objetivo no estaría acotado, es decir, tendería a $-\infty$. De lo contrario, elegimos x_s cumpliendo $x_s \leq \bar{b}_j / \bar{a}_{js}$ para todo $j \in \mathcal{B}$. El valor más alto posible de x_s para que sigamos teniendo una solución factible es:

$$x_s = \text{mín}\left\{ \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{js}} : j \in \mathcal{B}, \bar{a}_{js} > 0 \right\} \tag{1.11}$$

En este valor, una variable básica $x_j, j \in \mathcal{B}$ se hará cero y ya no se podrá aumentar más el valor de x_s.

Definición 1.8. Sea $r \in \mathcal{B}$ el índice para el cuál se alcanza el mínimo en (1.11). A la variable x_s la llamamos variable entrante y a la variable x_r, variable saliente.

Obtenemos una nueva base $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \backslash \{r\}) \cup \{s\}$ que define una nueva solución básica factible $(x_{\mathcal{B}'}, 0)$ la cual mejora el valor objetivo de $(x_{\mathcal{B}}, 0)$ suponiendo que $\bar{b}_j > 0$. Si el valor objetivo en una solución básica $(x_{\mathcal{B}}, 0)$ no se puede mejorar más diremos que la solución básica factible $(x_{\mathcal{B}}, 0)$ es óptima y $\mathcal{B}$ será una base óptima.

El Algoritmo Símplex empieza con una solución básica factible. A continuación, para los valores negativos en la función objetivo, sale una variable básica y entra una nueva variable en la base que mejora la solución básica factible. El algoritmo finaliza cuando la base que tenemos es óptima y no podemos mejorarla introduciendo en la base una nueva variable. Por lo tanto el Algoritmo Símplex a partir de una base y una solución factibles nos calcula una base y una solución óptimas.

Algoritmo 1.9 (Algoritmo Símplex)**.**

Entrada: Base $\mathcal{B}$ y solución básica factible $(x_{\mathcal{B}}, 0)$.

Mientras: $\{i \in \mathcal{N} : \bar{c}_i < 0\} \neq \emptyset$.

Hacer: Elige $s \in \{i \in \mathcal{N} : \bar{c}_i < 0\}$.

Si $\bar{a}_{js} \leq 0$ para todo $j \in \mathcal{B}$, STOP, (1.5) no está acotado.

Elegimos $r \in \text{argmin}\left\{\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{sj}} : j \in \mathcal{B}, \bar{a}_{sj} > 0\right\}$

Actualizamos $\mathcal{B} := (\mathcal{B}\backslash\{r\}) \cup \{s\}$, $\bar{A} := A_{\mathcal{B}}^{-1}A$ y $\bar{b} := A_{\mathcal{B}}^{-1}b$.

Fin Mientras

Salida: Una base óptima $\mathcal{B}$ y una solución factible básica óptima $(x_{\mathcal{B}}, 0)$.

Los siguientes teoremas justifican que el Algoritmo Símplex funcione.

Teorema 1.10 (Teorema fundamental de la programación lineal)**.**

I. *Si el problema lineal (1.5) es factible, es decir, si $\mathcal{X} \neq \emptyset$, entonces existe una solución básica factible.*

II. *Si, además la función objetivo $c^T x$ está acotada por abajo en $\mathcal{X}$, entonces existe una solución óptima factible básica.*

Demostración. Dada x una solución factible, entonces $x \geq 0$ y podemos escribir

$$Ax = \sum_{i \in I} a_i x_i = b, \quad I \subset \{1, \ldots, n\}, \quad x_i > 0$$

donde hemos obviado los índices i tales que $x_i = 0$. Tenemos dos casos, si $\{a_i\}_{i \in I}$ es linealmente independiente, entonces x es una solución básica factible y tanto I como II estarían probadas. Si $\{a_i\}_{i \in I}$ es linealmente dependiente, tenemos que $\sum_{i \in I} a_i y_i = 0$ para algún y con no todos los $y_i = 0$. Podemos asumir que $y_p > 0$ para al menos un $p \in I$. Definimos el vector y con componentes y_i como hemos definido antes para $i \in I$ e $y_i = 0$ para $i \notin I$. Definimos $x^\epsilon = x - \epsilon y$, luego

$$Ax^\epsilon = Ax - \epsilon Ay = b - \epsilon \sum_{i \in I} a_i y_i = b$$

y tenemos que $Ax^\epsilon = b$ y x^ϵ es factible para valores positivos o negativos de ϵ que cumplan $x_i^\epsilon = x_i - \epsilon y_i \geq 0$ para cada i. Al menos para un $p \in I$, $x_p^\epsilon = x_p - \epsilon y_p = 0$ para $\epsilon = x_p/y_p$. Eligiendo $\epsilon = \text{mín}\left\{\frac{x_p}{y_p} : p \in \mathcal{I}\right\}$ obtenemos que x^ϵ es factible y

$$Ax^\epsilon = \sum_{i \in I^\epsilon} a_i x_i^\epsilon, \quad I^\epsilon = I\backslash\{p\}$$

por lo tanto, hemos conseguido otra solución factible utilizando una columna menos de A. Continuando el proceso obtendremos una solución factible utilizando únicamente columnas independientes de A y será una solución básica factible.

Para ver II, solo necesitamos probar que x^ϵ es óptimo si x es óptimo. Dado que x^ϵ es factible para valores positivos o negativos pequeños de ϵ, $c^T x^\epsilon = c^T x - \epsilon c^T y < c^T x$ para un ϵ pequeño del mismo signo que $c^T y$ si $c^T y \neq 0$. Como tenemos que x es óptimo, debe ser $c^T y = 0$ y por lo tanto $c^T x^\epsilon = c^T x$ y x^ϵ es óptimo. □

Teorema 1.11 (Algoritmo finito)**.** *Asumiendo que el problema es no degenerado, es decir, $\bar{b}_j > 0$ en cada iteración, el algoritmo termina en un número finito de iteraciones.*

Demostración. Si el valor de una variable entrante x_s no está acotado, el algoritmo acaba. De lo contrario el valor x_s es positivo y el valor de la función objetivo decrecerá en $\bar{c}_s x_s$ pero hay a lo sumo $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ bases factibles. □

Teorema 1.12 (Test de optimalidad)**.**

I. *Una solución básica factible $(x_{\mathcal{B}}, 0)$ del problema lineal (1.5) es óptima si $\bar{c}_{\mathcal{N}} \geq 0$.*

II. *Si el problema lineal (1.5) es no degenerado y tenemos una base óptima $\mathcal{B}$, entonces $\bar{c}_{\mathcal{N}} \geq 0$.*

En el caso de que el problema sea degenerado, es decir, $\bar{b}_r = 0$, entonces $x_r = 0$ y la nueva variable básica tendrá el valor $x_s = 0$, por lo que después de esta iteración estaremos en la misma solución básica factible. El algoritmo puede entrar en un bucle de bases degeneradas que definen la misma solución básica factible. Existen formas para no entrar en estos bucles, pero en lo que sigue supondremos que el problema es no degenerado.

Para acabar esta sección introduciremos la notación tabular para el Algoritmo Símplex. En cada iteración resumiremos la información en una tabla como la Tabla 1.3, donde $\bar{c}$ es el vector de costes reducidos $\bar{c}^T = c^T - c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} A$, $\bar{A} := A_{\mathcal{B}}^{-1} A$ y $\bar{b} := A_{\mathcal{B}}^{-1} b$.

	$\bar{c}$	$-c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}}$
$\mathcal{B}$	$\bar{A}$	$\bar{b}$

Tabla 1.3: Tabla símplex en cada iteración.

1.3. Método de las dos fases

El algoritmo de la sección anterior encuentra una solución básica factible óptima a partir de una solución básica factible. Para poder inicializar el Algoritmo 1.9 necesitamos una solución básica factible. Para encontrar una resolvemos el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & e^T z \\ \text{sujeto a} & Ax + z = b \\ & x, z \geq 0 \end{array} \tag{1.12}$$

Asumiendo $b \geq 0$ el problema lineal (1.12) siempre es factible y una solución básica factible es $(x, z) = (0, b)$. Por lo que podemos aplicar el Algoritmo 1.9 para llegar al óptimo.

Proposición 1.13. *El problema lineal (1.5) es factible, i.e. $\mathcal{X} \neq \emptyset$, si y solo si el problema lineal auxiliar (1.12) tiene una solución óptima $(\hat{x}, \hat{z})$ con $\hat{z} = 0$*

Demostración. La demostración es inmediata. □

Si la solución óptima de (1.12) no es una solución básica del problema original (1.5) siempre la podremos convertir en una de forma análoga a la demostración del Teorema 1.10.

El Método Símplex se divide en dos fases:

I. Fase 1: Resolvemos el problema lineal (1.12) y vemos si $\mathcal{X} \neq \emptyset$ o de lo contrario, (1.5) no tiene solución.

II. Fase 2: Si $\mathcal{X} \neq \emptyset$, calculamos una solución básica factible resolviendo (1.12) y aplicamos el Algoritmo 1.9 para obtener una solución básica óptima de (1.5) o la conclusión de que (1.5) no está acotado.

1.4. Geometría del Símplex

En esta sección haremos una breve introducimos a la geometría de la programación lineal, ya que un problema lineal como el problema (1.2) se puede interpretar y solucionar de forma geométrica.

Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$. El conjunto

$$\mathcal{H}_{a,b} := \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\right\}$$

es un hiperplano. Un hiperplano define un semi-espacio

$$\mathcal{H}_{a,b} := \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\right\}$$

Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Un hiperplano $\mathcal{H}_{a,b}$ se llama hiperplano soporte de $\mathcal{X}$ en $\hat{x}$ si $\hat{x} \in \mathcal{X} \cap \mathcal{H}_{a,b}$ y $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}_{a,b}$.

Sea $\mathcal{X}$ la intersección finita de semi-espacios. A $\mathcal{X}$ lo llamamos poliedro. El conjunto factible $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ del problema lineal (1.5) es un poliedro. Un politopo es un poliedro $\mathcal{X}$ acotado.

$x \in \mathcal{X}$ es un punto extremo de $\mathcal{X}$ si $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$ con $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ implica que $x^1 = x^2 = x$.

Sea $\mathcal{X} \neq \emptyset$ un poliedro definido por $\mathcal{X} = \{x : Ax \leq b\}$. Si $d \in \mathbb{R}^n$ es tal que $Ad \leq 0$, entonces d decimos que es un rayo de $\mathcal{X}$. Un rayo d es un rayo extremo si no existen rayos d^1, d^2, $d^1 \neq \alpha d^2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}_>$, tal que $d = (1/2)\left(d^1 + d^2\right)$.

Dado $\mathcal{H}_{a,b}$ un hiperplano soporte de un poliedro $\mathcal{X}$, llamamos a $\mathcal{F} = \mathcal{X} \cap \mathcal{H}$ cara de $\mathcal{X}$. Una cara de dimensión 1 decimos que es un borde de $\mathcal{X}$.

El siguiente teorema nos permite interpretar de otra manera un problema de optimización lineal. Relaciona la geometría de conjunto factible $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ con las soluciones de problema lineal (1.5), es decir, relaciona la geometría y el álgebra de la programación lineal.

Teorema 1.14.

I. *Una solución básica factible* $(x_{\mathcal{B}}, 0)$ *de un problema lineal (1.5) es un punto extremo del conjunto factible* $\mathcal{X}$.

II. *Si* $\mathcal{X} \neq \emptyset$ *y el problema lineal (1.5) está acotado, el conjunto de todas las soluciones óptimas del problema lineal es el conjunto* $\mathcal{X}$ *mismo o una cara de* $\mathcal{X}$.

III. *Para cada punto extremo* $\hat{x}$ *de* $\mathcal{X}$ *existe un vector de costes* $c \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\hat{x}$ *es una solución óptima de* $\text{mín}\left\{c^T x : x \in \mathcal{X}\right\}$

Aquí concluimos el repaso al conocido Método Símplex. Se pueden tratar muchos más aspectos del Símplex pero no es el objetivo de este trabajo. En el Capítulo 1 hemos introducido algunas definiciones y teoremas de la programación lineal así como el Algoritmo Símlplex 1.9. Estos contenidos serán la base para, una vez introducidos los problemas multiobjetivo en el Capítulo 2, extender la programación lineal al caso de problemas con varias funciones objetivo y presentar un método símplex multiobjetivo.

Capítulo 2

Introducción a la Optimización Multiobjetivo

En este capítulo introduciremos los problemas de optimización con varios objetivos y veremos las dificultades a las que nos enfrentamos a la hora de resolverlos. A diferencia de los problemas de optimización con un solo objetivo, en los cuales tenemos que maximizar o minimizar una única función con ciertas restricciones sobre las variables, en la optimización multiobjetivo tenemos diferentes funciones objetivo o criterios para decidir cual es el "óptimo". Trataremos de tomar la mejor decisión entre un conjunto de opciones alternativas. Lo podemos ilustrar con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1. [1] Imaginemos que queremos comprar un coche nuevo y hemos mirado varios modelos, estos son: VW Golf, Opel Astra, Ford Focus y Toyota Corolla. Nuestra elección se basará en el precio, consumo y potencia. Está claro que preferimos un coche barato, que gaste poco y que tenga mucha potencia. Las características de los coches se muestran en la Tabla 2.1.

	VW	Opel	Ford	Toyota
Precio (€)	16.200	14.900	14.000	15.200
Consumo (l/100 Km)	7.2	7.0	7.5	8.2
Potencia (kW)	66.0	62.0	55.0	71.0

Tabla 2.1: Alternativas de coches y criterios para su elección.

Si nos fijamos en un solo criterio está clara nuestra elección pero si consideramos los tres a la vez, la elección del mejor coche no es tan fácil. Entran en conflicto los diversos criterios para elegir la "mejor" opción.

Ejemplo 2.2. [1] Consideramos un problema matemático con dos variables de decisión x_1 y x_2. Queremos minimizar simultáneamente dos funciones objetivo reales no negativas:

$$f_1(x) = \sqrt{x+1} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

Tenemos que resolver el problema de optimización:

$$\min_{x \geq 0} \left(f_1(x), f_2(x)\right)$$

Si nos dan cada función por separado está claro que el mínimo es $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$ de f_1 y f_2 en $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ respectivamente. Pero si tenemos que considerar las dos funciones simultáneamente, como en el ejemplo anterior, no está claro cual es el mínimo.

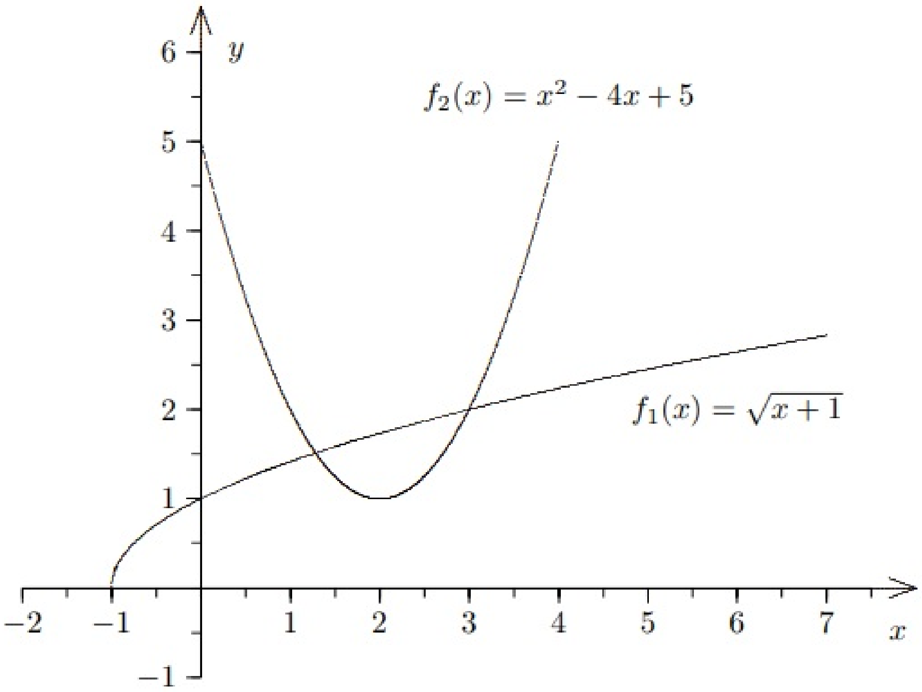

Figura 2.1: Funciones objetivo del Ejemplo 2.2 [1].

Las primeras referencias a estas situaciones de conflicto son atribuidas al economista italiano Vilfredo Pareto que en 1896 [6] definió: *"Dada una asignación inicial de bienes entre un conjunto de individuos, un cambio hacia una nueva asignación que al menos mejora la situación de un individuo sin hacer que empeore la situación de los demás se denomina mejora de Pareto. Una asignación se define como Pareto-eficiente o Pareto-óptima cuando no pueden lograrse nuevas mejoras de Pareto."* La eficiencia de Pareto es una noción mínima de la eficiencia y no necesariamente es la más deseable. La principal importancia de esta definición de óptimo es que ninguna opción que no sea óptimo de Pareto será elegida por alguien ya que siempre habrá una que mejore algún aspecto sin empeorar los demás.

Definición 2.3. Llamamos conjunto factible al conjunto $\mathcal{X}$ de alternativas posibles en un problema de decisión. El espacio del que el conjunto factible $\mathcal{X}$ es un subconjunto lo llamamos espacio de decisión. La imagen de $\mathcal{X}$ bajo la función objetivo $\mathcal{Y} := f(\mathcal{X})$ es el conjunto factible en el espacio objetivo. El espacio del que el conjunto factible $\mathcal{Y}$ es un subconjunto es el espacio objetivo o espacio criterio.

Por ejemplo el conjunto factible del Ejemplo 2.1 es $\mathcal{X} = \{$ VW, Opel, Ford, Toyota $\}$. Y el del Ejemplo 2.2 es $\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. La imagen de $\mathcal{X}$, es decir, el conjunto factible criterio, bajo la función $f = (f_1, f_2)$ del Ejemplo 2.2 es $\mathcal{Y} := f(\mathcal{X}) := \{y \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)$ para algún $x \in \mathcal{X}\}$.

2.1. Órdenes y clasificación de los problemas de optimización multicriterio

Podemos escribir un problema de optimización multiobjetivo (POM) como:

$$\begin{array}{c} \text{mín}\,(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \\ \text{sujeto a } x \in \mathcal{X} \end{array}$$

Para tener claro que entendemos por "mín", cuando el argumento es un punto $x \in \mathbb{R}^p$, tenemos que asignar un orden en el espacio criterio. Los más utilizados son:

Notación	Definición	Nombre
$y^1 \leqq y^2$	$y_k^1 \leq y_k^2 \quad k = 1, \ldots, p$	orden por componentes débil
$y^1 \leq y^2$	$y_k^1 \leq y_k^2 \quad k = 1, \ldots, p; y^1 \neq y^2$	orden por componentes
$y^1 < y^2$	$y_k^1 < y_k^2 \quad k = 1, \ldots, p$	orden por componentes estricto
$y^1 \leq_{\text{lex}} y^2$	$y_{k^*}^1 < y_{k^*}^2$ o $y^1 = y^2$	orden lexicográfico
$y^1 \leq_{\text{MO}} y^2$	$\text{máx}_{k=1,\ldots,p}\, y_k^1 \leq \text{máx}_{k=1,\ldots,p}\, y_k^2$	orden del máximo

Una vez asignado el orden, una función $\theta : \mathbb{R}^p \longrightarrow (\mathbb{R}^p, \preceq)$ nos permite comparar entre las diferentes opciones, es decir, elegir entre los diferentes puntos $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ usando la relación de orden $\preceq$.

Las diferentes interpretaciones de mínimo correspondientes a los distintos órdenes nos permiten clasificar los problemas de optimización multiobjetivo según sus elementos. Éstos son:

- El conjunto factible $\mathcal{X}$.
- La función objetivo $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
- El espacio objetivo $\mathbb{R}^p$.
- Un conjunto ordenado $(\mathbb{R}^p, \preceq)$.
- Una función $\theta : \mathbb{R}^p \longrightarrow (\mathbb{R}^p, \preceq)$.

La función θ relaciona el espacio objetivo y el conjunto ordenado. El conjunto factible, la función objetivo, el espacio objetivo, el conjunto ordenado y la función θ nos permiten clasificar completamente el POM de la siguiente manera:

$$(\mathcal{X}, f, \mathbb{R}^p)\, /\theta/\, (\mathbb{R}^p, \preceq)$$

Ejemplo 2.4. [1] Considerando el POM del Ejemplo 2.2, tenemos que $\mathcal{X} = \{x : x \geq 0\} = \mathbb{R}_{\geq}$ es el conjunto factible, $f = (f_1, f_2) = \left(\sqrt{x+1}, x^2 - 4x + 1\right)$ es la función objetivo, y $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^2$ es el espacio objetivo. El conjunto ordenado es $(\mathbb{R}^p, \preceq) = (\mathbb{R}^2, \leq)$. Dado que comparamos funciones objetivo por componentes, $\theta(y) = y$. Luego, la función θ será la identidad (id). Por lo tanto, el problema del Ejemplo 2.2 es clasificado como:

$$\left(\mathbb{R}_{\geq}, f, \mathbb{R}^2\right) /\text{id}/ \left(\mathbb{R}^2, \leq\right)$$

Definición 2.5. Una solución factible $x^* \in \mathcal{X}$ decimos que es una solución óptima del problema de optimización muticriterio $(\mathcal{X}, f, \mathbb{R}^p)\,/\theta/\left(\mathbb{R}^P, \preceq\right)$ si no existe $x \in \mathcal{X}$, $x \neq x^*$ tal que

$$\theta(f(x)) \preceq \theta\left(f\left(x^*\right)\right)$$

Para una solución óptima x^*, llamamos a $\theta\left(f\left(x^*\right)\right)$ un valor óptimo del POM.

2.2. Eficiencia y no dominancia

En esta sección, introduciremos los conceptos de soluciones eficientes y puntos no dominados de un problema de optimización multicriterio. Las soluciones eficientes en los problemas multiobjetivo serán lo análogo a las soluciones óptimas en los problemas de optimización con un solo objetivo. Los puntos eficientes serán los puntos que tendremos que buscar para solucionar un problema de optimización multicriterio. Empezaremos exponiendo la definición de punto eficiente para luego ampliarla a puntos eficientes débiles, eficientes estrictos y eficientes propios. La mayoría de resultados que veremos a continuación están recogidos en el capítulo 2 del libro de Ehrgott [1]. Las figuras que aparecen en esta sección y en lo que resta del Capítulo 2 están obtenidas de Ehrgott [1].

Usaremos la notación:

$$\mathbb{R}^p_> := \{y \in \mathbb{R}^p : y > 0\}$$
$$\mathbb{R}^p_\geq := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0\}$$
$$\mathbb{R}^p_\geqq := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geqq 0\}$$

2.2.1. Soluciones eficientes y puntos no dominados

Para esta subsección, consideramos los problemas de optimización multiobjetivo (POM) de la clase $(\mathcal{X}, f, \mathbb{R}^p)\,/\mathrm{id}/\,(\mathbb{R}^p, \leq)$:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \\ \text{sujeto a} & x \in \mathcal{X} \end{array}$$

Siendo $\mathcal{X}$ el conjunto factible. Denotaremos a la imagen de $\mathcal{X}$ por f como $\mathcal{Y} := f(\mathcal{X})$.

Definición 2.6. Una solución factible $\hat{x} \in \mathcal{X}$ decimos que es eficiente u óptimo de Pareto, si no hay otra $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) \leq f(\hat{x})$. Si $\hat{x}$ es eficiente, decimos que $f(\hat{x})$ es un punto no dominado. Si $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$ y $f\left(x^1\right) \leq f\left(x^2\right)$ decimos que x^1 domina a x^2 y $f\left(x^1\right)$ domina a $f\left(x^2\right)$. El conjunto de todas las soluciones eficientes $\hat{x} \in \mathcal{X}$ lo denotamos por $\mathcal{X}_E$ y lo llamamos conjunto eficiente. Al conjunto de todos los puntos no dominados $\hat{y} = f(\hat{x}) \in \mathcal{Y}$ tal que $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$, es denotado por $\mathcal{Y}_N$ y lo llamamos conjunto no dominado.

La existencia o no de los conjuntos eficientes y no dominados será lo primero en nuestro estudio de los problemas multiobjetivo. Lo primero que haremos será ver algunas propiedades y resultados sobre la existencia y las características de los conjuntos eficientes $\mathcal{X}_E$ y los conjuntos no dominados $\mathcal{Y}_N$.

La siguiente proposición nos proporciona características generales de los conjuntos no dominados que utilizaremos para probar otros resultados. En primer lugar notemos que

$$\mathcal{Y}_N = \{y \in \mathcal{Y} : \text{ no hay } y' \in \mathcal{Y} \text{ tal que } y' \leq y\} \subset \mathcal{Y}.$$

Proposición 2.7. *Sean $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ e $\mathcal{Y}_N \subset \mathcal{Y}$ el conjunto no dominado de $\mathcal{Y}$, entonces:*

I. $\mathcal{Y}_N = \left(\mathcal{Y} + \mathbb{R}^p_{\geqq}\right)_N$.

II. $\mathcal{Y}_N \subset \mathrm{cl}(\mathcal{Y})$, *es decir, $\mathcal{Y}_N$ está contenido en la clausura de $\mathcal{Y}$.*

III. *Si $\mathcal{Y}$ es abierto o si $\mathcal{Y} + \mathbb{R}^p_{\geqq}$ es abierto, entonces $\mathcal{Y}_N = \emptyset$.*

IV. $(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)_N \subset (\mathcal{Y}_1)_N + (\mathcal{Y}_2)_N$.

V. $(\alpha\mathcal{Y})_N = \alpha\left(\mathcal{Y}_N\right)$, *para todo $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.*

La Figura 2.2 ilustra la primera propiedad de la Proposición 2.7.

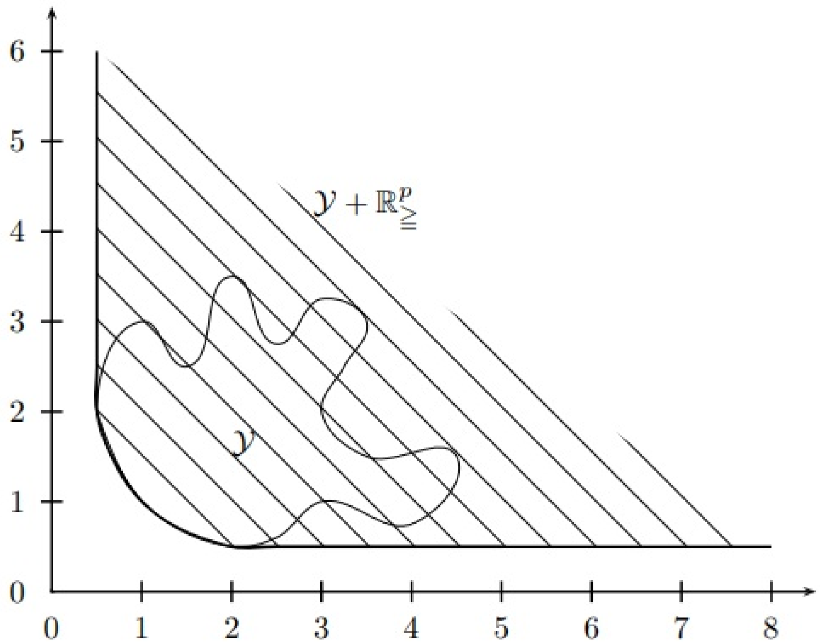

Figura 2.2: Los puntos no dominados de $\mathcal{Y}$ y de $\mathcal{Y} + \mathbb{R}^p_{\geqq}$ son los mismos.

A continuación introduciremos una serie de resultados generales que nos permiten hacernos una idea de la importancia de estudiar los conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ para conocer características sobre el conjunto de los puntos eficientes $\mathcal{X}_E$ y sobre el conjunto de los puntos no dominados $\mathcal{Y}_N$. No incluimos las pruebas de los mismos ya que en la práctica no los utilizaremos. Estas se pueden encontrar en las referencias.

Teorema 2.8 (Borwein, 1983 [7]). *Sea $\mathcal{Y}$ un conjunto no vacío y supongamos que hay un $y^0 \in \mathcal{Y}$ tal que la sección $\mathcal{Y}^0 = \{y \in \mathcal{Y} : y \leqq y^0\} = \left(y^0 - \mathbb{R}^p_{\geqq}\right) \cap \mathcal{Y}$ es compacta. Entonces $\mathcal{Y}_N$ es no vacío.*

Definición 2.9. Decimos que un conjunto $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ es $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-compacto, si para todo $y \in \mathcal{Y}$ la sección $\left(y - \mathbb{R}^p_{\geqq}\right) \cap \mathcal{Y}$ es compacta.

Teorema 2.10 (Hartley, 1978 [8])**.** *Si $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ es no vacío y $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-compacto, entonces $\mathcal{Y}_N \neq \emptyset$.*

Definición 2.11. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-semicontinua si

$$f^{-1}\left(y - \mathbb{R}^p_{\geqq}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : y - f(x) \in \mathbb{R}^p_{\geqq}\right\}$$

es cerrado para $y \in \mathbb{R}^p$, es decir, la preimagen de la trasladada al octante negativo es siempre cerrada.

Teorema 2.12. *Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto no vacío y sea f una función $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-semicontinua. Entonces $\mathcal{X}_E \neq \emptyset$*

2.2.2. Soluciones eficientes débiles y estrictas

En la subsección anterior hemos definido lo que eran los puntos no dominados. Para ello hemos considerado el orden por componentes en $\mathbb{R}^p$, es decir, $y^1 \leq y^2$ si $y^1_k \leq y^2_k$ para $k = 1, \ldots, p$ e $y^1 \neq y^2$. Si consideramos los órdenes por componentes estricto y débil obtenemos las definiciones de punto eficiente débil y punto eficiente estricto.

Definición 2.13. Una solución factible $\hat{x} \in \mathcal{X}$ decimos que es eficiente débil si no existe un $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) < f(\hat{x})$, es decir, $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ para todo $k = 1, \ldots, p$. Al punto $\hat{y} = f(\hat{x})$ lo llamamos no dominado débil.

Decimos que una solución factible $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es estrictamente eficiente si no hay un $x \in \mathcal{X}$, $x \neq \hat{x}$ tal que $f(x) \leqq f(\hat{x})$. Al punto $\hat{y} = f(\hat{x})$ lo llamamos no dominado estricto.

El conjunto de los puntos eficientes débiles (estrictos) lo denotamos por $\mathcal{X}_{dE}$ ($\mathcal{X}_{sE}$) y al conjunto de los puntos no dominados débiles por $\mathcal{Y}_{dE}$.

Por la definición anterior notemos que:

$$\mathcal{Y}_N \subset \mathcal{Y}_{dN}$$
$$\mathcal{X}_{sE} \subset \mathcal{X}_E \subset \mathcal{X}_{dE}$$

En el caso de la no dominancia estricta, cabe destacar que prohíbe soluciones x^1, x^2 con $f\left(x^1\right) = f\left(x^2\right)$ por lo que no la consideramos ya que trabajaremos con conjuntos $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$.

Está claro que los resultados de existencia de $\mathcal{Y}_N$ implican la existencia de $\mathcal{Y}_{dN}$. Pero puede suceder que $\mathcal{Y}_{dN}$ sea no vacío y $\mathcal{Y}_N$ si lo sea. A continuación vemos una propiedad general de los conjuntos no dominados $\mathcal{Y}_{dN}$.

Teorema 2.14. *Sea $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto no vacío y compacto. Entonces $\mathcal{Y}_{dN} \neq \emptyset$.*

Corolario 2.15. *Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y compacto. Suponemos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es continua. Entonces $\mathcal{X}_{dE} \neq \emptyset$*

Lo siguiente que enunciamos es un teorema que nos proporciona la estructura de los puntos eficientes débiles de los problemas con conjuntos factibles convexos. Los conjuntos factibles de los problemas del Capítulo 3 serán convexos. El Teorema 2.17 nos dará una idea de como hallar los puntos eficientes débiles estudiando los puntos débiles de las diferentes funciones objetivo.

Sea $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ la función objetivo de un POM. Dado el conjunto $\mathcal{P} \subset \{1, \ldots, p\}$ denotamos por $f^{\mathcal{P}} := (f_j : j \in \mathcal{P})$ a la función objetivo que solo contiene $f_j, j \in \mathcal{P}$.

Proposición 2.16. *Consideramos el POM $(\mathcal{X}, f,\ \mathbb{R}^p)/\mathrm{id}/(\mathbb{R}^p, <)$, donde $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $k = 1 \ldots, p$ son convexas y $p > n$. Entonces, $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es una solución eficiente débil si y solo si existe un subconjunto $\mathcal{P} \subset \{1, \ldots, p\}$, $0 < |\mathcal{P}| \leq n+1$ tal que $\hat{x}$ es una solución eficiente débil de $\left(\mathcal{X}, f^{\mathcal{P}}, \mathbb{R}^{|\mathcal{P}|}\right)/\mathrm{id}/\left(\mathbb{R}^{|\mathcal{P}|}, <\right)$.*

Consideramos la notación $\mathcal{X}_{dE}(f)$, $\mathcal{X}_{dE}\left(f^{\mathcal{P}}\right)$, $\mathcal{X}_E(f)$ y $\mathcal{X}_E\left(f^{\mathcal{P}}\right)$ para referirnos a los conjuntos eficientes y eficientes débiles de los problemas con función objetivo f y $f^{\mathcal{P}}$.

Teorema 2.17 (Malivert y Boissard (1994) [9])**.** *Asumimos que $\mathcal{X}$ es un conjunto no vacío convexo y que las funciones objetivo f_k, $k = 1, \ldots, p$ son funciones convexas. Entonces*

$$\mathcal{X}_{dE}(f) = \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \subset \{1,\ldots,p\} \\ 1 \leq |\mathcal{P}| \leq n+1}} \mathcal{X}_E\left(f^{\mathcal{P}}\right)$$

2.2.3. Eficencia propia y no dominancia propia

De acuerdo con la Definición 2.6, si tenemos una solución eficiente, no podemos mejorar un objetivo sin empeorar al menos uno de los otros objetivos. Este empeoramiento en algún objetivo si mejoramos otro lo podemos medir como lo que aumenta el objetivo f_i si disminuye en una unidad el valor de f_j. Si en el problema que tenemos que resolver lo que empeora algún criterio no está acotado si mejoramos otro en una unidad, puede que no sea asumible dicha solución eficiente. Esto da lugar a la definición de solución propiamente eficiente. Consideraremos la definición de punto propiamente eficiente de Geoffrion [10] pero cabe destacar que existen otras dadas por Borwein [11], Benson [12] o Kuhn y Tucker [13].

Definición 2.18 (Geoffrion (1968) [10])**.** Una solución factible $\hat{x} \in \mathcal{X}$ decimos que es propiamente eficiente, si es eficiente y además existe un número $M > 0$ tal que para todo i y $x \in \mathcal{X}$ cumpliendo que $f_i(x) < f_i(\hat{x})$, existe un índice j tal que $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ y:

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M$$

El correspondiente punto $\hat{y} = f(\hat{x})$ se llama punto propiamente no dominado. Al conjunto de los puntos propiamente eficientes y los puntos propiamente no dominados lo denotaremos como $\mathcal{X}_{pN}$ y $\mathcal{Y}_{pN}$ respectivamente.

Ejemplo 2.19. [1] Consideramos el conjunto factible en el espacio de decisión $\mathcal{X}$, la función objetivo f y el conjunto factible en el espacio objetivo $\mathcal{Y}$ definidos por:

$$f(x) = x$$

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1,\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\right\}.$$

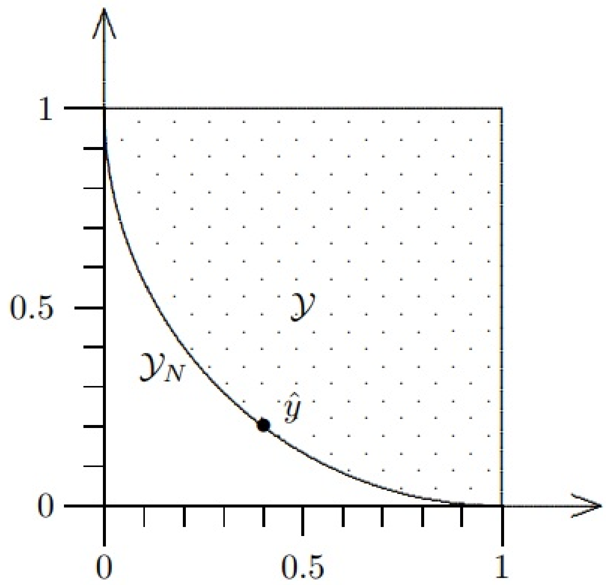

Figura 2.3: Los puntos propiamente no dominados $\hat{y}$.

Podemos ver en la Figura 2.3 que

$$\mathcal{Y}_N = \left\{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y} : (y_1 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = 1\right\}$$

El punto $\hat{y}$ es propiamente no dominado. Consideremos la solución eficiente $\hat{x} = (1, 0)$, veamos que $\hat{x}$ no es propiamente eficiente. Tenemos que probar que para todo $M > 0$ existe un índice $i \in \{1, 2\}$ y un $x \in \mathcal{X}$ con $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ tal que

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} > M$$

para todo $j \in \{1, 2\}$ con $f_j(x) > f_j(\hat{x})$.

Sea $i = 1$, definimos x^ε con $x_1^\varepsilon = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ y $x_2^\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Tenemos que x^ε es eficiente dado que $(x_1^\varepsilon - 1)^2 + (x_2^\varepsilon - 1)^2 = 1$. Como $x^\varepsilon \in \mathcal{X}$, $x_1^\varepsilon < \hat{x}_1$ y $x_2^\varepsilon > \hat{x}_2$ tenemos $i = 1$, $j = 2$. Por lo tanto:

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x^\varepsilon)}{f_j(x^\varepsilon) - f_j(\hat{x})} = \frac{1 - (1 - \varepsilon)}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$$

2.3. El Método de Suma Ponderada

En esta sección introduciremos una forma de obtener los puntos eficientes y no dominados resolviendo un problema con un solo objetivo. Este problema, más fácil de resolver, nos proporcionará las soluciones para el problema multiobjetivo. Esta forma de obtener los puntos eficientes la llevaremos a la práctica en el Capítulo 3. En el dicho capítulo expondremos un método para resolver un tipo de problemas de optimización multicriterio haciendo uso del problema de suma ponderada asociado que veremos a continuación. Para la presente sección se toma de referencia el capitulo 3 del libro de Ehrgott [1].

Consideramos el problema de optimización multiobjetivo (POM) siguiente:

$$\min_{x\in\mathcal{X}} (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \tag{2.1}$$

de la clase:

$$(\mathcal{X}, f, \mathbb{R}^p) \,/\, \mathrm{id} \,/\, (\mathbb{R}^p, \leq)$$

Para resolver (2.1), es decir, para encontrar las soluciones eficientes, veremos que podemos ayudarnos del problema de optimización uniobjetivo:

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \tag{2.2}$$

que clasificamos como:

$$(\mathcal{X}, f, \mathbb{R}^p) \,/ \langle\lambda, \cdot\rangle / (\mathbb{R}, \leq)$$

donde $\langle\lambda, \cdot\rangle$ denota el producto escalar en $\mathbb{R}^p$. Al problema (2.2) lo llamamos **problema escalarizado de suma ponderada** del POM (2.1).

A continuación, probaremos algunas relaciones entre los puntos no dominados $y = (y_1, \ldots, y_p)$ del espacio objetivo $\mathcal{Y}$ de (2.1) y los valores $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k$. También daremos resultados que relacionen los puntos eficientes de (2.1) y los valores óptimos de (2.2).

Sea $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$. Para un $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$ fijado que llamaremos vector de pesos, denotamos por

$$\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) := \left\{ \hat{y} \in \mathcal{Y} : \langle\lambda, \hat{y}\rangle = \min_{y\in\mathcal{Y}} \langle\lambda, y\rangle \right\}$$

el conjunto de soluciones óptimas de $\mathcal{Y}$ respecto a λ. Trataremos de encontrar los puntos no dominados de $\mathcal{Y}$ en $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$. Definimos:

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) := \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}^p} \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) = \bigcup_{\left\{\lambda>0:\sum_{k=1}^{p}\lambda_k=1\right\}} \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$$
$$\text{y } \mathcal{S}_0(\mathcal{Y}) := \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}^p} \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) = \bigcup_{\left\{\lambda\geq 0:\sum_{k=1}^{p}\lambda_k=1\right\}} \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}).$$

Podemos asumir que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$, es decir, podemos normalizar el vector ponderado $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$. Notemos que esto no cambia el conjunto $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$. No tenemos en cuenta el caso

$\lambda = 0$ porque carece de sentido ya que $\mathcal{S}(0, \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$. Claramente por la definición tenemos que:

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{S}_0(\mathcal{Y})$$

Para muchos de los resultados siguientes es necesario que el conjunto $\mathcal{Y}$ tenga alguna propiedad de convexidad. Recordemos que un conjunto $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ es convexo si para todo $a, b \in \mathcal{Y}$ y todo $t \in [0,1]$ tenemos que $(1-t)a + tb \in \mathcal{Y}$.

Definición 2.20. Un conjunto $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p$ decimos que es $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-convexo, si $\mathcal{Y} + \mathbb{R}^p_{\geqq}$ es convexo.

Notemos fácilmente que todo conjunto convexo es $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-convexo. Los siguientes dos teorema nos proporcionan propiedades sobre los conjuntos convexos que utilizaremos para probar otros resultados. El Teorema 2.21 nos proporciona la propiedad de que dos conjuntos convexos que no se intersecan, pueden separarse por un hiperplano.

Teorema 2.21. *Sean $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \subset \mathbb{R}^p$ conjuntos convexos no vacíos. Existe algún $y^* \in \mathbb{R}^p$ tal que*

$$\inf_{y \in \mathcal{Y}_1} \langle y, y^* \rangle \geq \sup_{y \in \mathcal{Y}_2} \langle y, y^* \rangle$$
$$y \ \sup_{y \in \mathcal{Y}_1} \langle y, y^* \rangle > \inf_{y \in \mathcal{Y}_2} \langle y, y^* \rangle$$

si y solo si $\mathrm{ri}\,(\mathcal{Y}_1) \cap \mathrm{ri}\,(\mathcal{Y}_2) = \emptyset$*, donde* $\mathrm{ri}\,(\mathcal{Y}_i)$ *es el interior relativo de $\mathcal{Y}_i$, es decir, el interior en un espacio apropiado de dimensión* $\dim(\mathcal{Y}_i) \leq p$.

También usaremos la siguiente propiedad:

Teorema 2.22. *Sea $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo y sea $y^0 \in \mathbb{R}^p \backslash \mathcal{Y}$. Entonces existe un $y^* \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\left\langle y^*, y^0 \right\rangle < \alpha < \langle y^*, y \rangle$$

para todo $y \in \mathcal{Y}$.

A continuación lo que haremos será probar que las soluciones óptimas del problema de suma ponderada (2.2) con vector de pesos λ no negativo siempre son eficientes débilmente. Veremos que bajo propiedades de convexidad todas las soluciones eficientes del POM (2.1) son soluciones óptimas del problema (2.2). Esto lo haremos demostrando propiedades de los puntos no dominados $y \in \mathcal{Y}$. Cuando sean requeridas propiedades de $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-convexidad de $\mathcal{Y}$, estas están garantizadas si el conjunto factible $\mathcal{X}$ es convexo y las funciones objetivo f_k son convexas. Cabe destacar que los conjuntos factibles $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ de los problemas multiobjetivo que expondremos en el Capítulo 3 serán convexos.

Teorema 2.23. *Para todo conjunto $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ se cumple que $\mathcal{S}_0(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{dN}$.*

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ e $\hat{y} \in \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$. Por la definición de $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$ tenemos:

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \hat{y}_k \leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k \text{ para todo } y \in \mathcal{Y}$$

Supongamos que $\hat{y} \notin \mathcal{Y}_{dN}$. Entonces existe algún $y' \in \mathcal{Y}$ con $y'_k < \hat{y}_k, k = 1, \ldots, p$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k y'_k < \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \hat{y}_k$$

ya que al menos algún peso λ_k tiene que ser positivo. Esto contradice que $\hat{y} \in \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$ y concluimos. $\square$

Para conjuntos $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-convexos podemos probar la otra inclusión.

Teorema 2.24. *Si $\mathcal{Y}$ es $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-convexo, entonces $\mathcal{Y}_{dN} = \mathcal{S}(\mathcal{Y})$*

Demostración. Por el Teorema 2.23, tenemos que $\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_{dN}$. Para probar $\mathcal{Y}_{dN} \subset \mathcal{S}(\mathcal{Y})$ primero observamos que $\mathcal{Y}_{dN} \subset (\mathcal{Y} + \mathbb{R}^p_{>})_{dN}$.

Por lo tanto, si $\hat{y} \in \mathcal{Y}_{dN}$, tenemos

$$(\mathcal{Y}_{dN} + \mathbb{R}^p_{>} - \hat{y}) \cap (-\mathbb{R}^p_{>}) = \emptyset$$

Por el Teorema 2.21 existe un $\lambda \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ tal que

$$\langle \lambda, y + d - \hat{y} \rangle \geq 0 \geq \langle \lambda, -d' \rangle$$

para todo $y \in \mathcal{Y}$, $d \in \mathbb{R}^p_{>}$, $d' \in \mathbb{R}^p_{>}$.

Definimos $d' = e_k + \varepsilon$ donde e_k es la componente k del vector unitario, $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$ y $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño. Dado que $\langle \lambda, -d' \rangle \leq 0$ para todo $d' \in \mathbb{R}^p_{>}$ eligiendo el d' anterior vemos que $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, p$. Por otro lado, eligiendo $d = \varepsilon e$ en $\langle \lambda, y + d - \hat{y} \rangle \geq 0$ implica

$$\langle \lambda, y \rangle + \varepsilon \langle \lambda, e \rangle \geq \langle \lambda, \hat{y} \rangle$$

para todo $y \in \mathcal{Y}$, luego,

$$\langle \lambda, y \rangle > \langle \lambda, \hat{y} \rangle$$

Por lo tanto $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ e $\hat{y} \in \mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{Y})$. $\square$

Ahora relacionamos $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ con $\mathcal{Y}_N$.

Teorema 2.25. *Sea $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$. Entonces $\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N$.*

Demostración. Sea $\hat{y} \in \mathcal{S}(\mathcal{Y})$. Entonces existe algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$ que cumple $\sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k y_k$ para todo $y \in \mathcal{Y}$

Supongamos que $\hat{y} \notin \mathcal{Y}_N$. Luego, habrá un $y' \in \mathcal{Y}$ con $y' \leq y$. Multiplicando por componentes y' por el vector de pesos $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$ tenemos que $\lambda_k y'_k \leq \lambda_k \hat{y}_k$ para todo $k = 1, \ldots, p$ con una inecuación estricta para al menos un k. Ésta inecuación estricta junto al hecho de que todos los λ_k son positivos implica que $\sum_{k=1}^p \lambda_k y'_k < \sum_{k=1}^p \lambda_k \hat{y}_k$, contradiciendo $\hat{y} \in \mathcal{S}(\mathcal{Y})$. $\square$

Corolario 2.26. *$\mathcal{Y}_N \subset \mathcal{S}(\mathcal{Y})$ si $\mathcal{Y}$ es un conjunto $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-convexo.*

Demostración. Este resultado es consecuencia directa del Teorema 2.24 ya que $\mathcal{Y}_N \subset \mathcal{Y}_{dN} = \mathcal{S}(\mathcal{Y})$. $\square$

Notemos que en el caso de conjuntos $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-convexos por el Teorema 2.25, el Teorema 2.24 y el Corolario 2.26 tenemos que:

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N \subset \mathcal{S}(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}_{dN} \tag{2.3}$$

El Teorema 2.25 podemos extenderlo mediante la proposición que sigue.

Proposición 2.27. *Si $\hat{y}$ es el único elemento de $\mathcal{S}(\lambda, \mathcal{Y})$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ entonces $\hat{y} \in \mathcal{Y}_N$.*

La proposición siguiente resume los teoremas anteriores en términos del espacio de decisión, es decir, caracteriza las soluciones eficientes de los problemas de optimización multiobjetivo.

Proposición 2.28. *Suponemos que $\hat{x}$ es una solución óptima del problema de suma ponderada*

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \tag{2.4}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$. Entonces se cumple que:

I. *Si $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ entonces $\hat{x} \in \mathcal{X}_{dE}$.*

II. *Si $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$ entonces $\hat{x} \in \mathcal{X}_{E}$.*

III. *Si $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ y $\hat{x}$ es la única solución de (2.4) entonces $\hat{x} \in \mathcal{X}_{sE}$.*

Demostración. La prueba es consecuencia del Teorema 2.23, del Teorema 2.25 y de la Proposición 2.27. □

La proposición anterior en el caso de funciones objetivo lineales en $\mathbb{R}^p$ la demostraremos en el Teorema 3.6.

La siguiente proposición nos garantiza que bajo condiciones de convexidad, podremos encontrar todas las soluciones eficientes ya que existirá un $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ para cada solución eficiente, para el cuál el problema (2.4) tiene una solución óptima.

Proposición 2.29. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto convexo, y sean las funciones f_k convexas, $k = 1, \ldots, p$. Si $\hat{x} \in \mathcal{X}_{dE}$ existe un $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ tal que $\hat{x}$ es una solución óptima de (2.4).*

La prueba de la Proposición 2.29 sigue del Teorema 2.24. En este caso, de (2.3) se sigue que no hay distinción entre $\mathcal{X}_{dE}$ y $\mathcal{X}_E$. Para el tipo de problemas como en Proposición 2.29 podremos utilizar métodos para encontrar todas las soluciones eficientes calculando un $\lambda \in \mathbb{R}^p$ adecuado. Sin embargo, para problemas no convexos, este método de suma ponderada es bastante pobre. Consideremos el siguiente ejemplo que mostramos en la Figura 2.4.

Ejemplo 2.30. Sea $\mathcal{X} = \left\{x \in \mathbb{R}^2_{\geqq} : x_1^2 + x_2^2 \geq 1\right\}$ y $f(x) = x$. En este caso $\mathcal{X}_E = \{x \in \mathcal{X} : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, pero $\hat{x}^1 = (1, 0)$ y $\hat{x}^2 = (1, 0)$ son las únicas soluciones de (2.2) para algún $\lambda \geq 0$. Como observamos en la Figura 2.4 la mayoría de soluciones eficientes no podemos encontrarlas con el método de la suma ponderada.

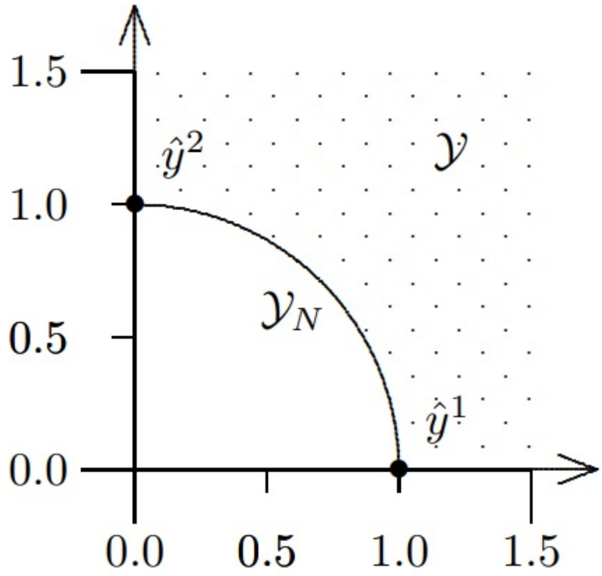

Figura 2.4: El método falla si $\mathcal{Y}$ no es $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-convexo.

Para finalizar el estudio veremos la relación entre los puntos propiamente no dominados del problema (2.1) y las soluciones óptimas del problema escalar de suma ponderada (2.2). Recordemos que $\mathcal{Y}_{pN} \subset \mathcal{Y}_N$. Nos centraremos en el caso de los conjuntos convexos. El Teorema 2.31 nos da una condición necesaria y suficiente para que un punto sea propiamente no dominado.

Teorema 2.31 (Geoffrion, 1968 [10]). *Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ convexo y asumimos que $f_k : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ son convexas para $k = 1, \dots, p$. Entonces, $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es propiamente eficiente si y solo si $\hat{x}$ es una solución óptima de (2.2) con estrictamente positivos λ_k, $k = 1, \dots, p$.*

Con el siguiente resultado vemos que la diferencia entre los puntos no dominados y propiamente no dominados es muy pequeña para conjuntos convexos. El conjunto de puntos propiamente no dominados en denso en el conjunto de puntos no dominados.

Teorema 2.32 (Hartley, 1978 [8]). *Si $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ es $\mathbb{R}^p_{\geq}$-cerrado y $\mathbb{R}^p_{\geq}$-convexo, se cumplen las siguientes inclusiones:*

$$\mathcal{S}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}_N \subset \operatorname{cl} \mathcal{S}(\mathcal{Y}) = \operatorname{cl} \mathcal{Y}_{pN}$$

Las demostraciones del Teorema 2.31 y del Teorema 2.32 las podemos encontrar en la referencias. El Teorema 2.32 nos permite justificar el Corolario 2.40 que utlizaremos en la Proposición 3.10. Aunque esta proposición es importante para el método símplex multiobjetivo que desarrollaremos en el Capítulo 3, no hemos incluido la demostración del Teorema 2.32 ya que haría falta introducir resultados previos y alargaría el trabajo innecesariamente.

2.4. Otros métodos

En la sección anterior hemos explicado un método escalar para calcular los puntos eficientes del POM:

$$\min_{x\in\mathcal{X}} (f_1(x), \dots, f_p(x)) \tag{2.5}$$

mediante la solución de un problema con un solo objetivo. Existen otras técnicas para resolver los POM, a continuación expondremos algunas brevemente. Para esta sección se han utilizado principalmente el capítulo 4 del libro de Ehrgott [1] y las referencias que citamos.

2.4.1. Método de las ε-restricciones

Este método es de los más utilizados junto al de la suma ponderada. Fue introducido por Haimes en 1971 [14]. Sustituiremos el problema (2.5) por el **problema de las ε-restricciones**:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f_j(x) \\ \text{sujeto a} & f_k(x) \le \varepsilon_k \quad k = 1, \dots, p \quad k \neq j \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \tag{2.6}$$

con $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$. A diferencia del problema de suma ponderada, en este caso no es necesario asumir propiedades de convexidad. A continuación vemos los resultados que relacionan los puntos eficientes del problema (2.5) con los óptimos de (2.6).

Proposición 2.33. *Sea $\hat{x}$ una solución óptima del problema (2.6) para algún j. Entonces, $\hat{x}$ es eficiente débil para el POM (2.5).*

Demostración. Veamos que si $\hat{x}$ no es eficiente débil, tampoco es óptima. Suponemos que $\hat{x} \notin \mathcal{X}_{dE}$. Luego, existe un $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x) < f_k(\hat{x})$ para todo $k = 1, \dots, p$. En particular, $f_j(x) < f_j(\hat{x})$. Dado que $f_k(x) < f_k(\hat{x}) \le \varepsilon_k$ para $k \neq j$, la solución x es factible para el problema (2.6). Concluimos que $\hat{x}$ no es una solución óptima de (2.6). □

Teorema 2.34. *Una solución factible $\hat{x} \in \mathcal{X}$ es eficiente si y solo si existe un $\hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^p$ tal que $\hat{x}$ es una solución óptima de (2.6) para todo $j = 1, \dots, p$.*

Demostración. Sea $\hat{x} \in \mathcal{X}$ una solución eficiente. Definimos $\hat{\varepsilon} = f(\hat{x})$. Suponemos que $\hat{x}$ no es una solución óptima de (2.6) para algún j. Entonces, tendrá que haber algún $x \in \mathcal{X}$ con $f_j(x) < f_j(\hat{x})$ y $f_k(x) \le \hat{\varepsilon}_k = f_k(\hat{x})$ para todo $k \neq j$, esto es, $\hat{x}$ no es una solución eficiente y concluimos.

Para la otra implicación suponemos que $\hat{x} \notin \mathcal{X}_E$, es decir, que $\hat{x}$ no es una solución eficiente. Entonces existe un índice $j \in \{1, \dots, p\}$ y una solución factible $x \in \mathcal{X}$ tal que $f_j(x) < f_j(\hat{x})$ y $f_k(x) \le f_k(\hat{x})$ para $k \neq j$. Por lo tanto $\hat{x}$ no puede ser una solución óptima de (2.6) para ningún valor ε para el cual sea factible ya que ε debe ser $f_k(\hat{x}) \le \varepsilon_k$ para $k \neq j$. □

Para concluir la exposición del método de las ε-restricciones, enunciamos el siguiente teorema que muestra la relación entre este método y el de la suma ponderada.

Teorema 2.35 (Chankong y Haimes, 1983 [15])**.**

I. *Sea $\hat{x}$ es una solución óptima del problema* $\text{mín}\left\{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) : x \in \mathcal{X}\right\}$*. Si* $\lambda_j > 0$ *entonces existe un $\hat{\varepsilon}$ tal que $\hat{x}$ también es una solución óptima de (2.6).*

II. *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto convexo y sean $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Si $\hat{x}$ es una solución óptima de (2.6) para algún j, entonces existe un $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ tal que $\hat{x}$ es una solución óptima de* $\text{mín}\left\{\sum_{k=1}^{p} \hat{\lambda}_k f_k(x) : x \in \mathcal{X}\right\}$.

2.4.2. Un método híbrido

Es posible combinar el método de la suma ponderada y el método de las ε-restricciones. Sea x^0 una solución factible del POM (2.5). Consideramos el problema:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) & \\ \text{sujeto a} & f_k(x) \leq f_k\left(x^0\right) & k = 1, \ldots, p \\ & x \in \mathcal{X} & \end{array} \tag{2.7}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ y x^0 una solución factible arbitraria del POM (2.5). Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.36 (Guddat y otros, 1985 [16])**.** *Sea $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Una solución factible $x^0 \in \mathcal{X}$ del POM (2.5), es una solución óptima del problema (2.7) si y solo si $x^0 \in \mathcal{X}_E$.*

Demostración. Sea x^0 una solución óptima del problema (2.7). Si hubiera un $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) \leq f\left(x^0\right)$, por $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ tendríamos:

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) < \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k\left(x^0\right)$$

y la solución x^0 no sería óptima. Luego, x^0 es eficiente.

Sea $x^0 \in \mathcal{X}$ eficiente. Luego, no hay ningún $x \in \mathcal{X}$ tal que $f(x) \leq f\left(x^0\right)$. Por lo tanto cualquier solución factible de (2.7) satisface $f(x) = f\left(x^0\right)$ y x^0 es una solución óptima. □

2.4.3. Método de Benson

El siguiente método fue descrito por Benson en 1978 [17]. La idea del método se basa en que a partir de una solución factible, podamos encontrar una solución eficiente aunque la solución factible de la que partamos no sea eficiente. Para ello introduciremos unas variables de desviación no negativas $l_k = f_k\left(x^0\right) - f_k(x)$. Sea x^0 una solución factible del POM (2.5), consideramos el problema:

$$\begin{array}{lrl} \text{máx} & \sum_{k=1}^{p} l_k & \\ \text{sujeto a} & f_k\left(x^0\right) - l_k - f_k(x) = 0 & k = 1, \ldots, p \\ & l \geqq 0 & \\ & x \in \mathcal{X} & \end{array} \tag{2.8}$$

En el Teorema 2.37 vemos que resolver el problema (2.8) sirve para comprobar si x^0 es una solución eficiente del POM (2.5). Este resultado lo volveremos a ver para el caso de programas lineales en el Capítulo 3.

Teorema 2.37. *Una solución $x^0 \in \mathcal{X}$ es eficiente si y solo si el valor óptimo de (2.8) es 0.*

Demostración. Sea (x, l) una solución factible de (2.8). Por la no negatividad de las variables $l_k \geq 0$ para $k = 1, \ldots, p$ y por la definición $l_k = f_k(x^0) - f_k(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} l_k = 0 &\Longleftrightarrow l_k = 0 \quad k = 1, \ldots, p \\ &\Longleftrightarrow f_k\left(x^0\right) = f_k(x) \quad k = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

Luego, si el valor óptimo es 0, y un $x \in \mathcal{X}$ cumple que $f(x) \leqq f(x^0)$ tiene que ser $f(x) = f(x^0)$ y concluimos que x^0 es eficiente. Para la otra implicación, si x^0 es eficiente, el conjunto factible de (2.8) consiste en los (x, l) cumpliendo $x \in \mathcal{X}$ y $f(x) = f(x^0)$ por lo tanto $l = 0$ y el valor óptimo es 0. $\square$

Que la solución factible inicial x^0 sea eficiente no podemos esperar que ocurra. Pero si el problema (2.8) alcanza un valor óptimo finito, es decir, que la solución está acotada, podemos obtener una solución eficiente.

Proposición 2.38. *Si el problema (2.8) tiene una solución óptima $(\hat{x}, \hat{l})$ (y el valor objetivo es finito), entonces $\hat{x}$ es eficiente.*

Demostración. Sea $(\hat{x}, \hat{l})$ una solución óptima y supongamos que $\hat{x} \notin \mathcal{X}_E$. Entonces, existirá algún $x' \in \mathcal{X}$ tal que $f_k(x') \leq f_k(\hat{x})$ para todo $k = 1, \ldots, p$ y $f_j(x') < f_j(\hat{x})$ para al menos un j. Definimos $l' := f(x^0) - f(x')$. Tenemos que (x', l') es factible para (2.8) ya que

$$l'_k = f_k\left(x^0\right) - f_k(x') \geq f_k\left(x^0\right) - f_k(\hat{x}) = \hat{l}_k \geq 0$$

Además, $\sum_{k=1}^{p} l'_k > \sum_{k=1}^{p} \hat{l}_k$ si $l'_j > \hat{l}_j$. Pero esto es imposible porque $(\hat{x}, \hat{l})$ es una solución óptima de (2.8) y concluimos. $\square$

Para finalizar el Método de Benson vemos que bajo asunciones de convexidad, el siguiente teorema nos muestra qué ocurre si el problema (2.8) no está acotado.

Teorema 2.39 (Benson, 1978 [17])**.** *Asumimos que las funciones f_k, $k = 1, \ldots, p$ son convexas y $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo. Si el problema (2.8) no está acotado, es decir, no tiene valores óptimos finitos, entonces $\mathcal{X}_{pE} = \emptyset$.*

Corolario 2.40. *Sean $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ convexo, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexas para $k = 1, \ldots, p$ y $f(\mathcal{X})$ $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-cerrado ($f(\mathcal{X})$ es $\mathbb{R}^p_{\geqq}$-cerrado si $(f(\mathcal{X}) + \mathbb{R}^p_{\geqq})$ es cerrado). Si (2.8) no está acotado entonces $\mathcal{X}_E = \emptyset$.*

Demostración. Por el Teorema 2.32 tenemos que $\mathcal{Y}_N \subset \operatorname{cl} S(\mathcal{Y}) = \operatorname{cl} \mathcal{Y}_{pN}$. Por el Teorema 2.39 $\mathcal{Y}_{pN} = \emptyset$ de dónde $\operatorname{cl} \mathcal{Y}_{pE} = \emptyset$ y $\mathcal{Y}_N = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{X}_E = \emptyset$. $\square$

2.4.4. Aproximación al punto ideal

Con esta técnica, que no tiene que ver con las anteriores, trataremos de acercarnos al punto eficiente en el sentido de que la distancia entre un punto de referencia y las soluciones eficientes sea mínima. Empecemos definiendo lo que es un punto ideal. Asumimos que $\mathcal{X}_E$ y $\mathcal{Y}_N$ son no vacíos.

Definición 2.41. El punto $y^I = \left(y_1^I, \ldots, y_p^I\right)$ definido por:

$$y_k^I := \min_{x\in\mathcal{X}} f_k(x) = \min_{y\in\mathcal{Y}} y_k$$

decimos que es el punto ideal del problema de optimización multicriterio $\min_{x\in\mathcal{X}} \left(f_1(x), \ldots, f_p(x)\right)$.

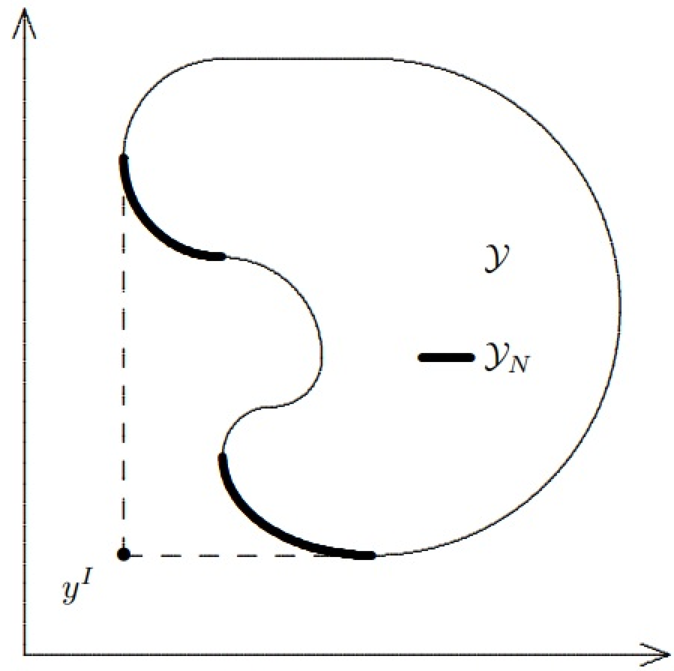

Figura 2.5: Conjunto eficiente y punto ideal.

En la Figura 2.5 vemos un ejemplo de punto ideal. El punto ideal y^I sirve de referencia para aproximar las soluciones, que pretendemos que estén lo más próximas a este punto. Dada una distancia d:

$$d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_{\geqq},$$

el problema de aproximación que utilizaremos será:

$$\min_{x\in\mathcal{X}} d\left(f(x), y^I\right) \tag{2.9}$$

Consideraremos solamente métricas derivadas de una norma, es decir, $d\left(y^1, y^2\right) = \|y^1 - y^2\|$. La interpretación del problema de aproximación es dado el conjunto $C = \left\{y \in \mathbb{R}^p : \left\|y - y^I\right\| \leq c\right\}$, encontrar el valor mas pequeño de c tal que la intersección de C y con $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ sea no vacía. Una solución óptima del problema (2.9) será eficiente o no, dependiendo de las propiedades de la distancia d y por lo tanto, de las propiedades de la norma $\|\cdot\|$ de la que deriva.

Definición 2.42.

I. Una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_{\geq}$ decimos que es monótona si cumple $\|y^1\| \leq \|y^2\|$ para todo $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^p$ con $|y_k^1| \leq |y_k^2|$, $k = 1, \ldots, p$ y además $\|y^1\| < \|y^2\|$ si $|y_k^1| < |y_k^2|$, $k = 1, \ldots, p$.

II. Una norma $\|\cdot\|$ es estrictamente monótona si cumple $\|y^1\| < \|y^2\|$ para todo $y^1, y^2 \in \mathbb{R}^p$ con $|y_k^1| \leq |y_k^2|$, $k = 1, \ldots, p$ y $\left|y_j^1\right| \neq \left|y_j^2\right|$ para algún j.

Con la definición anterior podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 2.43.

I. *Si $\|\cdot\|$ es monótona y $\hat{x}$ es una solución óptima de (2.9), entonces $\hat{x}$ es eficiente débil. Si $\hat{x}$ es la única solución de (2.9) entonces $\hat{x}$ es eficiente.*

II. *Si $\|\cdot\|$ es una norma monótona estricta y $\hat{x}$ es una solución de (2.9) entonces $\hat{x}$ es eficiente.*

Unas de las normas más utilizadas son las l_p-normas $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$:

$$\|y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leq p \leq \infty$. La norma $\|\cdot\|_p$ es estrictamente monótona para $1 \leq p < \infty$ y monótona para $p = \infty$. Consideramos el problema de aproximación ponderado siguiente:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(f_k(x) - y_k^I\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.10}$$

para $1 \leq p \leq \infty$, y

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \max_{k=1,\ldots,n} \lambda_k \left(f_k(x) - y_k^I\right) \tag{2.11}$$

para $p = \infty$. Asumimos que el vector $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ es no negativo y distinto de cero. Utilizando estas normas tenemos los siguientes resultados:

Teorema 2.44. *Una solución óptima $\hat{x}$ del problema (2.10) con $p < \infty$ es eficiente si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

I. *$\hat{x}$ es la única solución de (2.10).*

II. *$\lambda_k > 0$ para todo $k = 1, \ldots, p$.*

Proposición 2.45. *Sea $\lambda > 0$ un vector de pesos estrictamente positivo. Entonces se cumple lo siguiente:*

I. *Si $\hat{x}$ es una solución óptima de (2.11) entonces $\hat{x} \in \mathcal{X}_{dE}$.*

II. *Si (2.11) tiene una única solución óptima $\hat{x}$, entonces $\hat{x} \in \mathcal{X}_E$*

Capítulo 3

Un Método Símplex Multiobjetivo

En este capítulo introduciremos los problemas de programación lineal multiobjetivo como un caso particular de los problemas de optimización multiobjetivo. Para estos problemas la función objetivo y las restricciones serán lineales. Probaremos los principales teoremas que justifican un método símplex para resolver este tipo de problemas y explicaremos dicho método símplex multiobjetivo. La principal referencia para este capítulo es el libro de Ehrgott [1] concretamente los capítulos 6 y 7. Ilustramos la importancia de los problemas de programación lineal multiobjetivo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1 (Problema de la planificación de cultivos [18][19][20]).

Las aplicaciones de la programación lineal al campo de la economía agraria comenzaron a desarrollarse en la década de los años cincuenta, siguiendo fundamentalmente dos líneas. La primera línea consistía en la formulación de raciones para el ganado a coste mínimo como en el Ejemplo 1.1 y la segunda línea, en la determinación del plan de cultivos óptimo en una empresa agraria.

La planificación de la actividad agraria en una empresa, mediante la programación lineal puede resumirse en que el empresario establece el conjunto de cultivos posibles. A cada cultivo posible se le asocia una cifra representativa de la utilidad que el cultivo representa para el empresario, normalmente el margen bruto de cada cultivo (producto bruto menos gastos variables). Seguidamente se establecen las variables de decisión x_i, que representan la superficie dedicada a cada cultivo en el correspondiente plan. La función objetivo del programa pretende encontrar el conjunto de valores de las variables de decisión (es decir, el plan de cultivos) que maximiza el margen bruto de la explotación, satisfaciéndose una serie de condiciones como ocupación de la tierra, frecuencia y sucesión de cultivos, disponibilidad de mano de obra, disponibilidad de capital, disponibilidad de agua de riego, etc.

Si preguntásemos a la autoridad agraria responsable de elaborar un plan de cultivos para una región, esta probablemente desearía que el plan de cultivos maximizara el valor añadido, la creación de puestos de trabajo, el margen bruto, que minimizara la estacionalidad, etc.

La forma de planificación que describíamos de una empresa se aleja de la realidad ya que existen otros objetivos aparte de maximizar el beneficio bruto del empresario. Una de las principales debilidades de la programación lineal uniobjetivo es que solo considera un objetivo que luego se optimiza. Pero la realidad es que existen otros objetivos válidos que los centros de decisión buscan que se satisfagan. Empleando la programación multiobjetivo se pueden resolver las debilidades de estos problemas y ganar en realismo.

A continuación presentamos un posible esquema de un modelo de planificación de cultivos dentro de un enfoque multiobjetivo, en el que el centro decisor no es un empresario privado, sino un órgano público de planificación.

Consideramos x_i, $i = 1, \ldots, n$ las variables de decisión de los n posibles cultivos, es decir, la cantidad de superficie dedicada a cada cultivo. Los objetivos que queremos conseguir son los siguientes:

Objetivo 1: Conseguir que el margen bruto global del plan de cultivos alcance como mínimo una cota de M unidades monetarias. Si designamos por m_i el margen bruto del i-ésimo cultivo, la representación de la primera función objetivo y la restricción de que se generen al menos M unidades monetarias lo escribimos como:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \sum_{i=1}^{n} m_i x_i & \\ \text{sujeto a} & \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \geq M & \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Objetivo 2: Conseguir que el valor añadido generado por el plan de cultivos alcance como mínimo una cota de V unidades monetarias. Si designamos por v_i, el margen bruto del i-ésimo cultivo, la representación del segundo objetivo es:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \sum_{i=1}^{n} v_i x_i & \\ \text{sujeto a} & \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \geq V & \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Objetivo 3: Conseguir que el número de trabajos generado por el plan de cultivos alcance como mínimo una cota de W unidades. Designando por w_i, el número de trabajos generados por el cultivo i-ésimo, la representación del tercer objetivo la escribimos como:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i & \\ \text{sujeto a} & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq W & \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Objetivo 4: Minimizar el riesgo del plan de cultivos, es decir, el riesgo a que se produzca una sequía, un incendio, una plaga, la probabilidad de que baje mucho el precio de un cultivo, etc. El riesgo máximo que estamos dispuestos a asumir lo denotaremos por R. Si designamos por r_i el riesgo del cultivo i-ésimo, que siempre será mayor o igual que cero, para la representación del cuarto objetivo tenemos:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \sum_{i=1}^{n} r_i x_i & \\ \text{sujeto a} & \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \leq R & \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Juntando todos los objetivos tenemos el problema multiobjetivo:

$$\begin{array}{lllllllllll}
\text{máx} & m_1x_1 & + & \cdots & + & m_ix_i & + & \cdots & + & m_nx_n & & \\
\text{máx} & v_1x_1 & + & \cdots & + & v_ix_i & + & \cdots & + & v_nx_n & & \\
\text{máx} & w_1x_1 & + & \cdots & + & w_ix_i & + & \cdots & + & w_nx_n & & \\
\text{mín} & r_1x_1 & + & \cdots & + & r_ix_i & + & \cdots & + & r_nx_n & & \\
\text{sujeto a} & m_1x_1 & + & \cdots & + & m_ix_i & + & \cdots & + & m_nx_n & \geq & M \\
 & v_1x_1 & + & \cdots & + & v_ix_i & + & \cdots & + & v_nx_n & \geq & V \\
 & w_1x_1 & + & \cdots & + & w_ix_i & + & \cdots & + & w_nx_n & \geq & W \\
 & r_1x_1 & + & \cdots & + & r_ix_i & + & \cdots & + & r_nx_n & \leq & R \\
 & & & x_i \geq 0 & & & & i = 1, \ldots, n & & & &
\end{array}$$

A este plan habría que añadirle otras muchas restricciones para completarlo. Una vez planteado el problema y calculado las posibles soluciones, es decir, las que cumplan con las restricciones, se pueden dar prioridades a unos objetivos respecto a otros según las pretensiones del plan. Por ejemplo, una vez satisfechas las restricciones M, V y W podríamos dar prioridad a minimizar el riesgo, o también, generar más margen o más valor añadido a cambio de asumir más riesgo.

3.1. Notación y definiciones

Lo primero que haremos será dar una definición de lo que es un problema de optimización lineal multiobjetivo (POLM). Estos problemas los podemos ver como un caso particular de los problemas de optimización multiobjetivo que vimos en el Capítulo 2. Además los POLM son la generalización de los problemas de optimización lineales vistos en el Capítulo 1, ya que podemos considerar que estos son un POLM con una sola función objetivo.

Un problema de optimización lineal multiobjetivo es un caso especial de un problema de optimización multiobjetivo

$$\begin{array}{lll}
\text{mín} & (f_1(x), \ldots, f_p(x)) & \\
\text{sujeto a} & g_j(x) \leq 0 & j = 1, \ldots, m
\end{array}$$

donde las funciones objetivo y las restricciones son todas lineales. Las funciones objetivo son:

$$f_k(x) = c_k^T x \quad k = 1, \ldots, p \quad c_k \in \mathbb{R}^n$$

Las restricciones $g_j(x) \leq 0$, $j = 1, \ldots, m$ las podemos escribir en forma matricial como:

$$Ax = b$$

Asumiremos, sin pérdida de generalidad, que $x \geqq 0$. Usaremos la notación:

$$y^1 \leqq y^2 \quad \text{si} \quad y_k^1 \leq y_k^2 \quad k = 1, \ldots, p$$

$$y^1 \leq y^2 \quad \text{si} \quad y_k^1 \leq y_k^2 \quad k = 1, \ldots, p \quad \text{e} \quad y^1 \neq y^2$$

$$y^1 < y^2 \quad \text{si} \quad y_k^1 < y_k^2 \quad k = 1, \ldots, p$$

y también:

$$\mathbb{R}^p_{>} := \{y \in \mathbb{R}^p : y > 0\}$$

$$\mathbb{R}^p_{\geq} := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}^p_{\geqq} := \{y \in \mathbb{R}^p : y \geqq 0\}$$

Definición 3.2. Un problema de optimización lineal multiobjetivo es el problema de optimización siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & Cx \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geqq 0 \end{array} \tag{3.1}$$

siendo C la matriz objetivo $p \times n$ formada por las filas c_k^T, $k = 1, \ldots, p$. El conjunto factible en el espacio de decisión es $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geqq 0\}$ formado por la matriz A de dimensión $m \times n$ y el vector $b \in \mathbb{R}^m$. El conjunto factible en el espacio objetivo es $\mathcal{Y} = C\mathcal{X} = \{Cx : x \in \mathcal{X}\}$.

Para que sea verdaderamente un problema de optimización multicriterio, las diferentes funciones objetivo $f_k(x) = c_k^T x$ no pueden minimizarse en el mismo punto ya que el problema se simplificaría. Es decir, los diferentes criterios que corresponden a cada función $f_k(x) = c_k^T$ no estarían en conflicto. Sea

$$\mathcal{X}_k := \left\{\hat{x} \in \mathcal{X} : c_k^T \hat{x} \leq c_k^T x \text{ para todo } x \in \mathcal{X}\right\}$$

el conjunto de soluciones óptimas del problema lineal con la función objetivo $c_k^T x$. Asumiremos que

$$\cap_{k=1}^p \mathcal{X}_k = \emptyset \tag{3.2}$$

A continuación definimos los que son los puntos eficientes y no dominados como en el capítulo anterior pero ahora en el caso de un POLM.

Definición 3.3. Dado $\hat{x} \in \mathcal{X}$ una solución factible del POLM (3.1) y sea $\hat{y} = C\hat{x}$.

I. Decimos que $\hat{x}$ es eficiente débil si no hay un $x \in \mathcal{X}$ tal que $Cx < C\hat{x}$, a $\hat{y} = C\hat{x}$ lo llamamos punto no dominado débil.

II. $\hat{x}$ es eficiente si no hay un $x \in \mathcal{X}$ tal que $Cx \leq C\hat{x}$, a $\hat{y} = C\hat{x}$ lo llamamos no dominado.

III. $\hat{x}$ es propiamente eficiente si es eficiente y además existe un número real $M > 0$ tal que para todo i y para todo x cumpliendo $c_i^T x < c_i^T \hat{x}$ hay un índice j tal que $c_j^T x > c_j^T \hat{x}$ y

$$\frac{c_i^T \hat{x} - c_i^T x}{c_j^T x - c_j^T \hat{x}} \leq M$$

Para encontrar las soluciones eficientes, expondremos a continuación un método que se basa en el método de suma ponderada de la Sección 2.3. Para ello definimos lo que es el problema lineal de suma ponderada asociado al problema (3.1) como un caso particular del problema de suma ponderada (2.2).

Definición 3.4. Sea $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$. El problema lineal de suma ponderada asociado al problema (3.1), al que nos referiremos como PL(λ) es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \lambda^T Cx \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geqq 0 \end{array} \tag{3.3}$$

Notemos que el problema (3.3) es un problema lineal con un solo objetivo.

3.2. Resultados para la programación lineal multiobjetivo

En esta sección presentaremos y demostraremos algunos de los principales teoremas de programación lineal multiobjetivo que permitirán justificar más tarde en la Sección 3.4 el algoritmo símplex multiobjetivo. Algunos son casos particulares de teoremas enunciados anteriormente.

Lo primero que cabe destacar, y lo hacemos en el Lema 3.5, son las propiedades de convexidad y clausura de los conjuntos factibles del POLM (3.1).

Lema 3.5. *El conjunto factible $\mathcal{X}$ en el espacio de decisión y el conjunto factible $\mathcal{Y}$ en el espacio objetivo del problema POLM (3.1) son convexos y cerrados.*

El siguiente teorema es una versión para el POLM de la Proposición 2.28. Este resultado nos proporcionará una forma de encontrar las soluciones eficientes.

Teorema 3.6. *Sea $\hat{x} \in \mathcal{X}$ una solución óptima del problema de suma ponderada (3.3).*

I. *Si $\lambda \geq 0$ entonces $\hat{x}$ es eficiente débil.*

II. *Si $\lambda > 0$ entonces $\hat{x}$ es eficiente.*

Demostración. I. Supongamos que $\hat{x}$ no es eficiente débilmente, entonces tenemos al menos un $x \in \mathcal{X}$ que domina estrictamente a $\hat{x}$, esto es,

$$c_k^T x < c_k^T \hat{x} \quad k = 1, \dots, p$$

Luego,

$$\lambda_k c_k^T x \leq \lambda_k c_k^T x \quad k = 1, \dots, p$$

con una inecuación estricta para al menos un k si $\lambda \neq 0$. Sumando todas las ecuaciones tenemos $\lambda^T Cx < \lambda^T C\hat{x}$. Dado que $\hat{x}$ es una solución óptima llegamos a la contradicción.

II. En este caso supongamos que,

$$c_k^T x \leq c_k^T \hat{x} \quad k = 1, \dots, p$$

con una inecuación estricta. Dado que $\lambda > 0$, también se cumple:

$$\lambda_k c_k^T x \leq \lambda_k c_k^T x \quad k = 1, \dots, p$$

con al menos una inecuación estricta y como antes tenemos $\lambda^T Cx < \lambda^T C\hat{x}$ con lo que llegamos a la contradicción.

$\square$

Continuando con el estudio de las soluciones eficientes del POLM (3.1), el Lema 3.7 y el Lema 3.8 nos dan una condición necesaria y suficiente para que una solución factible del POLM (3.1) sea eficiente. Cabe destacar que el Lema 3.7 es una versión del Teorema 2.37 para el caso de un POLM.

Lema 3.7. *Una solución factible $x^0 \in \mathcal{X}$ del POLM (3.1) es eficiente si y solo si el problema lineal*

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & e^T z & & \\ \text{sujeto a} & Ax & = & b \\ & Cx + Iz & = & Cx^0 \\ & x, z & \geqq & 0 \end{array} \tag{3.4}$$

donde $e^T = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$ e I es la matriz identidad $p \times p$, tiene una solución óptima $(\hat{x}, \hat{z})$ con $\hat{z} = 0$.

Demostración. Es el Teorema 2.37 aplicado al POLM (3.1). Sea $(x, z) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^p_{\geqq}$ una solución factible de (3.4). Entonces $Cx + Iz = Cx^0$ y por lo tanto, $z = Cx^0 - Cx \geqq 0$ por ser $z \geqq 0$. Si $\hat{x}$ en una solución óptima $(\hat{x}, \hat{z})$ es eficiente, no hay $x \in \mathcal{X}$ tal que $Cx \leqq C\hat{x}$, por lo que $\hat{z} = 0$. Para la otra implicación, si x^0 no es eficiente habrá un $x \in \mathcal{X}$ tal que $Cx \leq Cx^0$. Notemos que (3.4) es siempre factible. Entonces hay un z con $z_k > 0$ para al menos un k, contradiciendo la optimalidad de $(\hat{x}, 0)$. $\square$

Lema 3.8. *Una solución factible $x^0 \in \mathcal{X}$ es eficiente si y solo si el problema lineal*

$$\begin{array}{lrl} \text{mín} & u^T b + w^T Cx^0 & \\ \text{sujeto a} & u^T A + w^T C & \geq 0 \\ & w & \geqq e \\ & u & \in \mathbb{R}^m \end{array} \tag{3.5}$$

tiene una solución óptima $(\hat{u}, \hat{w})$ con $\hat{u}^T b + \hat{w}^T Cx^0 = 0$.

Demostración. Notemos que (3.5) es el dual de (3.4). Por el Teorema Dual 1.6 tenemos que $(\hat{x}, \hat{z})$ es una solución óptima del problema lineal (3.4) si y solo si el problema lineal (3.5) tiene una solución óptima $(\hat{u}, \hat{w})$ tal que $e^T \hat{z} = \hat{u}^T b + \hat{w}^T Cx^0 = 0$ $\square$

Con los teoremas anteriores estamos listos para probar que todas las soluciones eficientes de un POLM pueden ser halladas resolviendo un problema lineal de suma ponderada (3.3). Considerando una solución eficiente x^0 construiremos un vector $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$ apropiado tal que x^0 es una solución óptima del PL(λ) (3.3).

Teorema 3.9 (Isermann, 1974 [21])**.** *Una solución factible $x^0 \in \mathcal{X}$ es una solución eficiente del POLM (3.1) si y solo si existe un $\lambda \in \mathbb{R}^p_{>}$ tal que*

$$\lambda^T Cx^0 \leq \lambda^T Cx$$

para todo $x \in \mathcal{X}$.

Demostración. Por el Teorema 3.6 sabemos que una solución óptima de un problema de suma ponderada con $\lambda > 0$ es eficiente.
Para la otra implicación, sea $x^0 \in \mathcal{X}_E$. Por el Lema 3.8 tenemos que el problema lineal (3.5) tiene una solución óptima $(\hat{u}, \hat{w})$ tal que

$$\hat{u}^T b = -\hat{w}^T C x^0 \tag{3.6}$$

Notemos que el mismo $\hat{u}$ es una solución óptima del problema lineal

$$\text{mín} \left\{ u^T b : u^T A \geqq -\hat{w}^T C \right\} \tag{3.7}$$

ya que es el problema (3.5) con $w = \hat{w}$ fijo. Y por lo tanto, existe una solución óptima del dual de (3.7)

$$\text{máx} \left\{ -\hat{w}^T C x : Ax = b, x \geqq 0 \right\} \tag{3.8}$$

Por la dualidad débil tenemos $u^T b \geq -\hat{w}^T C x$ para todas las soluciones factibles u de (3.7) y para todas las soluciones factibles x de (3.8). Sabemos que $\hat{u}^T b = -\hat{w}^T C x^0$ por (3.6), esto es, x^0 es una solución óptima de (3.8) por el Teorema Dual 1.6. Por último, notamos que (3.8) es equivalente a

$$\text{mín} \left\{ \hat{w}^T C x : Ax = b, x \geqq 0 \right\}$$

y por las restricciones de (3.5) $\hat{w} \geq e > 0$. Por lo tanto, x^0 es una solución óptima del problema de suma ponderada (3.3) con $\lambda = \hat{w}$ como vector de pesos. □

En la siguiente proposición mostramos unas condiciones de existencia de soluciones eficientes y por consiguiente de puntos no dominados.

Proposición 3.10. *Sea $x^0 \in \mathcal{X}$. Entonces el problema lineal (3.4) es factible y se cumple lo siguiente.*

I. *Si $(\hat{x}, \hat{z})$ es una solución óptima de (3.4) entonces $\hat{x}$ es una solución eficiente del problema (3.1).*

II. *Si (3.4) no está acotado entonces $\mathcal{X}_E = \emptyset$.*

Demostración.

I. La demostración es consecuencia del Lema 3.7 y la Proposición 2.38 aplicado al POLM (3.1).

II. Es el Corolario 2.40 aplicado al POLM (3.1).

□

3.3. Álgebra detrás del Método Símplex Multiobjetivo

En esta sección introduciremos los conceptos y resultados relacionados con las bases eficientes y las variables no básicas eficientes que permitirán justificar el Algoritmo 3.20. Para obtener todas las soluciones eficientes, es decir, caracterizar el conjunto $\mathcal{X}_E$, lo que haremos será encontrar todas las bases eficientes, que como veremos en el Lema 3.23, éstas coinciden con los puntos extremos de $\mathcal{X}_E$ y esto nos permitirá conocer el conjunto eficiente.

Consideramos el POLM (3.1)

$$\text{mín}\,\{Cx : Ax = b, x \geqq 0\}$$

y para $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ el problema lineal de suma ponderada siguiente, que denotamos por PL(λ),

$$\text{mín}\left\{\lambda^T Cx : Ax = b, x \geqq 0\right\}.$$

Denotaremos, como en la Definición 1.7, por $A_\mathcal{B}$ a la submatriz $m \times m$ invertible de A respecto de la base $\mathcal{B}$ y por $\mathcal{N}$ el conjunto de índices de las variables no básicas. Usaremos la notación $\bar{C} = C - C_\mathcal{B} A_\mathcal{B}^{-1} A$ para referirnos a la matriz de costes reducidos respecto a la base $\mathcal{B}$ y $R := \bar{C}_\mathcal{N}$ para la parte no básica de la matriz de costes reducidos. Como en el caso uniobjetivo tendremos $\bar{C}_\mathcal{B} = 0$.

Lo primero que haremos será mostrar que si el POLM tiene una solución eficiente, siempre podemos encontrar una solución básica factible eficiente.

Lema 3.11. *Si $\mathcal{X}_E \neq \emptyset$, es decir, el conjunto de las soluciones eficientes es no vacío, entonces $\mathcal{X}$ tiene una solución básica factible eficiente.*

Demostración. Por el Teorema 3.9 hay algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ tal que $\text{mín}_{x\in\mathcal{X}} \lambda^T Cx$ tiene una solución óptima. Por el Teorema 1.10 el PL(λ) $\text{mín}_{x\in\mathcal{X}} \lambda^T Cx$ tiene una solución factible básica óptima y por el Teorema 3.6 esta solución óptima será eficiente para el POLM. □

Definición 3.12. Una base factible $\mathcal{B}$ decimos que es una base eficiente si $\mathcal{B}$ es una base óptima del PL(λ) para algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$.

Definición 3.13. Decimos que un pivote es factible si la solución obtenida después de pivotar es factible. Dos bases $\mathcal{B}$ y $\hat{\mathcal{B}}$ son adyacentes si una puede ser obtenida de la otra mediante un solo pivote.

Para que una operación de pivotaje en la matriz $\bar{A}$ respecto de una base factible siga siendo factible se puede hacer de dos maneras:

I. El pivote es un elemento positivo y utilizamos la regla de elegir

$$r \in \text{argmin}\left\{j \in \mathcal{B} : \frac{\bar{b}_j}{\bar{A}_{sj}}, \bar{a}_{sj} > 0\right\}$$

.

II. El pivote es un elemento distinto de cero (puede ser negativo) y la fila es degenerada, es decir, el valor del elemento constante $\bar{b}_j$ es cero.

Definición 3.14.

I. Sea $\mathcal{B}$ una base eficiente. La variable x_j, $j \in \mathcal{N}$ decimos que es una variable no básica eficiente si existe un $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ tal que $\lambda^T R \geqq 0$ y $\lambda^T r^j = 0$, donde r^j es la columna de R correspondiente a la variable x_j

II. Sean $\mathcal{B}$ una base eficiente y x_j una variable eficiente no básica. Un pivote factible que haga entrar en la base a la variable eficiente no básica decimos que es un pivote eficiente respecto a la base $\mathcal{B}$ y la variable x_j.

La justificación de la definición de variable no básica eficiente es que si obtenemos una base eficiente $\hat{\mathcal{B}}$ a partir de una base eficiente $\mathcal{B}$, introduciendo la variable x_j, mediante un pivote eficiente, la base $\hat{\mathcal{B}}$ será una base óptima del PL(λ) para algún $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$. Y por el Teorema 1.12 se cumple que $\lambda^T R \geqq 0$. La igualdad $\lambda^T r^j = 0$ viene de que en el vector de costes reducidos $\bar{c}^T = c^T - c^T_{\hat{\mathcal{B}}} A^{-1}_{\hat{\mathcal{B}}} A$ del PL(λ) se cumplirá que $\bar{c}_{\hat{\mathcal{B}}} = 0$ si $\hat{\mathcal{B}}$ es un base óptima. Y tenemos que el elemento j de $\bar{c}^T$ es $\lambda^T r^j$. Como x_j forma parte de la base óptima $\lambda^T r^j = 0$.

A continuación vemos que podemos encontrar una variable no básica eficiente para una base eficiente $\mathcal{B}$.

Proposición 3.15. *Sea $\mathcal{B}$ una base eficiente. Entonces, existe una variable no básica eficiente para $\mathcal{B}$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{B}$ es una base eficiente, por la Definición 3.12 existirá un $\lambda > 0$ tal que $\mathcal{B}$ sea óptima para el problema PL(λ). Por el Teorema 1.12 este $\lambda > 0$ cumple que $\lambda^T R \geqq 0$. Luego, el conjunto $\mathcal{L} := \left\{\lambda > 0 : \lambda^T R \geqq 0\right\}$ es no vacío. Tenemos que ver que hay un $\lambda \in \mathcal{L}$ y un índice $j \in \mathcal{N}$ tal que $\lambda^T r^j = 0$.

Observamos que no hay ninguna columna r en R tal que $r \leq 0$, es decir, $r_i \leq 0$ $i = 1, \ldots, m$. Por lo que habrá al menos una columna con elementos negativos y positivos. Esto es debido a la asunción (3.2).

Sea $\lambda^* \in \mathcal{L}$ y sea $\lambda' \in \mathbb{R}^p_>$ tal que $\mathcal{I} := \left\{i \in \mathcal{N} : \lambda'^T r^j < 0\right\} \neq \emptyset$. Este λ' existe ya que R contiene al menos una entrada negativa.

Definimos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|}$ dado por

$$\phi_i(t) := \left(t\lambda^{*T} + (1-t)\lambda'^T\right) r^i, i \in \mathcal{N}$$

Notemos que $\phi(0) = \lambda'^T R$ y $\phi(1) = \lambda^{*T} R \geqq 0$. Para cada $i \in \mathcal{N} \backslash \mathcal{I}$ tenemos que $\phi_i(t) \geq 0$ para todo $t \in [0,1]$. Para todo $i \in \mathcal{I}$ existe un $t_i \in [0,1]$ tal que:

$$\phi_i(t) \begin{cases} < 0, t \in [0, t_i) \\ = 0, t = t_i \\ \geq 0, t \in [t_i, 1] \end{cases}$$

Sea $t^* := \text{máx}\left\{t_i : i \in \mathcal{I}\right\}$, tenemos que $\phi\left(t^*\right) \geqq 0$ y $\phi_i\left(t^*\right) = 0$ para algún $i \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, $\hat{\lambda} := t^*\lambda^* + (1-t^*)\lambda' \in \mathcal{L}$ es el valor de λ que buscábamos. $\square$

Lema 3.16. *Sean $\mathcal{B}$ una base eficiente y x_j una variable no básica eficiente. Entonces cualquier pivote eficiente respecto de $\mathcal{B}$ y x_j produce una base eficiente $\hat{\mathcal{B}}$ adyacente.*

Demostración. Sea x_j una variable entrante respecto la base $\mathcal{B}$. Dado que x_j es una variable no básica eficiente, existe un $\lambda \in \mathbb{R}^p$ con $\lambda^T R \geqq 0$ y $\lambda^T r^j = 0$. Por lo tanto, x_j es una variable no básica con coste reducido 0 en el problema PL(λ). Esto quiere decir que el valor del coste reducido de PL(λ) después de un pivotaje con la variable x_j entrando no varía. Denotamos por $\hat{\mathcal{B}}$ la base resultante después de pivotar y entrar la variable x_j. Tenemos que $\lambda^T R \geqq 0$ y $\lambda^T r^j = 0$ para $\hat{\mathcal{B}}$, es decir, $\hat{\mathcal{B}}$ es una base óptima para PL(λ) y por lo tanto una base eficiente adyacente. □

Hemos visto que a partir de una base eficiente y una variable no básica eficiente podemos obtener una nueva base eficiente. Necesitamos un método para saber si la variable no básica es eficiente, esto lo haremos mediante la resolución de un problema lineal. El siguiente teorema muestra la forma de hacerlo.

Teorema 3.17 (Evans y Steuer, 1973 [22]). *Sea $\mathcal{B}$ una base eficiente y sea x_j una variable no básica eficiente. La variable x_j es eficiente si y solo si el problema lineal*

$$\begin{array}{lc} \textit{máx} & e^t v \\ \textit{sujeto a} & Rz - r^j\delta + Iv = 0 \\ & z, \delta, v \geq 0 \end{array} \tag{3.9}$$

tiene un valor óptimo en 0.

Demostración. Por la Definición 3.14, x_j es una variable no básica eficiente si el problema lineal

$$\begin{array}{lr} \text{mín} & 0^T\lambda \\ \text{sujeto a} & R^T\lambda \geqq 0 \\ & \left(r^j\right)^T\lambda = 0 \\ & I\lambda \geqq e \\ & \lambda \geqq 0 \end{array} \tag{3.10}$$

tiene una solución óptima de valor 0, o dicho de otro modo, si el problema es factible. Las primeras dos restricciones de (3.10) juntas son equivalente a $R^T\lambda \geqq 0$, $\left(r^j\right)^T\lambda \leq 0$ ó $R^T\lambda \geqq 0$, $\left(-r^j\right)^T\lambda \geq 0$. Esto es debido a que $\lambda \geqq 0$ y por la asunción (3.2), no se puede cumplir para ningún j que $r^j < 0$. Luego, si $R^T\lambda \geqq 0$, $\left(r^j\right)^T\lambda \leq 0$ necesariamente será $\left(r^j\right)^T\lambda = 0$. Consideramos el siguiente problema lineal equivalente a (3.10)

$$\begin{array}{lr} \text{mín} & 0^T\lambda \\ \text{sujeto a} & R^T\lambda \geqq 0 \\ & -\left(r^j\right)^T\lambda \geq 0 \\ & I\lambda \geqq e \\ & \lambda \geqq 0. \end{array} \tag{3.11}$$

El dual de (3.11) es

$$\begin{array}{lc} \text{máx} & e^T v \\ \text{sujeto a} & Rz - r^j\delta + Iv + It = 0 \\ & z, \delta, v, t \geqq 0 \end{array} \tag{3.12}$$

Notemos que una solución óptima del problema (3.12) siempre cumplirá $t = 0$, por lo que es equivalente a

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & e^T v \\ \text{sujeto a} & Rz - r^j\delta + Iv = 0 \\ & z, \delta, v \geqq 0 \end{array} \tag{3.13}$$

que es el problema (3.9). □

El problema (3.9) siempre tiene la solución factible $(z, \delta, v) = 0$. Dado que (3.10) solo puede tener un óptimo de valor 0 o ser no factible, (3.9) tendrá un óptimo en 0 o no estará acotado. Resumiendo, tenemos:

I. x_j es una variable no básica eficiente si y solo si (3.9) tiene 0 como valor óptimo.

II. x_j no es una variable no básica eficiente si y solo si (3.9) no está acotado.

Definición 3.18. Dos bases eficientes $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ decimos que están conectadas si una la podemos obtener de la otra empleando únicamente pivotes eficientes.

En el Teorema 3.19 vemos que todas las bases eficientes están conectadas, esto será fundamental para que el algoritmo que expondremos en la Sección 3.4 funcione.

Teorema 3.19 (Steuer, 1985 [23])**.** *Todas las bases eficientes están conectadas.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ y $\hat{\mathcal{B}}$ dos bases eficientes. Sean $\lambda, \hat{\lambda} \in \mathbb{R}^p_>$ los vectores ponderados positivos para los cuales $\mathcal{B}$ y $\hat{\mathcal{B}}$ son bases óptimas de los problemas $\mathrm{PL}(\lambda)$ y $\mathrm{PL}(\hat{\lambda})$ respectivamente. Consideramos el problema lineal paramétrico

$$\text{mín}\left\{c(\Phi)^T x : Ax = b, x \geqq 0\right\}$$

con la función objetivo

$$c(\Phi) = \Phi\hat{\lambda}^T C + (1 - \Phi)\lambda^T C, \qquad \Phi \in [0, 1]$$

Consideramos la primera base $\hat{\mathcal{B}}$ (para $\Phi = 1$). Después de algunos pivotes, obtenemos una base $\tilde{\mathcal{B}}$ que es óptima para el problema $\mathrm{PL}(\lambda)$. Dado $\lambda_\Phi = \Phi\hat{\lambda} + (1 - \Phi)\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ para cada $\Phi \in [0, 1]$, todas las bases intermedias son óptimas para $\mathrm{PL}(\lambda_\Phi)$ para algún $\lambda_\Phi \in \mathbb{R}^p_>$, es decir, son bases eficientes. Por lo que todos los pivotes son eficientes. Si $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ ya estaría. De lo contrario $\mathcal{B}$ puedes ser obtenida de $\tilde{\mathcal{B}}$ mediante pivotes eficientes ya que $\mathcal{B}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$ son bases óptimas del problema lineal $\mathrm{PL}(\lambda)$. □

3.4. Algoritmo Símplex Multiobjetivo

El método que presentamos a continuación encuentra todas las bases eficientes de un POLM. A partir de una base factible eficiente obtiene todas las demás bases eficientes. Esto lo hace mediante pivotes eficientes, de una base eficiente encuentra otra que sabemos que será eficiente por el Teorema 3.16 y podremos encontrar todas ya que sabemos que están conectadas por el Teorema 3.19.

Dado un POLM

$$\text{mín}\{Cx : Ax = b, x \geqq 0\}$$

solamente los siguientes casos pueden ocurrir:

- El POLM no es factible, es decir, $\mathcal{X} = \emptyset$.
- El POLM es factible ($\mathcal{X} \neq \emptyset$) pero no tiene soluciones eficientes, esto es, $\mathcal{X}_E = \emptyset$.
- El POLM es factible y tiene soluciones eficientes, es decir, $\mathcal{X}_E \neq \emptyset$.

El algoritmo símplex multicriterio consta de tres fases:

Fase 1: Determinamos una base factible o paramos con la conclusión de que $\mathcal{X} = \emptyset$.

Fase 2: Determinamos una solución básica eficiente o paramos con la conclusión de que $\mathcal{X}_E = \emptyset$.

Fase 3: Pivotamos entre bases eficientes para determinar todas las bases eficientes y las direcciones no acotadas de $\mathcal{X}_E$

En la fase 1 no necesitamos la función objetivo, resolvemos el problema lineal (1.12) para ver si $\mathcal{X} = \emptyset$ o $\mathcal{X} \neq \emptyset$

En la fase 2 sabemos, por lo visto hasta ahora, que de la solución de un problema lineal de suma ponderada PL(λ) obtenemos una base eficiente siempre que el problema PL(λ) esté acotado. Si no conocemos una solución de antemano, el procedimiento que describimos a continuación nos permitirá concluir que $\mathcal{X}_E = \emptyset$ o nos dará un vector λ para el cuál el PL(λ) tiene una solución óptima. Asumiendo que $\mathcal{X} \neq \emptyset$, de la fase 1 obtenemos una solución básica factible $x^0 \in \mathcal{X}$ que no sabemos si es, o no, eficiente. Por la Proposición 3.10 tenemos que si (3.4) no está acotado entonces $\mathcal{X}_E = \emptyset$. También por la Proposición 3.10 el POLM mín$\{Cx : Ax = b, x \geqq 0\}$ tiene una solución eficiente si y solo si el problema lineal (3.4) tiene una solución óptima $(\hat{x}, \hat{z})$. Esto es, si el problema lineal:

$$\text{máx}\left\{e^T z : Ax = b, Cx + Iz = Cx^0, x, z \geqq 0\right\} \tag{3.14}$$

tiene una solución óptima. Además $\hat{x}$ en la solución óptima de (3.4) es eficiente. Sin embargo, $\hat{x}$ no tiene porqué ser una solución básica eficiente del POLM y no elegiremos $\hat{x}$ para empezar la fase 3.

En su lugar, aplicando el Teorema dual 1.6, (3.14) tiene una solución óptima si y solo si su dual (3.15)

$$\text{mín}\left\{u^T b + w^T Cx^0 : u^T A + w^T C \geqq 0, w \geqq e\right\} \tag{3.15}$$

tiene una solución óptima $(\hat{u}, \hat{w})$ con $\hat{u}^T b + \hat{w}^T Cx^0 = e^T \hat{z}$. Observamos que $\hat{u}$ es también una solución óptima del problema lineal (3.16)

$$\text{mín}\left\{u^T b : u^T A \geqq -\hat{w}TC\right\} \tag{3.16}$$

el cual es (3.15) para $w = \hat{w}$ fijo. Como en la prueba del Teorema 3.9, el dual de (3.16)

$$\text{máx}\left\{-\hat{w}^T Cx : Ax = b, x \geqq 0\right\} \tag{3.17}$$

tiene una solución óptima y por lo tanto una solución óptima básica, que será eficiente. El problema (3.17) es equivalente al problema lineal de suma ponderada PL($\hat{w}$)

$$\text{mín}\left\{\hat{w}^T Cx : Ax = b, x \geqq 0\right\}.$$

Resumiendo, en la fase 2 necesitaremos el problema lineal (3.15) y el problema PL($\hat{w}$). Si (3.15) no es factible, $\mathcal{X}_E = \emptyset$. De lo contrario una solución óptima de (3.15) nos dará un vector $\lambda = \hat{w}$ para el cual, PL(λ) tiene una solución óptima (Teorema 1.10) y por lo tanto una solución básica óptima (Teorema 1.10) que será eficiente para el POLM.

En la fase 3, el Teorema 3.17 nos proporciona la manera de encontrar todas las bases eficientes. Sea $\mathcal{B}$ la base eficiente obtenida en la fase 2, para cada $j \in \mathcal{N}$ resolvemos el problema (3.9)

$$\text{máx}\left\{e^T v : Ry - r^j\delta + Iv = 0; y, \delta, v \geqq 0\right\}$$

si el problema no está acotado, desechamos esta posible variable no básica ya que no es eficiente y no nos conducirá a ninguna otra solución básica. Si de lo contrario, la variable es eficiente no básica consideramos todas las posibles nuevas bases que puede formar como variable no básica entrante. Si estas nuevas bases son factibles, serán eficientes.

Para implementar el algoritmo símplex multiobjetivo que acabamos de explicar, necesitaremos almacenar las bases eficientes que vayamos procesando en una lista $\mathcal{L}_1$. Las bases eficientes que daremos como resultado las almacenaremos en una lista $\mathcal{L}_2$ y también necesitaremos una lista de variables eficientes no básicas $\mathcal{EN}$.

Algoritmo 3.20 (Algoritmo Símplex Multiobjetivo)**.**

Entrada: Datos A, b, C del POLM.

Inicializar: Listas $\mathcal{L}_1 := \emptyset$, $\mathcal{L}_2 := \emptyset$

Fase 1: Resuelve el problema lineal mín $\left\{e^T z : Ax + Iz = b, x, z \geqq 0\right\}$.

Si el valor óptimo no es cero, STOP, $\mathcal{X} = \emptyset$.

Si el valor óptimo es cero, la solución $(x^0, 0)$ nos dará una base factible x^0 del POLM.

Fase 2: Resuelve el problema lineal mín $\left\{u^T b + w^T C x^0 : u^T A + w^T C \geqq 0, w \geqq e\right\}$.

Si el problema no es factible, STOP, $\mathcal{X}_E = \emptyset$.

Si es factible, siendo la solución óptima $(\hat{u}, \hat{w})$, encuentra una base óptima $\mathcal{B}$ del programa lineal mín $\left\{\hat{w}^T C x : Ax = b, x \geqq 0\right\}$.

$\mathcal{L}_1 := \{\mathcal{B}\}, \mathcal{L}_2 := 0$

Fase 3:

Mientras: $\mathcal{L}_1 \neq \emptyset$

Elije $\mathcal{B}$ en $\mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}_1 \backslash \{\mathcal{B}\}$, $\mathcal{L}_2 := \mathcal{L}_2 \cup \{\mathcal{B}\}$

Calcular $\bar{A}$, $\bar{b}$ y R respecto a $\mathcal{B}$

$\mathcal{EN} := \mathcal{N}$

Para todo: $j \in \mathcal{N}$

Resuelve el problema lineal $\max \left\{ e^T v : Ry - r^j \delta + Iv = 0; y, \delta, v \geqq 0 \right\}$

Si el problema lineal no está acotado, $\mathcal{EN} := \mathcal{EN} \backslash \{j\}$

Fin Para

Para todo: $j \in \mathcal{EN}$

Para todo: $i \in \mathcal{B}$

Si $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \backslash \{i\}) \cup \{j\}$ es factible y $B' \notin \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$

Entonces, $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{B}'$.

Fin Para

Fin Para

Fin Mientras

Salida: $\mathcal{L}_2$

A continuación vemos un ejemplo del Algoritmo Símplex Multiobjetivo. Para las iteraciones del método en la fase 3 utilizaremos unas tablas similares a la Tabla 1.3 que resumen los datos.

Ejemplo 3.21. [1] Resolveremos el POLM

$$
\begin{array}{ll}
\min & -x_1 - 2x_2 \\
\min & -x_1 \qquad + 2x_3 \\
\min & \;\; x_1 \qquad - x_3 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 \qquad\quad \leq 1 \\
& \qquad x_2 \qquad\quad \leq 2 \\
& x_1 - x_2 + x_3 \quad \leq 4
\end{array}
$$

Introducimos las variables de holgura x_4, x_5, x_6 para que las restricciones tengan forma de igualdad $Ax = b$.

Fase 1: Está claro que la base $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$ es factible y $x^0 = (0, 0, 0, 1, 2, 4)$ es una solución básica factible.

Fase 2: Resolvemos el problema

$$\min \left\{ u^T b + w^T C x^0 : u^T A + w^T C \geqq 0, w \geqq e \right\}$$

con el x^0 de la fase 1:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & u_1 + 2u_2 + 4u_3 \\ \text{sujeto a} & u^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + w^T \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & w \geqq e \end{array}$$

Notemos que es un problema lineal con un objetivo y lo resolvemos con el algoritmo del Capítulo 1. La componente w de la solución óptima es $\hat{w} = (1, 1, 1)$. Ahora resolvemos el problema

$$\text{mín} \left\{ \hat{w}^T Cx : x \in \mathcal{X} \right\}$$

x_0 es una base factible inicial para este problema. Una base óptima es $\mathcal{B}^1 = \{2, 5, 6\}$ con una solución factible básica óptima $x^1 = (0, 1, 0, 0, 1, 5)$. Por lo tanto inicializamos $\mathcal{L}_1 = \{\{2, 5, 6\}\}$ y empezamos la fase 3.

Fase 3: Iteración 1: Elegimos la base $\mathcal{B}^1 = \{2, 5, 6\}$ y actualizamos las listas $\mathcal{L}_1 = \emptyset, \mathcal{L}_2 = \{\{2, 5, 6\}\}$. La tabla para esta base es:

$\bar{c}^1$	1	0	0	2	0	0	2
$\bar{c}^2$	-1	0	2	0	0	0	0
$\bar{c}^3$	1	0	-1	0	0	0	0
x_2	1	1	0	1	0	0	1
x_5	-1	0	0	-1	1	0	1
x_6	2	0	1	1	0	1	5

$\mathcal{EN} := \{1, 3, 4\}$.

El problema lineal para ver si x_1 es una variable eficiente no básica

$$\text{máx} \left\{ e^T v : Ry - r^j \delta + Iv = 0; y, \delta, v \geqq 0 \right\}$$

se representa en la siguiente tabla, donde los coeficientes en la función objetivo de las variables v han sido eliminados restando todas las filas de restricciones a la fila objetivo para obtener una solución básica factible con las variables $v = 0$. Este problema lineal tiene una solución óptima que encontramos después de un solo pivote. Los pivotes los enmarcamos.

1	1	2	-1	0	0	0	0
1	0	2	-1	1	0	0	0
-1	2	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0
1	-1	0	-1	0	0	1	0

El problema lineal para comprobar si la variable x_3 es una variable eficiente no básica lo mostramos a continuación, como antes, en forma tabular. El problema tiene una solución óptima a la que llegamos con el pivote indicado.

1	1	2	-1	0	0	0	0
1	0	2	0	1	0	0	0
-1	2	0	-2	0	1	0	0
1	-1	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0

Finalmente comprobamos x_4. En la tabla siguiente, la cuarta columna nos indica que el programa lineal no está acotado y por lo tanto x_4 no es eficiente.

1	1	2	-2	0	0	0	0
1	0	2	-2	1	0	0	0
-1	2	0	0	0	1	0	0
1	-1	0	0	0	0	1	0

Como resultado de esta comprobación tenemos que $\mathcal{EN} := \{1, 3\}$. Comprobando en la tabla para la base $\mathcal{B}^1 = \{2, 5, 6\}$, encontramos los pivotes factibles que hemos remarcado en la tabla. Tenemos que si la variable x_1 entra, la variable x_2 sale y obtenemos la base $\mathcal{B}^2 = \{1, 5, 6\}$. Y si la variable x_3 entra x_6 sale produciendo la base $\mathcal{B}^3 = \{2, 3, 5\}$.
$\mathcal{L}_1 := \{\{1, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}\}$.

$\bar{c}^1$	1	0	0	2	0	0	2
$\bar{c}^2$	-1	0	2	0	0	0	0
$\bar{c}^3$	1	0	-1	0	0	0	0
x_2	$\boxed{1}$	1	0	1	0	0	1
x_5	-1	0	0	-1	1	0	1
x_6	2	0	$\boxed{1}$	1	0	1	5

Iteración 2: Elegimos la base $\mathcal{B}^2 = \{1, 5, 6\}$ con la solución básica factible $x^2 = (1, 0, 0, 0, 2, 3)$.
$\mathcal{L}_1 = \{\{2, 3, 5\}\}$, $\mathcal{L}_2 = \{\{2, 5, 6\}, \{1, 5, 6\}\}$. La tabla de la base $\mathcal{B}^2$ es la siguiente:

$\bar{c}^1$	0	-1	0	1	0	0	1
$\bar{c}^2$	0	1	2	1	0	0	1
$\bar{c}^3$	0	-1	-1	-1	0	0	-1
x_1	1	1	0	1	0	0	1
x_5	0	1	0	0	1	0	2
x_6	0	-2	1	-1	0	1	3

$\mathcal{EN} = \{2, 3, 4\}$.
Si x_2 entra en la base x_1 sale, produciendo la base anterior $\{2, 5, 6\}$. Por lo tanto x_2 no necesita ser comprobada.
A continuación tenemos la tabla para comprobar x_3. Después de un pivote, la cuarta columna nos muestra que el programa lineal no está acotado y x_3 no es eficiente.

-1	1	1	-1	0	0	0	0
-1	0	1	0	1	0	0	0
$\boxed{1}$	2	1	-2	0	1	0	0
-1	-1	-1	1	0	0	1	0

Comprobamos la variable no básica x_4. Una iteración es suficiente para ver que el problema es no acotado y que x_4 no es eficiente.

-1	1	1	-1	0	0	0	0
-1	0	1	-1	1	0	0	0
$\boxed{1}$	2	1	-1	0	1	0	0
-1	-1	-1	1	0	0	1	0

Las comprobaciones muestran que no hay bases nuevas que añadir y por lo tanto $\mathcal{EN} = \emptyset$ y podemos continuar con la siguiente iteración.

Iteración 3: Elegimos la base $B^3 = \{2,3,5\}$ con la solución básica eficiente $x^3 = (0,1,5,0,1,0)$.
$\mathcal{L}_1 = \emptyset$, $\mathcal{L}_2 = \{\{2,5,6\},\{1,5,6\},\{2,3,5\}\}$.
La tabla para esta base es la siguiente:

$\bar{c}^1$	1	0	0	2	0	0	2
$\bar{c}^2$	-5	0	0	-2	0	-2	-10
$\bar{c}^3$	3	0	0	1	0	1	5
x_2	1	1	0	1	0	0	1
x_5	-1	0	0	-1	1	0	1
x_3	2	0	1	1	0	1	5

$\mathcal{EN} = \{1,4,6\}$. La variable x_6 no es necesario comprobarla. Para comprobar la variable x_1, vemos en la tabla que después de un pivote la columna 4 muestra que el problema no está acotado.

-1	1	-1	1	0	0	0	0
$\boxed{1}$	2	0	-1	1	0	0	0
-5	-2	-2	5	0	1	0	0
3	1	1	-3	0	0	1	0

El test para la variable x_4 produce la tabla siguiente y de nuevo, un pivote es suficiente para determinar que no está acotado.

-1	1	-1	-1	0	0	0	0
1	2	0	-2	1	0	0	0
-5	-2	-2	2	0	1	0	0
3	1	$\boxed{1}$	-1	0	0	1	0

Dado que $\mathcal{EN} = \emptyset$ la iteración termina.

Tenemos $\mathcal{L}_1 = \emptyset$ y el algoritmo termina.

Salida: Lista de las bases eficientes $\mathcal{B}^1 = \{2,5,6\}$, $\mathcal{B}^2 = \{1,5,6\}$, $\mathcal{B}^3 = \{2,3,5\}$.

Hemos identificado tres bases eficientes y sus tres soluciones básicas factibles eficientes correspondientes. La Figura 3.1 muestra cómo están conectadas.

En la Figura 3.2 mostramos el problema en el espacio de decisión. El conjunto eficiente consiste en los segmentos que conectan x_1 con x_2 y x_1 con x_3. $\square$

Ahora estamos listos para explicar por qué asumimos (3.2). Sin esta asunción, la existencia de variables eficientes no básicas no está garantizada y por lo tanto no se cumple el Teorema 3.19. El siguiente ejemplo muestra ésto y además muestra que sucede con los POLM degenerados, es decir, aquellos en los que alguna variable de una solución básica eficiente puede tomar el valor 0 [24].

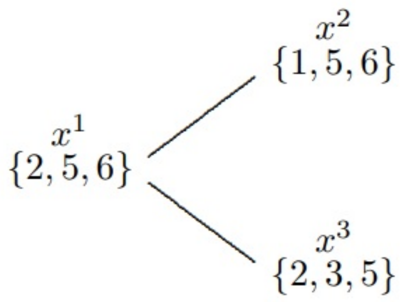

Figura 3.1: [1] Las bases del Ejemplo 3.21 están conectadas y son adyacentes.

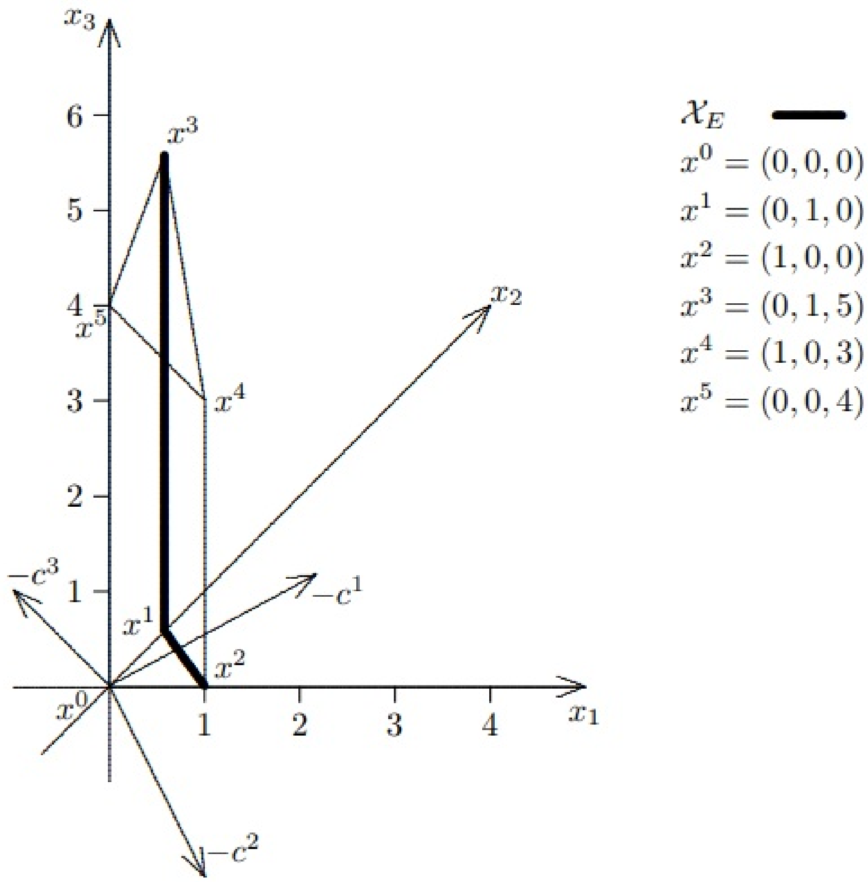

Figura 3.2: [1] Conjunto factible del Ejemplo 3.21.

Ejemplo 3.22. Queremos resolver el POLM:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -3x_1 - x_2 \\ \text{mín} & -3x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & \quad x_1 + x_2 \leq 4 \\ & \quad x_1 - x_2 \leq 4 \end{array}$$

Para escribirlo en forma de igualdad introducimos las variables de holgura x_3 y x_4. Es claro que la solución $\hat{x} = (4,0,0,0)$ minimiza ambos objetivos. Luego $\mathcal{X}_E = \{\hat{x}\}$. Tenemos que la única variable distinta de cero en $\hat{x}$ es $\hat{x}_1 = 4$, por lo que hay tres bases diferentes que definen la misma solución básica factible eficiente:$\{1,2\}$, $\{1,3\}$ y $\{1,4\}$ (el problema es degenerado). A continuación mostramos las tablas símplex para estas tres bases:

$\bar{c}^1$	0	0	2	1	12
$\bar{c}^2$	0	0	1	2	12
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0

$\bar{c}^1$	0	-4	0	3	12
$\bar{c}^2$	0	-2	0	3	12
x_1	1	-1	0	1	4
x_3	0	2	1	-1	0

$\bar{c}^1$	0	2	3	0	12
$\bar{c}^2$	0	4	3	0	12
x_1	1	1	1	0	4
x_4	0	-2	-1	1	0

La base $\{1,3\}$ no es eficiente de acuerdo con la Definición 3.12 porque R contiene columnas que no tienen entradas positivas. Esto es debido a la degeneración del problema que hace posible que haya valores del coste reducido negativos a pesar de que la base sea eficiente u óptima.

Además las bases $\{1,2\}$ y $\{1,4\}$ son eficientes. La Definición 3.12 se satisface para todo $\lambda \in \mathbb{R}^2_{>}$. Sin embargo para estas bases R no tiene entradas negativas y por lo tanto no existen variables eficientes no básicas de acuerdo con la Definición 3.14. El ejemplo muestra que la asunción (3.2) es necesaria para garantizar la existencia de variables no básicas eficientes y la validez del Teorema 3.19. □

Por el Teorema 3.17 sabemos que podemos considerar pivotes negativos, es decir, $\bar{A}_{rj} < 0$. Si una variable no básica x_j es eficiente y la columna j de $\bar{A}$ solo contiene elementos no positivos, el incremento de x_j no está acotado. Esto es lo que indica que un problema no está acotado en el caso de un problema lineal uniobjetivo. Sin embargo, como $\lambda^T r^j = 0$, en el caso de un POLM el conjunto eficiente $\mathcal{X}_E$ no estará acotado en la dirección d dada por el vector con componentes $-\bar{b}_i/\bar{A}_{ij}$, $i \in \mathcal{B}$, $x_j = 1$. Pero éste no es un pivote eficiente y por lo tanto no producirá una nueva base eficiente.

Al algoritmo 3.20 se le puede añadir una lista que guarde las direcciones donde $\mathcal{X}_E$ no está acotado, caracterizadas por las columnas de $\bar{A}$ que no contienen elementos positivos.

3.5. Geometría de la programación lineal multiobjetivo

Continuando con la Sección 1.4 del Capítulo 1 ampliaremos el álgebra que hemos visto de la programación lineal multiobjetivo con resultados geométricos. Lo primero que observamos en el siguiente lema es que las soluciones básicas factibles eficientes se corresponden con los puntos extremos de $\mathcal{X}_E$.

Lema 3.23.

I. *Sea $\mathcal{B}$ una base eficiente y $(x_\mathcal{B}, 0)$ la correspondiente solución básica factible. Entonces, $(x_\mathcal{B}, 0)$ es un punto extremo de $\mathcal{X}_E$.*

II. *Sea $x \in \mathcal{X}_E$ un punto extremo. Entonces existe una base eficiente $\mathcal{B}$ tal que $x = (x_\mathcal{B}, 0)$.*

Si $(x_\mathcal{B}, 0)$ y $(x_{\hat{\mathcal{B}}}, 0)$ son soluciones básicas eficientes definidas por bases eficientes adyacentes $\mathcal{B}$ y $\hat{\mathcal{B}}$, sabemos por la prueba del Lema 3.16 que $(x_\mathcal{B}, 0)$ y $(x_{\hat{\mathcal{B}}}, 0)$ son soluciones óptimas del mismo PL(λ). Por lo tanto debido a la linealidad, el borde $((x_\mathcal{B}, 0), (x_{\hat{\mathcal{B}}}, 0))$ está contenido en $\mathcal{X}_E$.

Lema 3.24. *Sean $\mathcal{B}$ y $\hat{\mathcal{B}}$ bases óptimas para el problema $PL(\lambda)$. Entonces el borde $((x_\mathcal{B}, 0), (x_{\hat{\mathcal{B}}}, 0))$ está contenido en $\mathcal{X}_E$.*

Además en $\mathcal{X}_E$ pueden estar contenidos algunos bordes eficientes no acotados $\mathcal{E} = \{x : x = x^i + \mu d^j, \mu \geq 0\}$, donde d^j es un rayo extremo y x^i es un punto extremo $\mathcal{X}$. Un rayo eficiente siempre empezará en un punto extremo eficiente. Sea $\mathcal{B}$ una base asociada con este punto extremo, entonces el rayo eficiente es detectado por una variable no básica eficiente en cuya columna $\bar{A}_j$ contiene solo elementos no positivos.

Definición 3.25. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$ una cara de $\mathcal{X}$. $\mathcal{F}$ es una cara eficiente si $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}_E$. Decimos que es una cara eficiente máxima si no existe una cara eficiente $\mathcal{F}'$ de mayor dimensión tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Para conocer completamente el conjunto eficiente $\mathcal{X}_E$ necesitamos identificar las caras eficientes máximas. Los siguientes teoremas caracterizan las caras eficientes.

Teorema 3.26. *Una cara $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$ es una cara eficiente si y solo si tiene una solución eficiente $\hat{x}$ en su interior relativo.*

Teorema 3.27. *Una cara $\mathcal{F}$ de $\mathcal{X}$ es eficiente si y solo si hay un $\lambda > 0$ tal que todos los puntos extremos de $\mathcal{F}$ son soluciones óptimas de $PL(\lambda)$ y $\lambda^T d = 0$ para todos los rayos extremos de $\mathcal{F}$.*

Con este resumen de la geometría de la programación lineal finalizamos la exposición de un método símplex multiobjetivo. Recordemos que para los problemas que cumplan la asunción (3.2) y sean no degenerados el Algoritmo 3.20 encuentra todas la bases eficientes. Esto resulta fundamental para poder obtener el conjunto eficiente $\mathcal{X}_E$ al completo. Como comentamos en los Capítulos 2 y 3 en los problemas multiobjetivo entran en juego diferentes criterios y mediante el conocimiento del conjunto eficiente completo podemos seleccionar aquellas soluciones eficientes que más nos interesen por lo que resulta fundamental encontrar todas la bases eficientes. En el siguiente capítulo implementaremos el Algoritmo Símplex Multiobjetivo que acabamos de exponer para luego, ver su funcionamiento con diferentes problemas test.

Capítulo 4

Implementación del Algoritmo Símplex Multiobjetivo

El objetivo de este último capítulo es implementar el algoritmo descrito en el Capítulo 3 para ilustrar su funcionamiento. Para ello utilizaremos el sofware Fico Xpress. Veremos cómo funciona con algunos problemas test de los que conocemos las soluciones y otros generados aleatoriamente.

4.1. Xpress

Para implementar el Algoritmo Símplex Multiobjetivo utilizaremos el programa Fico Xpress. FICO Xpress es un solucionador de optimización comercial para programación lineal (LP), programación entera mixta (MIP), programación lineal entera mixta (MILP), programación cuadrática convexa, programación cuadrática convexa cuadráticamente restringida, programación de cono de segundo orden y sus contrapartes enteras mixtas. Xpress incluye un solucionador no lineal de propósito general, Xpress NonLinear, que incluye un algoritmo de programación lineal sucesivo.

Xpress fue desarrollado originalmente por Dash Optimization y fue adquirido por FICO en 2008. Sus autores iniciales fueron Bob Daniel y Robert Ashford. La primera versión de Xpress solo podía resolver programas lineales; el soporte para MIP se agregó en 1986. Al ser lanzado en 1983, Xpress fue el primer solucionador comercial de LP y MIP que se ejecutaba en computadores personales. En 1992, se publicó una versión de Xpress para computación paralela, que se extendió a la computación distribuida cinco años después. Xpress fue el primer solucionador de MIP en cruzar el umbral de la variable de decisión de mil millones al introducir la indexación de 64 bits en 2010. Desde 2014, Xpress presenta la primera implementación comercial de un método símplex dual paralelo. Xpress incluye su lenguaje de modelado Xpress Mosel y el entorno de desarrollo integrado Xpress Workbench [25].

El motivo de utilizar este sofware es para hacer uso del solucionador de programas lineales uniobjetivo de Xpress ya que para implementar el Algoritmo 3.20 tendremos que resolver en las tres fases programas lineales uniobjetivo.

Utilizaremos el módulo "mmxprs" para usar algunas funciones como "minimize" y "maximize" que minimizan o maximizan un problema lineal uniobjetivo. También se ha usado el módulo "mmsystem" para usar otras funciones como por ejemplo, "qsort" para ordenar arrays o "gettime" para obtener el tiempo de ejecución del algoritmo.

4.2. Funciones del Algoritmo Símplex Multiobjetivo en Xpress

En la Fase 1, el Algoritmo 3.20 resuelve el problema lineal

$$\text{mín}\left\{e^T z : Ax + Iz = b, x, z \geqq 0\right\}$$

En el código de Xpress mediante "minimize(funobj1)", que podemos ver en el código del Apéndice A, obtenemos una solución factible o la conclusión de que $\mathcal{X} = \emptyset$.

En la Fase 2, tenemos que encontrar una base eficiente. De lo expuesto en el Capítulo 3 sabemos que resolviendo el problema lineal

$$\text{mín}\left\{u^T b + w^T C x^0 : u^T A + w^T C \geqq 0, w \geqq e\right\}$$

donde x^0 es la solución factible de la Fase 1, tenemos que $\mathcal{X}_E = \emptyset$ si el problema no es factible. De lo contrario si $(\hat{u}, \hat{w})$ es una solución óptima, encontramos una solución básica factible eficiente $\mathcal{B}$ resolviendo

$$\text{mín}\left\{\hat{w}^T C x : Ax = b, x \geqq 0\right\}$$

Estos problemas lineales los podemos ver en el código del Apéndice A como "minimize(funobj2)" y "minimize(funobj3)" respectivamente.

Cabe destacar que esta no es la única forma de encontrar la primera base eficiente, existen otras entre las cuales cabe destacar la siguiente. En el Capítulo 3 vimos que el POLM $\text{mín}\{Cx : Ax = b, x \geqq 0\}$ tiene una solución eficiente si y solo si el problema lineal

$$\text{máx}\left\{e^T z : Ax = b, Cx + Iz = Cx^0, x, z \geqq 0\right\}$$

tiene una solución óptima (básica) $(\hat{z}, \hat{x})$. Además $\hat{x}$ en una solución óptima, es una solución eficiente. Aunque no estamos seguros de si $\hat{x}$ es básica para el POLM, como vemos en [26], podemos obtener una a partir de $\hat{x}$. La solución básica $(\hat{z}, \hat{x})$ tendrá dimensión $p + m$ ya que la dimensión de C es $p \times n$, la de A es $m \times n$ y por lo tanto la de z es p. Pueden ocurrir dos casos:

I. Cada componente de z es básico.

II. Algún componente de z es no básico

Si pasa I, el vector óptimo $\hat{x}$ tendrá m componentes y será básico. Si ocurre II, podemos introducir las variables no básicas en la base mediante pivotes y obtener una solución $\hat{x}$ básica factible.

Podríamos hacer que Xpress considere las variables de z básicas y en el código del Apéndice A tendríamos que sustituir los dos problemas anteriores por el siguiente:

```
declarations
   xx:array(N) of mpvar
   zz:array(M) of mpvar
   xb1:array(N) of real
end-declarations

funobj2:= sum(i in M) zz(i)
forall(i in T)
   sum(j in N) A(i,j)*xx(j)=b(i)
forall(i in M)
   sum(j in N) C(i,j)*xx(j)+zz(i)=sum(j in N) C(i,j)*x0(j)
maximize(funobj2)
if (getprobstat=6) then
   writeln("El conjunto eficiente es vacio")
   exit(0)
elif (getprobstat<>2) then
   writeln("Algo salio mal, no se encontro el optimo")
   exit(0)
else
   forall(i in N) xb1(i):=xx(i).sol
   writeln("La sbf es:",xb1)
end-if
```

Utilizaremos la primera opción ya que en la práctica no supone una ventaja destacable tener que resolver un problema menos en la Fase 2.

Por último en la Fase 3, en cada iteración para cada $j \in \mathcal{N}$, es decir, para cada variable no básica, tendremos que resolver el problema

$$\text{máx}\left\{e^T v : Ry - r^j\delta + Iv = 0; y, \delta, v \geqq 0\right\}$$

para comprobar si la variable x_j es eficiente o no. Esto lo hacemos en Xpress mediante la llamada a una función "fase3" cuyo código podemos ver en el Apéndice A.2.

4.3. Problemas Test

En esta sección presentamos algunos problemas test para poner a prueba el Algoritmo Símplex Multiobjetivo y exponemos los resultados. Muchos autores han puesto a prueba los diferentes métodos para encontrar las soluciones eficientes con problemas aleatorios. Para ver si el programa funciona correctamente es conveniente probarlo primero con problemas para los que conozcamos el conjunto eficiente. Consideramos los problemas Tub, Pyr, Ten y el otro problema test que vemos a continuación. Son las versiones para que los problemas tengan la forma $\text{mín}\{Cx : Ax = b, x \geqq 0\}$ de los problemas que encontramos en [27]. Para hacer las pruebas se utilizó un ordenador del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la UVa para utilizar la versión completa de Xpress ya que la versión gratuita solo soporta un máximo de 5000 variables. Por último, las Figuras 4.3.1 y 4.3.2 están realizadas con R y la Figura 4.3.3 aparece en [27].

4.3.1. Problema Tub(k)

Empezaremos por el caso no degenerado, consideramos para cada $k \in \mathbb{N}$ el siguiente problema:

$$
\begin{array}{lll}
(\text{Tub(k)}) & \text{mín} & \frac{x}{2} - y \\
& \text{mín} & -x + \frac{y}{2} \\
& \text{sujeto a} & x\cos(j\pi/2(k-2)) + y\sin(j\pi/2(k-2)) \leq 1, \quad j = 0, \ldots, k-2, \\
& & z \leq 1 \\
& & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0
\end{array}
$$

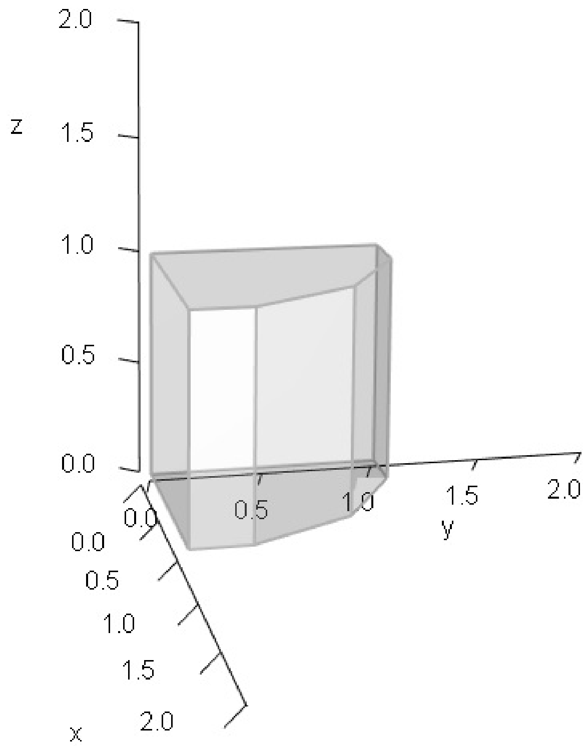

Figura 4.1: Conjunto factible de Tub(5).

Problema	Tiempo de CPU	Nº bases encontradas
Tub (10)	0.7	20
Tub (30)	3.4	60
Tub (40)	5.3	80
Tub (50)	8.0	100

Tabla 4.1: Tiempo de CPU en segundos.

Para calcular las bases eficientes de este problema, primero introducimos variables de holgura para que tengamos la forma de igualdad $Ax = b$. Es fácil ver que este problema tiene $2k$ puntos extremos eficientes. El programa para este ejemplo funciona correctamente y encuentra todas las bases eficientes. Los tiempos de ejecución se resumen en la Tabla 4.1.

4.3.2. Problema Pyr(k)

Ahora consideramos un problema en el que el poliedro generado por las restricciones $Ax \leq b$ tiene un vértice degenerado. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos el siguiente problema:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{Pyr(k)}) & \text{mín} & -x + \frac{y}{2} \\
 & \text{mín} & \frac{x}{2} - y \\
 & \text{mín} & x + y - \frac{z}{2} \\
 & \text{sujeto a} & x\cos(j\pi/2(k-1)) + y\sin(j\pi/2(k-1)) + z \leq 1, \quad j = 0, \ldots, k-1, \\
 & & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0
\end{array}
$$

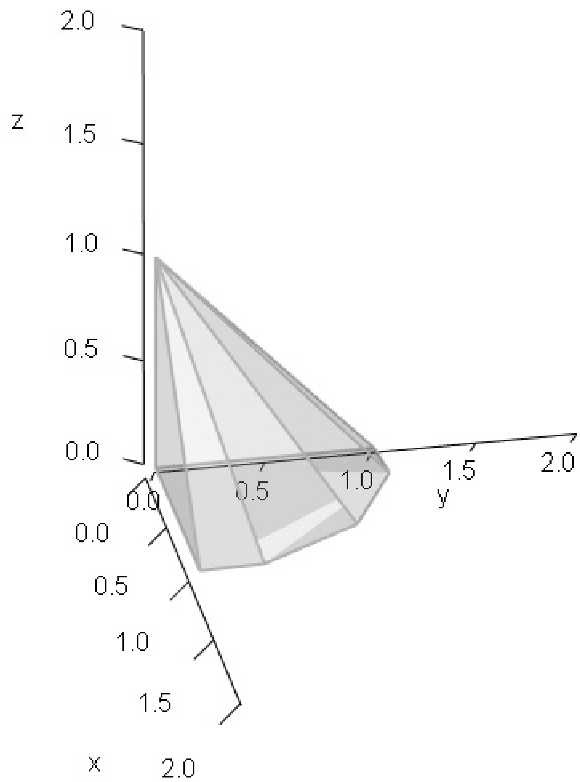

Figura 4.2: Conjunto factible de Pyr(5).

Es fácil ver que el problema tiene $k + 2$ puntos extremos eficientes. El programa los encuentra todos pero debido a la degeneración y a las variables de holgura, el algoritmo encuentra más bases eficientes que corresponden a los mismos puntos extremos. Los tiempos de ejecución y las bases eficientes encontradas se resumen en la Tabla 4.2.

Problema	Tiempo de CPU	Nº bases encontradas	Puntos extremos distintos
Pyr (5)	3.3	31	7
Pyr (10)	28.8	111	12
Pyr (15)	124.8	241	17
Pyr (20)	368.2	421	22
Pyr (30)	1746.5	931	32
Pyr (40)	4870.4	1641	42

Tabla 4.2: Tiempo de CPU en segundos y bases encontradas.

Podemos observar en la Tabla 4.2 que la implementación en Xpress del algoritmo encuentra todos los puntos extremos por lo que funciona bien. Sin embargo aquí podemos observar un inconveniente del algoritmo en general, no de la implementación. Encontrar todas las bases eficientes puede ser muy costoso y podría ser suficiente con encontrar solo los puntos extremos y algunas bases eficientes ya que muchas bases diferentes pueden definir el mismo punto extremo.

4.3.3. Problema Ten(k)

Consideramos ahora un problema cuyo poliedro generado por las restricciones tiene dos vértices adyacentes degenerados. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$
\begin{array}{lll}
(\text{Ten(k)}) & \text{mín} & -x + 100y \\
 & \text{mín} & -x - 100y \\
 & \text{mín} & -z \\
 & \text{sujeto a} & x\cos(j\pi/(k-1)) + y\sin(j\pi/(k-1)) + z \leq 100[1 + 2\sin(j\pi/(k-1))], \\
 & & j = 0, \ldots, (k-1)/2 \\
 & & x\cos(j\pi/(k-1)) - y\sin(j\pi/(k-1)) + z \leq 100[1 - \sin(j\pi/(k-1))], \\
 & & j = 1, \ldots, (k-1)/2 \\
 & & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0
\end{array}
$$

Este problema tiene $k+1$ puntos extremos eficientes. Para este problema la implementación del algoritmo encuentra una primera base eficiente pero luego tarde o temprano falla debido a la degeneración como pudimos ver en el Ejemplo 3.22 y no encuentra todas las bases eficientes.

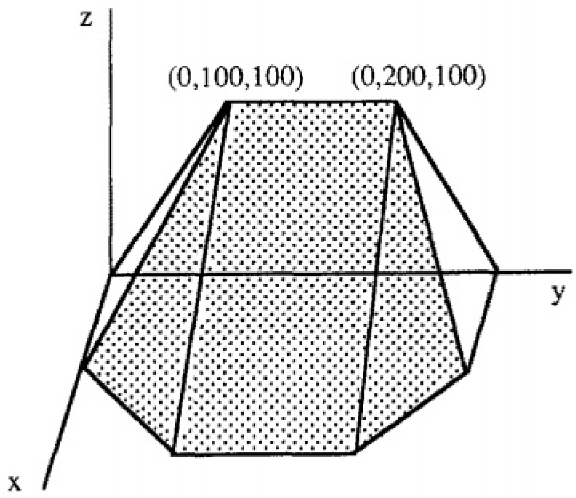

Figura 4.3: Conjunto factible de Ten(5).

4.3.4. Otro problema test

El siguiente ejemplo introducido por Yu y Zeleny en [28] y luego considerado en [29] y [27], tiene cinco funciones objetivo y ocho restricciones:

$$\text{máx}\, Cx = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 & 1 & 0 & -1 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & -1 & 6 & 8 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 5 & 0 & 6 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_8 \end{bmatrix}$$

$$\text{sujeto a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & -1 & 3 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 8 & 2 & 3 & -4 & 5 & -1 \\ 12 & 8 & -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 8 & -12 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & 13 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_8 \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} 40 \\ 84 \\ 18 \\ 100 \\ 40 \\ -12 \\ 30 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Tiene 29 puntos extremos eficientes. Después de ponerlo en la forma $\text{mín}\{Cx : Ax = b, x \geqq 0\}$ introduciendo variables de holgura y cambiando el signo a los elementos de C obtenemos con el programa las 29 bases eficientes diferentes y sus respectivas soluciones básicas eficientes asociadas después de 21.19 segundos de CPU.

4.3.5. Problemas generados aleatoriamente

Por último probamos el algoritmo con problemas POLM generados aleatoriamente. Los problemas tienen la forma

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \sum_{l=1}^{n} c_{jl}x_l, & j = 1,\dots,p \\ \text{sujeto a} & \sum_{l=1}^{n} a_{rl}x_l \le b_r, & r = 1,\dots,m \\ & x_l \ge 0, & l = 1,\dots,n \end{array}$$

donde n representa el número de variables, m el número de restricciones y p el número de funciones objetivo. Los coeficientes de la funciones objetivo (c_{jl}) serán generados en el rango $[-100,-1]$ con probabilidad 0.8 y en $[0,100]$ con probabilidad 0.2. Los coeficientes de las restricciones (a_{rl}) serán generados en el rango $[-100,-1]$ con probabilidad 0.1, en el $[1,100]$ con probabilidad 0.8 y $a_{rl} = 0$ con probabilidad 0.1. La idea en un principio era generar los problemas con $p = 3,4$ y 5, $m = 5,10,\dots,50$ y $n = 2m$ para cada m pero la complejidad de los problemas y el tiempo que tarda el algoritmo crece a un ritmo inasumible por un ordenador convencional que ejecuta el programa de Xpress. En la Tabla 4.3 exponemos algunas pruebas, cuando el programa supera los 25000 segundos es detenido aunque no haya encontrado todas las bases eficientes.

n	m	p	Tiempo de CPU	Nº bases
10	5	2	0.3	2
20	10	2	48.1	15
40	20	2	151.5	19
10	5	3	21.5	22
20	10	3	294.6	34
30	15	3	185.1	16
40	20	3	13315.4	116
10	5	4	86.8	44
20	10	4	1314.2	70
30	15	4	1073.3	59
40	20	4	22844.1	181
40	20	4	25000.0	+257
30	30	4	19347.1	296
10	5	5	26.9	23
16	8	5	3394.0	147
20	10	5	2650.6	123
30	15	5	2045.0	107
40	20	5	9834.5	121
16	8	6	410.4	49

Tabla 4.3: Tiempo de CPU en segundos y bases encontradas.

Lo ideal sería repetir las pruebas un número suficiente de veces para calcular la media de bases eficientes encontradas para cada dimensión del problema. Esto llevaría mucho tiempo hacerlo con un ordenador convencional, tampoco tiene un interés científico como para utilizar otros recursos. Así pues, con estos ejemplos aleatorios damos por finalizadas las pruebas del algoritmo.

4.4. Conclusiones

El Algoritmo Símplex Multiobjetivo, como hemos podido comprobar teóricamente y en la práctica, funciona siempre y cuando se cumpla la asunción (3.2) y el problema no sea degenerado. Si se cumple ésto el Algoritmo Símplex encuentra todas las bases eficientes para poder caracterizar el conjunto eficiente $\mathcal{X}_E$. Esto lo comprobamos con el problema Tub(k). De lo contrario, si no se cumple (3.2) o el problema es degenerado, vimos en el Ejemplo 3.22 que el algoritmo puede fallar y también lo comprobamos en el problema Ten(k). Con el problema Pyr(k) también vimos que varias soluciones básicas pueden corresponder a un mismo punto extremo eficiente de $\mathcal{X}$.

Se han publicado una cantidad importante de algoritmos Simplex multicriterio. La estructura general es la presentada en nuestro algoritmo, basada en las tres fases que describimos. Para pivotar entre bases eficientes será necesario encontrar variables no básicas eficientes. Algunos de los algoritmos basados en el método Símplex son propuestos en Armand y Malivert [27], Evans y Steuer [22] o Yu y Zeleny [28]. El Teorema 3.19 nos garantiza que las bases están conectadas, pero para problemas degenerados esto no es así. En Schechter y Steuer [24] podemos ver que para los POLM degenerados, podemos garantizar que si tenemos una base eficiente $\mathcal{B}$ y un punto extremo eficiente x, partiendo de $\mathcal{B}$ podemos llegar a una base correspondiente al punto x efectuando solamente pivotes eficientes. Esto hace posible diseñar algoritmos que funcionen para problemas degenerados.

Notemos que el tiempo de ejecución del algoritmo crece rápidamente al aumentar la dimensión del problema. En Danzing y Thapa [2] podemos ver un ejemplo, para el caso del Algoritmo Símplex del Capítulo 1, en el que se requiere un número exponencial de pivotes en términos de la dimensión n y m de la matriz A. Desgraciadamente para el caso Símplex Multiobjetivo tampoco está garantizado que el número de operaciones del algoritmo no crezca exponencialmente. En Ehrgott [1] podemos encontrar un ejemplo de un POLM cuyo número de puntos extremos eficientes sigue una relación exponencial respecto al número de variables. Otros autores como Benson muestran que el número de bases eficientes puede ser enorme en [30]. Sin embargo Küfer en [31] realiza un análisis probabilístico y muestra que para una cierta familia de problemas generados aleatoriamente, el número esperado de puntos extremos eficientes es polinomial en n, m y p.

Por último, cabe destacar que debido a la complejidad de la resolución de un POLM, la observación de que el conjunto factible en el espacio objetivo $\mathcal{Y}$ suele ser de dimensión mucho más pequeña que $\mathcal{X}$, ha dado lugar a trabajos de investigación sobre resolución de los POLM en el espacio objetivo ya que supone una ventaja. Las publicaciones sobre este tema incluyen entre otros a Dauer y Liu [32], Dauer y Saleh [33] y Benson [30].

Apéndice A

Código Símplex Multiobjetivo

A.1. Código Programa Xpress

```
model AlgoritmoSimplexMulitobjetivo
uses "mmxprs";
uses "mmsystem";

declarations
        n,t,m:integer !A=txn C=mxn b=tx1
end-declarations

initializations from "datos.txt"
        n t m
end-initializations

writeln("Dimensiones matriz A: ",t,"x",n,"\nDimensiones matriz C:
    ",m,"x",n)

declarations
        T=1..t
        N=1..n
        M=1..m
        A:array(T,N) of real
        b:array(T) of real
        C:array(M,N) of real
        e:array(T) of real
        z:array(T) of mpvar
        x:array(N) of mpvar
        x0:array(N) of real
        z00: real
        status:array({XPRS_OPT,XPRS_UNF,XPRS_INF,XPRS_UNB,
           XPRS_OTH}) of string
end-declarations

status::([XPRS_OPT,XPRS_UNF,XPRS_INF,XPRS_UNB,XPRS_OTH])
```

```
["Resuelto hasta el optimo","Optimizacion no terminada","Problema
    no factible",
"Solucion optima no acotada","Problema no resuelto"]

initializations from "datos.txt"
        A C b
end-initializations

forall(i in T)
        e(i):=1

!Fase 1

writeln("\nFase 1:\n")
funobj1:= sum(i in T)e(i)*z(i)
forall(i in T) do
        sum(j in N) A(i,j)*x(j) + z(i)=b(i)
end-do

minimize(funobj1)

!writeln((getprobstat))
!writeln("Valor de la funcion objetivo: ",getobjval)

z00:=getobjval

if (z00<>0) then
        writeln("El conjunto factible es vacio")
        exit(0)
elif (z00=0 and getprobstat=2) then
        writeln("El cojunto factible es distinto del vacio")
        forall(i in N)
                x0(i):=x(i).sol
        writeln("La SBF:\n",x0)
else
        writeln("Fallo algo en la fase 1")
end-if

!Fase 2

writeln("\nFase 2:\n")

declarations
        u:array(T) of mpvar
        w:array(M) of mpvar
        w0:array(M) of real
end-declarations

```

```
funobj2:= sum(i in T)u(i)*b(i) + sum(i in M)w(i)*sum(j in N)C(i,j
   )*x0(j)
forall(i in M)
        w(i)>=e(i)
forall(i in N)
        sum(j in T)u(j)*A(j,i) + sum(j in M)w(j)*C(j,i)>=0

minimize(funobj2)

!writeln(status(getprobstat))

if (getprobstat=6) then
        writeln("El conjunto eficiente es vacio")
        exit(0)
elif (getprobstat<>2) then
        writeln("Algo salio mal en la Fase 2")
        exit(0)
else
        forall(i in M) w0(i):=w(i).sol
        writeln("El vector de pesos es:\n",w0)
end-if

!Con el siguiente problema obtenemos una SBF

declarations
        xb1:array(N) of real
end-declarations

funobj3:= sum(i in N)x(i)*sum(j in M)w0(j)*C(j,i)
forall(i in T)
        sum(j in N)A(i,j)*x(j)=b(i)

minimize(funobj3)

!writeln(getprobstat)

forall(i in N)
        xb1(i):=x(i).sol

writeln("La SBE con la que empezamos la fase 3 es:\n",xb1)

!Fase 3

writeln("\nFase 3:\n")

declarations
        soluciones: array(R:range) of array(N) of real
        L1: array(S:range) of array(T) of integer
        L2: array(RR:range) of array(T) of integer
```

```
        l1,l2,l11: integer
        zeroB: array(T) of integer
        ib:integer
        AA:array(T,N) of real
        bb:array(T) of real
        CC:array(M,N) of real
        indfila,maxcol: integer
        lbas:integer
        piv:real
        aux:real
        auxi:integer
        nvnb:integer
        bol:integer
        EN:array(1..n-t) of integer
        ENN:array(RRR:range) of integer
        NB:array(T) of integer
        ivs:array(W:range) of integer
        cont:integer
        ivsi:integer
        eleposi:array(WW:range) of real
        mini:real
        xdif:integer
end-declarations

ib:=1
forall (i in N) do
        if (xb1(i)<>0) then
                L1(1,ib):=i
                ib:=ib+1
        end-if
end-do

forall (i in T) do
        if (L1(1,i)=0) then
                writeln("La base en degenerada")
                writeln(L1(1))
                !exit(0)
        end-if
end-do

writeln("Base con la que empezamos la fase 3:\n",L1(1))

l1:=1
l11:=2

while (L1(l1)<>zeroB) do !Mientras haya soluciones basicas para
   procesar
l2:=l2+1
```

```
L2(l2):=L1(l1)  !Introcimos una nueva solucion basica eficiente
   en L2
delcell(L1(l1))
l1:=l1+1

AA:=A
bb:=b
CC:=C

indfila:=0
forall(j in T) do
        indfila:=indfila+1
        maxcol:=indfila
        lbas:=L2(l2,j)

        forall(i in indfila..t-1) do

                if( AA(i,lbas) < AA(i+1,lbas) and  AA(i+1,lbas)
                   <>0) then
                        maxcol:=i+1
                end-if

        end-do

        piv:=AA(maxcol,lbas)

        forall(i in N) do
                AA(maxcol,i):=AA(maxcol,i)/piv
                aux:=AA(j,i)
                AA(j,i):=AA(maxcol,i)
                AA(maxcol,i):=aux
        end-do

        bb(maxcol):=bb(maxcol)/piv
        aux:=bb(j)
        bb(j):=bb(maxcol)
        bb(maxcol):=aux

        AA(j,lbas):=1

        forall(i in T) do
                aux:=AA(i,lbas)

                if (j <> i) then

                        forall(ii in N) do
                                AA(i,ii):=AA(i,ii)-aux*AA(j,ii)
                        end-do

```

```
                        bb(i):=bb(i)-aux*bb(j)
                        AA(i,lbas):=0

                end-if
        end-do

        forall(i in M) do  !Hago ceros en la variables basicas en
            C
                aux:=CC(i,lbas)

                forall(ii in N) do
                        CC(i,ii):=CC(i,ii)-aux*AA(j,ii)
                end-do
        end-do
end-do

!writeln("\nA, b y C para la base ",L2(l2))
!writeln("\nAA=",AA)
!writeln("bb=",bb)
!writeln("CC=",CC)

forall(i in T) do
        soluciones(l2,L2(l2,i)):=bb(i)
end-do

auxi:=0

if(l2>1) then
        forall(i in 1..l2-1) do
                if(soluciones(l2)=soluciones(i))then
                        auxi:=1
                end-if
        end-do
end-if

if (auxi=0) then
        xdif:=xdif+1
end-if

auxi:=1
forall(i in N) do                       !EN=N
        forall(ii in T) do
                if(L2(l2,ii)=i) then
                        bol:=1
                end-if
        end-do
        if (bol=0) then
                EN(auxi):=i
                auxi:=auxi+1
```

```
        end-if
        bol:=0
end-do

!writeln("\nEN:=",EN)

auxi:=1
forall(j in 1..n-t) do !Problema de la fase 3

        if(fase3(j,CC,EN)=2) then
                ENN(auxi):=EN(j)
                auxi:=auxi+1
        end-if

end-do
nvnb:=auxi-1

!writeln("\nVariables no basicas edicientes:\n",ENN)

if(nvnb=0) then
        writeln("En esta iteracion no se encontraron nuevas variabes no basicas eficientes")
else
        forall(j in 1..nvnb) do
        cont:=1
        ivsi:=1
                forall(i in T) do
                        if(AA(i,ENN(j))>0 and bb(i)>0) then
                                eleposi(cont):=bb(i)/AA(i,ENN(j))
                                cont:=cont+1
                        end-if
                end-do

                mini:=min(i in 1..cont-1) eleposi(i)

                forall(i in T) do
                        if(AA(i,ENN(j))>0 and mini=bb(i)/AA(i,ENN(j))) then
                                ivs(ivsi):=i
                                ivsi:=ivsi+1
                        end-if
                end-do

                forall(i in 1..ivsi-1) do
                        bpiv:=bb(ivs(i))/AA(ivs(i),ENN(j))

                        forall(ii in T) do
                                if(ii<>i)then
```

```
                    bsol(ii):=bb(ii)-bpiv*AA(ii,ENN(j))
                else
                    bsol(ii):=bpiv
                end-if
            end-do

            auxi:=0

            forall(ii in T) do
                if(bsol(ii)<0) then
                    auxi:=1
                end-if
            end-do

            if(auxi=0) then
                NB:=L2(l2)
                NB(ivs(i)):=ENN(j)
                qsort(SYS_UP,NB)

                forall(ii in l1 .. l11-1) do
                    if(L1(ii)=NB) then
                        auxi:=1
                    end-if
                end-do

                forall(ii in 1..l2) do
                    if(L2(ii)=NB) then
                        auxi:=1
                    end-if
                end-do

                if(auxi=0) then
                    L1(l11):=NB
                    l11:=l11+1
                    !writeln("\nNueva base efiente:\n",NB)
                end-if
            end-if
        end-do
    end-do
end-if

!writeln(l2)
!writeln(l11)
!writeln("\nL1:=",L1)
!writeln("L2",L2)

end-do
```

```

tiempo:=gettime
writeln("Tiempo de ejecucion: ",tiempo)
writeln("Numero de soluciones basicas: ",l2)
writeln("Bases distintas: ",xdif)

writeln("\nL1:=",L1)
writeln("L2",L2)
writeln("Soluciones basicas eficientes: ",soluciones)

fopen("guardardatos.txt",F_OUTPUT+F_APPEND)

writeln("\nDimensiones matriz A: ",t,"x",n,"\nDimensiones matriz
   C: ",m,"x",n)
!writeln("L1:=",L1)
!writeln("L2",L2)
!writeln("Soluciones basicas eficientes: ",soluciones)
writeln("Tiempo de ejecucion: ",tiempo)
writeln("Numero de soluciones basicas: ",l2)
!writeln("Bases distintas: ",xdif)

fclose(F_OUTPUT)

end-model
```

A.2. Función de la Fase 3

```
function fase3(j:integer,CC:array(r:range,rr:range) of real,EN:
   array(rrr:range) of integer):integer
        declarations
                v:array(1..n-t,M) of mpvar
                y:array(1..n-t,1..n-t) of mpvar
                s: array(1..n-t)of mpvar
        end-declarations

        funobj4:= sum(ii in M)v(j,ii)

        forall(ii in M) do

                sum(iii in 1..n-t)CC(ii,EN(iii))*y(j,iii)-CC(ii,
                   EN(j))*s(j)+v(j,ii)=0

        end-do

        maximize(funobj4)

        !writeln(status(getprobstat))

        !if(getprobstat=2) then
        !       writeln("Variable no basica ",EN(j)," eficiente")
        !else
        !       writeln("Variable no basica ",EN(j), " no
           eficiente")
        !end-if

        returned:=getprobstat
end-function
```

Bibliografía

[1] Matthias Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, Second Edition, Springer (2005).

[2] Dantzig, Thapa, *Linear Programming – 1: Introduction*, Springer (1997).

[3] Dantzig, Thapa, *Linear Programming – 2: Theory and Extensions*, Springer (2003).

[4] Handy A. Taha, *Investigación de Operaciones*, Novena Edición, Pearson Education (2012).

[5] Manfred Padberg, *Linear Optimization and Extensions*, Second (Revised and Expanded) Edition, Springer (1999).

[6] V. Pareto, *Manual d'économie politique*, Lausanne, F. Rouge (1896).

[7] J. Borwein, *On the Existence of Pareto Efficient Points*, Mathematics of Operations Research Vol. 8, No. 1 (1983).

[8] R. Hartley, *On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 34(2), 211–222 (1978).

[9] C. Malivert, N. Boissard, *Structure of efficient sets for strictly quasi convex objectives*, Journal of Convex Analysis, 1(2), 143–150 (1994).

[10] A. Geoffrion, *Proper efficiency and the theory of vector maximization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22, 618–630 (1968).

[11] J. Borwein, *Proper efficient points for maximization with respect to cones*, SIAM Journal on Control and Optimization, 15(1), 57–63. (1977).

[12] H. Benson, *An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones*, Journal of Optimization Theory and Applications, 71, 232–241 (1979).

[13] H. Kuhn, A. Tucker, *Nonlinear programming*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 481–492, University of California Press, Berkeley, California (1951).

[14] Y. Haimes, L. Lasdon, D. Wismer, *On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1, 296–297 (1971).

[15] V. Chankong, Y. Haimes, *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, Elsevier Science Publishing Co., New York (1983).

[16] J. Guddat, F. Guerra Vasquez, K. Tammer, K. Wendler, *Multiobjective and Stochastic Optimization Based on Parametric Optimization*, Akademie-Verlag, Berlin (1985).

[17] H. Benson, *Existence of efficient solutions for vector maximization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 26(4), 569–580 (1978).

[18] C. Romero, *El enfoque multiobjetivo en los modelos matemáticos de planificación de cultivos*, Revista de Economía Política (789), 179-204 (1981).

[19] J.M. Boussard, *Estudios de Programación Lineal Aplicada al Sector Agrario en Países no Socialistas: una revisión*, Agricultura y Sociedad, núm. 5, 9-49 (1977).

[20] J.M. Bousard, M. Petit, *Representation of Farmer's Behaviour under Uncertainty With a Focus Loss Constraint*, Journal of Farm Economics, vol. 49, 869-880 (1967).

[21] H. Isermann, *Proper efficiency and the linear vector maximum problem*, Operations Research, 22, 189–191 (1974).

[22] J. Evans, R. Steuer, *A revised simplex method for linear multiple objective programs*, Mathematical Programming, 5, 375–377 (1973).

[23] R. Steuer, *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, John Wiley and Sons, New York (1985).

[24] M. Schechter, R. E. Steuer, *A Correction to the Connectedness of the Evans-Steuer Algorithm of Multiple Objective Linear Programming*, Foundations of Computing and Decision Sciences, 30(4), 351-359 (2005).

[25] $https://en.wikipedia.org/wiki/FICO\_Xpress$

[26] J. G. Ecker, Nancy S. Hegner, *On Computing an Initial Efficient Extreme Point*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 29, No. 10, 1005-1007 (1978). 1005-1007

[27] P. Armand, C. Malivert, *Determination of the efficient set in multiobjective linear programming*, Journal of Optimization Theory and Applications volume 70, 467–489 (1991).

[28] P. Yu, M. Zeleny, *The set of all nondominated solutions in linear cases and a multicriteria simplex method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 49(2), 430–468 (1975).

[29] J. G. Ecker, N. E. Shoemaker, *Selecting Subsets from the Set of Nondominated Vectors in Multiple Objective Linear Programming*, SIAM Journal on Control and Optimization, 19(4), 505–515 (1981).

[30] H. P. Benson, *An Outer Approximation Algorithm for Generating All Efficient Extreme Points in the Outcome Set of a Multiple Objective Linear Programming Problem*, Journal of Global Optimization 13, 1–24 (1998).

[31] K. H. Küfer, *On the Asymptotic Average Number of Efficient Vertices in Multiple Objective Linear Programming*, Journal of complexity 14, 333-377 (1998).

[32] J. Dauer, Y. Liu, *Solving multiple objective linear programs in objective space*, European Journal of Operational Research, 46, 350–357 (1990).

[33] J. Dauer, O. Saleh, *Constructing the set of efficient objective values in multiple objective linear programs*, European Journal of Operational Research, 46, 358–365 (1990).