



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**Pruebas elementales del
Teorema de la Curva de Jordan y del
Teorema de Triangulación de Superficies.**

Autor: Álvaro Pena Vaquero

Tutor: Fernando Sanz Sánchez

Índice

1. Introducción	I
2. Nociones previas	1
2.1. Variedades topológicas	1
2.2. Símplices y complejos simpliciales	2
2.2.1. Complejos simpliciales euclídeos	3
2.2.2. Complejos abstractos	8
2.2.3. Complejos lineales a trozos	10
3. Preparación: teorema de Jordan-Schönflies poligonal	13
3.1. Teorema de Jordan para curvas poligonales	14
3.2. Teorema de Schönflies para curvas poligonales	18
4. Teorema de la curva de Jordan	25
4.1. Enunciado	25
4.2. Demostración según Moise	26
4.2.1. Existencia de al menos dos componentes conexas	26
4.2.2. Condiciones frontera	32
4.2.3. Existencia de una única componente acotada	36
4.2.4. Conclusión	37
4.3. Demostración según Maehara	38
4.3.1. Teorema del punto fijo de Brouwer	38
4.3.2. Teorema de extensión de Tietze	42
4.3.3. Otros lemas	46
4.3.4. Prueba del Teorema de la curva de Jordan	49
5. Triangulación de superficies	52
5.1. Homeomorfismos lineales a trozos	52
5.2. Aproximaciones lineales a trozos de homeomorfismos	55
5.3. Triangulación en variedades de dimensión 2	61
6. Apéndice I: Teorema de Jordan-Schönflies en el plano	70
7. Apéndice II: Teorema de clasificación de superficies	71
8. Apéndice III: Generalizaciones a dimensiones mayores	73
8.1. Teorema de separación de Jordan-Brouwer	73
8.2. Teorema de Jordan-Schönflies en dimensión ≥ 3 : contraejemplo	73
8.3. Triangulación de variedades topológicas compactas	74

1. Introducción

El teorema de la curva de Jordan y el teorema de triangulación de superficies son resultados centrales y básicos en asignaturas de Topología Geométrica o de iniciación a la Topología Algebraica. Sus enunciados forman parte de la cultura matemática general que tenemos todos los alumnos, pues se comentan y usan a lo largo del grado de matemáticas, pero sus demostraciones, o el esquema de los pasos y argumentos principales para ellas, no suele estar en los contenidos del grado. Se pretende en este trabajo abordar pruebas elementales de tales resultados, usando sólo los contenidos básicos de la topología general.

Vamos a comenzar dando unas nociones básicas y recordando los conceptos necesarios para poder abordar los teoremas que se van a desarrollar. Así, daremos un repaso de la topología de variedades, ya vista a lo largo del grado, e introduciremos por primera vez el concepto de complejo simplicial.

Posteriormente, vamos a prepararnos para la demostración del teorema de la curva de Jordan estudiándolo en el caso de curvas poligonales, es decir, en vez de curvas diferenciables, hablaremos de polígonos. Seguidamente, se hará lo mismo con el teorema de Schönflies, donde probaremos que dados dos polígonos cualesquiera, estos son homeomorfos. Esto nos permitirá dar una primera aproximación del problema de la curva de Jordan que expon-dremos más adelante. Además, esta sección será de utilidad para poder dar un primer uso de los conceptos de símplice y complejo simplicial, que tanto se utilizarán en la sección referente a la triangulación.

En tercer lugar, demostraremos el **Teorema de la curva de Jordan**. Este resultado fue propuesto por primera vez en 1887 por el matemático francés Camille Jordan. Este teorema resultó engañosamente difícil de verificar al matemático. De hecho, la demostración de Jordan resultó ser defectuosa, y la primera prueba válida la dio el matemático estadounidense Oswald Veblen en 1905. Una complicación para probar el teorema implicaba la existencia de curvas continuas pero no diferenciables en ninguna parte, como puede ser por ejemplo el copo de nueve de Koch descrito por el sueco Niels Fabian Helge von Koch en 1906.

Dicho teorema, de enunciado aparentemente sencillo y fácil de visualizar gráficamente, requiere una costosa y detallada demostración. Para abordarlo, se han elegido dos demostraciones. La primera, de Edward Moise (1977) es probablemente la más 'intuitiva' del mismo, pues hace uso de resultados básicos de la topología general y el análisis. La segunda, de Maehara, utiliza

como resultado base el **teorema del punto fijo de Brouwer**, que demuestra a partir del Lema de Sperner, así como el **teorema de extensión de Tietze**, cuya prueba hace uso del Lema de Uryshon. Los contenidos de estos teoremas, aunque no se ven en el grado, son clásicos en topología, y consiguen hacer un planteamiento mucho más breve de la prueba del Teorema de la curva de Jordan. El contenido de esta sección se amplía en el Apéndice I, con el **teorema de Jordan-Schönflies** y cuya generalización se expone brevemente en el Apéndice III.

Seguidamente, se aborda el **Teorema de triangulación de superficies**, formulado por primera vez por el matemático húngaro Tibor Radó en 1925 y que ayudo a completar la demostración del teorema de clasificación de superficies. A pesar de que la mayoría de demostraciones del mismo utilicen el teorema de Jordan-Schönflies, como por ejemplo la de Doyle and D. A. Moran, nosotros vamos a seguir, al igual que en el teorema de la curva de Jordan, la prueba que presenta Moise, pues tras haber revisado otras demostraciones, la de Moise, aunque siendo más extensa, introduce definiciones de utilidad sobre complejos y homeomorfismos lineales a trozos que complementan el trabajo en ese sentido. Además, la prueba está orientada a justificar el teorema de triangulación en variedades de dimensión tres, lo que posibilita hacer un estudio más elaborado, aunque sin entrar en detalle, de lo que sucede en dimensiones mayores. Moise aborda el problema de la manera más intuitiva posible, pues esencialmente ataca el problema con una inducción en la que va triangulando la superficie. No obstante, a pesar de ser un planteamiento tan simple, para poder desarrollarla se necesitan, como hemos dicho, no solo las definiciones básicas de complejos euclídeos simpliciales, sino otras nuevas que faciliten la prueba, lo que es de interés.

A continuación, al igual que antes, se va a explicar en el Apéndice III qué sucede en dimensiones mayores, sin entrar en detalles. Además, todas las demostraciones precedentes nos permiten empezar a hablar del **teorema de clasificación de superficies**, cuyo contenido y pautas para su demostración vienen reflejados en el apéndice II.

2. Nociones previas

Esta sección pretende dar un repaso de los conceptos y definiciones que van a ser claves en el trabajo. Muchos de los resultados y demostraciones que se exponen ya han sido probados a lo largo del grado, con lo que simplemente se mencionarán.

La sección se divide en dos partes principales. La primera busca recordar la definición de variedad topológica, mientras que la segunda introduce el concepto de mayor interés en este apartado: las nociones de símplice y complejo simplicial, cuyo contenido, a pesar de sencillo, nunca se ha visto en la carrera. Estas definiciones supondrán un primer acercamiento a la teoría de triangulación que se expondrá más adelante.

2.1. Variedades topológicas

Vamos a recordar el concepto de variedad n -dimensional. Este generaliza la noción intuitiva de curva (variedad de dimensión 1) y de superficie (variedad de dimensión 2) a cualquier dimensión y sobre cuerpos arbitrarios.

Recordemos primeramente que un espacio topológico M se dice que es **localmente euclídeo de dimensión n** si cada punto $q \in M$ tiene un entorno que es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Tal entorno se llama entorno euclídeo de q . Esto es equivalente a decir que cada punto $q \in M$ tiene un entorno homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^n , o bien directamente un entorno homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Recordemos igualmente que un espacio topológico X es un **espacio de Hausdorff** si para cada par de puntos distintos $q_1, q_2 \in X$ existen entornos abiertos disjuntos U_1 de q_1 y U_2 de q_2 .

Por otra parte, para introducir el concepto de variedad es necesario hablar de los axiomas de numerabilidad. Decimos que un espacio topológico verifica el **segundo axioma de numerabilidad** si admite una base numerable (recordemos que una base de una topología es una colección de abiertos tal que todo abierto de la topología es unión de elementos de la base). Cuando un espacio verifica este axioma decimos que el espacio es N_2 . Ahora ya podemos dar la definición de variedad.

Definición 2.1 *Una variedad topológica n -dimensional es un espacio Hausdorff N_2 que es localmente euclídeo de dimensión n .*

Definición 2.2 Una *variedad n-dimensional con borde* es un espacio Hausdorff N_2 en el que cada punto tiene un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto de $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

Si M es una variedad con borde, un punto que esté en la imagen inversa de $\partial H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ por dicho homeomorfismo es un punto del borde de M .

El borde de una variedad n-dimensional con borde es otra variedad de dimensión $n - 1$. El cilindro finito es un ejemplo de variedad con borde, este está formado por las dos circunferencias que lo delimitan.

Si denotamos por S^n a la esfera n-dimensional unitaria y por B^n a la bola n-dimensional unitaria, se tiene que el borde de B^3 es S^2 . Decimos que un conjunto es una n-esfera si es homeomorfo a S^n .

Es fácil ver que un intervalo abierto I no es homeomorfo a la circunferencia S^1 . Para ello, supongamos que existe un homeomorfismo f entre I y S^1 . Si tomamos un punto $P \in I$, este punto divide a I en dos componentes conexas. La imagen de un punto por homeomorfismo f es otro punto, digamos $Q \in S^1$. No obstante, es imposible que un punto divida a S^1 en dos componentes conexas, por lo que I no es homeomorfo a S^1 .

Sin embargo, esto no resulta tan sencillo si queremos demostrar que la esfera unidad no es homeomorfa a la circunferencia. Para ello enunciamos el siguiente teorema, que no vamos a demostrar.

Teorema de la invariancia de dominio Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación inyectiva y continua. Entonces $V = f(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^m y f es un homeomorfismo entre U y V .

Una consecuencia directa de este teorema es que \mathbb{R}^n no puede ser homeomorfo a \mathbb{R}^m si $n \neq m$. De hecho, no existe ningún abierto no vacío de \mathbb{R}^n que sea homeomorfo a todo abierto de \mathbb{R}^m , si $n \neq m$. Veamos entonces que la esfera no es homeomorfa a la circunferencia. Sabemos que \mathbb{R}^2 es homeomorfo a la esfera menos un punto y que \mathbb{R} es homeomorfo a la circunferencia menos un punto. Por el teorema, \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 no son homeomorfos, luego la esfera menos un punto y la circunferencia menos otro punto tampoco.

2.2. Símplices y complejos simpliciales

En este apartado vamos a introducir las definiciones de lo que comunmente denominamos triángulo, pero en una dimensión arbitraria. Para ello, recordemos que la envolvente convexa de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ es el menor conjunto

convexo de \mathbb{R}^m que contiene a X .

Se dice que un conjunto de $n+1$ puntos p_0, p_1, \dots, p_n están colocados en posición general si al tomar k puntos cualesquiera, estos no se encuentran en una variedad lineal de dimensión $k-2$, para $k = 2, \dots, n+2$. En este caso también se dice que los puntos son **afinmente independientes**. Una manera de ver que $n+1$ puntos son afinmente independientes es ver que los vectores $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_n - p_0$ son linealmente independientes.

Definición 2.3 Sea $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de $n+1$ puntos colocados en posición general en \mathbb{R}^m con $n \leq m$. Entonces el **símplice n -dimensional euclídeo**, o n -símplice

$$\sigma^n = [v_0, v_1, \dots, v_n]$$

es la envolvente convexa de V .

Los puntos de V se denominan los **vértices** de σ^n . Sea $W \subset V$ un subconjunto no vacío, entonces la envolvente convexa de W se llama **cara** de σ^n .

Dado un conjunto de puntos afinmente independientes $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, podemos escribir el n -símplice de \mathbb{R}^m que forman como

$$\Delta = \{p \in \mathbb{R}^m \mid p = \sum_{i=0}^n t_i p_i, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

Definición 2.4 Se dice que (t_1, \dots, t_n) son las **coordenadas baricéntricas** del punto p .

Un subsímplice τ de un símplice σ es un símplice tal que $\tau \subset \sigma$. Notemos que todo símplice es conexo por caminos por ser convexo.

2.2.1. Complejos simpliciales euclídeos

Definición 2.5 Un **complejo simplicial euclídeo** es una colección K de símplices en un espacio \mathbb{R}^n , tal que se verifica

- $(K,1)$ K contiene todas las caras de todos los elementos de K .
- $(K,2)$ Si $\sigma, \tau \in K$, y $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara tanto de σ como de τ .

Los vértices de los elementos de K se llamarán **vértices** de K .
 Si K es un complejo simplicial, entonces $|K|$ denota la unión de los elementos de K , con la topología inducida del subespacio heredada de la topología de \mathbb{R}^m .
 $|K|$ se denomina **poliedro** y se dice que K es una **triangulación** de $|K|$.

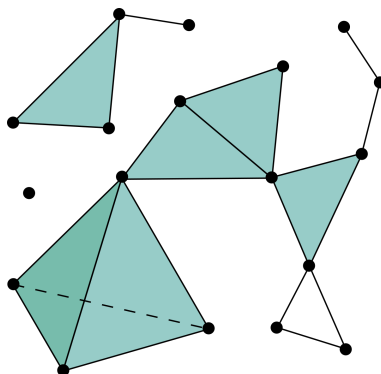


Figura 1: Poliedro (es decir, lo vemos como una unión) del complejo simplicial K con 17 puntos (0-símplice), 22 aristas (1-símplice), 8 triángulos (2-símplice) y 1 tetraedro (3-símplice).

Definición 2.6 Sea K un complejo simplicial. Un **subcomplejo** K_1 de K es una colección de símplexes $\sigma \in K$, junto con todas sus caras $\tau \subset \sigma$. Dicho de otra forma, es un conjunto $K_1 \subset K$ que verifica K.1 y K.2.

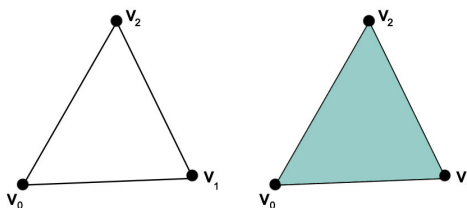


Figura 2: Notemos que no es lo mismo el complejo $K = \{[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_0]\}$ de la izquierda que el complejo $L = \{[v_0, v_1, v_2]\}$ de la derecha, de hecho se tiene que $L \subset K$. En esta figura, $K_1 = \{[v_0, v_1], [v_1, v_2]\}$ es un subcomplejo tanto de L como de K .

Sean L y K complejos simpliciales, si todo elemento de L es un subconjunto de algún elemento de K , entonces L es un **refinamiento** de K .

Definición 2.7 Sean K y L complejos. Si L es un refinamiento de K , y $|L| = |K|$, entonces L es una **subdivisión** de K , y escribimos $L < K$.

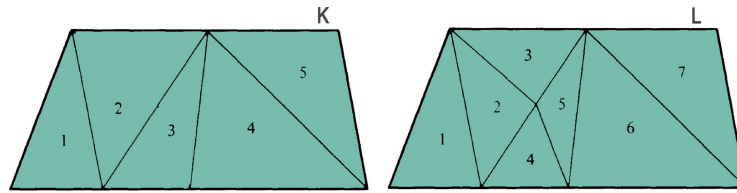


Figura 3: El complejo simplicial L (derecha) es una subdivisión del complejo simplicial K (izquierda).

Vamos a denotar por K^i el **i-esqueleto de K**, es decir, el conjunto de sím-plices de K que tienen dimensión menor o igual que i.

Definición 2.8 *Un isomorfismo ϕ entre dos complejos simpliciales K y L es una biyección $\phi : K^0 \rightarrow L^0$ tal que si $v \in K^0$ y $v' = \phi(v)$, se tiene que $[v_0, \dots, v_n] \in K$ si, y solo si $[v'_0, \dots, v'_n] \in L$.*

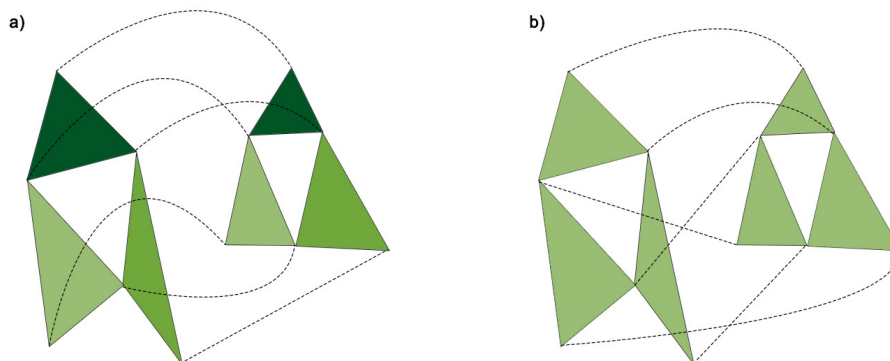


Figura 4: El caso a) representa un isomorfismo entre complejos simpliciales mientras que b) no lo es.

Definición 2.9 *Sean K y L dos complejos. Se dice que K y L son **combinatoriamente equivalentes** si tienen subdivisiones K', L' respectivamente, que son isomorfas.*

Definición 2.10 Una *celda n-dimensional* es un espacio homeomorfo a un *símplice n-dimensional*. Una *celda n-combinatoria* es un complejo combinatoriamente equivalente a un *n-símplice*.

Definición 2.11 Sea K un complejo simplicial. Sea v un vértice de K . Llamamos *estrella* de v y denotamos por $St v$ al complejo simplicial que consta de todos los *símplices* que contienen a v , junto con todas sus caras. Es decir

$$St v = \{\tau | \tau \text{ es una cara de } \sigma \text{ y } v \in \sigma \in K\}$$

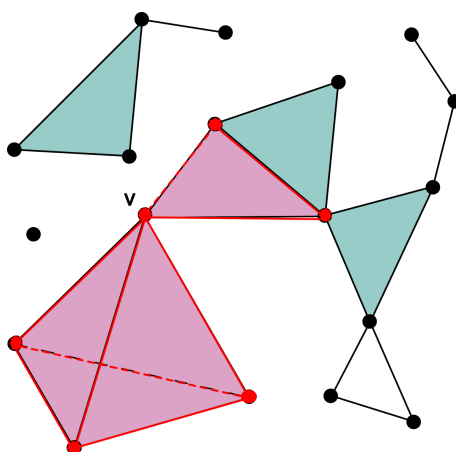


Figura 5: $St v$ marcado en rojo

Notemos que dado un complejo simplicial K , $|K|$ puede verse como una variedad. Con esto damos la siguiente definición.

Definición 2.12 Sea K un complejo simplicial. Se dice que K es una *variedad n-combinatoria (con borde)* si $|K|$ es una variedad *n-dimensional (con borde)* donde cada complejo $St v$ es una *n-celda combinatoria*.

Una vez conocidas las definiciones básicas de complejos simpliciales, vamos a dar los primeros resultados.

El siguiente resultado hace alusión a la conexión que presenta un complejo K . Se dice que un complejo K es conexo (recordemos que K es visto como una familia de *símplices*) si no es la unión de dos complejos disjuntos y no vacíos. En cuanto al poliedro $|K|$, utilizamos la definición habitual de conexión. En el siguiente resultado demostramos que todas estas son equivalentes.

Teorema 2.1 *Sea K un complejo simplicial. Son equivalentes:*

1. K es conexo.
2. $|K|$ es conexo por caminos.
3. $|K|$ es conexo.

Demostración.

Demostremos las equivalencias en orden.

(1) \Rightarrow (2)

Sea $v_0 \in K^0$, es decir, un punto (0-símplice) del complejo simplicial K . Demostraremos que para cada $v \in K^0$ existe un camino en $|K^1|$ (unión de los puntos y los segmentos de K) de v_0 a v . Sea V el conjunto de todos los vértices $v \in K$ que tienen esta propiedad, y sea K_1 el conjunto de todos los símlices de K cuyos vértices se encuentran en V . Hay que ver que $V = K^0$ y que $K_1 = K$.

K_1 es un subcomplejo de K , y ninguna arista de K interseca $|K^1| \cap (K^0 - V)$. Por lo tanto ningún símlice de K interseca $|K^1| \cap (K^0 - V)$. Sea $K_2 = K - K_1$. Entonces K_2 es un subcomplejo de K , y $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Como K es conexo, $K_2 = \emptyset$. Por lo tanto $K_1 = K$, y $V = K^0$.

Tomemos ahora $v \in \sigma \in K$, $w \in \tau \in K$. Tomemos un camino en σ desde v hasta un vértice v_0 de σ (podemos hacerlo pues todo símlice es conexo por caminos), luego un camino en $|K^1|$ desde v_0 a un vértice v_1 de τ (podemos hacerlo pues $v_0, v_1 \in K^0 = V$), y finalmente un camino en τ desde v_1 hasta w . La caracterización de los tres caminos permite dar un camino de v a w .

(2) \Rightarrow (3)

Es general, ya que todo conjunto conexo por caminos es conexo.

(3) \Rightarrow (1)

Supongamos, finalmente, que (1) es falso, de modo que $K = K_1 \cup K_2$, donde K_1 y K_2 son complejos simpliciales disjuntos y no vacíos. Hay que ver que $|K|$ no es conexo. Tenemos que $|K| = |K_1| \cup |K_2|$. Hay que ver que $|K_1|$ y $|K_2|$ son disjuntos, pues $|K_1|$ y $|K_2|$ son ambos cerrados. Supongamos que existe $v \in |K_1| \cap |K_2|$ y, por definición, existen caras $\sigma \in K_1$ y $\tau \in K_2$ tales que $v \in (\sigma \cap \tau)$. Pero esto es absurdo pues K_1 y K_2 son disjuntos. Luego K

no es conexo y se tiene (3) \Rightarrow (1). □

Una función $f : \sigma \rightarrow \tau$ entre símlices euclídeos se dice que es lineal si las coordenadas de un punto $f(P)$ son funciones lineales de las coordenadas de P .

Definición 2.13 Sean σ y τ dos símlices. Se dice que el homeomorfismo $f : \sigma \rightarrow \tau$ es simplicial si es lineal y envía vértices en vértices.

Dados dos símlices $\sigma^n = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ y $\tau^n = [w_0, w_1, \dots, w_n]$ en \mathbb{R}^n , si definimos la aplicación f que envía vértices en vértices dada por

$$f: \begin{array}{ccc} \sigma^n & \longrightarrow & \tau^n \\ v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \end{array}$$

entonces esta aplicación es un homeomorfismo simplicial.

2.2.2. Complejos abstractos

Hasta ahora, hemos tratado solo complejos simpliciales euclídeos definidos en un espacio métrico \mathbb{R}^n , pero la noción de complejo simplicial puede ir mucho más allá.

Empecemos con la definición de complejo abstracto.

Definición 2.14 Un **complejo abstracto** es una colección Φ que satisface

1. Φ es una colección de conjuntos finitos y no vacíos.
2. Si $\phi \in \Phi$ y $\phi' \subset \phi$ entonces $\phi' \in \Phi$.
3. Todo conjunto de Φ interseca con un número finito de elementos de Φ .
4. La unión de los elementos de Φ es numerable.

Si además se cumple lo siguiente (5), se dice que Φ es un complejo abstracto de dimensión n .

5. Existe un entero n tal que todo elemento de Φ tiene a lo sumo $n+1$ elementos.

Si $\phi \in \Phi$, y ϕ posee $k+1$ elementos, entonces se dice que ϕ es un **símplice k-abstracto**, y decimos que la dimensión de ϕ es k . Si $\phi \in \Phi$ y $\phi' \subset \phi$ entonces ϕ' es una cara de ϕ . El i -esqueleto Φ^i de Φ es el conjunto de los i -símplices de Φ , junto con todas sus caras. Luego denotamos por Φ^0 al conjunto de vértices de Φ .

Un isomorfismo entre dos complejos abstractos Φ y Ψ es una biyección $f : \Phi^0 \rightarrow \Psi^0$ tal que $\phi \in \Phi$ si, y solo si, $f(\phi) \in \Psi$.

Existe una relación entre complejos simpliciales euclídeos y complejos abstractos.

Definición 2.15 Sea K un complejo simplicial euclídeo en \mathbb{R}^n , se llama **diagrama de K** al conjunto

$$\Phi = \Phi(K) = \{ \{v_0, \dots, v_k\} \mid [v_0, \dots, v_k] \in K \}$$

Proposición 2.2 Dado un complejo simplicial finito K en \mathbb{R}^m . El diagrama $\Phi = \Phi(K)$ de K es un complejo abstracto finito, es decir, satisface (1)-(5).

Demostración.

1. Es trivial ya que por definición K es una colección no vacía de conjuntos finitos y no vacíos.
2. Sea $\phi = \{v_0, \dots, v_k\} \in \Phi$. Sea $\phi' = \{v_{i_0}, \dots, v_{i_l}\} \subset \phi$. Como $[v_{i_0}, \dots, v_{i_l}] \in K$ pues es una cara de $[v_0, \dots, v_k] \in K$, se tiene que $\phi' \in \Phi$.
3. Pues de lo contrario K tendría un número infinito de elementos.
4. Si recubrimos los vértices $v \in K^0$ por una colección $\{U_v\}$ de abiertos disjuntos. La intersección $\mathbb{Q}^m \cap U_v \neq \emptyset$. Si K^0 fuera no numerable, entonces $\{U_v\}$ sería no numerable, luego \mathbb{Q}^n sería no numerable, lo que es falso.
5. Basta tomar $n = m$.

□

Lema 2.3 *Existe un conjunto numerable $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ de puntos de \mathbb{R}^{2n+1} , con $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$ tales que*

1. V está en posición general.
2. La sucesión $\{v_i\}$ no tiene límite.

Demostración.

Para cada $v \in \mathbb{R}^{2n+1}$, sea $x_1(v)$ la primera coordenada de v . Sea v_1 un punto tal que $x_1(v_1) \geq 1$. Supongamos ahora que hemos dado v_1, \dots, v_m en posición general tal que $x_1(v_i) \geq i$ para $i \leq m$. Sea G el conjunto de hiperplanos H^k de dimensión k en \mathbb{R}^{2n+1} con $k \leq 2n$ que contienen $k + 1$ puntos v_i . G es finito pues dado un conjunto de k puntos en posición general, existe un único hiperplano que los contiene. Puesto que ningún hiperplano de G contiene un conjunto abierto, se tiene que la unión G^* de los elementos de G tampoco.

Sea $v_{m+1} \in \mathbb{R}^{2n+1} - G^*$ tal que $x_1(v_{m+1}) \geq m + 1$, entonces el conjunto $\{v_1, \dots, v_{m+1}\}$ está en posición general. Recursivamente vamos obteniendo V , que no tiene punto límite pues hemos tomado $x_1(v_i) \geq i$. □

Teorema 2.4 *Sea Φ un complejo abstracto de dimensión n . Entonces existe un complejo simplicial euclídeo K en \mathbb{R}^{2n+1} tal que $\Phi(K)$ es isomorfo a Φ . En este caso K se llama realización euclídea de Φ .*

Demostración.

Sea V el conjunto definido en el lema 2.3. Tomemos una biyección (cualquiera)

$$f : \Phi^0 \rightarrow W \subset V$$

Para cada $\phi \in \Phi$, $f(\phi)$ es un conjunto de vértices de un símplice σ_ϕ . Notemos que dados $\phi, \psi \in \Phi$, $\phi \cup \psi$ tiene a lo sumo $2n + 2$ puntos, luego $f(\phi \cup \psi)$ es el conjunto de vértices de un símplice euclídeo τ (estamos en \mathbb{R}^{2n+1}). Entonces si $\sigma_\phi \cap \sigma_\psi \neq \emptyset$, $\sigma_\phi \cap \sigma_\psi$ es a su vez una cara de σ_ϕ y de σ_ψ (por K.2).

Tomamos entonces $K = \{\sigma_\phi \mid \phi \in \Phi\}$ (que satisface las condiciones de un complejo euclídeo) y Φ y $\Phi(K)$ son isomorfos (el isomorfismo es f). □

2.2.3. Complejos lineales a trozos

Vamos ahora a definir un complejo simplicial en un espacio topológico (X, θ) .

Definición 2.16 Sea (X, θ) un espacio topológico. Sea $\sigma_h = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ un símlice euclídeo y sea $h : \sigma_h \rightarrow X$ un homeomorfismo. Sea $h(\sigma_h) = |h|$. Llamamos **aplicación de coordenadas** al homeomorfismo

$$h : \sigma_h \rightarrow |h| \subset X$$

Este nombre viene dado porque h se puede utilizar para definir un sistema de coordenadas baricéntricas: si tenemos

$$v = \sum \alpha_i v_i \in [v_0, \dots, v_k] = \sigma_h$$

Entonces podemos ver la imagen $w = h(v)$ como la suma

$$w = \sum \alpha_i w_i, \quad w_i = h(v_i)$$

Ahora vamos a definir una relación entre dos aplicaciones de coordenadas g y h . Supongamos que $|h| = |g|$ y que, además, $h^{-1} \circ g : \sigma_g \rightarrow \sigma_h$ es un homeomorfismo simplicial. Entonces las aplicaciones de coordenadas g y h son equivalentes y escribimos $g \sim h$.

Al conjunto de todas las aplicaciones de coordenadas en el espacio X lo denotamos por $C(X)$.

Proposición 2.5 \sim es una relación de equivalencia en $C(X)$.

Demostración.

Sea $h, g \in C(X)$

- $h \sim h$ pues $h^{-1} \circ h = id : \sigma_h \rightarrow \sigma_h$ es obviamente un homeomorfismo simplicial.
- Supongamos $h \sim g$. Hay que ver que $g^{-1} \circ h : \sigma_h \rightarrow \sigma_g$ es un homeomorfismo simplicial. La aplicación es obviamente lineal, hay que ver que envía vértices en vértices. Sea v un vértice de σ_g . Como $h \sim g$, se tiene que existe w vértice de σ_h tal que $h^{-1} \circ g(v) = w$. Luego se tiene $g^{-1} \circ h(w) = g^{-1} \circ h \circ h^{-1} \circ g(v) = v$.
- Supongamos $h \sim g$ y $g \sim f$. La aplicación $h^{-1} \circ f$ es lineal. Sea v_i un vértice de la aplicación $i \in \{h, g, f\}$. Se tiene que $h^{-1} \circ g(v_g) = v_h$ y $g^{-1} \circ f(v_f) = v_g$. Luego $h^{-1} \circ f(v_f) = h^{-1} \circ g \circ g^{-1} \circ f(v_f) = v_h$.

□

Sea $h \in C(X)$, denotamos por $[h]$ a la clase de equivalencia de h , es decir

$$[h] = \{g \in C(X) \mid g \sim h\}$$

Definición 2.17 Dado $h \in C(X)$, la clase de equivalencia $[h]$ se denomina **símplice lineal a trozos**.

El soporte $||[h]||$ de $[h]$ es $|h|$. Si τ es una cara de σ_h , entonces $[h|_\tau]$ es una cara de $[h]$, y se dice que $h(\tau)$ forma una cara de $[h]$. La dimensión de $[h]$ es la de σ_h .

Definición 2.18 Un **complejo lineal a trozos** en (X, θ) es una colección numerable \mathcal{K} de símplices lineales a trozos en (X, θ) que satisfacen las condiciones siguientes

- (K,1) Si $[h] \in \mathcal{K}$, entonces cada cara de $[h]$ pertenece a \mathcal{K} .
- (K,2) Sea $[g], [h] \in \mathcal{K}$ y suponga que $||[g]|| \cap ||[h]|| = S \neq \emptyset$. Entonces hay caras τ_g de σ_g y τ_h de σ_h , tales que $g(\tau_g) = S = h(\tau_h)$ y $[g|_{\tau_g}] = [h|_{\tau_h}]$.
- (K,3) Todo conjunto $||[h]||$ ($[h] \in \mathcal{K}$) tiene un entorno que interseca sólo a un número finito de conjuntos $||[g]||$ ($[g] \in \mathcal{K}$).

Si además se verifica lo siguiente (K.4), se dice que \mathcal{K} es un **complejo lineal a trozos de dimensión n** .

- (K,4) La mayor dimensión de los símplices lineales a trozos de \mathcal{K} es n .

La unión de los conjuntos $||[h]||$ ($[h] \in \mathcal{K}$) se denota por $|\mathcal{K}|$. El i -esqueleto \mathcal{K}^i es el conjunto de los elementos de \mathcal{K} que tienen dimensión $\leq i$.

Sea K un complejo simplicial euclídeo y \mathcal{K} un complejo PL. Sea $f : |K| \rightarrow |\mathcal{K}|$. Si f envía linealmente cada $\sigma \in K$ en un conjunto $||[h]||$ entonces f es lineal. Si los vértices se envían en vértices entonces f es simplicial.

Teorema 2.6 *Sea \mathcal{K} un complejo PL de dimensión finita. Entonces hay un complejo simplicial euclídeo K y un homeomorfismo simplicial f tales que tenemos la biyección*

$$f : |K| \rightarrow |\mathcal{K}|$$

Y para esos K y f tenemos

$$\mathcal{K} = \{[f|_{\sigma}] \mid \sigma \in K\}$$

Demostración.

Para cada $[h] \in \mathcal{K}$, sea ϕ_h el conjunto de todos los vértices de $[h]$, y sea $\Phi(\mathcal{K}) = \cup\{\phi_h\}$. Entonces $\Phi(\mathcal{K})$ es un complejo abstracto de dimensión finita. Notemos que $\Phi(\mathcal{K})^0 = \mathcal{K}^0$ por construcción.

Por el Teorema 2.4 hay un complejo simplicial euclídeo K tal que $\Phi(K)$ y $\Phi(\mathcal{K})$ son isomorfos. Sea $f : \Phi(K)^0 = K^0 \rightarrow \Phi(\mathcal{K})^0 = \mathcal{K}^0$ un isomorfismo entre ellos. Ahora se extiende f simplicialmente a cada símplice de K para obtener $f : |K| \rightarrow |\mathcal{K}|$.

Dado tal homeomorfismo simplicial f , puesto que f envía σ simplicialmente en $[[h]]$, entonces $f|_{\sigma} \sim h$ (pues $|f|_{\sigma}| = f(\sigma) = [h]$ y $h^{-1} \circ f|_{\sigma}$ envía vértices de σ en vértices de $[h]$ en vértices de σ_h y es lineal) que implica $[f|_{\sigma}] = [h]$. Luego $\mathcal{K} = \{[f|_{\sigma}] \mid \sigma \in K\}$ y tenemos el resultado. \square

3. Preparación: teorema de Jordan-Schönflies poligonal

El objetivo de esta sección es de prepararnos para la demostración del teorema de la curva de Jordan, pues vamos a demostrarlo para curvas poligonales. Así, los resultados que se exponen a continuación serán de utilidad para dar una primera aproximación al problema.

Definición 3.1 *Una **curva poligonal** en \mathbb{R}^2 es la unión de una serie de segmentos (1-símplices) del plano $I_i = [p_i, p_{i+1}]$ tales que $I_i \cap I_j = \emptyset$ si $j \neq i + 1$ (los segmentos no consecutivos no intersecan entre sí). Llamamos **polígono** en \mathbb{R}^2 a una curva poligonal cerrada en el plano. Es decir, un polígono J es una unión $\bigcup_{i=0}^n I_i$ con $p_0 = p_{n+1}$.*

*Los segmentos I_i que conforman el polígono se llaman **aristas** y los extremos p_i de los segmentos, **vértices**.*

3.1. Teorema de Jordan para curvas poligonales

Comencemos dando algunas propiedades de separación polígonos en \mathbb{R}^2 . Al igual que en el teorema de la curva de Jordan, que estudiaremos más adelante, vamos a ver que un polígono J divide el espacio en dos componentes conexas.

Teorema 3.1 *Sea J un polígono en \mathbb{R}^2 entonces $\mathbb{R}^2 - J$ tiene exactamente dos componentes.*

Demostración.

Vamos a tomar un entorno N de J formado por la unión de entornos convexos de los vértices y segmentos que componen J . Más concretamente, si denotamos por p_i a los vértices de J y por $I_i = [p_i, p_{i+1}]$ a las aristas, sea $d_1 = \min_{i \neq j, i \neq j+1} d(p_i, I_j)$, sea r un número real tal que $r < d_1$, entonces definimos

$$N = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, J) < r\}$$

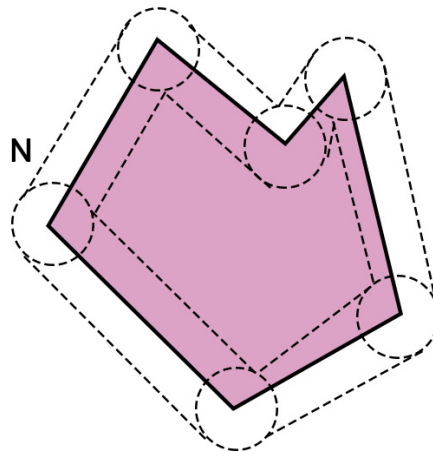


Figura 6: Teorema 3.1: N

Demostremos los dos siguientes lemas.

Lema 3.2 $\mathbb{R}^2 - J$ tiene como mucho dos componentes.

Demostración.

Localmente, $Fr N$ está formada por segmentos paralelos a los lados de J y por trozos de circunferencia centrados en vértices, así que $N - J$ tiene a lo sumo dos componentes conexas: si tomamos un punto $P \in (N - J)$. Sea

$d_2 = d(P, J)$. Si seguimos una trayectoria paralela a J (es decir una trayectoria tal que la distancia entre los puntos de la misma y J sea d_2), entonces llegaremos o bien a P (de nuevo), o bien a P^* , siendo P^* el punto simétrico de P respecto de J .

Ahora sea $Q \in \mathbb{R}^2 - J$, veamos que este siempre puede unirse mediante un segmento a un punto $P \in N - J$, y habremos acabado. Si $Q \in N$ no hay nada que probar. Si $Q \notin N$, sea $Q' \in J$ el punto más cercano a Q (que existe pues J es cerrado), sea $\overline{QQ'}$ el segmento que une Q y Q' . Sea P el primer punto de $\overline{QQ'}$ que interseca con N (en el sentido de Q a Q'). Entonces $P \in N - J$. Basta entonces considerar el segmento que conecta P y Q . \square

Lema 3.3 $\mathbb{R}^2 - J$ tiene como poco dos componentes.

Demostración.

Elegimos los ejes del plano de tal manera que ninguna recta horizontal pase por más de un vértice de J . Esto lo podemos hacer pues las direcciones a evitar son finitas.

Para cada punto $P \in \mathbb{R}^2$, sea L_P la recta horizontal que pasa por P .

El índice $Ind P$ de un punto P de $\mathbb{R}^2 - J$ se define como sigue:

1. Si L_P no contiene ningún vértice de J , entonces $Ind P$ es el número de puntos módulo 2 de $L_P \cap J$ que se encuentran a la izquierda de P . Por lo tanto, $Ind P$ es 0 o 1.
2. Si L_P contiene un vértice de J , entonces $Ind P$ es el número de puntos módulo 2 de $L' \cap J$, que se encuentran a la izquierda de P , donde L' es una recta horizontal que se encuentra 'ligeramente por encima' o 'ligeramente por debajo' de L_P .

Definamos entonces la función f :

$$f : \mathbb{R}^2 - J \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P \mapsto Ind P$$

El conjunto $f^{-1}(0)$ es no vacío, veamos esto. Sea

$$M_2 = \max \{p_2 \in \mathbb{R} \mid P = (p_1, p_2) \in J\}$$

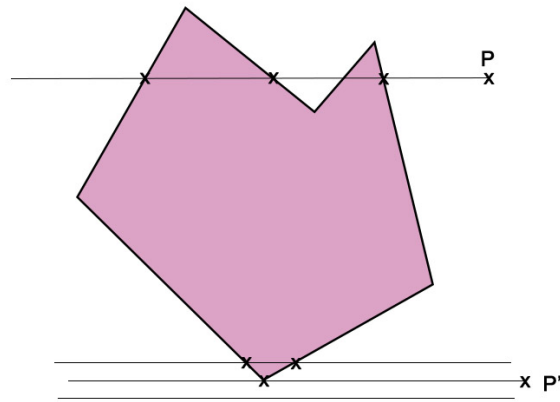


Figura 7: Función índice

Todo punto $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ con $q_2 > M_2$ (los puntos 'por encima' de J) pertenece a $f^{-1}(0)$.

Demostremos ahora que $f^{-1}(1)$ es no vacío, sea $Q = (q_1, q_2)$ un punto de J tal que L_Q no contiene ningún vértice de J . Sea P_1 el punto más a la izquierda de J en L_Q (maticemos esto). Sea

$$m_1 = \min \{p_1 \in \mathbb{R} \mid P = (p_1, p_2) \in (J \cap L_Q)\}$$

Luego tomamos $P_1 = (m_1, q_2) \in L_Q$. Sea P un punto de L_Q , ligeramente a la derecha de P_1 de tal manera que $P \notin J$, y ningún punto entre P_1 y P pertenezca a J . Entonces $\text{Ind } P = 1$.

Además $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$ son abiertos, pues si $\text{Ind } P = i$ con $i \in \{0, 1\}$, entonces $\text{Ind } P' = i$ cuando P' está suficientemente cerca de P .

Por lo tanto, $\mathbb{R}^2 - J$ no es conexo, pues es la unión de los conjuntos abiertos, disjuntos y no vacíos $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$. \square

Se podría demostrar que, dada una curva diferenciable (suave), siempre existe un homeomorfismo de todo el plano que la transforma en una curva poligonal. Así, podríamos extender el teorema de la curva de Jordan para curvas poligonales a estas curvas suaves.

Ahora ya sabemos que un polígono divide el plano en dos componentes conexas: la interior (la componente acotada) y la exterior (la componente no

acotada). Gracias a esto, podemos dar el siguiente resultado, que permite relacionar la noción de complejo simplicial con la de polígono.

Teorema 3.4 *Sea I el interior de un polígono J en \mathbb{R}^2 . Entonces \bar{I} es un poliedro finito (es decir, existe un complejo simplicial finito K tal que $|K| = \bar{I}$).*

Demostración.

Sean L_1, L_2, \dots, L_n las rectas que contienen las aristas de J . Estas rectas son finitas en número, y el conjunto $L_i \cap (\cup_{i \neq j} L_j)$ es finito (pues el número de rectas es finito y si hubiera dos coincidentes esta se consideraría como una). Cada línea L_i descompone \mathbb{R}^2 en dos semiplanos cerrados H_i y H'_i ; y cualquier intersección finita de semiplanos cerrados es cerrada y convexa (pues por definición la intersección de cerrados es cerrada e intersección de convexos es convexa). Por lo tanto $\cup L_i$ descompone \mathbb{R}^2 en una colección finita de regiones cerradas y convexas R_1, R_2, \dots, R_m que corresponden a hacer la intersección de los semiplanos, tal que para cada j tenemos $Fr R_j \subset \cup L_i$, pues son los L_i los que delimitan estas regiones. Entonces como $J \cup \cup L_i$ y $Fr R_j = R_j \cap \cup L_i$, se tiene $R_j \cap J \subset Fr R_j$ para cada j . Entonces, puesto que $\bar{I} = J \cup I$, se tienen dos posibles casos: para cada j tenemos o bien $R_j \cap \bar{I} \subset J$ o bien $R_j \subset \bar{I}$. Por lo tanto, \bar{I} es la unión de los conjuntos R_j que se encuentran en \bar{I} . Todos estos pasos se indican en la figura 8 a continuación

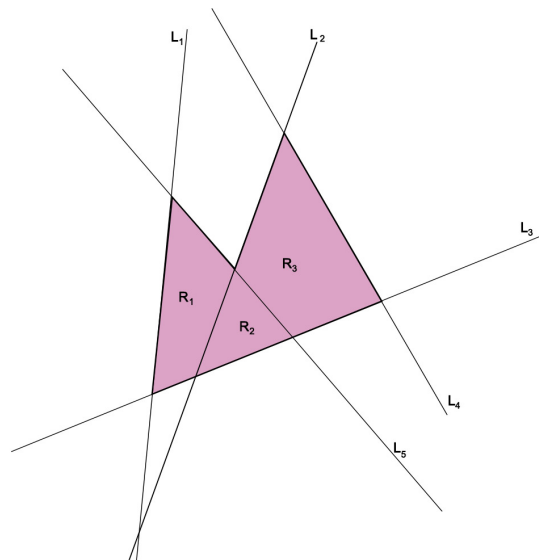


Figura 8: Teorema 3.4

Podemos escribir entonces

$$\bar{I} = \bigcup_{j=1}^k R_j$$

Para cada $j \leq k$, $Fr R_j$ es la unión de un número finito de 1-símplices, pues dicha frontera la forman rectas delimitadas por J . Ahora lo único que falta es triangular cada R_j y considerar la unión de todas estas triangulaciones. Para cada j , elegimos un punto w_j de $R_j - Fr R_j$ y para cada 1-símplice vv' de $Fr R_j$ formamos el 2-símplice w_jvv' , lo que nos da una triangulación de R_j . La unión de estos es una triangulación de \bar{I} . \square

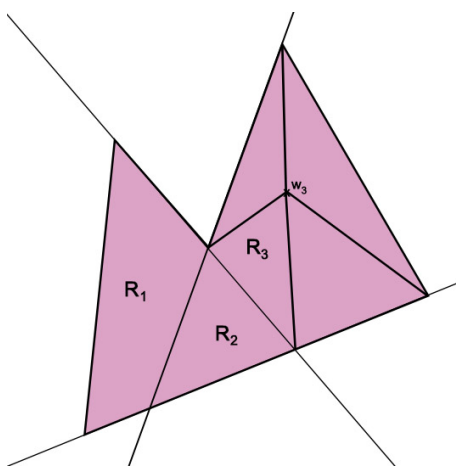


Figura 9: Teorema 3.4: triangulación de R_3

3.2. Teorema de Schönflies para curvas poligonales

El objetivo de esta sección es probar lo siguiente, que hemos bautizado como teorema de Schönflies para curvas poligonales.

Teorema 3.5 Sean J y J' dos polígonos en \mathbb{R}^2 . Entonces existe un homeomorfismo

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$J \mapsto J'$$

Recordemos que en la sección 2 hemos construido un homeomorfismo simplicial entre dos complejos simpliciales euclídeos τ^n y σ^n en \mathbb{R}^n (ver 2.13) dado por

$$f : \begin{array}{ccc} \sigma^n & \longrightarrow & \tau^n \\ v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \end{array}$$

Veamos que podemos extender este homeomorfismo a todo \mathbb{R}^n .

Proposición 3.6 Sean $\sigma^n = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ y $\tau^n = [w_0, w_1, \dots, w_n]$ dos símlices en \mathbb{R}^n . Existe un homeomorfismo $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $g|_{\sigma^n} : \sigma^n \rightarrow \tau^n$ es un homeomorfismo simplicial.

Demostración.

La aplicación $v \mapsto v - v_0$ es un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, y si σ^n es un símlice de \mathbb{R}^n , $h|_{\sigma^n}$ es simplicial. La composición de dos de estas aplicaciones tiene las mismas propiedades (pues la composición es de la forma $v \mapsto v - v_0 - v_1$). Por lo tanto, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que v_0 es el origen en \mathbb{R}^n (basta tomar $v_1 = -v_0$). De manera similar para w_0 . De esto deducimos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, \dots, w_n\}$ son linealmente independientes, luego podemos escribir cada punto $v \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$$

definimos entonces

$$g(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \in \mathbb{R}^n$$

y se tiene que $g|_{\sigma^n}$ es f . □

Definición 3.2 Sea J un polígono de interior I y sea K una triangulación de \bar{I} . Se dice que un 2-símlice $\sigma^2 \in K$ es **libre** si $\sigma^2 \cap J$ consiste únicamente en 1 o 2 aristas (caras de dimensión 1) de σ^2 .

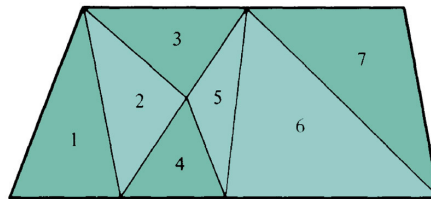


Figura 10: Complejo simplicial L donde los símplex 1,3,4,7 son libres. 6 no es libre pues a pesar de tener una arista en J , también tiene un punto (0-símplex) en J que no forma parte de una arista en J .

Proposición 3.7 *Sea J un polígono en \mathbb{R}^2 . Sea I el interior de J y K una triangulación de \bar{I} . Si K tiene más de un 2-símplice, entonces K tiene al menos un 2-símplice libre.*

Demostración.

Supongamos que K tiene más de un 2-símplice. Vamos a probar que K tiene al menos dos 2-símplices libres. Vamos a suponer que la hipótesis es cierta para complejos L que triangulan \bar{I} y tienen menos símplices que K . Existen al menos dos 2-símplices $\sigma, \tau \in K$ que tienen una arista en $\text{Fr } |K|$ (sino K estaría formado por un único 2-símplice). Si los dos son libres no hay nada que probar. Supongamos entonces que σ no es libre, con $\sigma = [v_0, v_1, v_2] \in K$ y $[v_0, v_1] \subset \text{Fr } K$. Luego ni $[v_0, v_2]$ ni $[v_1, v_2]$ está en la frontera de $|K|$ (pues si un segmento de esos estuviera, σ sería libre, y si los dos estuvieran, J no sería un polígono o K estaría formado por un único 2-símplice). Entonces los puntos v_0 y v_2 descomponen J en dos curvas poligonales C_1 y C_2 (ver figura 11).

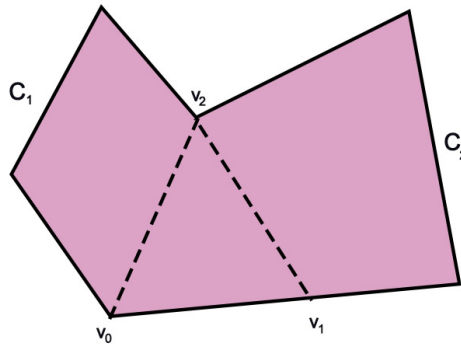


Figura 11: Proposición 3.7

Sean I_1 e I_2 los interiores de los polígonos $C_1 \cup [v_0, v_2]$ y $C_2 \cup [v_0, v_2]$ respectivamente. Sea L_1 el complejo formado por los 2-símplices que se encuentran en \bar{I}_1 junto con σ y sus caras. Sea L_2 el complejo formado por los 2-símplices que se encuentran en \bar{I}_2 . Por la hipótesis, cada L_i tiene al menos dos 2-símplices libres, luego cada L_i tiene al menos un 2-símplice libre $\sigma_i \neq \sigma$ y σ_i es libre en K con lo que se concluye la prueba. \square

Teorema 3.8 *Sea J un polígono en \mathbb{R}^2 . Entonces hay un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $h(J)$ es la frontera de un 2-símplice.*

Una consecuencia directa de este teorema es que todo polígono de \mathbb{R}^2 es frontera de una celda de dimensión 2.

Demostración.

Sea I el interior de J y K una triangulación de \bar{I} (que sabemos que existe por el teorema 3.4). Cualquier símplexe libre de dimensión 2 en K puede eliminarse mediante un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Veamos esto.

Caso 1 Supongamos que $[v_0, v_1, v_2]$ es libre, con $[v_0, v_1, v_2] \cap Fr |K| = [v_0, v_2]$. Se toma v_3, v_4 y v_5 como en la figura 12, de modo que tanto ellos como v_1 son colineales. Además, v_3 y v_4 están "muy cerca" de v_1 y v_5 respectivamente, de modo que toda la figura interseca $Fr |K|$ solo en $[v_0, v_2]$.

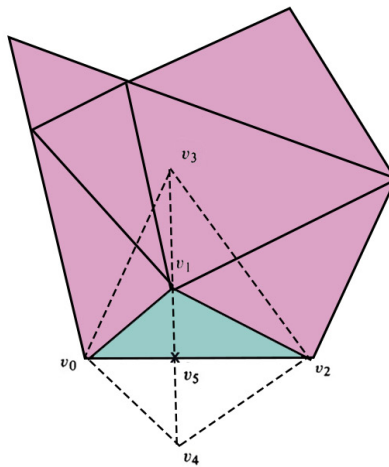


Figura 12: Caso 1

Luego definimos h de tal manera que quedan fijos v_0, v_2, v_3, v_4 . Ahora defina $h(v_5) = v_1$ y extiéndase h simplicialmente (proposición 3.6) a cada uno de los símplexes $[v_0, v_4, v_5]$, $[v_2, v_4, v_5]$, $[v_0, v_5, v_3]$ y $[v_2, v_5, v_3]$. El efecto de h es reducir en 1 el número de símplexes de K .

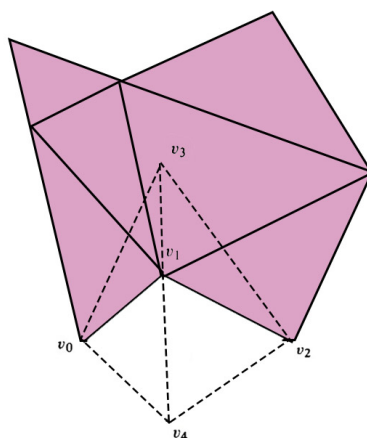


Figura 13: Caso 1

Caso 2 Supongamos que $[v_0, v_1, v_2]$ es libre en K , con $[v_0, v_1, v_2] \cap Fr|K| = [v_0, v_1] \cup [v_1, v_2]$. Utilizamos la inversa de la aplicación h que definimos en el Caso 1.

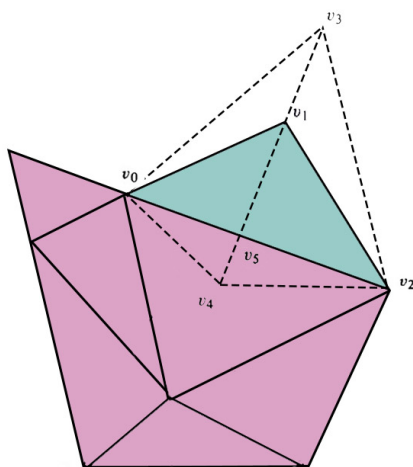


Figura 14: Caso 2

De esta manera $h(v_1) = v_5$ y los demás puntos siguen quedando fijos.

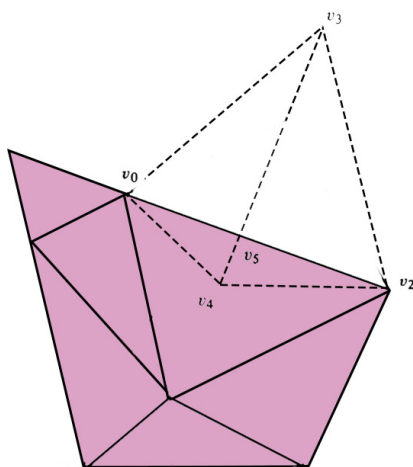


Figura 15: Caso 2

Sea n el número de símlices libres de la triangulación de \bar{I} . Si $n = 0$ entonces hemos acabado, pues hemos visto en la proposición 3.7 que en este caso solo es posible que la triangulación posea un único 2-símlice. Supongamos que tenemos n símlices libres. Notemos que tras eliminar uno de la triangulación, pueden aparecer más. Sí es así, seguimos eliminando, y este proceso acaba pues solo hay una cantidad finita de 2-símlices en la triangulación. Por la proposición 3.7, llegará un momento en el que tengamos $n = 0$, pues de lo contrario, se tendría al menos $n = 2$, y entonces se eliminarían (ya hemos explicado que este proceso acaba). \square

Vamos ahora con la demostración del teorema 3.5.

Demostración.

Por el teorema 3.8, existen dos 2-símlices σ^2 y τ^2 tal que podemos llevar mediante un homeomorfismo los polígonos J y J' a los 2-símlices σ^2 y τ^2 respectivamente.

$$\begin{aligned} h_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & h_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ J &\mapsto Fr \sigma^2 & J' &\mapsto Fr \tau^2 \end{aligned}$$

Por la proposición 3.6 existe un homeomorfismo que lleva σ^2 en τ^2

$$\begin{aligned} h_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \sigma^2 &\mapsto \tau^2 \end{aligned}$$

Podemos entonces tomar $h = h_2^{-1}h_3h_1$. □

Hemos demostrado que dados dos polígonos J y J' , estos son homeomorfos. Luego todo polígono J es homeomorfo a la frontera de un 2-símplice. Podemos demostrar además que la frontera de un 2-símplice es homeomorfa a S^1 con lo que habríamos demostrado además que todo polígono J es topológicamente una 1-esfera.

El homeomorfismo que envía un 2-símplice en S^1 , sin entrar en detalle, consiste en inscribir dicho símlice en una circunferencia, y enviar cada lado al correspondiente arco de la circunferencia que delimita cada segmento.

4. Teorema de la curva de Jordan

En el apartado anterior hemos probado el teorema de la curva de Jordan para curvas poligonales. Esto se podría extender a curvas digamos 'suaves', es decir, diferenciables de clase C^∞ . No obstante, la demostración es más difícil cuando tenemos curvas continuas simplemente, como puede ser el copo de nieve de Koch, que es una curva que no es diferenciable en ningún punto.

El objetivo de este apartado es probar el teorema de la curva de Jordan siguiendo dos demostraciones distintas: la primera y más intuitiva, del libro de E. Moise que hace uso conocidos resultados acerca de conectividad, y la segunda, de Maehara, más complicada en lo que respecta a herramientas utilizadas, aunque más breve. Esta utiliza el teorema del punto fijo de Brouwer, que junto con el teorema de extensión de Tietze llegan al resultado.

Una vez probado, se invita al lector a consultar el apéndice I donde se expone brevemente el teorema de Jordan-Schönflies. Asimismo, es de interés para este apartado complementar la información con el Apéndice III, donde se dan unas pinceladas sobre lo que sucede con el teorema en dimensiones mayores.

4.1. Enunciado

Decimos que S es una n -esfera topológica si es homeomorfa a S^n .

Teorema de la curva de Jordan I. Sea J una 1-esfera topológica en \mathbb{R}^2 , entonces $\mathbb{R}^2 - J$ es la unión de dos conjuntos conexos y disjuntos I y E tales que $J = Fr I = Fr E$. Además, una de estas componentes conexas está acotada (interior), y la otra no (exterior).

También es posible formular el teorema en términos de la esfera S^2 .

Teorema de la curva de Jordan II. Sea C una 1-esfera topológica en S^2 entonces $S^2 - C$ es la unión de dos conjuntos conexos y disjuntos I y E tales que $C = Fr I = Fr E$.

No obstante, en este caso no podemos distinguir cuál de ellas es la componente acotada, pues ambas lo están. Estos dos enunciados son equivalentes, basta considerar la proyección estereográfica para enviar la curva C en S^2 a la curva J en \mathbb{R}^2 , y la esfera en el plano. Puesto que ambos enunciados son

equivalentes, basta demostrar uno de ellos. En ambas demostraciones vamos a demostrar el primero de ellos.

4.2. Demostración según Moise

4.2.1. Existencia de al menos dos componentes conexas

Vamos a dar varios resultados que concluirán con el Teorema de la curva de Jordan.

A partir de ahora, si tenemos un camino entre dos puntos P y Q , para facilitar la notación, vamos a denotar por \widehat{PQ} al camino entre dichos puntos P y Q y por \overline{PQ} al segmento que conecta P y Q .

Lema 4.1 *Sea U un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , y sean $P, Q \in U$. Si P y Q están en componentes distintas de U , entonces U es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos que contienen a P y Q respectivamente.*

Demostración.

Cada componente conexa de U es abierta pues U es localmente conexo por caminos. Puesto que la unión de abiertos es abierta, la unión de componentes de U también lo es. Sea C_p la componente de U que contiene a P . Entonces $U = C_p \cup (U - C_p)$, donde $U - C_p$ es abierto y contiene a Q (pues por hipótesis P y Q están en componentes distintas). \square

Teorema 4.2 *Sea I el interior de un polígono J en \mathbb{R}^2 , y sean P, Q, R y S puntos de J , ordenados en sentido horario. Sea A un camino de P a R , que se encuentra en \bar{I} , tal que $A \cap J = \{P, R\}$. Entonces $I - A$ es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos U_Q y U_S , que contienen a Q y S en sus fronteras.*

Demostración.

Nótese que, puesto que dos polígonos son homeomorfos (esto lo hemos visto en la sección Teorema de Schönflies poligonal), no hay pérdida de generalidad en considerar \bar{I} como una región rectangular.

Sean Q' y S' puntos de I , muy próximos a Q y S , como en la figura 16, de tal manera que exista un segmento de Q a Q' y otro de S a S' , ambos contenidos en \bar{I} , tales que no corten a A . Si Q' y S' estuviesen en la misma componente de $I - A$, entonces existiría una curva poligonal de Q' a S' en

$I - A$. Por lo tanto, hay una curva poligonal B , de Q a S (uniendo los caminos mencionados $\overline{QQ'}$, $\overline{Q'S'}$, $\overline{S'S}$), que se encuentra en $\bar{I} - A$ (pues Q y S se encuentran en J) e interseca J solo en Q y S . (Ver figura 16).

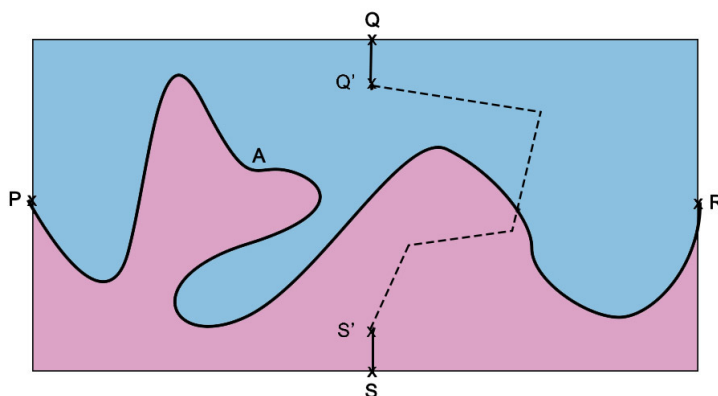


Figura 16: Teorema 4.2

Por otro lado, P y R se encuentran en la misma componente de $\bar{I} - B$, porque $A \subset \bar{I} - B$ (como consecuencia de ser $B \subset \bar{I} - A$) y A es un camino que conecta P y R . Veamos que esto es absurdo.

Sean B_1, B y B_2 las dos curvas poligonales de Q a S que se encuentran en J tales que $J = B_1 \cup B_2$ y sea $M = B_1 \cup B_2 \cup B$. Está claro que $P, R \in \bar{I} - B$, veamos que podemos dividir $\bar{I} - B$ en dos componentes conexas $I_1 \cup \text{Int } B_1$ y $I_2 \cup \text{Int } B_2$ (donde I_i es el interior del polígono $B \cup B_i$) de tal manera que $P \in I_1 \cup \text{Int } B_1$ y $Q \in I_2 \cup \text{Int } B_2$ y tendríamos la contradicción (pues hemos visto que P y R se encuentran en la misma componente de $\bar{I} - B$).

Sea E la componente exterior de J . Las componentes acotadas de $\mathbb{R}^2 - M$ se encuentran en I , y cada una de estas componentes tiene un polígono contenido en M como frontera. Consideremos un entorno del punto Q . Sean A_1 y A_2 los sectores delimitados por M como en la figura 17.

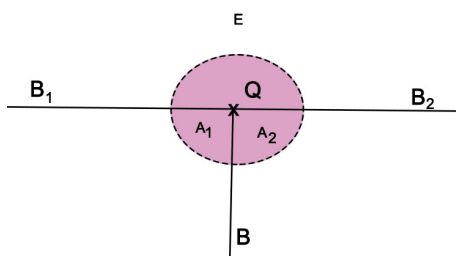


Figura 17: Teorema 4.2

Los sectores A_1 y A_2 se encuentran en componentes distintas de $\mathbb{R}^2 - M$, luego ninguna componente de $\mathbb{R}^2 - M$ tiene $B_1 \cup B_2$ como su frontera, luego las únicas fronteras posibles de las componentes de $\mathbb{R}^2 - M$ son o bien $B \cup B_1$ o bien $B \cup B_2$, lo que nos da las componentes acotadas I_1 e I_2 . Luego $I = I_1 \cup I_2 \cup B$ y $\bar{I} = \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2$ de donde se obtiene que $\bar{I} - B = (I_1 \cup \text{Int } B_1) \cup (I_2 \cup \text{Int } B_2)$. \square

Teorema 4.3 *Sea J una 1-esfera topológica en \mathbb{R}^2 . Entonces $\mathbb{R}^2 - J$ no es conexo.*

Demostración.

Vamos a 'enmarcar' J en un polígono. Para ello, sea \bar{I} una celda de dimensión 2 que contiene a J (ver definición 2.10, como antes, no hay pérdida de generalidad en considerar \bar{I} como una región rectangular), tal que $J \cap \text{Fr } I$ contiene exactamente a dos puntos P y R , estos puntos son, respectivamente, los puntos situados más a la izquierda y más a la derecha de J en el eje de abscisas. En el caso de no ser únicos, bastaría con hacer un giro de J en el plano, y sabemos que al menos hay un giro tal que $J \cap \text{Fr } I$ contiene exactamente dos puntos, pues, de lo contrario, J estaría formado por dos aristas paralelas, lo que es imposible.

Entonces se tiene que J es la unión de dos arcos A_1 y A_2 , de P a R . Sean S y Q dos puntos de la celda como en el teorema 4.2. Tomamos un camino B , de S a Q , en \bar{I} tal que $B \cap \text{Fr } I = \{S, Q\}$. Sea T el primer punto de B (en el sentido de S a Q) que interseca J . Sea A_1 el arco de P a R en J que contiene a T . Sea A_2 el otro arco de P a R en J . Sea X el último punto de B que se encuentra en A_1 , en el sentido de S a Q (ver figura 18).

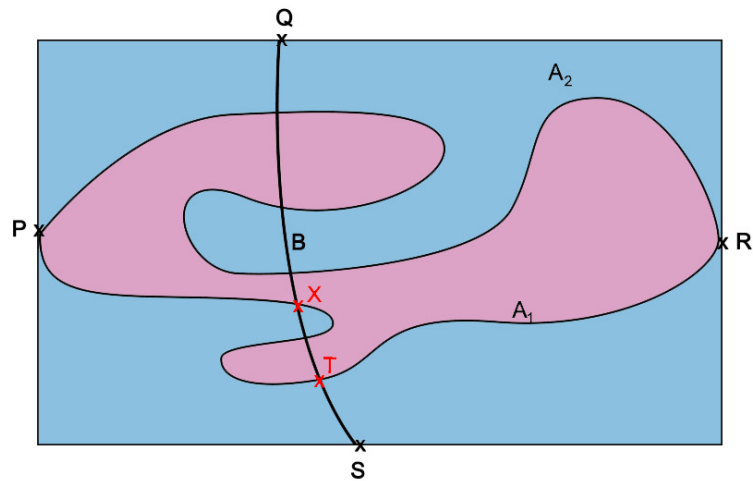


Figura 18: Teorema 4.3

Probemos los dos siguientes lemas.

Lema 4.4 *Existe un punto en $B \cap A_2$ que está después de X en el sentido de S a Q .*

Demostración.

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que no existe tal punto. Sea B_1 el camino de S a T en B . Sea B_2 el camino \widehat{TX} en A_1 , y sea B_3 el camino \widehat{XQ} en B . Entonces $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ es un camino de S a Q , en $\bar{I} - A_2$ (pues hemos supuesto que no existe intersección con A_2). Por lo tanto, S y Q se encuentran en la frontera de la misma componente de $\bar{I} - A_2$ (pues existe un camino que los une), lo que contradice el teorema 4.2. \square

Una vez sabemos de la existencia de al menos un punto $B \cap A_2$ que está después de X en el sentido de S a Q , vamos a llamar $Y \in B \cap A_2$ al primer punto en el sentido de S a Q que las verifica. Sea Z cualquier punto entre X e Y en B .

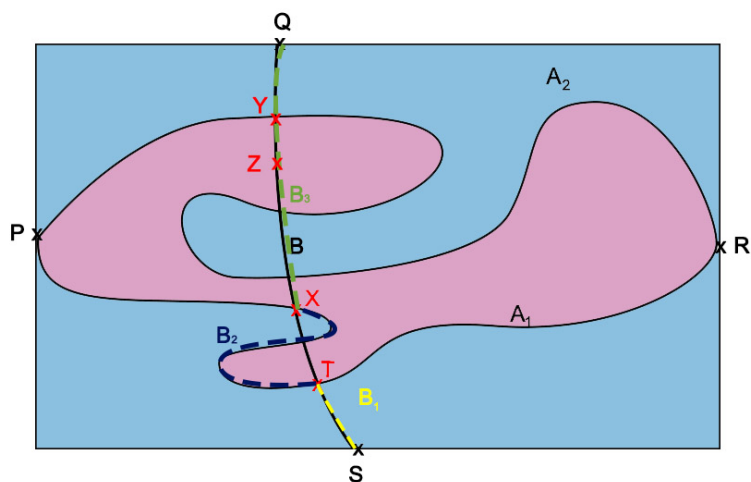


Figura 19: Lema 4.4

Lema 4.5 *Z se encuentra en una componente acotada de $\mathbb{R}^2 - J$.*

Demostración.

Supongamos que no. Entonces hay un camino C , desde Z hasta un punto W ($W \neq P$, $W \neq R$) de $Fr I$, con $C \subset \mathbb{R}^2 - J$ (pues si C estuviera en una componente acotada, solo podría llegar a P o a R). Podemos suponer que $C \cap Fr I = W$, ya que de lo contrario, bastaría con coger el trozo de camino entre Z y la primera intersección con $Fr I$.

Vamos a distinguir dos casos. Consideramos primero el caso en el que W y S se encuentran en la misma componente de $Fr I - \{P, R\}$. (Ver figura 20)

B contiene un camino B_1 , de Z a Q , que no interseca A_1 (pues Z está entre X e Y , y X es el último punto de B que interseca A_1). De ello se deduce que W y Q están en la frontera de la misma componente de $I - A_1$ (basta unir C con B_1 , que conecta W y Q), lo que contradice el teorema 4.2.

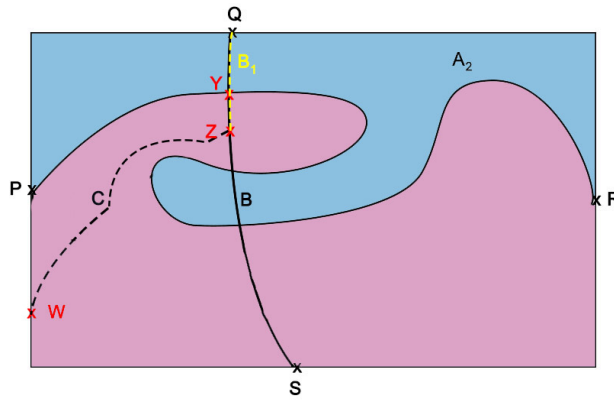


Figura 20: Lema 4.5

En segundo lugar, supongamos que W y Q se encuentran en la misma componente de $Fr I - \{P, R\}$. (Ver Figura 21)

Recordemos que T es el primer punto de B que interseca A_1 en el sentido de S a Q. Fórmese la unión de los caminos C (que conecta W y Z y recordemos no intersecaban ni a A_1 ni a A_2 por encontrarse en $\mathbb{R}^2 - J$), $\widehat{ZX} \subset B$, $\widehat{XT} \subset A_1$ (al estar en A_1 no interseca A_2) y $\widehat{TS} \subset B$. De ello se deduce que W y S se encuentran en la frontera de la misma componente de $I - A_2$, y esto contradice el teorema 4.2, al igual que antes. El lema 4.5 prueba el Teorema 4.3, pues no existe un camino que conecte Z con Q o S. \square

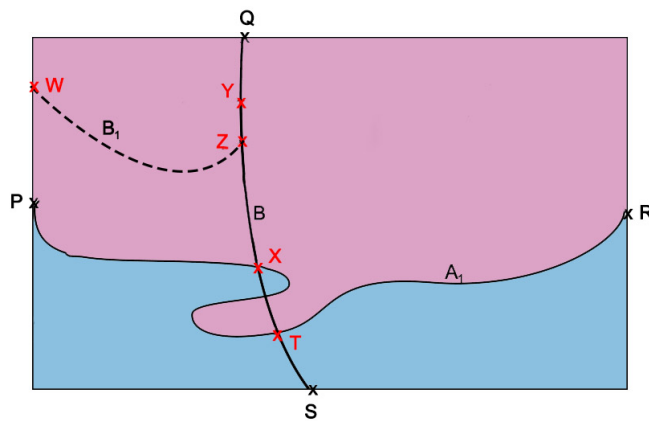


Figura 21: Lema 4.5

4.2.2. Condiciones frontera

Definición 4.1 Una *descomposición de ladrillos del plano* es una colección $G = \{g_i\}$ de celdas de dimensión 2 (polígonos) tales que:

1. $\cup_{i=1}^{\infty} g_i = \mathbb{R}^2$
2. Si dos conjuntos g_i y g_j se cortan, entonces su intersección es un segmento que se encuentra en la frontera de cada uno de ellos.
3. Cada punto tiene un entorno que interseca como máximo tres de los conjuntos g_i .

Una forma de obtener tal colección es cortar el plano por líneas horizontales y segmentos verticales para obtener una especie de pared de ladrillos.

Evidentemente, podemos construir una descomposición de ladrillos G de \mathbb{R}^2 de tamaño tan pequeño como nos plazca. En cualquier caso, la unión de cualquier subcolección de G es una variedad de dimensión 2 con borde.

Teorema 4.6 Sea I , P , Q , R , y S definidas como en el teorema 4.2, y sean A_1 y A_2 arcos disjuntos en \bar{I} , tales que $A_1 \cap Fr I = \{P\}$ y $A_2 \cap Fr I = \{R\}$. Entonces S y Q están en la frontera de la misma componente conexa de $I - (A_1 \cup A_2)$.

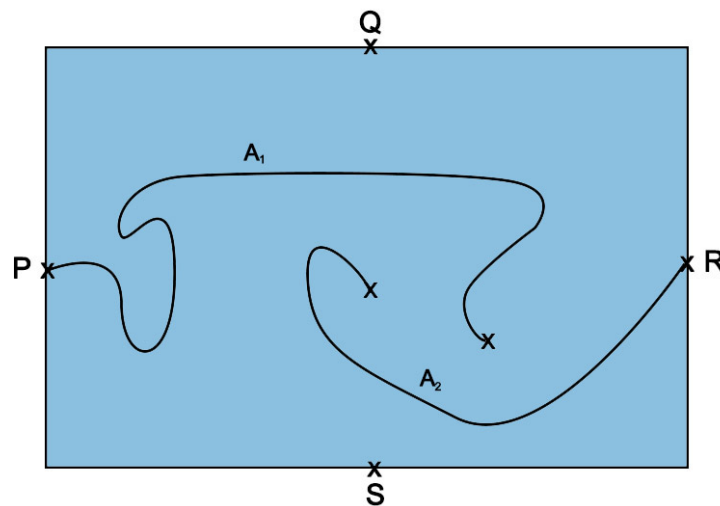


Figura 22: Teorema 4.6

Demostración.

En la figura 22, hemos dibujado \bar{I} como una región rectangular (se puede hacer por el mismo razonamiento del teorema 4.3). Además, no hay pérdida de generalidad en situar P y R en los puntos medios de un par de lados opuestos (basta hacer el giro y la traslación correspondiente de A_1 y A_2 de manera que se cumplan las condiciones del enunciado para que P y R se sitúen en los puntos medios).

Vamos a hacer una descomposición de ladrillos del plano. En nuestro caso, vamos a utilizar ladrillos que son regiones rectangulares, con lados paralelos a los bordes de $Fr I$, tal que \bar{I} es la unión de una subcolección de ellos. Usamos ladrillos de un diámetro tal que ninguno de ellos corte al mismo tiempo a A_1 y a A_2 (basta tomar como diámetro la mitad de la distancia entre A_1 y a A_2 , que es positiva pues ambos conjuntos son compactos y disjuntos).

Sea N la unión de todos los ladrillos en la descomposición que intersecan A_1 , entonces N es una variedad 2 con borde, y también lo es el conjunto

$$N' = N \cap \bar{I}$$

Sea J la componente de $Fr N'$ que contiene a P. Entonces J es una 1-esfera (pues J es un polígono, por lo tanto homeomorfo a la frontera de un 2-símplice y por tanto homeomorfo a S^1).

Sea B_1 la componente de $J \cap Fr I$ que contiene a P. Entonces B_1 es un segmento entre dos puntos T y U (pues estamos hablando del ladrillo de \bar{I} que tiene a P en su frontera), donde $T, U \in Fr I$. Sea T el punto del segmento por debajo de P y R, y sea U el punto del segmento por encima de P y R (pues recordemos que P y R los hemos tomado a la misma altura).

Sea B_2 la otra curva poligonal que conecta T y U en J (es decir, $B_1 \cup B_2 = J$). Sea V el último punto de B_2 , en el sentido TU que se encuentra en $Fr I$ y se encuentra debajo de P y R. Sea W el primer punto de B_2 después de V en $Fr I$. Entonces W se encuentra por encima de P y R en $Fr I$, pues si se encontrara por debajo, entonces $V=W$ y no se verificaría que W está después de V.

Sea B la curva poligonal entre V y W en B_2 . Entonces $B \cap Fr I = \{V, W\}$, ya que si hubiera otro punto en la intersección las definiciones de V y W no tendrían sentido. Por tanto, existe un camino que conecta a V y W y no interseca a $A_1 \cup A_2$, pues recordemos que hemos cogido la descomposición en ladrillos de tal manera que no corten al mismo tiempo a ambas curvas. Entonces V y W se encuentran en la frontera de la misma componente de $I - (A_1 \cup A_2)$. Por tanto, Q y S también se encuentran en la misma componente, bastaría con tomar un camino de Q a V y de W a S y empalmarlos

con el anterior. □

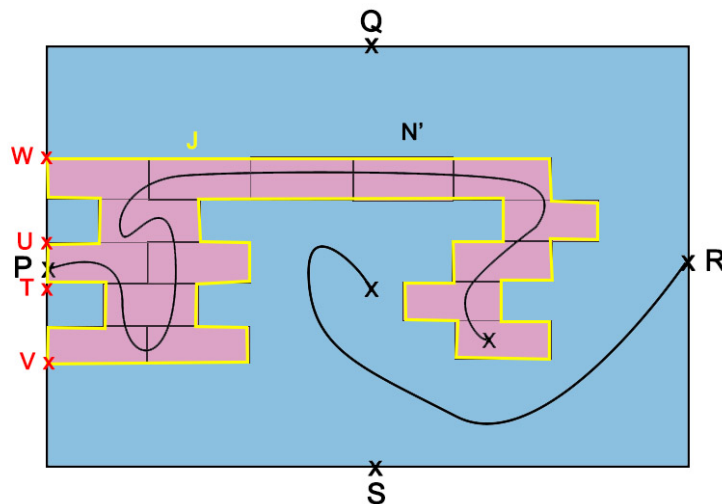


Figura 23: Teorema 4.6

Teorema 4.7 *Ningún camino no cerrado separa \mathbb{R}^2 en dos componentes conexas.*

Demostración.

Sea A un camino no cerrado en \mathbb{R}^2 . Como A está acotado, $\mathbb{R}^2 - A$ tiene exactamente una componente no acotada. Por tanto, debemos demostrar que $\mathbb{R}^2 - A$ no tiene componente acotada.

Si U es una componente acotada de $\mathbb{R}^2 - A$, entonces $Fr U \subset A$ (pues $U \subset \mathbb{R}^2 - A$) y $Fr U$ es cerrado.

En un intervalo $[a, b]$, todo conjunto cerrado M se encuentra en un intervalo mínimo $[a', b']$, con $a', b' \in M$. (Basta con tomar a' como el mayor límite inferior de M y b' como el límite superior mínimo de M . Estos pertenecen a M pues M es cerrado), luego toda homeomorfismo del intervalo $[a, b]$ tiene la misma propiedad. A tiene un subcamino A' que contiene a $Fr U$ (pues $Fr U \subset A$) y tiene sus extremos en $Fr U$ (pues $Fr U$ es cerrado en el camino A'). Por tanto, puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que los puntos finales T, T' de A reposan en $Fr U$ (pues si no, podríamos tomar el arco A' en vez de A).

Ahora encerramos A , como de costumbre, en un celda de dimensión 2, tal que A interseca $Fr I$ en exactamente dos puntos P, R .

Vamos a denotar por A_1 el trozo de camino de A que va de T a P y por A_3

el que va de R a T'. Sea $A_2 = A - (A_1 \cup A_3)$. Según el teorema 4.6, hay un segmento B, de S a Q, tal que

1. $B \cap Fr I = \{Q, S\}$.
2. $Int B \subset I$.
3. $B \cap A_1 = \emptyset$.
4. $B \cap A_3 = \emptyset$.

Sea V el primer punto de B, en el orden de S a Q, que se encuentra en A_2 . Sea W el último punto de B que se encuentra en A_2 . La existencia de estos puntos se debe a que $B \cap A_2 \neq \emptyset$, pues de lo contrario se contradiría el teorema 4.2. Sea B_1 el camino de S a V en B. Sea B_2 el camino de V a W en A_2 . Sea B_3 el camino de W a Q en B. Sea $B' = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Según el teorema 4.2, P y R se encuentran en fronteras de diferentes componentes de $I - B'$. Por lo tanto, T y T' se encuentran en diferentes componentes de $I - B'$. Pero U es conexo (la hemos definido como una componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 - A$), $U \cap B' = \emptyset$, y $T, T' \in Fr U$ (ya que hemos supuesto que los puntos finales de A reposan en Fr U), luego existe un camino en $I - B'$ que conecta T y T', en contradicción con lo anterior. Luego $\mathbb{R}^2 - A$ no tiene componente acotada. \square

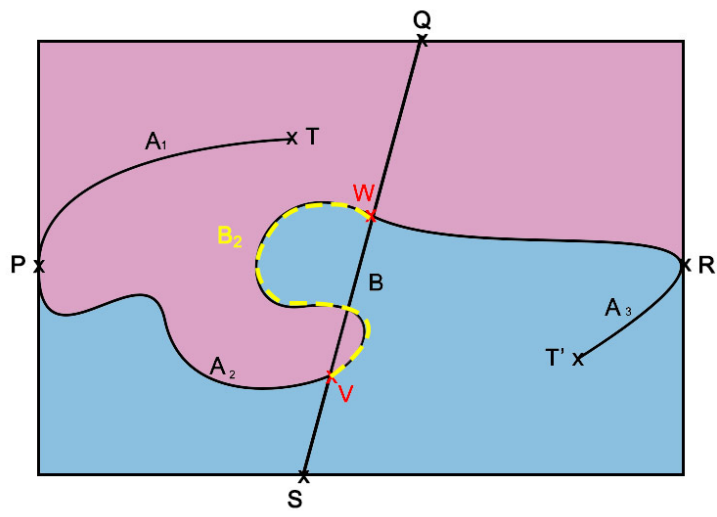


Figura 24: Teorema 4.7

Teorema 4.8 Sea J una 1-esfera en \mathbb{R}^2 , y sea U una componente de $\mathbb{R}^2 - J$. Entonces $J = Fr U$.

Demostración.

Obviamente $Fr U \subset J$ (pues $U \subset \mathbb{R}^2 - J$ y J es cerrado). Si $Fr U$ no es todo J , entonces $Fr U$ se encuentra en un arco A de J . Dado que $\mathbb{R}^2 - J$ tiene otra componente V (esto ya lo hemos visto en el teorema 4.3), se deduce que A separa \mathbb{R}^2 (pues A sería un arco que separaría U y V), lo que contradice el teorema 4.7. Luego $J = Fr U$. □

4.2.3. Existencia de una única componente acotada

Teorema 4.9 Sea J una 1-esfera en \mathbb{R}^2 . Entonces $\mathbb{R}^2 - J$ solo tiene una componente acotada.

Demostración.

En esta demostración, como de costumbre, $J = A_1 \cup A_2$. Asimismo tomamos, como de manera habitual, B el camino en \bar{I} que une Q y S . Sea T el primer punto de B (en el orden de S) que se encuentra en J , con $T \in A_1$. Sea X el último punto de B en A_1 . Sea Y el primer punto después de X en B que se encuentra en A_2 . Sea Z un punto entre X e Y en B . Sea W el último punto de B que se encuentra en A_2 . Esto se muestra en la figura 25.

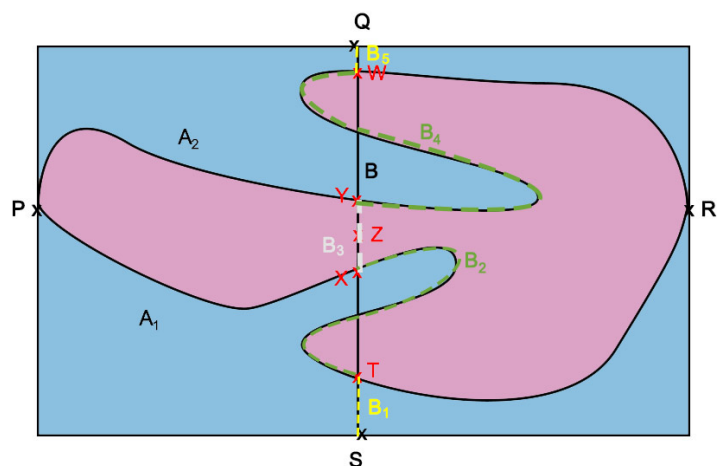


Figura 25: Teorema 4.9

Sabemos que Z se encuentra en una componente acotada de $\mathbb{R}^2 - J$ (Lema 4.5 del teorema 4.3). Necesitamos demostrar que $\mathbb{R}^2 - J$ no tiene otra componente acotada.

Sea B_1 el arco de S a T en B . Sea B_2 el arco de T a X en A_1 (si T y X son realmente diferentes; si no, sea $B_2 = T = X$). Sea B_3 el arco de X a Y en B . Sea B_4 el arco de Y a W en A_2 (si $Y \neq W$). Por último, sea B_5 el arco de W a Q en B y sea $B' = \cup_{i=1}^5 B_i$. Entonces P y R son puntos frontera de componentes distintas de $I - B'$ (por el Teorema 4.2). Por tanto, si U es una componente acotada de $\mathbb{R}^2 - J$, diferente de la componente que contiene a Z , se deduce que $U \cap B' = \emptyset$, ya que en el caso de que existiera un $C \in U \cap B'$, entonces habría un trozo de camino de B' en U que conecta C y Z , luego $Z \in U$, pero esto es imposible pues Z ya pertenece a la otra componente. De modo que $Fr U$ no puede contener ni a P ni a R (pues si los contuviera habría un camino que conecta ambos puntos que no interseca con B' , y hemos visto antes que esto no puede ser). Luego $Fr U$ se encuentra en un camino en J , lo que es imposible por el teorema 5. \square

4.2.4. Conclusión

Gracias a los teoremas anteriores, podemos por fin demostrar el teorema.

Sea J una 1-esfera topológica en \mathbb{R}^2 . De la acotación de J se deduce que $\mathbb{R}^2 - J$ tiene exactamente una componente no acotada.

En el Teorema 4.9, se demuestra que $\mathbb{R}^2 - J$ tiene una única componente acotada. Luego $\mathbb{R}^2 - J$ tiene exactamente dos componentes: una no acotada (la exterior E) y una acotada (la interior I). Basta entonces el Teorema 4.8 para concluir con el hecho de que $J = Fr E = Fr I$.

4.3. Demostración según Maehara

La demostración que propone Maehara utiliza tanto el **Teorema del punto fijo de Brouwer** como el **Teorema de extensión de Tietze**. La demostración de estos teoremas no es para nada trivial, pues para probarlos serán necesarios lemas como son el Lema de Sperner o el Lema de Uryshon.

Antes de empezar, notemos dos observaciones acerca de las componentes de $\mathbb{R}^2 - J$, donde J es una 1-esfera topológica en \mathbb{R}^2 .

Observación 4.1 $\mathbb{R}^2 - J$ tiene exactamente una componente no acotada, que sigue de la acotación de J .

Observación 4.2 Cada componente de $\mathbb{R}^2 - J$ es conexa por caminos y abierta, que se deduce de la conexión por caminos local de \mathbb{R}^2 y de que J es cerrado.

4.3.1. Teorema del punto fijo de Brouwer

Recordemos que, en teoría de grafos, el grado de un vértice es el número de aristas incidentes al vértice. Vamos a dar por supuesto el siguiente lema, cuya demostración puede encontrarse en [12].

Lema 4.10 (Lema de apretón de manos) *En un grafo finito hay un número par de vértices con grado impar.*

Nuestro primer objetivo es probar el Lema de Sperner, que nos ayudará en la demostración del Teorema del punto fijo de Brouwer.

Para facilitar la comprensión del lema, empecemos dando una explicación gráfica, para después enunciarlo. Vamos a dibujar un triángulo y vamos a colorear (o numerar) sus vértices con distintos colores (o números). Realicemos una subdivisión del triángulo en 2-símplices más pequeños como se indica en la siguiente figura.

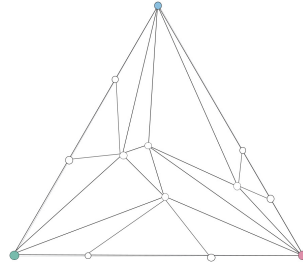


Figura 26: Lema de Sperner. Paso 1

Como vemos en la figura hemos elegido los tonos verde, azul y rojo para los vértices. Una vez hecho esto, vamos a colorear los nuevos vértices que se encuentran entre el vértice azul y el vértice rojo de azul o rojo, indistintamente. De la misma manera, los vértices que hayan aparecido entre el verde y el azul los coloreamos de estos colores de la manera que queramos, y lo mismo hacemos con el lado restante de sus colores respectivos, como se indica en la figura a continuación.

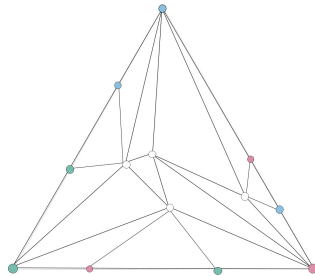


Figura 27: Lema de Sperner. Paso 2

Por último vamos a colorear los vértices en blanco centrales de manera libre. Llamamos **triángulo distinguible** al triángulo de la subdivisión cuyos vértices presentan los colores azul-verde-rojo, y llamamos **subdivisión debidamente etiquetada** a la subdivisión que sigue el proceso hasta ahora descrito. El lema de Sperner nos garantiza entonces que estos triángulos a los que hemos llamado distinguibles son impar en número (y hay al menos 1 de estos). En la siguiente figura hemos coloreado al azar esos vértices centrales y

sombreado los triángulos de la subdivisión que son distinguibles. En nuestro caso tenemos 5 de estos.

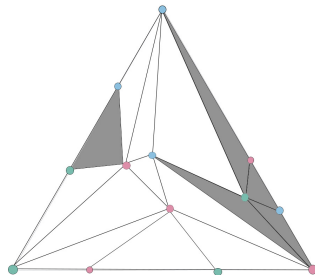


Figura 28: Lema de Sperner. Paso 3

Enunciemos entonces el Lema de Sperner.

Lema 4.11 (Lema de Sperner) *Cada subdivisión debidamente etiquetada de un triángulo tiene un número impar de triángulos distinguibles.*

Este teorema se cumple en \mathbb{R}^n , no obstante, nosotros solo necesitamos demostrarlo para 2-símplices.

Demostración.

Sea T el triángulo del que partimos. Vamos a demostrarlo a partir del grafo dual: sea T_0 la región fuera de T , y sea T_1, \dots, T_n los triángulos de la subdivisión. Construimos un grafo en el conjunto de vértices v_0, v_1, \dots, v_n (correspondientes a los conjuntos T_0, T_1, \dots, T_n). En el grafo, dos vértices v_i y v_j están conectados si las correspondientes áreas de T_i y T_j tienen un borde en común cuyos extremos están etiquetados con 0 y 1. Un ejemplo de este grafo se representa en la siguiente figura.

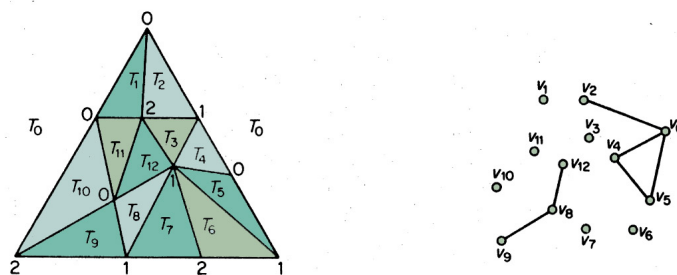


Figura 29: Lema de Sperner

En este grafo, v_0 es claramente de grado impar (basta ver que entre el vértice 0 de T y el vértice 1 de T, tiene que haber un número impar de cambios de número para obtener diferentes números al principio y al final). Por el Lema de apretón de manos (ver 4.10), hay un número par de vértices con grado impar. Se sigue que un número impar de los vértices v_1, \dots, v_n son de grado impar (quitando v_0). Ahora se ve fácilmente que ninguno de estos vértices puede tener grado 3, y aquellos con grado impar deben tener grado 1. Pero un vértice v_i tiene grado 1 si, y solo si, el triángulo T_i es distinguible (es decir, etiquetado con los números 0, 1 y 2). \square

Una vez probado este lema, podemos enfrentarnos al siguiente teorema.

Teorema 4.12 (Teorema del punto fijo de Brouwer) *Toda aplicación continua de un disco en sí mismo tiene un punto fijo.*

Demostración.

Basta ver que que una aplicación continua de un triángulo cerrado en sí mismo tiene un punto fijo, dado que un disco en dimensión 2 cerrado es homeomorfo a un triángulo cerrado. Probemos esto.

Sea T un triángulo cerrado dado con vértices x_0, x_1 y x_2 . Consideremos las coordenadas baricéntricas (ver 2.4) de cada punto x de T, de tal manera que podemos representar x por el vector (a_0, a_1, a_2) .

Ahora sea f cualquier aplicación continua de T en sí mismo, y denotemos

$$f(a_0, a_1, a_2) = (a'_0, a'_1, a'_2)$$

Sea

$$S_i = \{(a_0, a_1, a_2) \in T | a'_i \leq a_i\}$$

Para mostrar que f tiene un punto fijo, es suficiente demostrar que $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, ya que si $(a_0, a_1, a_2) \in S_0 \cap S_1 \cap S_2$, entonces, por la definición de S_i , tenemos que $a'_i \leq a_i$ para cada i , y esto, junto con el hecho de que $\sum a'_i = \sum a_i = 1$, lleva a

$$(a_0, a_1, a_2) = (a'_0, a'_1, a'_2)$$

En otras palabras, (a_0, a_1, a_2) es un punto fijo de f . Veamos entonces que $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Así, consideramos una subdivisión arbitraria de T y un etiquetado adecuado tal que cada vértice etiquetado como i pertenece a S_i (esto en nuestro ejemplo sería ver cada S_i como los vértices coloreados con el color i). El Lema de Sperner (4.11) garantiza que al menos existe un 2-símplice en la subdivisión con un vértice en S_0 , otro en S_1 y el restante en S_2 . Esto es válido para cualquier subdivisión de T y, dado que es posible elegir subdivisiones en las que cada uno de los triángulos son arbitrariamente pequeños de diámetro, se concluye que existen tres puntos de S_0, S_1 y S_2 que están arbitrariamente cerca unos de otros. Debido a que los conjuntos S_i son cerrados, se puede deducir que $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. □

4.3.2. Teorema de extensión de Tietze

Recordemos que un espacio X es **normal** si dado un par de conjuntos cerrados y disjuntos E y F , existen entornos U de E y V de F tales que $U \cap V = \emptyset$.

Para hacer frente al teorema de extensión de Tietze, vamos a hacer uso de los siguientes lemas.

Lema 4.13 (Lema de Uryshon) *Sea X un espacio normal. Sean A y B conjuntos cerrados y disjuntos de X . Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en la recta real. Entonces existe una aplicación continua*

$$f : X \longrightarrow [a, b]$$

tal que $f(x) = a$ para todo x en A , y $f(x) = b$ para todo x en B .

Demostración.

Vamos a considerar solo el caso del intervalo $[0, 1]$. La demostración se divide en cuatro partes, el primero consiste en construir una familia U_p de

abiertos de X indexados mediante números racionales, mediante los que se construirá la función continua f . Vamos con ello.

Sea P el conjunto de los números racionales en $[0,1]$. Vamos a definir el conjunto U_p para $p \in P$ como sigue. Buscamos definir U_p de tal manera que si $p < q$ tengamos $\overline{U_p} \subset U_q$. Primero definimos $U_1 = X - B$. Luego, como A es un cerrado contenido en el abierto U_1 , puesto que X es normal, podemos elegir un conjunto abierto U_0 de manera que

$$A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$$

Denotemos por p_n el conjunto de los n primeros números racionales en la secuencia. Supongamos que U_p está definido para todos los números racionales p pertenecientes al conjunto P_n que satisfacen la condición

$$p < q \Leftrightarrow \overline{U_p} \subset U_q \quad (1)$$

Sea r el número racional siguiente en la serie. Buscamos definir U_r .

Consideramos el conjunto $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. En esta serie, el número 0 es el menor elemento y 1 el mayor, y r no es ni 0 ni 1 , por lo que r tiene un predecesor p en P_{n+1} y un sucesor q . Estos conjuntos ya han sido definidos y se tiene que $\overline{U_p} \subset U_q$ por hipótesis de inducción. Debido a la normalidad de X , podemos encontrar conjuntos abiertos U_r de X tales que

$$\overline{U_p} \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_q$$

Luego (1) se cumple para cualquier par de elementos de P_{n+1} : si ambos elementos están en P_n , (1) se cumple por la HI. Por otro lado, si uno de ellos es r y el otro es un punto s de P_n , (1) se sigue verificando pues si $s \leq p$ se tiene que

$$\overline{U_s} \subset \overline{U_p} \subset U_r$$

y si $s \geq q$ se tiene que

$$\overline{U_r} \subset U_q \subset U_s$$

Luego (1) se cumple para todo par de P_{n+1} , y por inducción hemos definido U_p para todo $p \in P$.

Comenzamos con el segundo paso. Vamos ahora a extender los p a todos los racionales de \mathbb{R} definiendo

$$U_p = \emptyset \text{ si } p < 0$$

$$U_p = X \text{ si } p > 1$$

y se sigue verificando (1).

Ahora en el tercer paso definimos

$$Q(x) = \{p \mid x \in U_p\}$$

Este conjunto no tiene números inferiores a 0 y contiene a todos los números mayores que 1. Por lo que Q está acotada inferiormente. Sea ahora

$$f(x) = \inf Q(x)$$

Queda una cuarta etapa en la que vamos a demostrar que f es la función deseada. Primero veamos que verifica las condiciones del teorema y después que es continua, algo que requiere más detalle.

Si $x \in A$ entonces $x \in U_p$ para todo $p \geq 0$ (pues $A \subset U_0 \subset U_p$ si $0 < p$) y así $f(x) = 0$. Si $x \in B$ entonces $x \in U_p$ para ningún $p \leq 1$ (pues recordemos que $U_1 = X - B$) y así $f(x) = 1$.

Vamos ahora con la continuidad. Empecemos demostrando

- $x \in U_r \Rightarrow f(x) \leq r$
- $x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geq r$

$x \in U_r \Rightarrow f(x) \leq r$ sigue del hecho de que si $x \in U_r$, entonces $x \in U_s$ para todo $s > r$. Luego $Q(x)$ contiene todos los números racionales mayores que r , y por definición

$$f(x) = \inf Q(x) \leq r$$

En cuanto a $x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geq r$, notemos que si $x \notin U_r$ entonces x no está en U_s para $s < r$. Luego como antes

$$f(x) = \inf Q(x) \geq r$$

Probemos ahora la continuidad de f . Tomemos números racionales p y q tales que

$$c < p < f(x_0) < q < d$$

donde $x_0 \in X$. Ahora el conjunto abierto

$$U = U_q - \overline{U_p}$$

es el entorno de x_0 que cumple que $f(U) \subset (c, d)$. Luego $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$ como queríamos. \square

Lema 4.14 *Sea X un espacio normal y de Hausdorff. Sea $A \subset X$ un subconjunto cerrado. Sea I un intervalo cerrado de la recta real. Sea $g : A \rightarrow I$ una función continua que verifica $|g(a)| \leq c, \forall a \in A$ para cierto $c \in I$. Luego existe una función continua $h : X \rightarrow I$ tal que*

1. $|h(x)| \leq \frac{1}{3}c, \forall x \in X$
2. $|g(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c, \forall a \in A$

Demostración.

Sea

$$A_+ = \{a \in A \mid g(a) \geq \frac{1}{3}c\}$$

$$A_- = \{a \in A \mid g(a) \leq -\frac{1}{3}c\}$$

Estos conjuntos son disjuntos y puesto que son cerrados en A , son cerrados en X . Puesto que por hipótesis X es normal, por el Lema de Uryshon (4.13) existe una función $h : X \rightarrow I$ que vale $\frac{1}{3}c$ en A_+ y $-\frac{1}{3}c$ en A_- y que cumple $-\frac{1}{3}c \leq h(x) \leq \frac{1}{3}c$ en X . Esta función verifica las condiciones del lema. \square

Demostremos ahora el teorema.

Teorema 4.15 (Teorema de extensión de Tietze) *Sea X un espacio Hausdorff. Si X es normal, entonces para todo cerrado $A \subset X$ toda función continua $f : A \rightarrow [a, b]$ tiene una extensión continua $F : X \rightarrow [a, b]$.*

Demostración.

Vamos a llegar al resultado en 3 pasos.

1. $|f(a)| \leq c$ en A . Poniendo f como la g descrita en el Lema 4.14, sabemos que existe una función $h_0 : X \rightarrow [a, b]$ que verifica $|f(a) - h_0(a)| \leq \frac{2}{3}c$ en A . Aplicamos el Lema 4.14 de nuevo, esta vez a la función $f - h_0$ definida en A , para obtener $h_1 : X \rightarrow [a, b]$ que satisface

$$|h_1(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}c, \forall x \in X$$

$$|f(a) - h_0(a) - h_1(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}c, \forall a \in A$$

Por inducción, supongamos que tenemos definidas h_0, \dots, h_n . Aplicamos el lema a la función $g = f - h_0 - \dots - h_n$ en A para obtener $h_{n+1} : X \rightarrow [a, b]$ que satisface

$$|h_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n c, \quad \forall x \in X$$

$$|f(a) - h_0(a) - \dots - h_{n+1}(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n c, \quad \forall a \in A$$

Así obtenemos una función h_n para cada n en los naturales. La función $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$ es continua en X , por ser suma de funciones continuas. La segunda desigualdad demuestra $F(a) = f(a)$ para cada $a \in A$ (basta hacer tender n a infinito), y la primera muestra que $|F(x)| \leq \frac{1}{3}c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = c$.

2. $|f(a)| < c$ en A . La extensión F construida en (1) satisface $F(x) \leq c$. Sea $A_0 = \{x \mid F(x) = c\}$. Luego A_0 es cerrado en X y $A_0 \cap A = \emptyset$ (pues $|f(a)| < c$ en A). Por lo tanto, por el lema de Uryshon existe una función $\phi : X \rightarrow [a, b]$ que toma el valor 1 en A y el valor 0 en A_0 , con $0 \leq \phi(x) \leq 1$ en X . Definimos $G(x) = \phi(x) \cdot F(x)$. Puesto que esta función es también continua (producto de dos funciones continuas) y que $\phi(a) = 1, \forall a \in A$, tenemos que $G(a) = F(a) = f(a)$ para cada a en A , demostrando así que G es también una extensión de f en X .
3. f no está necesariamente acotada. Sea $h : [a, b] \rightarrow (-1, 1)$ el homeomorfismo que envía x en $\frac{x}{1+|x|}$. Por (2), la aplicación $h \circ f$ tiene una extensión F , luego $h^{-1} \circ F$ es una extensión de f , pues $h^{-1} \circ F(a) = h^{-1} \circ h \circ f(a) = f(a)$ para cada a de A . Lo que concluye la prueba.

□

4.3.3. Otros lemas

El siguiente lema ya lo hemos probado en 4.8. Vamos a utilizar el Teorema de extensión de Tietze para demostrarlo de una manera más abreviada.

Lema 4.16 *Sea J una 1-esfera topológica en \mathbb{R}^2 . Si $\mathbb{R}^2 - J$ no es conexo, entonces cada componente tiene J como su frontera.*

Demostración.

Por hipótesis, $\mathbb{R}^2 - J$ tiene al menos dos componentes. Sea U una componente arbitraria. Dado que cualquier otra componente W es disjunta con U y es abierta, W no contiene ningún punto de \bar{U} y, por tanto, ningún punto de la frontera $\bar{U} \cap U^c$ de U (pues U es abierto). Así, $\bar{U} \cap U^c \subset J$. Supongamos ahora $\bar{U} \cap U^c \neq J$. Entonces existe un camino $A \subset J$ tal que

$$\bar{U} \cap U^c \subset A \quad (2)$$

Demostraremos que esto conduce a una contradicción. Por la observación 4.2, $\mathbb{R}^2 - J$ tiene al menos una componente acotada. Sea P un punto en una componente acotada; si U está acotado, elegimos P en U . Sea D un disco de radio R con centro P tal que su interior contenga a J . Entonces la frontera S de D está contenida en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 - J$. Dado que el camino A es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, la aplicación identidad $A \rightarrow A$ tiene una extensión continua $r : D \rightarrow A$ por el Teorema de extensión de Tietze (4.15). Definimos una aplicación $q : D \rightarrow D - \{P\}$ dependiendo de si U está acotado o no.

Si U está acotado definimos

$$q(z) = \begin{cases} r(z) & \text{si } z \in \bar{U} \\ z & \text{si } z \in U^c \end{cases}$$

Por otro lado, si U no está acotado definimos

$$q(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in \bar{U} \\ r(z) & \text{si } z \in U^c \end{cases}$$

Por (2), la intersección de los dos conjuntos cerrados \bar{U} y U^c se encuentra en A , donde r es la aplicación identidad. Por tanto, q está bien definida y es continua. Tenga en cuenta que $q(z) = z$ si $z \in S$. Sea $p : D - \{P\} \rightarrow S$, $p(z) = R \cdot \frac{z}{\|z\|}$ la proyección natural y sea $t : S \rightarrow S$ la aplicación antípoda. Entonces la composición $t \circ p \circ q : D \rightarrow S \subset D$ no tiene un punto fijo. Veamos esto. Sea $z \in D$. Supongamos que U está acotado, en caso contrario se razona de manera similar.

Si $z \in U^c$, $t \circ p \circ q(z) = t \circ p(z) = t(R \cdot \frac{z}{\|z\|}) \in S$. La aplicación antípoda asegura que esta composición no tenga un punto fijo, al mandar z al simétrico respecto de P . Se razona de manera similar si $z \in \bar{U}$. Esto contradice el teorema del punto fijo de Brouwer. \square

Notemos que la demostración precedente contiene implícitamente una prueba

de que no existe ningún camino no cerrado que separe \mathbb{R}^2 en dos componentes conexas, que fue igualmente probado de otra manera en la demostración de Moise (ver 4.7).

Lema 4.17 Sea $E(a, b; c, d) = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ un conjunto rectangular en \mathbb{R}^2 , donde $a < b$ y $c < d$. Sean $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ y $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ donde $t \in [-1, 1]$ caminos continuos en $E(a, b; c, d)$ que satisfacen

$$h_1(-1) = a \quad h_1(1) = b \quad v_2(-1) = c \quad v_2(1) = d \quad (3)$$

Entonces los dos caminos se encuentran, es decir $h(s) = v(t)$ para algunos valores s, t en $[-1, 1]$.

Demostración.

Supongamos que $h(s) \neq v(t)$ para todo s, t . Sea $N(s, t)$ la norma máxima de $h(s) - v(t)$, es decir

$$N(s, t) = \max\{|h_1(s) - v_1(t)|, |h_2(s) - v_2(t)|\}$$

Luego $N(s, t) \neq 0$ para todo s, t . Definimos ahora una aplicación continua F de $E(-1, 1; -1, 1)$ en sí mismo dada por

$$F(s, t) = \left(\frac{v_1(t) - h_1(s)}{N(s, t)}, \frac{v_2(t) - h_2(s)}{N(s, t)} \right) \quad (4)$$

Notemos que la imagen de F está en la frontera de $E(-1, 1; -1, 1)$. Para ver que F no tiene un punto fijo, supongamos que $F(s_0, t_0) = (s_0, t_0)$. Por la observación anterior, tenemos $|s_0| = 1$ o $|t_0| = 1$. Supongamos por ejemplo $s_0 = -1$. Luego, por (3), la primera coordenada de $F(-1, t_0)$, que es $\frac{v_1(t_0) - h_1(-1)}{N(-1, t_0)}$, es no negativo (ya que $N(s, t) > 0, \forall s, t$ y $v_1(t_0) - h_1(-1) = v_1(t_0) + 1 > 0$ pues $v_1(t_0) > -1$) y, por lo tanto, no puede ser igual a $s_0 = -1$. Del mismo modo, el resto posibilidades de $|s_0| = 1$ o $|t_0| = 1$ no pueden ocurrir. Esto contradice el teorema del punto fijo de Brouwer, ya que $E(-1, 1; -1, 1)$ es homeomorfo a un disco. \square

Una vez demostrados el Teorema de extensión de Tietze, el Teorema del punto fijo de Brouwer y los Lemas 4.16 y 4.17, estamos en condiciones de probar el Teorema de la curva de Jordan.

4.3.4. Prueba del Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan. Sea J una 1-esfera topológica en \mathbb{R}^2 , entonces $\mathbb{R}^2 - J$ es la unión de dos conjuntos conexos y disjuntos I y E tales que $J = Fr I = Fr E$. Además, una de estas componentes conexas está acotada (interior), y la otra no (exterior).

Demostración.

Por el Lema 4.16, solo necesitamos demostrar que $\mathbb{R}^2 - J$ tiene una única componente acotada. La prueba constará de los siguientes tres pasos:

1. Establecer la notación y definir un punto Z_0 , en $\mathbb{R}^2 - J$.
2. Probar que la componente U que contiene Z_0 , está acotada
3. Demostrar que no hay ninguna componente acotada que no sea U .

Como J es compacto, existen puntos A, B en J tales que la distancia $\|A - B\|$ es la mayor posible. Podemos suponer que $A = (-1, 0)$ y $B = (1, 0)$. Entonces el conjunto rectangular $E(-1, 1; -2, 2)$ contiene a J , y su frontera Γ se encuentra con J exactamente en dos puntos A y B (lo que estamos haciendo es inscribir J en un rectángulo). Sea N el punto medio del lado superior de $E(-1, 1; -2, 2)$, y S el punto medio del lado inferior; es decir, $N = (0, 2)$ y $S = (0, -2)$.

El segmento \overline{NS} se encuentra con J por el Lema 2. Sea L el último punto, en el sentido de S a N , que se encuentra en $J \cap \overline{NS}$. Los puntos A y B dividen a J en dos arcos, denotamos aquel que contiene a L por J_N y el otro por J_S . Sea M el primer punto, en el sentido de S a N , en $J_N \cap \overline{NS}$, notemos que es posible que $L = M$. Entonces el segmento \overline{MS} se encuentra con J_S .

De lo contrario, el camino $\overline{NL} + \widehat{LM} + \overline{MS}$ (donde \widehat{LM} denota el subarco de J_N , con puntos finales L y M) no podrían encontrarse con J_S contradiciendo el Lema 4.17.

Sea P el último punto, en el sentido de S a N , en $J_S \cap \overline{MS}$. Sea Q el primer punto, en el sentido de S a N , en $J_S \cap \overline{MS}$. Finalmente, sea Z_0 el punto medio del segmento \overline{MP} . Todo esto está dibujado en la siguiente gráfica.

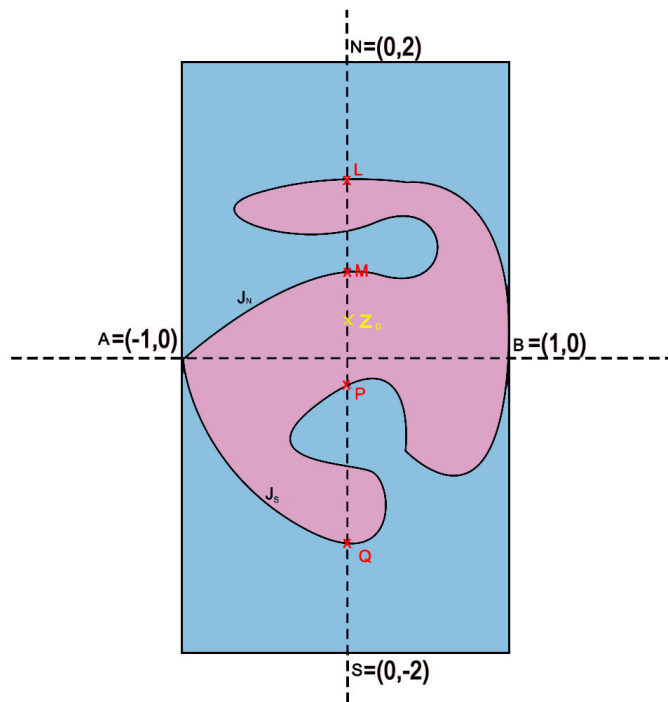


Figura 30: Demostración según Maehara: primera parte

Ahora mostramos que U , la componente de $\mathbb{R}^2 - J$ que contiene Z_0 , está acotada. Supongamos que U no está acotada. Dado que U es conexo por caminos, existe un camino α en U desde Z_0 , hasta un punto fuera de $E(-1, 1; -2, 2)$. Sea W el primer punto en el que α se encuentra con la frontera Γ de $E(-1, 1; -2, 2)$.

Denotamos por α_W la parte de α desde Z_0 hasta W . Si W está en la mitad inferior de Γ , podemos encontrar un camino \widehat{WS} en Γ de W a s que no contiene ni A ni B . Ahora considere el camino $\overline{NL} + \widehat{LM} + \overline{MZ_0} + \alpha_W + \widehat{WS}$.

Este camino no se encuentra con J_S , lo que contradice el Lema 4.17. De manera similar, si W está en la mitad superior de Γ , el camino $\overline{SZ_0} + \alpha_W + \widehat{WN}$ no se encuentra con J_N , donde \widehat{WN} es la ruta más corta en Γ desde W hasta N . La contradicción muestra que U es una componente acotada. Vemos la representación de estos pasos en la siguiente gráfica.

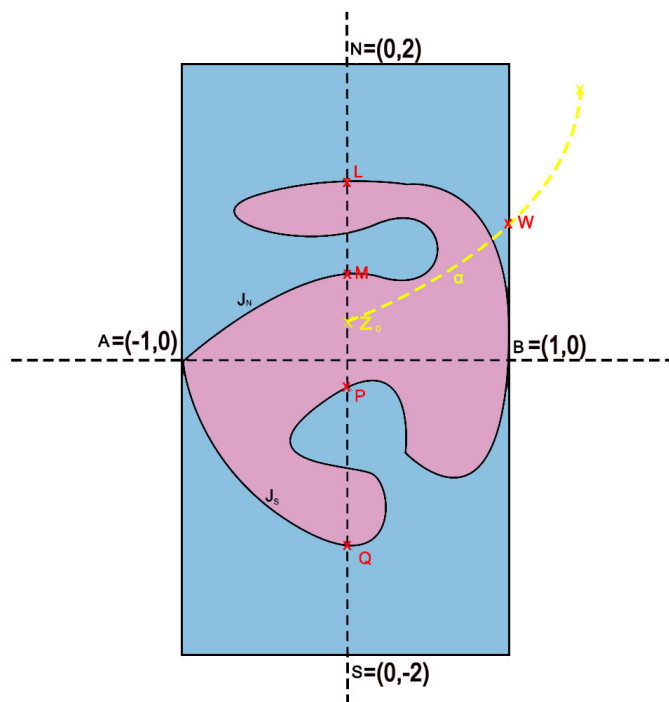


Figura 31: Demostración según Maehara: segunda parte

Finalmente, supongamos que existe otra componente acotada $U' (\neq U)$ de $\mathbb{R}^2 - J$. Claramente $U' \subset E(-1, 1; -2, 2)$. Denotamos por β el camino $\overline{NL} + \widehat{LM} + \overline{MP} + \widehat{PQ} + \overline{QS}$, donde \widehat{PQ} es el subarco de J_s de P a Q. Como se ve fácilmente, β no tiene ningún punto de U' (pues sino $U' \cap U \neq \emptyset$ y al ser componentes conexas esto implicaría $U = U'$). Dado que A y B no están en β , hay entornos V_A, V_B de A y B, respectivamente, de manera que cada uno de ellos no contiene ningún punto de β .

Por el Lema 4.16, A y B están en \overline{W} . Por lo tanto, existen $A_1 \in U' \cap V_A$ y $B_1 \in U' \cap V_B$. Sea $\widehat{A_1B_1}$ un camino en U' desde A_1 a B_1 . Entonces, el camino $\overline{AA_1} + \widehat{A_1B_1} + \overline{B_1B}$ no se encuentra con β . Esto contradice el Lema 4.17 y completa nuestra demostración.

□

5. Triangulación de superficies

Hasta ahora, lo visto en el grado sobre superficies se limitaba a hablar de parametrizaciones, geometría local intrínseca y extrínseca, orientabilidad... Pero nunca se ha tratado la triangulación de una superficie.

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema de Radó, que dice que toda variedad topológica de dimensión dos es triangulable. Para ello, es necesario preparar el terreno dando las definiciones y resultados necesarios que van a permitir abordar el teorema.

Una vez demostrado el teorema, se invita al lector a consultar el Apéndice III, donde, al igual que en el teorema de la curva de Jordan, se expone brevemente lo que sucede con el teorema de triangulación en dimensiones mayores.

5.1. Homeomorfismos lineales a trozos

En este apartado vamos a introducir la definición de homeomorfismo lineal a trozos. Daremos, además, dos resultados que, entre otras cosas, nos permitirán establecer una relación directa entre la triangulación de un polígono y un símlice.

A partir de ahora, vamos a utilizar la notación PL (del inglés *piecewise linear*) para referirnos a lineal a trozos. Así escribiremos homeomorfismo PL, complejo PL y otros conceptos que introduciremos más adelante con el fin de abreviar.

Definición 5.1 Sean K y L complejos simpliciales y f un homeomorfismo

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

Decimos que el **homeomorfismo es lineal a trozos** (respecto de K y L), denotado también *PLH* del inglés *piecewise linear homeomorphism*, si existe una subdivisión K_1 de K tal que para cada $\sigma \in K_1$, la restricción $f|_{\sigma}$ envía linealmente σ en un símlice de L .

Ya vimos en el Teorema 3.8 que todo polígono J es homeomorfo a la frontera de un 2-símlice σ^2 . Ahora, vamos a ver que no solo existe un homeomorfismo entre ambos, sino que de hecho existe un homeomorfismo PL. Esto hace que exista una triangulación K de la adherencia del interior de J y otra L de σ^2 , tales que son isomorfas, en el sentido de 2.8. Expliquemos esto con un ejemplo gráfico.

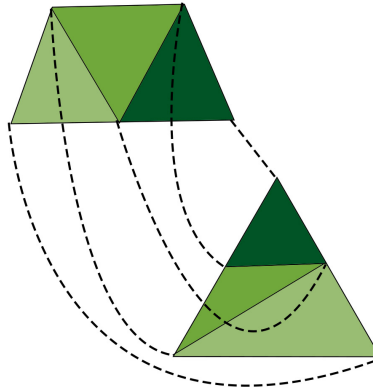


Figura 32: Ejemplo teorema 5.1. Vemos que dados un trapecio y un triángulo, existe un isomorfismo entre una triangulación K_1 del trapecio y otra K_2 del triángulo.

Todo esto se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 5.1 *Sea J un polígono en \mathbb{R}^2 , sea I su interior y sea K un subcomplejo de una triangulación de \mathbb{R}^2 tal que $|K| = \bar{I}$. Entonces existe un 2-símplice σ^2 y un PLH $f: \bar{I} \rightarrow \sigma^2$ que envía J en $Fr \sigma^2$. En particular, K es una celda combinatoria de dimensión 2.*

Demostración.

Ya hemos demostrado (Teorema 3.4) que si J es un polígono en \mathbb{R}^2 , con interior I , entonces $\bar{I} = |K|$ es un poliedro finito, para algún complejo finito K .

También hemos probado en el Teorema 3.7 que existe un homeomorfismo f tal que

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ J &\longmapsto Fr \sigma^2 \end{aligned}$$

Donde σ^2 es un 2-símplice. En la demostración utilizamos el hecho de que un 2-símplice libre τ^2 de K siempre se puede eliminar del mismo mediante un homeomorfismo, de hecho, el homeomorfismo que se utiliza en la prueba es PL (respecto de K y la nueva triangulación al eliminar τ^2), y también es PL el homeomorfismo f que sale de iterar varias veces este proceso, lo que concluye la prueba.

Ahora tenemos un homeomorfismo f y una subdivisión K_1 de K tal que para cada $\tau \in K_1$, la restricción $f|_{\tau}$ envía linealmente τ en un símlice de

una subdivisión L de σ^2 , lo que es equivalente a que K_1 y L sean isomorfas, luego K es una celda 2-combinatoria. \square

Teorema 5.2 Sean K_1 y K_2 celdas combinatorias de dimensión 2 y sea $f : Fr |K_1| \rightarrow Fr |K_2|$ un PLH. Entonces f tiene una extensión PLH $f' : |K_1| \rightarrow |K_2|$

Demostración.

Primero notemos que al hablar de un PLH entre $Fr |K_1|$ y $Fr |K_2|$ simplemente estamos hablando de un homeomorfismo que envía segmentos (de una subdivisión de $Fr |K_1|$) en segmentos (de $Fr |K_2|$). Pongamos un ejemplo gráfico de este hecho.

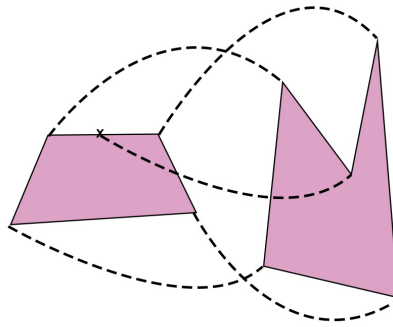


Figura 33: Ejemplo teorema 5.2

Vamos entonces con la demostración del teorema 5.2.

Sea σ^2 un 2-símplice. Como K_i es una celda 2-combinatoria, podemos considerar para $i = 1, 2$, un PLH $g_i : \sigma^2 \rightarrow |K_i|$ (notemos que no pasa nada por considerar el mismo σ^2 ya que entre dos 2-símplices siempre existe un PLH entre ellos). Luego $g_2^{-1}|_{Fr \sigma^2} \circ f \circ g_1|_{Fr \sigma^2}$ es un PLH $Fr \sigma^2 \rightarrow Fr \sigma^2$ (pues la composición de PLH es PLH). Por el Teorema 5.1, tomando $J = Fr \sigma^2$, esto posee una extensión PLH $g' : \sigma^2 \rightarrow \sigma^2$. Sea $f' = g_2 \circ g' \circ g_1^{-1}$. Tenemos entonces el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \sigma^2 & \xrightarrow{g_2} & |K_2| \\ g_1 \downarrow & \nearrow f' & \\ |K_1| & & \end{array}$$

Luego f' es un PLH $|K_1| \rightarrow |K_2|$ y

$$f'|_{Fr K_1} = g_2 \circ g_2^{-1} \circ f \circ g_1 \circ g_1^{-1} = f$$

que es lo que queríamos. □

5.2. Aproximaciones lineales a trozos de homeomorfismos

Dados dos espacios métricos (X, d) y (Y, d') , y dos aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$, se dice que g es una ϵ -**aproximación de f** si

$$d'(f(P), g(P)) < \epsilon, \forall P \in X$$

Vamos a refinar un poco más la idea. Introducimos ahora la definición de función fuertemente positiva, que usaremos más adelante.

Definición 5.2 $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ se llama **función fuertemente positiva**, que denotamos por $\phi \gg 0$ si ϕ es una función (no necesariamente continua) acotada inferiormente en cada conjunto compacto, es decir, si M es un conjunto compacto, existe $\epsilon_M > 0$ tal que $\phi(P) > \epsilon_M$ para cada $P \in M$.

Definición 5.3 Sea $\phi \gg 0$ en X , y sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones, se dice que g es una ϕ -**aproximación de f** si

$$d'(f(P), g(P)) < \phi(P), \forall P \in X$$

Dado un espacio métrico (X, d) , vamos a denotar por $B(A, \epsilon) = \{P \in X : d(P, Q) < \epsilon \forall Q \in A\}$. Empecemos enunciando una lema fácil que utilizaremos en la demostración del siguiente teorema.

Lema 5.3 Sea $[v, v']$ un 1-símplice. Sea $h : [v, v'] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que envía $v \mapsto P$, $v' \mapsto Q$, y sea ϵ un número positivo. Entonces existe una curva poligonal B , de P a Q , contenida en $B(A, \epsilon)$.

Demostración.

Obviamente $B(A, \epsilon)$ es abierto y conexo. Luego es un conjunto conexo por caminos, luego existe un camino (que podemos tomarlo como una curva poligonal) B , de P a Q . □

Sea $M \subset X$, vamos a denotar δM al diámetro del conjunto X , es decir, $\delta M = \max\{d(P, Q) : P, Q \in M\}$

Teorema 5.4 Sea K^1 un complejo 1-dimensional. Sea $h : |K^1| \rightarrow M \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo, y sea $\phi \gg 0$ en K^1 . Entonces hay un PLH $f : |K^1| \rightarrow M$ tal que

1. f es una ϕ -aproximación de h .
2. Para cada vértice v de K^1 se tiene que $h(v) = f(v)$.

Demostración.

Para cada arista e de K^1 , sea $\epsilon_e = \inf \{\phi|_e(P) \mid P \in e\}$. Entonces $\epsilon_e > 0$ para cada e (pues una función fuertemente positiva es siempre positiva). Para cada $e \in K^1$, $h|_e$ es uniformemente continua pues h es continua en el compacto e , es decir, dados $v_i, v_j \in e$ y $\epsilon_e > 0$, existe δ_e tal que si $d(v_i, v_j) < \delta_e$ entonces se tiene que $d'(h(v_i), h(v_j)) < \frac{\epsilon_e}{3}$. Podemos tomar entonces una subdivisión L de K^1 , suficientemente fina como para que para cada arista $[v_i, v_j] \subset e$ de L se tenga que

$$\delta h([v_i, v_j]) < \frac{\epsilon_e}{3}$$

donde e es la arista de K^1 que contiene a $[v_i, v_j]$. Denotemos a los vértices de L por

$$v_0, v_1, \dots$$

para cada i , sea

$$w_i = h(v_i)$$

para cada i, j sea

$$A_{ij} = h([v_i, v_j])$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\epsilon_e}{3}$$

Entonces tenemos

$$\delta A_{ij} = \delta h([v_i, v_j]) < \frac{\epsilon_e}{3} = \epsilon_{ij}$$

Luego tenemos que para cada $P, Q \in B(A_{ij}, \epsilon_{ij})$, $d(P, Q) < \epsilon_{ij} + \delta A_{ij} + \epsilon_{ij} < 3\epsilon_{ij} = \epsilon_e$.

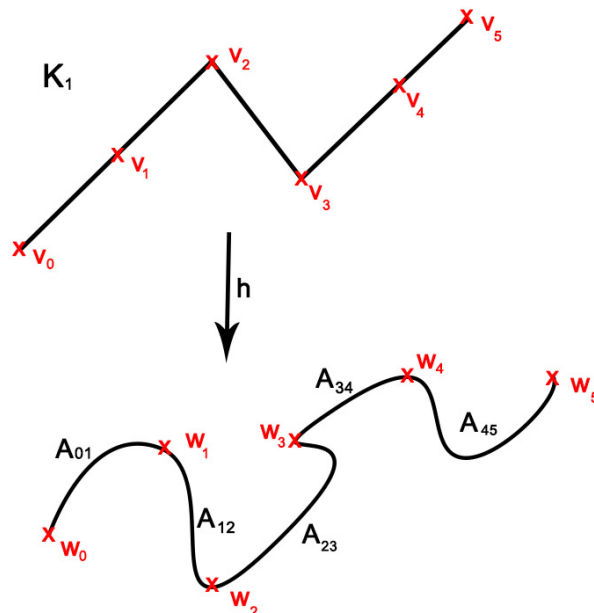


Figura 34: Ejemplo Teorema 5.4

Tomamos ahora una sucesión de números reales positivos ϵ_i tal que si denotamos para cada i

$$N_i = B(w_i, \epsilon_i) \quad C_i = Fr N_i$$

se tiene

1. Los conjuntos $\overline{N_i}$ son disjuntos. (Pues podemos tomar los ϵ_i tan pequeños como queramos).
2. $\epsilon_i < \epsilon_{ij}$ siempre y cuando $[v_i, v_j] \in L$.
3. $\overline{N_i}$ interseca A_{jk} si, y solo si $i = j$ o $i = k$.

Cada conjunto $A_{ij} = h([v_i, v_j])$ es un camino de w_i a w_j (pues h es continua y va desde $h(v_i) = w_i$ hasta $h(v_j) = w_j$).

Sea x_{ij} el último punto de A_{ij} que se encuentra en C_i . Sea x'_{ij} el primer punto de A_{ij} que sigue a x_{ij} y se encuentra en C_j . Sea A'_{ij} un camino de x_{ij} a x'_{ij} en A_{ij} . Como en la figura a continuación.

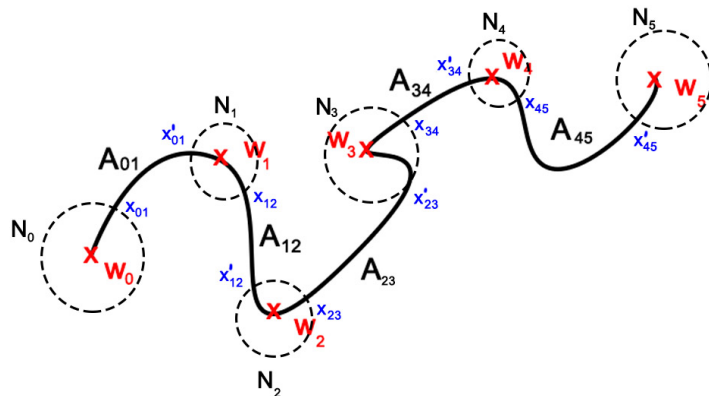


Figura 35: Ejemplo Teorema 5.4

Por la proposición anterior, todo entorno de A'_{ij} contiene una curva poligonal B_{ij} desde x_{ij} a x'_{ij} (bastaría tomar como h en la proposición el camino en A'_{ij} entre x_{ij} y x'_{ij}). Si estos entornos de los conjuntos A'_{ij} son suficientemente pequeños, entonces los conjuntos B_{ij} son disjuntos y tenemos que

$$B_{ij} \subset B(A_{ij}, \epsilon_{ij})$$

Sea ahora y_{ij} el último punto de B_{ij} que se encuentra en C_i , y sea y'_{ij} el primer punto de B_{ij} que sigue a y_{ij} y se encuentra en C_j . Sea B'_{ij} el camino desde y_{ij} a y'_{ij} en B_{ij} . Sea

$$B''_{ij} = w_i y_{ij} \cup B'_{ij} \cup y'_{ij} w_j$$

Donde $w_i y_{ij}$ denota el camino de w_i a y_{ij} en $A_{ij} \cup B_{ij}$. Lo mismo con $y'_{ij} w_j$. Entonces B''_{ij} es un camino de w_i a w_j . Se tiene entonces que

$$B''_{ij} \subset B(A_{ij}, \epsilon_{ij})$$

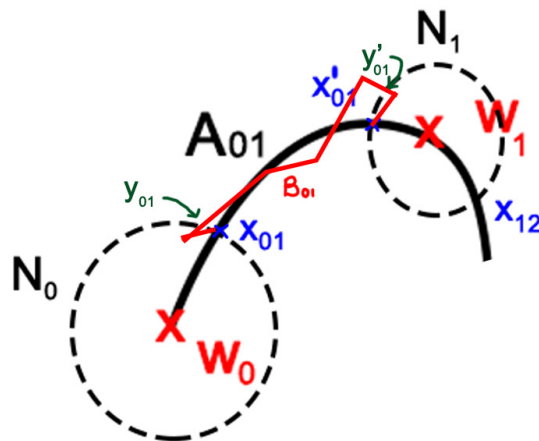


Figura 36: Ejemplo Teorema 5.4

Definimos ahora

$$f : |K^1| \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definiendo el PLH

$$\begin{aligned} f|_{[v_i, v_j]} : [v_i, v_j] &\longrightarrow B''_{ij} \\ v_i &\longmapsto w_i \\ v_j &\longmapsto w_j \end{aligned}$$

Entonces f es el PLH que buscábamos. Nos falta ver que se trata de una ϕ -aproximación de h , para ello puesto que $P \in [v_i, v_j] \in L$, donde $[v_i, v_j] \subset e$, entonces $h(P), f(P) \in B(A_{ij}, \epsilon_{ij})$, y ya hemos visto antes que si

$$P, Q \in B(A_{ij}, \epsilon_{ij}), \implies d(P, Q) < \epsilon_e$$

luego

$$d(h(P), f(P)) < \epsilon_e \leq \phi(P)$$

□

En la siguiente demostración, si A y B son conjuntos de puntos en un espacio métrico. Definimos

$$d(A, B) = \inf \{d(P, Q) \mid P \in A, Q \in B\}$$

Si A es compacto, B es cerrado, y A y B son disjuntos, se tiene que $d(A, B) > 0$.

Teorema 5.5 *Sea K una 2-variedad combinatoria con borde (ver 2.12), sea $h : |K| \rightarrow M \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo, y sea $\phi : |K| \rightarrow \mathbb{R}$ una función fuertemente positiva. Entonces existe un PLH $f : |K| \rightarrow M$ tal que f es una ϕ -aproximación de h .*

Demostración.

Sea L una subdivisión de K , y $\psi \gg 0$ en el 1-esqueleto $|L^1|$, entonces se puede aplicar el teorema anterior a la restricción $h|_{|L^1|}$, obteniendo una ψ -aproximación PLH $f|_{|L^1|}$. Por el teorema 5.1, junto con el teorema 5.2, cada PLH $f|_{Fr\sigma^2}$ con $\sigma^2 \in L$ puede extenderse para dar un PLH $f|_{\sigma^2}$. Por lo tanto, buscamos una subdivisión L y ψ de manera que

1. La caracterización de los homeomorfismos PL $f|_{\sigma^2}$ permite dar un PLH $f : |L| \rightarrow \mathbb{R}^2$.
2. f es una ϕ -aproximación de h .

Vamos con ello. Para cada 2-símplice $\sigma \in L$, sea τ el 2-símplice de K , que contiene a σ ($\sigma \subset \tau$), y sea

$$\epsilon_\tau = \inf \{(\phi|_\tau(P) | P \in \tau)\}$$

Sea asimismo

$$\epsilon_\sigma = \frac{1}{3}\epsilon_\tau$$

Elegimos L como una subdivisión suficientemente fina (podemos hacerlo pues podemos tomar subdivisiones tan pequeñas como queramos) para que para cada $\sigma \in L$ se tenga que

$$\delta h(\sigma) < \epsilon_\sigma$$

Para cada 2-símplice $\sigma \in L$, sea

$$\theta_\sigma = \min \{\epsilon_\sigma, d(h(\sigma), h(K^0 - \sigma))\}$$

Entonces $\theta_\sigma > 0$ (Pues $H(\sigma)$ es compacto por serlo σ , $H(K^0 - \sigma)$ es cerrado y son disjuntos).

Definimos

$$\begin{aligned} \psi: |L| &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \inf \{\theta_\sigma | P \in \sigma\} \end{aligned}$$

Sea $f|_{|L^1|}$ un PLH que es una ψ -aproximación de $h|_{|L^1|}$ (teorema 5.4), que sabemos conserva las imágenes de los vértices. Luego extendemos f , como se

indica al comienzo de esta demostración (teoremas 5.1 y 5.2), a los interiores de los 2-símplice $\sigma \in L$. Sabemos que

$$\delta h(\sigma) < \epsilon_\sigma = \frac{\epsilon_\tau}{3}$$

Dado que $\psi(P) = \inf \{\theta_\sigma | P \in \sigma\} \leq \epsilon_\sigma \leq \frac{\phi(P)}{3}$ para cada P, se sigue que (puesto que $d(f|_\sigma(P), h|_\sigma(P)) < \psi(P)$)

$$f(\sigma) \subset B(h(\sigma), \epsilon_\sigma)$$

y

$$\delta B(h(\sigma), \epsilon_\sigma) < 3\epsilon_\sigma = \epsilon_\tau$$

Si $P \in \sigma \subset \tau$, entonces $h(P)$ y $f(P)$ se encuentran en $B(h(\sigma), \epsilon_\sigma)$, y sabemos que $\phi(P) \geq \epsilon_\tau$. De ello se deduce que f es una ϕ -aproximación de h ($d(f(P), h(P)) \leq \epsilon_\tau \leq \phi(P)$).

Queda por demostrar que f es un homeomorfismo. Para ello será suficiente probar que conjuntos diferentes $\text{Int } f(\sigma)$, donde σ es un 2-símplice de L, son disjuntos. Si $\sigma_1 \neq \sigma_2$, entonces σ_2 tiene un vértice w que no se encuentra en un σ_1 .

Por la definición de ψ , tenemos (puesto que $d'(f|_\sigma(P), h|_\sigma(P)) < \psi(P) < \theta_\sigma$)

$$f(\sigma_1) \subset B(h(\sigma_1), \theta_{\sigma_1})$$

y

$$\theta_{\sigma_1} \leq d(h(\sigma_1), h(K^0 - \sigma_1))$$

De ello se deduce que $w \notin f(\sigma_1)$, por lo que $\text{Int } f(\sigma_1)$ e $\text{Int } f(\sigma_2)$ son disjuntos, lo que completa la prueba. \square

5.3. Triangulación en variedades de dimensión 2

En \mathbb{R}^n , vamos a denotar por B_1 a la bola unidad y por $B_{1/2}$ a la de radio $\frac{1}{2}$, ambas centradas en el origen.

Teorema 5.6 *Sea M una variedad de dimensión n . Entonces hay una secuencia*

$$(N_1, N'_1), (N_2, N'_2), \dots$$

de pares ordenados de conjuntos abiertos en M , tal que

- *para cada i hay un homeomorfismo $h_i : \overline{N_i} \rightarrow \overline{B_1}, \overline{N'_i} \rightarrow \overline{B_{1/2}}$*
- *$\{N'_i\}$ cubre M .*

Demostración.

Dado que M es localmente euclídeo, para cada punto P hay conjuntos abiertos N_P, N'_P , con $P \in N'_P$, y un homeomorfismo $h_P : \overline{N_P} \leftrightarrow \overline{B_1}, \overline{N'_P} \leftrightarrow \overline{B_{1/2}}$. Por lo tanto la colección $\{N'_P\}$ cubre M .

Dado que M es un espacio métrico separable, existe un base numerable de entornos $\wp = \{U_1, U_2, \dots\}$. Por tanto, para cada punto Q de M hay un U_i tal que $Q \in U_i$ y U_i se encuentra en algún conjunto N'_P . Por lo tanto, algún subconjunto numerable $\{N'_i\}$ de $\{N'_P\}$ cubre M . \square

Sea \mathcal{G} una colección de conjuntos, entonces la malla $\|\mathcal{G}\|$ de \mathcal{G} es el supremo de los valores $\delta G, G \in \mathcal{G}$.

Teorema 5.7 *Sea K un complejo simplicial finito y sea U un conjunto abierto en $|K|$. Entonces hay un complejo simplicial K_U tal que*

1. $|K_U| = U$.
2. *Todo símplice $\sigma \in K_U$ es un subsímplice de algún símplice de K .*

Demostración.

Sea K_1, K_2, \dots una secuencia de complejos simpliciales finitos, tal que

1. $K_1 = K$.
2. Para cada $i, K_{i+1} < K_i$.
3. $\lim_{i \rightarrow \infty} \|K_i\| = 0$

Sea $n_1 = 1$, y sea

$$L_1 = \{\sigma \mid \sigma \in K_1 = K_{n_1} \text{ y } \sigma \subset U\}$$

Supongamos (recursivamente) que hemos dado n_1, n_2, \dots, n_r y L_1, L_2, \dots, L_r tales que

1. Para cada i , L_i es un subcomplejo de K_{n_i} .
2. Los números n_i forman una secuencia creciente.
3. $\cup_{i=1}^r |L_i| \subset U$.
4. $\cup_{i=1}^r |L_i|$ es un entorno de $\cup_{i=1}^{r-1} |L_i|$ en $|K|$.
5. Si $\sigma \in K_{n_r}$ entonces o bien $\sigma \subset \cup_{i=1}^r |L_i|$ o bien σ interseca $K - U$

Dado que $Fr \cup_{i=1}^r |L_i|$ y $K - U$ son conjuntos compactos disjuntos (pues $\cup_{i=1}^r |L_i| \subset U$), hay una distancia mínima $\epsilon > 0$ entre ellos. Sea $n_{r+1} > n_r$ un entero suficientemente grande como para que $\|K_{n_{r+1}} < \epsilon\|$ (existe pues $\lim_{i \rightarrow \infty} \|K_i\| = 0$).

Sea L_{r+1} el conjunto de todos los símplices de $K_{n_{r+1}}$ que se encuentran en U pero no en $\cup_{i=1}^r |L_i|$ junto con sus caras. Veamos que el paso de r a $r+1$ conserva las condiciones (1)-(5).

1. Por definición de L_{r+1} .
2. Hemos tomado $n_{r+1} > n_r$.
3. Pues si $\sigma \in L_{r+1}$, $\sigma \subset U$ por definición.
4. Ya que si $\sigma \in L_{r+1}$, $\sigma \not\subset \cup_{i=1}^r |L_i|$.
5. Si $\sigma \in K_{n_{r+1}}$. Si $\sigma \in L_{r+1}$, entonces $\sigma \subset \cup_{i=1}^{r+1} |L_i|$ y como $\sigma \subset U$, no se cumple que σ interseca $K - U$. En el caso de que $\sigma \notin L_{r+1}$, si $\sigma \not\subset U$, entonces necesariamente σ interseca $K - U$, si lo que se cumple es $\sigma \in \cup_{i=1}^r |L_i|$, entonces ya está. Si $\sigma \not\subset U$ y $\sigma \in \cup_{i=1}^r |L_i| \subset U$, esto obviamente no puede ocurrir.

Así obtenemos $\{n_i\}$, $\{L_i\}$, $\{K_{n_i}\}$ satisfaciendo (1)-(5).

Dado que $\lim_{i \rightarrow \infty} \|K_i\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|K_{n_i}\| = 0$ se sigue de (3) y (5) que

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} |L_i|$$

El problema restante es que la colección

$$L_{\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

no es un complejo, excepto en condiciones muy especiales, porque $Fr \cup_{i=1}^r |L_i|$ se subdivide más finamente en L_{r+1} que en L_r . Pero podemos obtener un complejo simplicial $L'_\infty = K_U$ subdividiendo cada L_r , de la siguiente manera:

1. Dado $\sigma \in L_r$, $\sigma \subset Fr \cup_{i=1}^r |L_i|$ subdividimos σ , usando todos los símlices de K_{n+1} que se encuentran en σ .
2. Considere los símlices σ de L_r , que tienen al menos una arista en común con $Fr \cup_{i=1}^r |L_i|$ pero no se encuentran en $Fr \cup_{i=1}^r |L_i|$. En cada uno de estos σ introducimos el baricentro b_σ como un nuevo vértice, y luego formamos la combinación de b_σ con la subdivisión de $\partial\sigma$ que ya tenemos. Procedemos de manera similar con los 3-símlices, los 4-símlices, y así sucesivamente.

Así obtenemos las subdivisiones L'_1, L'_2, \dots y estas se forman de forma independiente las unas de las otras, es decir, ningún símlice se subdivide dos veces. Esto nos da el deseado K_U . □

Ahora mostraremos el principal objetivo de la sección: que toda superficie es triangulable. Es decir, por cada variedad de dimensión dos M , hay un complejo euclídeo K tal que M y $|K|$ son homeomorfos.

La demostración utiliza la definición dada anteriormente de complejos PL, mucho más manejable que la de complejo euclídeo, para demostrar el teorema. Ya sabemos que una variedad M se puede recubrir por conjuntos abiertos homeomorfos a bolas de radio $\frac{1}{2}$. La idea de la demostración es de ir introduciendo cada abierto de este recubrimiento en un complejo simplicial y concluir por inducción. La principal dificultad es de concluir dicha inducción, para la que utilizaremos varios de los teoremas ya expuestos.

Teorema 5.8 (Teorema de Radó) *Toda variedad topológica de dimensión 2 es triangulable.*

Demostración.

Sea M una variedad 2-dimensional dada. El teorema se puede interpretar como cualquiera de las siguientes maneras:

1. Hay un complejo (euclídeo) K tal que M y $|K|$ son homeomorfos.
2. Hay un complejo PL \mathcal{K} (ver 2.18) en M tal que $|\mathcal{K}|=M$.

Por el teorema 2.6, sabemos que dado un complejo PL de dimension finita \mathcal{K} , entonces hay un complejo simplicial euclídeo K y un homeomorfismo $f : |\mathcal{K}| \rightarrow |K|$. Luego se tiene (2) \Rightarrow (1) ($|K| \cong |\mathcal{K}| = M$), y el contrarrecíproco es obvio: dado el homeomorfismo $f : |K| \rightarrow M$, definimos \mathcal{K} como en el teorema 2.6, es decir, $\mathcal{K} = \{[f|_\sigma] \mid \sigma \in K\}$ (recordemos que $[f|_\sigma]$ hace referencia a la clase de equivalencia de relación de equivalencia descrita en 2.5), luego se tendrá $|\mathcal{K}|=M$.

Por tanto vale con demostrar (2). A lo largo de la prueba, todos los complejos PL mencionados estarán en M .

Sea $\{N_i\}$, $\{N'_i\}$ y $h_i : \overline{N_i} \rightarrow \overline{B_1}$, $\overline{N'_i} \rightarrow \overline{B_{1/2}}$ como en el Teorema 5.6.

Existe un complejo PL \mathcal{K}_1 tal que

1. $|\mathcal{K}_1|$ es una variedad 2-dimensional con borde.
2. $\overline{N'_i} \subset \mathcal{K}'_1$ donde \mathcal{K}'_1 es el conjunto de todos los símlices $[g]$ de \mathcal{K}_1 tales que $|[g]| \cap Fr |\mathcal{K}_1| = \emptyset$.

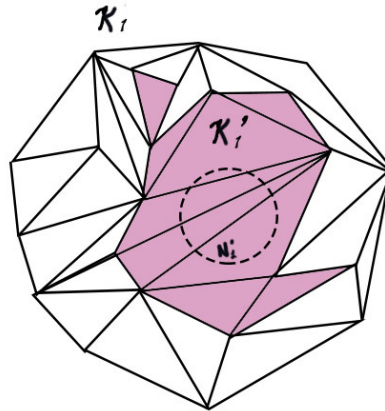


Figura 37: Ejemplo del conjunto \mathcal{K}'_1

Ahora supongamos (recursivamente) que hemos dado un complejo PL \mathcal{K}_n tal que

3. \mathcal{K}_n es una 2-variedad con borde.
4. $\cup_{i=1}^n \overline{N'_i} \subset \mathcal{K}'_n$ donde \mathcal{K}'_n es el conjunto de todos los símlices $[g]$ de \mathcal{K}_n tales que $|[g]| \cap Fr |\mathcal{K}_n| = \emptyset$.

Demostraremos que hay un complejo PL \mathcal{K}_{n+1} tal que cuando n se reemplaza por $n+1$, las condiciones (3) y (4) aún se mantienen, y también se cumple

$$5. \mathcal{K}'_n \subset \mathcal{K}'_{n+1}.$$

Esto dará una secuencia ascendente $\mathcal{K}'_1, \mathcal{K}'_2 \dots \mathcal{K}'_{n+1}$ de complejos PL, tales que para cada n , $\mathcal{K}'_n \subset \mathcal{K}'_{n+1}$ y

$$\bigcup_{i=1}^n \overline{N'_i} \subset \mathcal{K}'_n$$

De esto se deducirá el teorema, ya que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}'_n$ es un complejo PL que denotamos por \mathcal{K}_{∞} , y (como consecuencia del Teorema 5.6 y de (4))

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} N'_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} |\mathcal{K}'_n| = |\mathcal{K}_{\infty}|$$

La construcción del deseado \mathcal{K}'_{n+1} es la siguiente. Tenemos $\mathcal{K}_n, \mathcal{K}'_n$, satisfaciendo (3) y (4). Según el teorema 2.6 hay un complejo euclídeo K_n y un homeomorfismo simplicial

$$f_n : |K_n| \rightarrow |\mathcal{K}_n|$$

cumpliendo

$$\mathcal{K}_n = \{[f_n|_{\sigma}] \mid \sigma \in K_n\}$$

Considere los conjuntos

$$N'_{n+1} \subset N_{n+1} \subset M$$

y el homeomorfismo

$$h_{n+1} : \overline{N_{n+1}} \rightarrow \overline{B_1}, \quad \overline{N'_{n+1}} \rightarrow \overline{B_{1/2}}$$

Sea V un entorno abierto de $N_{n+1} \cap Fr|\mathcal{K}_n|$ en $|\mathcal{K}_n|$, contenido en $N_{n+1} \cap |\mathcal{K}_n|$ y sin intersectar $|\mathcal{K}'_n|$, y sea

$$U = f_n^{-1}(V)$$

Entonces U es un abierto en $|K_n|$ (pues f_n es un homeomorfismo y por lo tanto continuo). Por el teorema 5.7 hay un complejo K_U tal que $|K_U| = U$ y cada símplice de K_U es un subsímplice de un símplice de K_n . Luego K_U es una variedad 2-combinatoria con borde (por serlo \mathcal{K}_n).

Para facilitar la demostración, consideraremos que $\overline{N_{n+1}}$ es la bola unitaria B_1 en \mathbb{R}^2 .

Notemos que $f_n(|K_U|) = f_n(U) = V \subset N_{n+1}$, luego tenemos homeomorfismo

$$g = f_n|_{|K_U|} : |K_U| \rightarrow V$$

Sea ϕ una función fuertemente positiva en $|K_U|$ tal que para cada $P \in |K_U|$ se tiene que

$$\phi(P) < d(g(P), Fr N_{n+1} \cup [f_n(|K_n| - |K_U|) \cap N_{n+1}])$$

Según el teorema 5.5, hay un PLH

$$g' : |K_U| \rightarrow V$$

tal que g' es una ϕ -aproximación de g .

En las condiciones anteriores para ϕ , puesto que

$$\begin{aligned} d(g'(|K_u|), O) &\leq d(g(|K_u|), g'(|K_u|)) + d(g(|K_u|), O) \leq \\ &\leq \phi(|K_u|) + d(g(|K_u|), O) < d(g(|K_u|), O) + d(g(|K_u|)B_1) \leq d(O, B_1) \end{aligned}$$

donde O es el origen, tenemos que

$$g'(|K_U|) \subset B_1$$

$$g'(|K_U|) \cap f_n(|K_n| - |K_U|) = \emptyset$$

Además, puesto que $\phi(P) \rightarrow 0$ cuando P se aproxima al borde de $|K_U|$ en $|K_n|$ (pues cuando P se aproxima al borde de $|K_U|$, $g(P)$ se aproxima a $Fr N_{n+1}$), la caracterización de los homeomorfismos g' y $f_n(|K_n| - |K_U|)$ permite dar un homeomorfismo

$$f'_n : |K_n| \rightarrow M$$

Sea L un complejo finito en D , tal que

- (a) Tanto $|L|$ como el conjunto $W = |L| \cup f'_n(|K_n|)$ son 2-variedades con borde.
- (b) $\bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{N'_i} \subset Int W$
- (c) $|L| \cap f'_n(|K_n|) = Fr |L| \cap Fr f'_n(|K_n|)$

Podemos suponer que L se subdivide con suficiente precisión de modo que

- (d) Ningún símplice de L interseca a ambos $\cup_{i=1}^{n+1} \overline{N'_i}$ y $Fr W$.
- (e) Cada intersección no vacía $\sigma \cap f'_n(\tau)$ con $\sigma \in L$ y $\tau \in K_n$ es una arista o un vértice de L .

Entonces hay una subdivisión K'_n de K_n tal que

- (f) Si e es una arista de K'_n y $f'_n(e) \subset L$, entonces $f'_n|_e$ es linear y $f'_n(e)$ es un vértice de L .
- (g) Ningún conjunto $f'_n(\sigma)$ con $\sigma \in K'_n$ interseca ambos $Fr W$ y $\overline{N'_{n+1}}$.

Hay que tener en cuenta que para obtener (f) y (g) necesitamos subdividir solo aquellos símplices de K_n que se cruzan con $Fr |K_n|$. Así se puede asumir finalmente que

- (h) Si un $\sigma \in K_n$ y $\sigma \cap Fr |K_n| = \emptyset$, entonces $\sigma \in K'_n$.

Ahora definimos \mathcal{K}_{n+1} como sigue. Para cada $\sigma \in L$, sea h_σ la identidad

$$h_\sigma: \begin{array}{ccc} \sigma & \longrightarrow & \sigma \\ P & \longmapsto & P \end{array}$$

Sea ahora

$$\mathcal{L}_1 = \{[h_\sigma] \mid \sigma \in L\}$$

Sea

$$\mathcal{L}_2 = \{[f'_n|_\tau] \mid \tau \in K'_n\}$$

y por último sea

$$\mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$$

Se tiene que \mathcal{K}_{n+1} es un complejo PL por ser la unión de dos complejos PL. Ahora veamos que el deseado \mathcal{K}_n cumple (3),(4) y (5). Puesto que

$$|\mathcal{K}_{n+1}| = |\mathcal{L}_1| \cup |\mathcal{L}_2| = |L| \cup f'_n(|K_n|) = W$$

de (a) obtenemos (3) $|\mathcal{K}_{n+1}|$ es una 2-variedad con borde.

Además por (b) se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{N'_i} \subset |\mathcal{K}_{n+1}|$$

De (d) y (g) sigue (4)

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{N'_i} \subset |\mathcal{K}'_{n+1}|$$

De (h) se deduce (5) $\mathcal{K}'_n \subset \mathcal{K}'_{n+1}$, lo que completa la prueba. □

Nota. Aunque no lo exponamos, se podría probar que dos triangulaciones distintas de una misma variedad M son combinatoriamente equivalentes (ver definición [2.9](#)). Es decir, una variedad tiene esencialmente una triangulación.

6. Apéndice I: Teorema de Jordan-Schönflies en el plano

Se trata de una extensión del teorema de la curva de Jordan dada por el matemático alemán Arthur Schoenflies. El teorema señala que cualquier curva cerrada simple del plano no solo divide el plano en dos regiones, una acotada (la interna), y otra ilimitada (la externa), sino que también ambas regiones son homeomorfas hacia el interior y el exterior del disco unidad. Lo podemos formular de la siguiente manera.

Teorema 6.1 (de Jordan-Schönflies) Sean J y J' dos 1-esferas topológica en \mathbb{R}^2 , entonces todo homeomorfismo $h : J \rightarrow J'$ puede extenderse a un homeomorfismo $\bar{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Vamos ahora a dar unas pinceladas de los pasos de la demostración.

Si llamamos C a la curva cerrada, U a la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 - C$ y V la no acotada, entonces habría que demostrar:

1. La existencia de una colección de discos poligonales $\{D_i\}$ en U tales que $D_i \subset \text{int } D_{i+1}$ y $U = \cup D_i$.
2. U es homeomorfa a un disco abierto.
3. La adherencia de U es homeomorfa a un disco cerrado.
4. V es homeomorfa a un anillo con una de sus fronteras.
5. Existencia de un homeomorfismo cerrado que lleva C a un círculo.

Con la demostración de estos resultados se concluiría el teorema de Jordan-Schönflies.

Podríamos haber utilizado este teorema para demostrar el teorema de Radó (ver [13]), lo que podría haber sido un enfoque muy distinto del trabajo. No obstante, se ha optado por seguir Moise pues este manejaba más recursos que son de interés en el tratado.

En el Apéndice III se expone de manera breve lo que sucede con el teorema de Jordan-Schönflies en dimensiones mayores.

7. Apéndice II: Teorema de clasificación de superficies

El teorema de triangulación de superficies sirve para demostrar el teorema de clasificación de superficies, cuyo enunciado es el siguiente.

La suma conexa de dos variedades m -dimensionales es una nueva variedad que se obtiene tras eliminar una bola abierta en cada una de las dos variedades y juntar las fronteras que estas eliminaciones dejan. Si S y S' son dos variedades, vamos a denotar la suma conexa de estas por $S\#S'$. El enunciado del teorema es el siguiente.

Teorema 7.1 *Sea S una superficie compacta y sin borde. Entonces S es homeomorfa a uno de estos tres casos*

- *La esfera S^2*
- *La suma conexa de toros $T\#T\#\dots\#T$*
- *La suma conexa de planos proyectivos reales $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\#\dots\#\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$*

Para la demostración, que no vamos a dar, se empieza dando una triangulación τ de la superficie, separamos dicha triangulación en símlices guardando la información acerca de sus identificaciones y, posteriormente, analizamos dichas identificaciones cuidadosamente. De este análisis se deduce que, en el caso de que S no sea homeomorfa a la esfera, entonces lo es a la suma conexa de planos proyectivos, toros y botellas de Klein.

Para acabar habría que demostrar que este segundo caso es realmente otro caso de la lista. Para ello, demostraríamos que la botella de Klein es homeomorfa a la suma conexa de dos planos proyectivos ($K = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\#\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$); que la suma conexa de la botella de Klein y el plano proyectivo es homeomorfo a la suma conexa del toro y el plano proyectivo ($K\#\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = T\#\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$).

Para concluir, en el caso de que S sea suma conexa de planos proyectivos, toros y botellas de Klein, distinguiríamos dos casos:

- El primero, supongamos que en esa suma no hay botellas de Klein ni planos proyectivos, con lo que tendríamos el caso (2) de la proposición.
- El segundo, en el que suponemos que hay alguna botella de Klein o algún plano proyectivo ($S = T\#T\dots\#K\#\dots\#\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\#\dots$). Entonces sustituimos las botellas de Klein por la suma conexa de planos proyectivos ($K = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)\#\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$) y nos quedaría una suma de toros y planos

proyectivos únicamente. Ahora a cada par de toros con plano proyectivo, lo sustituimos por la suma conexa de la botella de Klein con $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, y de nuevo quitamos la botella de en medio. Tras un número finito de pasos recaemos en el punto 3 del teorema.

Existe otra manera de ver si dos superficies son homeomorfas y es mediante la característica de Euler. Aunque no vamos a entrar en detalles, la definición es la siguiente.

Definición 7.1 *Sea S una superficie con una triangulación τ . Si denotamos v_0 el número de vértices de τ , v_1 el número de lados y v_2 el número de triángulos entonces el número*

$$\mathcal{X}(S) = v_0 - v_1 + v_2$$

lo llamamos característica de Euler de la superficie S . Este número no depende de la triangulación elegida.

Definición 7.2 *Para un complejo simplicial finito, la **característica de Euler** se puede definir como la suma alternada*

$$\mathcal{X} = k_0 - k_1 + k_2 - \dots$$

donde k_i denota el número de celdas de dimensión i .

Entonces, se puede definir la característica de Euler de una variedad como la característica de Euler de un complejo simplicial homeomorfo a él. Por ejemplo, el círculo y el toro tienen característica de Euler 0 y las bolas sólidas tienen característica de Euler 1.

Una manera de ver que dos superficies son homeomorfas, es viendo si son orientables (o no) y comparando sus características de Euler. Así, tendríamos el siguiente resultado, que no vamos a demostrar.

Teorema 7.2 *Sean S y S' superficies compactas, conexas y sin borde. Entonces S y S' son homeomorfas si y solo si $\mathcal{X}(S) = \mathcal{X}(S')$ y ambas son o bien orientables, o bien no orientables.*

8. Apéndice III: Generalizaciones a dimensiones mayores

8.1. Teorema de separación de Jordan-Brouwer

El teorema de la curva de Jordan fue generalizado a dimensiones superiores por H. Lebesgue y LEJ Brouwer en 1911, lo que resultó en el teorema de separación de Jordan-Brouwer. El enunciado es el siguiente.

Teorema 8.1 (Teorema de separación de Jordan-Brouwer) *Sea X una esfera topológica n -dimensional en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} . Entonces, el complementario Y de X en \mathbb{R}^{n+1} consta exactamente de dos componentes conexas. Una de estas componentes está acotada (la interior) y la otra es ilimitada (la exterior). El conjunto X es su frontera común.*

En cuanto a la demostración, que no detallaremos, utiliza teoría de la homología.

8.2. Teorema de Jordan-Schönflies en dimensión ≥ 3 : contraejemplo

A diferencia de la generalización de Lebesgue y Brouwer del teorema de la curva de Jordan, el teorema de Jordan-Schönflies se vuelve falso en dimensiones superiores. Un claro contraejemplo es la **esfera cornuda de Alexander**.

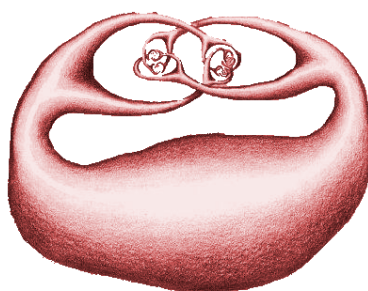


Figura 38: Esfera cornuda de Alexander

Esta esfera cornuda, descubierta por J.W. Alexander en 1924, se construye partiendo del toro y quitándole una porción. Posteriormente se junta otro toro perforado a cada lado del corte, de tal manera que estos queden entrelazados. Esto se repite hasta el infinito.

Es fácil ver que el exterior de la bola unitaria en \mathbb{R}^3 es simplemente conexo. La esfera con cuernos de Alexander es un subconjunto de \mathbb{R}^3 homeomorfo a una esfera, pero tan retorcido en el espacio que la componente ilimitada de su complementario en \mathbb{R}^3 no es simplemente conexo y, por lo tanto, no puede ser homeomorfa al exterior de la bola unitaria. Esto supone que en dimensión 3 el teorema de Jordan-Schönflies resulta falso.

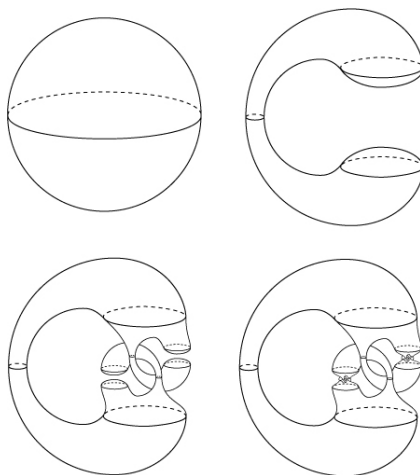


Figura 39: Construcción de la esfera cornuda de Alexander

8.3. Triangulación de variedades topológicas compactas

Dimensión 3

En dimensiones de hasta 3, toda variedad es triangulable. De hecho, en la demostración que hemos seguido (Moise), la restricción a la dimensión 2 se usa solo en la aplicación del teorema 5.5.

Gran parte de la teoría desarrollada en la presente y la sección anterior se aplica en todas las dimensiones. Así, si demostramos una aproximación del teorema 5.5 en dimensión 3, haciendo los debidos cambios en el Teorema de Radó se deduce que cada variedad de dimensión 3 es triangulable.

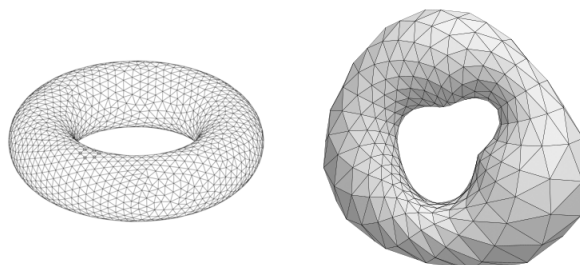


Figura 40: Dos triangulaciones del toro

Por ejemplo, recordemos que para construir el toro hay que identificar los puntos $(x,0)$ con $(x,1)$ para formar un cilindro, y posteriormente construir el toro identificando los lados que faltan para 'juntar' las circunferencias y así formar el toro.

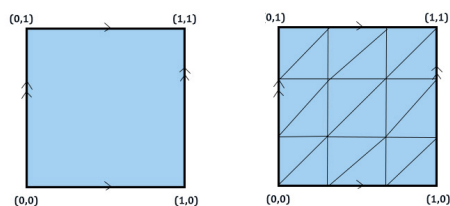


Figura 41: Construcción y triangulación del toro

En dimensión 2, si hubieramos demostrado el teorema de Shönflies, la demostración del teorema de triangulación habría tomado un camino mucho mas simple, no obstante, para dimensión 3, este teorema no sirve.

Dimensión ≥ 4

En dimensión 4, hay variedades no triangulables. La variedad E_8 es un ejemplo de ello. Esta variedad se trata de un conjunto compacto y simplemente conexo que se construye conectando primero haces de discos de característica de Euler 2 sobre la esfera, de acuerdo con el diagrama de Dynkin para E_8 . Este grupo es uno de los "grupos de Lie excepcionales" que tiene un interés considerable en diversas áreas de las matemáticas y la física.

Se tiene el resultado de que una variedad de dimensión 4 es triangulable si, y solo si, es una variedad diferenciable.

En dimensión 5 se sabe que toda variedad cerrada y orientable es triangulable. Para dimensiones mayores aún sigue estando bajo estudio. Los últimos avances datan de 1976 por Galewski-Stern.

Referencias

- [1] Moise, E.E. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer New York, 1977.
- [2] Munkres, James R. *Topology : a first course*. Englewood Cliffs New Jersey, 1975.
- [3] Maehara, Ryuji. *The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem*. Amer, 1984.
- [4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. North Holland, New York, 1976.
- [5] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [6] Robion C. Kirby. *The Topology of 4-Manifolds*. Springer Berlin, 1989.
- [7] Freedman, Michael Hartley. *The topology of four-dimensional manifolds*. Journal of Differential Geometry, 1982.
- [8] Thomassen, Carsten. *The Jordan–Schönflies theorem and the classification of surfaces*. American Mathematical Monthly, 1992.
- [9] J. W. Alexander. *An Example of a Simply Connected Surface Bounding a Region which is not Simply Connected*. PNAS, 1924.
- [10] Lee, John. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 202, Springer, New York, 2000.
- [11] R. Ayala Gómez, D. Fernández Ternero, J. A. Vilches Alarcón. *El teorema del punto fijo sin homología: un enfoque combinatorio*. La gaceta de la RSME, Vol. 10.1, 2007.
- [12] P. Erdős, T. Gallai. *Graphs with prescribed degree of vertices*. Mat. Lapok 11, 1960.
- [13] Thomassen, Carsten. *The Jordan-Schönflies Theorem and the Classification of Surfaces*. The American Mathematical Monthly, vol. 99, 1992.