



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

**Teoría inflacionaria del Big Bang:
testeo de modificaciones de Λ CDM**

Autor: Diego Álvarez Ortega

Tutor/es: Diego Sáez-Chillón Gómez

Índice

Resumen/Abstract	2
1. Introducción	3
I Teoría inflacionaria del Big Bang	4
2. Modelo estándar de la cosmología	5
2.1. Tensor energía-momento	6
2.2. Ley de Hubble-Lemaître	7
2.3. Ecuaciones de Friedmann	8
2.4. Horizonte de partículas y radio de Hubble	9
3. Inflación cósmica	11
3.1. Problemas de la teoría del Big Bang	11
3.2. Campo del inflatón	13
3.3. Perturbaciones en relatividad general	15
3.3.1. Perturbaciones de un campo escalar durante la inflación	15
3.3.2. Perturbaciones en la métrica	16
3.3.3. Elección del gauge	17
4. Fondo cósmico de microondas	20
4.1. Efecto Sachs-Wolfe	21
4.2. Oscilaciones acústicas de bariones (BAO)	21
4.3. Espectro de potencias del CMB	22
II Ajuste de parámetros	25
5. Desviaciones de Λ CDM: otras parametrizaciones	26
6. Fuentes de datos	28
6.1. Supernovas tipo Ia	28
6.2. $H(z)$	28
6.3. BAO	29
6.4. CMB	30
7. Metodología	32
8. Resultados	35
8.1. w CDM	35
8.2. CPL	37
9. Conclusiones	41
Bibliografía	42

Resumen / Abstract

El modelo del Big Bang constituye la teoría más exitosa hasta la fecha a la hora de describir el origen y la evolución del universo. Entre sus muchas predicciones se encuentran el fondo cósmico de microondas, la expansión del universo o la abundancia relativa de elementos ligeros. Existen sin embargo una serie de cuestiones (condiciones iniciales, formación de grandes estructuras, naturaleza de la energía oscura) que el modelo por si solo es incapaz de resolver. La inflación solventa algunos de estos problemas a través de un breve periodo de rápida expansión del universo.

Este trabajo presenta una introducción al modelo inflacionario, haciendo hincapié en cómo pequeñas perturbaciones en el universo primigenio pueden dar lugar a fenómenos a gran escala observables a día de hoy. A continuación se emplean datos reales para testear hasta que punto el modelo estándar de la cosmología se ajusta a las observaciones actuales. En concreto se trabaja con dos parametrizaciones alternativas para la energía oscura: w CDM y CPL.

The Big Bang model makes up the most succesful theory when it comes to describe the origin and the evolution of the universe. Among its multiple predictions lays the cosmic microwave background, the expansion of the universe or the relative abundance of light elements. There are nonetheless some questions (initial conditions, formation of large scale structures, dark energy's nature) that the Big Bang model cannot solve by itself. Inflation adressess some of these problems by postulating a brief period of rapud expansion of the universe.

This work presents an introduction to the inflationary model, focusing on how small perturbations on the early universe may lead to large scale phenomena that can be observed today. Then, real data are used to test to what extent does the standard cosmology model adjust to current observations. In particular, two alternative parametrizations for dark energy are studied: w CDM and CPL.

Capítulo 1

Introducción

En 1964, mientras trabajaban en los Laboratorios Bell, Arno Penzias y Robert Wilson detectaron un ruido constante de baja frecuencia distribuido uniformemente por todo el cielo y presente a todas horas del día. El descubrimiento de esta radiación, conocida como fondo cósmico de microondas, marcaría el pistoletazo de salida a una época de grandes progresos en el campo de la cosmología. Esta radiación ya había sido predicha por múltiples investigadores desde los años 40, pero su detección fue el empujón necesario para situar a **la teoría del Big Bang** como la principal candidata a describir el origen y la evolución del universo. El CMB, por sus siglas en inglés, constituía la principal prueba de la validez de esta teoría y el posterior descubrimiento de sus anisotropías en los años 90 no hizo sino que aumentar las evidencias a favor.

Desde los años 30 era bien conocido que el universo se encontraba en expansión. El trabajo de Edwin Hubble [1] sobre la relación casi lineal entre la velocidad de recesión de las galaxias y su distancia aparente era una prueba clara de ello. Sin embargo, a finales de los años 90 comenzó a surgir nueva evidencia que indicaba que esta relación solo era lineal para objetos cercanos, a redshifts $z \ll 1$. En el caso de un universo compuesto en su mayoría por materia, la atracción gravitatoria contribuiría a ir frenando la expansión. En cambio, las observaciones de supernovas [2] indicaban que no solo no era así, si no que dicha expansión se estaba acelerando. A estas observaciones se sumaron otras pruebas como la distribución de la posición de galaxias [3] o la distancia hasta la superficie de emisión del CMB [4].

Fue entonces cuando entró en consideración Λ CDM. Esta parametrización del modelo del Big Bang proponía como mecanismo para la expansión acelerada del universo la existencia de una especie con presión negativa: la energía oscura. Esta vendría descrita por una constante cosmológica y tendría una presión constante $p = -\rho c^2$. El resto de la densidad de energía del universo vendría dado por materia oscura fría (no relativista) y por materia bariónica. Esta teoría fue rápidamente apoyada por los resultados experimentales [5] y pronto se convirtió en el paradigma de la cosmología moderna, posición en la que se ha mantenido hasta el día de hoy. Existían, sin embargo, una serie de preguntas relacionadas con las condiciones iniciales del universo que Λ CDM no era capaz de explicar por sí sola.

Como respuesta a estas preguntas surgió a finales del siglo XX la **teoría de la inflación**. Esta postulaba una etapa inicial de crecimiento exponencial del espacio, lo que permitiría esquivar los problemas de *fine tuning* de ciertas cantidades en el universo primigenio. Proponía como justificación para ello la existencia un campo escalar que permeaba todo el espacio durante los primeros momentos del universo, el campo del inflatón. Las fluctuaciones cuánticas asociadas a este se verían estiradas hasta escalas cosmológicas y pasarían a jugar un papel clave en la distribución de la densidad de energía durante las primeras etapas del universo. Los últimos datos del CMB obtenidos por el satélite Planck en 2013 [6] apoyan esta teoría de la inflación cósmica y proporcionan medidas fiables de distintas cantidades asociadas a dicho universo primordial. Esto coloca a Λ CDM y a la extensión dada por la teoría de la inflación como el modelo estándar de la cosmología.

Este trabajo describe el modelo del Big Bang y Λ CDM, así como la ampliación que supone incluir la teoría de la inflación cósmica. Se estudian con más detalle las perturbaciones del campo del inflatón y las consecuencias que estas tienen sobre el fondo cósmico de microondas y, por tanto, en el universo tal y como se conoce hoy. Adicionalmente se procede a testear distintos modelos de energía oscura mediante el ajuste de parametrizaciones alternativas a Λ CDM con datos observacionales. Se emplea para ello dos modificaciones de Λ CDM y se utilizan datos de distintas fuentes (SNe Ia, $H(z)$, BAO y el propio CMB) para comprobar si realmente una constante cosmológica es la descripción más correcta de la energía oscura.

Parte I

Teoría inflacionaria del Big Bang

Capítulo 2

Modelo estándar de la cosmología

El modelo estándar de la cosmología, conocido como Λ CDM o modelo de concordancia, constituye la teoría que mejor describe la estructura y la evolución a gran escala de todo el Universo. Concretamente es una parametrización de la teoría del Big Bang. Esta teoría toma como cierto el **principio cosmológico** y la **universalidad de las leyes físicas** y propone un universo con una temperatura y densidad iniciales extremadamente altas. A partir de esto, el modelo Λ CDM proporciona una descripción de las distintas especies de las que está compuesto el universo y que a su vez marcan la evolución de este. De acuerdo a esta parametrización, las principales componentes del universo a día de hoy son:

- Energía oscura, descrita por una constante cosmológica (Λ).
- Materia oscura fría, es decir, no relativista (**Cold Dark Matter**).
- Materia ordinaria.
- Una pequeña componente de partículas relativistas (radiación).

Para profundizar en la descripción que proporciona Λ CDM es indispensable estudiar la geometría del espacio-tiempo. Para ello se parte del principio cosmológico. Este afirma que, a escalas espaciales suficientemente grandes, el universo es isótropo y homogéneo. Esto implica la invariancia bajo rotaciones espaciales (isotropía) y la invariancia bajo traslaciones espaciales (homogeneidad).

A partir de estas dos premisas se busca obtener una métrica que permita describir la estructura del espacio-tiempo en el universo a grandes escalas. El resultado [7] se conoce como **métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)** y debe su nombre a una serie de físicos que trabajaron en este modelo a principios del siglo XX. Lo que se consigue es una métrica¹ que describe un espacio-tiempo en expansión (o contracción) bajo las hipótesis del principio cosmológico.

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, K es el signo de la curvatura espacial (cuyo valor es $\pm 1, 0$) y (r, θ, ϕ) son las coordenadas comóviles. Estas coordenadas corresponden a un observador comóvil, que es el que se desplaza junto a la expansión del universo. Esta expansión viene marcada por un factor de escala que, en principio, puede depender del tiempo. En cosmología es frecuente el empleo de una magnitud conocida como tiempo conforme η , que se define como:

$$d\eta = \frac{dt}{a} \quad (2.2)$$

¹A lo largo de toda la Parte I se trabaja con unidades naturales, aquellas en las que $\hbar = c = k_B = 1$.

Se puede por tanto expresar la métrica FLRW en función del tiempo conforme como:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - Kr^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.3)$$

$$ds^2 = a(\eta)^2 [d\eta^2 - g_{ij} dx^i dx^j]$$

2.1. Tensor energía-momento

Debido a las simetrías impuestas por el principio cosmológico, el tensor energía momento asociado al espacio tiempo debe ser diagonal. La elección más sencilla es la de un fluido perfecto caracterizado por una densidad $\rho(t)$ y una presión $P(t)$. De esta forma el tensor energía momento es de la forma:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho(t) & & & \\ & P(t) & & \\ & & P(t) & \\ & & & P(t) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

La relación entre la densidad y la presión viene dada por la correspondiente ecuación de estado del fluido. El caso más sencillo viene dado por una ecuación de estado del tipo:

$$P = \omega \rho \quad (2.5)$$

Donde w será distinto para las distintas especies que pueblan el universo. Si se aplica la ley de conservación covariante al tensor energía-momento:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.6)$$

La componente $\nu = 0$ proporciona una ecuación de continuidad para un fluido perfecto en un universo FLRW:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0 \quad (2.7)$$

Cuya solución es:

$$\rho(a) \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (2.8)$$

La evolución de la densidad dependerá del tipo de partículas que se consideren. Para partículas no relativistas (polvo) la presión es nula, por lo que $\omega_{\text{NR}} = 0$. Para partículas relativistas (radiación), su tensor energía-momento debe tener traza nula, por lo que $\omega_{\text{R}} = 1/3$. Por último, para una constante cosmológica, el único valor del parámetro que coincide con una densidad de energía constante es $\omega_{\Lambda} = -1$. Se tiene por tanto que la densidad de energía de las distintas especies viene dada por:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{NR}} a^3 &= \text{cte} \\ \rho_{\text{R}} a^4 &= \text{cte} \\ \rho_{\Lambda} &= \text{cte} \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2. Ley de Hubble-Lemaître

Se emplea ahora la métrica FLRW para estudiar la **distancia propia**. Se define esta como la distancia física entre dos puntos situados en un mismo tiempo t_0 , tomando como referencia el tiempo de un observador comóvil. Se tiene entonces que en la métrica (2.1), $dt = 0$. Si se toma como el origen el punto $(0, \theta_0, \phi_0)$, el desplazamiento tendrá que ser necesariamente radial ($d\theta = d\phi = 0$). Además debido a la isotropía del espacio no importa la elección de θ_0 y ϕ_0 . Aplicando todas estas condiciones sobre la métrica:

$$d(t) = \int ds = \int_0^r \frac{a(t_0)dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (2.10)$$

Se introduce ahora un cambio de coordenadas a través de la transformación:

$$\begin{cases} r = \sinh \chi & \text{si } K = -1 \\ r = \chi & \text{si } K = 0 \\ r = \sin \chi & \text{si } K = +1 \end{cases} \quad (2.11)$$

En estas nuevas coordenadas la distancia propia se puede escribir como:

$$d(t) = a(t) \int_0^\chi d\chi' = a(t)\chi \quad (2.12)$$

Se tiene entonces que la distancia propia entre dos puntos es igual a la distancia comóvil multiplicada por el factor de escala. Es importante destacar que esta distancia es una distancia puramente teórica y que no puede ser medida directamente. Esto es así ya que la luz emitida por un objeto se verá afectada por la expansión del universo y la distancia real que recorrerá hasta llegar a la Tierra será distinta de la distancia propia.

Es posible calcular la velocidad a la que se alejan dos puntos, su velocidad de recesión, derivando respecto al tiempo la expresión (2.12):

$$v(t) = \dot{d}(t) = \dot{a}(t)\chi = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d(t) = H(t)d(t) \quad (2.13)$$

Esta relación entre la velocidad de recesión y la distancia entre dos puntos en el tiempo es lo que se conoce como **ley de Hubble**, y la cantidad $H(t)$ como **parámetro de Hubble**. Escribiendo esta relación para el tiempo actual lo que se obtiene es:

$$v(t = t_0) = H_0 d(t = t_0) \quad (2.14)$$

Donde H_0 es lo que se denomina habitualmente como constante de Hubble. Se ve por tanto que el parámetro de Hubble proporciona la relación entre la distancia a la que se encuentra un objeto y la velocidad a la que se aleja debido a la expansión del universo. Este parámetro es uno de los más importantes en cosmología ya que su expresión permite determinar magnitudes tales como el tamaño o la edad del universo. La medida de su valor actual, H_0 , es objeto de discusión en la comunidad científica, lo que se conoce como tensión de Hubble [8].

La expansión del universo lleva consigo una consecuencia fundamental: cuando la luz viaja a través del espacio que se encuentra en expansión, esta experimenta un corrimiento al rojo en su longitud de onda. Este

redshift puede expresarse en función del factor de escala como [7]:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a_0}{a_1} - 1 \quad (2.15)$$

Dónde a_0 y a_1 son los factores de escala en la métrica FLRW (2.1) en el momento de la recepción actual y en el momento en que la radiación fue emitida respectivamente. Es importante destacar que este corrimiento al rojo no es un efecto Doppler. El mecanismo que lo produce es la propia expansión del espacio, mientras que en el efecto Doppler es la velocidad relativa de un objeto moviéndose dentro de este espacio. El efecto es exactamente el mismo y permite obtener un valor para la velocidad con la que se aleja un objeto a partir de su redshift, siempre y cuando sea posible descontar los posibles movimientos peculiares propios de ese objeto.

Se debe tener en cuenta que el redshift que experimenta la radiación electromagnética es proporcional al tiempo que ha estado viajando por el espacio, es decir, al momento en el que fue emitida. Es por ello que es posible establecer una relación entre el redshift de una radiación y el momento t de su emisión [7]:

$$dt = \frac{dz}{H(z)(1+z)} \quad (2.16)$$

El redshift, al contrario que el tiempo de emisión, es una magnitud medible de forma experimental. Es por ello que en cosmología es frecuente el empleo del redshift como medida de tiempo. Por ejemplo, la radiación del fondo cósmico de microondas ha experimentado un redshift de $z \approx 1100$, lo que corresponde a ser emitida en $t \approx 300.000$ años después del origen del universo.

2.3. Ecuaciones de Friedmann

Una vez descritas la métrica y el tensor energía momento del espacio-tiempo se puede pasar a trabajar con las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $g_{\mu\nu}$ el tensor de la métrica y Λ una constante cosmológica. Recordamos que el tensor de Einstein se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci y R es el escalar de curvatura.

Debido a la isotropía espacial de la métrica tan solo se tienen dos ecuaciones independientes, la correspondiente a la componente 00 de las ecuaciones y una de las componentes espaciales ij . Utilizando la métrica FLRW, sus correspondientes símbolos de Christoffel y su tensor energía-momento se obtiene:

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.19)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.20)$$

Estas dos ecuaciones se conocen como **ecuaciones de Friedmann** y resultan fundamentales en el estudio de la cosmología. Si se toma la primera ecuación, y se incluye a la constante cosmológica Λ dentro de la densidad de energía ρ , es posible encontrar un **valor crítico para la densidad** que corresponda a un universo plano ($K = 0$). Lo que se obtiene es:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.21)$$

Es posible reescribir ahora (2.19) como:

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2} \quad (2.22)$$

donde el parámetro de densidad Ω se ha definido como la suma del cociente entre la densidad de cada especie con la densidad crítica.

$$\Omega \equiv \sum_i \Omega_i = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (2.23)$$

Esta expresión es especialmente útil ya que nos permite relacionar la densidad de las distintas especies que pueblan el universo con la curvatura espacial de este. Las observaciones actuales indican que el universo es espacialmente plano, midiéndose un valor de Ω muy cercano a 1. Un valor superior a 1 implicaría una curvatura positiva (universo cerrado) mientras que un valor menor a 1 correspondería a una curvatura negativa (universo abierto).

Se puede también dividir (2.19) entre H_0^2 para obtener una ecuación adimensional que refleje de forma explícita la contribución de las distintas densidades:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = [\Omega_{0,R} a^{-4} + \Omega_{0,M} a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}] \quad (2.24)$$

O en función del redshift, como:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = [\Omega_{0,R}(1+z)^4 + \Omega_{0,M}(1+z)^3 + \Omega_{0,\Lambda}] \quad (2.25)$$

2.4. Horizonte de partículas y radio de Hubble

Dos de las distancias más interesantes a la hora de trabajar con el modelo Λ CDM son el horizonte de partículas y el radio de Hubble.

El **horizonte de partículas** indica la distancia propia recorrida por un fotón desde el origen del universo ($t=0$) hasta nuestros días. Dicho de otra forma, da cuenta de la distancia máxima a la cuál puede estar separados dos objetos para haber tenido conexión causal. Objetos separados a distancias mayores del horizonte de partículas nunca han interactuado entre sí. Se puede calcular su valor teniendo en cuenta que la luz sigue geodésicas nulas ($ds^2 = 0$). De nuevo, tomando el origen como $r_0 = 0$, todas las geodésicas corresponderán a trayectorias de θ y ϕ constantes ($d\theta = d\phi = 0$). Al igual que en (2.10), la isotropía del espacio hace irrelevante la elección de θ_0 y ϕ_0 .

Teniendo en cuenta todas estas condiciones sobre la métrica (2.1), obtenemos que el tiempo que tarda un fotón emitido desde $r=r_H$ en $t=0$ en alcanzar $r=0$ es:

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (2.26)$$

Y la distancia propia que corresponde a ese tiempo, es decir, al horizonte de partículas es:

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = a(t) \int_0^a \frac{da'}{a'} \frac{1}{a' H(a')} = a(t) \int_0^{r_H} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (2.27)$$

El **radio de Hubble**, en cambio, corresponde a la distancia a partir de la cual, debido a la expansión del universo, una partícula se aleja de nosotros a una velocidad mayor que la de la luz. Su valor (en unidades

naturales) es simplemente:

$$\text{Radio de Hubble} = \frac{1}{H(t)} = H(t)^{-1} \quad (2.28)$$

En este caso, las partículas que se encuentren separadas por una distancia mayor al radio de Hubble no pueden interactuar entre sí a un tiempo t determinado, pero pudieron hacerlo en el pasado. Esto depende de la evolución del parámetro de Hubble: si este está siempre en aumento ($\dot{H} > 0$), en el momento que un objeto abandone el radio de Hubble nunca más podrá reentrar.

Es importante diferenciar entre estos dos términos. El horizonte de sucesos marca la distancia a partir de la cuál dos objetos nunca han estado en contacto causal. Esto corresponde al límite de nuestro universo observable. El radio de Hubble, sin embargo, indica la distancia máxima a la que pueden estar separados dos objetos y poder interactuar a un cierto tiempo t . Esto no significa que objetos más lejanos no sean observables. Si en algún tiempo pasado estos se encontraron dentro de H^{-1} aún es posible recibir la radiación electromagnética que emitieron en aquel momento.

Capítulo 3

Inflación cósmica

Hasta ahora se ha dado una descripción básica de Λ CDM, el modelo estándar de la cosmología. Este modelo, pese a su aparente simplicidad, proporciona una descripción bastante precisa del universo a grandes escalas. Existen sin embargo una serie de cuestiones que escapan a la descripción básica que proporciona este modelo. Propuesta en los años 80 por el astrofísico Alan Guth, la teoría de la inflación cósmica nace como solución a los distintos problemas que habían surgido la década anterior.

En este capítulo se introducen algunos de estos problemas, cómo pueden solucionarse mediante la inflación y que consecuencias tiene esta en el universo observable hoy en día. En esta descripción de la teoría de la inflación juegan un papel clave las perturbaciones en relatividad general.

3.1. Problemas de la teoría del Big Bang

Uno de los problemas más destacados es el conocido como **problema de la planitud**. Para plantearlo se asume que las ecuaciones de Friedmann son válidas hasta la era de Planck, en $t_{Pl} \approx 10^{-34}$ s. Volviendo a la ecuación (2.22) se puede ver que el valor de $|\Omega - 1|$ crece con el factor de escala de forma proporcional a $a^{-2}H^{-2}$. Se sabe por (2.9) que en una época dominada por la radiación, $a^{-2}H^{-2} \propto a^2$. Si se compara entonces el valor de $|\Omega_0 - 1|$ (el actual) y su valor en $t = t_{Pl}$:

$$\frac{|\Omega_{Pl} - 1|}{|\Omega_0 - 1|} \approx \left(\frac{a_{Pl}}{a_0}\right)^2 \quad (3.1)$$

El factor de escala se relaciona con la temperatura como $a \propto T^{-1}$. Si se considera que la temperatura actual del fondo cósmico de microondas es de $T_0 \approx 10^{-13}$ GeV y que la temperatura en la época de Planck es del orden de $T_{Pl} \approx 10^{19}$ GeV, entonces:

$$\frac{|\Omega_{Pl} - 1|}{|\Omega_0 - 1|} \approx \left(\frac{T_0}{T_{Pl}}\right)^2 \approx \mathcal{O}(10^{-64}) \quad (3.2)$$

Las mediciones actuales nos indican que el valor de $|\Omega_0 - 1|$ es del orden de 10^{-2} , lo que significa que durante las primeras etapas del universo la curvatura era extremadamente pequeña, pero no igual a cero.

Este es uno de los llamados problemas de *fine tuning*, debido al ajuste tan fino que es necesario hacer en la densidad inicial para que esta sea compatible con el universo actual. La densidad de energía del universo viene dada por la suma de las distintas especies (2.22). Una variación de una parte entre 10^{64} daría lugar a un universo con una curvatura radicalmente distinta a la actual. Una posibilidad es que el universo empezase con una curvatura menos *fine tuned*, pero que algún mecanismo fuese capaz de reducirla hasta los órdenes de magnitud compatibles con el universo actual.

Otro de los problemas fundamentales es el **problema del horizonte**. Este surge de comparar el tamaño de nuestro radio de Hubble con el radio de Hubble en el momento del *last-scattering surface*, la superficie de última dispersión. Esto corresponde al punto en el cual la temperatura del universo baja lo suficiente como para que los fotones se desacoplen y viajen libremente. Estos son los fotones que corresponden al fondo cósmico de

microondas (CMB), al cuál se dedicará un capítulo más adelante.

En el momento de *last-scattering*, el radio de Hubble actual correspondía a una longitud λ_H tal que:

$$\lambda_H(t_{ls}) = \frac{1}{H_0} \left(\frac{a_{ls}}{a_0} \right) \quad (3.3)$$

Durante el periodo dominado por materia, el parámetro de Hubble (y por tanto el radio de Hubble) decrece como $H^2 \propto a^{-3}$. Por tanto, el radio de Hubble en $t = t_{ls}$ es:

$$\frac{1}{H_{ls}} = \frac{1}{H_0} \left(\frac{a_{ls}}{a_0} \right)^{3/2} \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta que el last-scattering ocurrió aproximadamente a $z \approx 1100$, es decir, $a \approx 9 \cdot 10^{-4}$, al comparar los volúmenes correspondientes a ambas distancias se ve que:

$$\frac{\lambda_H^3(t_{ls})}{1/H_{ls}^3} = \left(\frac{a_{ls}}{a_0} \right)^{-3/2} \approx 10^5 \quad (3.5)$$

La interpretación es la siguiente: los fotones que se reciben hoy del CMB corresponden a una región 10^5 veces mayor que la región causalmente conectada al momento de ser emitidos. Se puede calcular también a que tamaño angular corresponde dicha región de conexión causal, H_{ls}^{-1} en el cielo hoy [9]:

$$\theta_{ls} = (1 + z_{ls})^{-1/2} \approx 1,7^\circ \quad (3.6)$$

Puntos separados más de esta escala en el cielo no estaban en contacto causal en el momento en el que se emitió el CMB. El problema surge al ver que este fondo presenta una temperatura increíblemente homogénea, con variaciones del orden de 10^{-5} . El modelo del Big Bang no alcanza a responder cómo todas estas regiones presentan una temperatura casi idéntica sin haber tenido posibilidad de interactuar entre ellas. De nuevo, es plausible pensar que existió algún mecanismo que permitió a todas estas regiones estar en equilibrio térmico antes de quedar desconectadas.

Existen otros problemas complementarios a estos. Entre ellos destacan la ausencia de monopolos magnéticos en el universo. Según las teorías de la gran unificación (Grand Unification Theories, GUT) estos deberían haberse producido durante la etapa inicial extremadamente caliente del universo. Otro problema es el problema de la entropía, que se reduce a otro problema de condiciones iniciales excesivamente precisas.

Todos estos problemas pueden solucionarse postulando la existencia de una época durante la cual la escala física creció mucho más rápido que el radio de Hubble. Esta condición puede traducirse en una condición para el factor de escala a . Debe de existir una época en la que:

$$\left(\frac{\dot{\lambda}}{H^{-1}} \right) \propto \left(\frac{\dot{a}}{\dot{a}/\ddot{a}} \right) = \ddot{a} > 0 \quad (3.7)$$

Esto permitiría que los fotones que recibimos hoy del CMB estuviesen causalmente conectados en algún momento inicial, pese a no estarlo cuando fueron emitidos. En la figura (3.1) se ve como una etapa en la que H^{-1} crece más despacio que el factor de escala ($\lambda \propto a$) permite que dos regiones no conectadas durante la emisión del CMB estuviesen en contacto durante una época previa. En el caso de la planitud, esta expansión acelerada implica que la curvatura se redujo significativamente durante esta época (2.22), permitiendo así la curvatura increíblemente pequeña que requiere nuestro universo actual.

Esta etapa de expansión acelerada del universo es lo que se conoce como **inflación cósmica**.

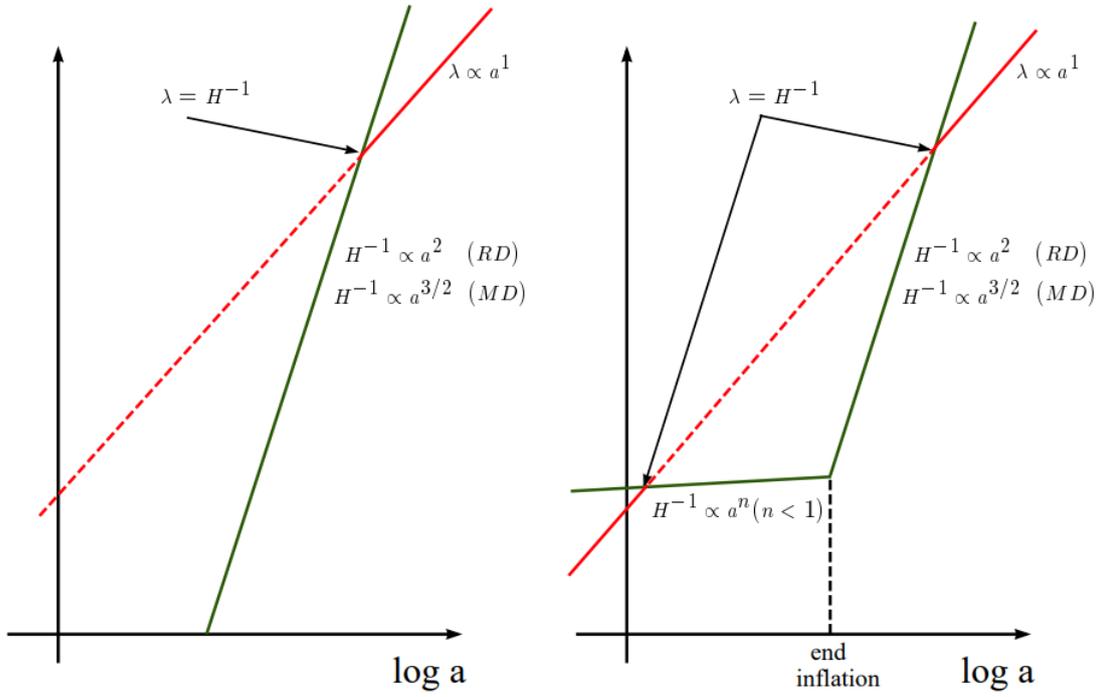


Figura 3.1: Representación gráfica de cómo la inflación soluciona el problema del horizonte. En el primer gráfico (sin inflación), dos regiones que estuviesen fuera del radio de Hubble en cierto momento de la historia tampoco podían estar en contacto causal en un tiempo anterior. En el segundo sin embargo, donde hay un periodo de inflación, es posible que regiones que se ven ahora y que cuando se emitió el CMB no estaban en contacto, sí que lo estuviesen en un tiempo previo. Esto las habría permitido entrar en equilibrio térmico antes, dando lugar así a la gran isotropía de la radiación del CMB. Edward W. Kolb. *Dynamics of the inflationary era* [10]

3.2. Campo del inflatón

Se describe ahora más en profundidad cuales son las posibles causas de este periodo de rápida expansión. Volviendo de nuevo a las ecuaciones de Friedmann, concretamente a la segunda (2.20), se ve que para que $\ddot{a} > 0$:

$$\ddot{a} > 0 \iff P < -\frac{\rho}{3} \quad (3.8)$$

Condición que no se cumple ni para épocas dominadas por radiación ni para épocas dominadas por materia. Se puede asumir, por simplicidad, que durante la época de la inflación se da la condición:

$$P = -\rho \quad (3.9)$$

Lo que se conoce como modelo de De Sitter. Su principal característica es que en esta fase, tanto la densidad de energía como el parámetro de Hubble permanecen constantes. A partir de la definición del parámetro de Hubble se tiene que el factor de escala en esta fase evoluciona como:

$$a = a_I \exp^{H_I(t-t_I)} \quad (3.10)$$

donde se denota con el subíndice I el valor de las magnitudes en el momento que comienza la inflación. Se ve cómo durante una época dominada por una especie que cumpla el modelo de De Sitter se da una expansión exponencial del espacio.

Uno de los posibles mecanismos para obtener esta condición es mediante un campo escalar, llamado inflatón ϕ_I . Si se calcula su acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_I \partial^\mu \phi_I - V(\phi_I) \right]; \quad \sqrt{-g} = a^3 \quad (3.11)$$

y se resuelve con ella sus ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene:

$$\ddot{\phi}_I + 3H\dot{\phi}_I - \frac{\nabla^2 \phi_I}{a^2} + \frac{\partial V(\phi_I)}{\partial \phi_I} = 0 \quad (3.12)$$

Esta es la ecuación que describe la dinámica de este campo. Para un campo escalar, su tensor energía-momento viene dado por:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_I \partial_\nu \phi_I + g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.13)$$

De donde se obtiene que:

$$\rho_{\phi_I} = \frac{\dot{\phi}_I^2}{2} + V(\phi_I) + \frac{(\nabla \phi_I)^2}{2a^2} \quad (3.14)$$

$$P_{\phi_I} = \frac{\dot{\phi}_I^2}{2} - V(\phi_I) - \frac{(\nabla \phi_I)^2}{6a^2} \quad (3.15)$$

Si ahora se divide el campo del inflatón en su valor clásico y las fluctuaciones cuánticas alrededor de este:

$$\phi_I(t) = \phi_{I0}(t) + \partial \phi_I(\mathbf{x}, t) \quad (3.16)$$

Se pueden ignorar por ahora las fluctuaciones cuánticas, lo que reduce las expresiones anteriores (3.12)(3.14)(3.15) a:

$$\ddot{\phi}_{I0} + 3H\dot{\phi}_{I0} + \frac{\partial V(\phi_{I0})}{\partial \phi_{I0}} = 0$$

$$\rho_{\phi_I} = \frac{\dot{\phi}_{I0}^2}{2} + V(\phi_{I0}) \quad (3.17)$$

$$P_{\phi_I} = \frac{\dot{\phi}_{I0}^2}{2} - V(\phi_{I0})$$

Se puede ver ahora que si se cumple que:

$$V(\phi_0) \gg \dot{\phi}_{I0}^2 \quad (3.18)$$

Entonces:

$$P_\phi \approx -\rho_\phi \quad (3.19)$$

Se tiene por tanto que un universo dominado por un campo escalar cuya energía potencial sea mucho mayor que su energía cinética es un escenario compatible con la idea de la inflación y del modelo de De Sitter. Esta diferencia entre energías implica que el campo escalar está “rodando hacia abajo” lentamente a lo largo de su potencial, por lo que este periodo se conoce también como periodo de *slow roll*. Sustituyendo esta condición en

la ecuación del movimiento del campo clásico (3.17) se puede reescribir [11] esta condición como:

$$V(\phi_0) \gg \dot{\phi}_{I0}^2 \implies \frac{(V')^2}{V} \ll H^2 \quad (3.20)$$

y:

$$|\ddot{\phi}_{I0}| \ll |3H\dot{\phi}_{I0}| \implies |V''| \ll |H^2| \quad (3.21)$$

Se definen además las siguientes cantidades, conocidas como parámetros de *slow roll*:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \\ \eta &= \frac{1}{3} \frac{V''}{H^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

La utilidad de estas cantidades consiste en que las condiciones para que un campo escalar sea capaz de producir una etapa de inflación pueden traducirse [11] como condiciones sobre los parámetros de *slow roll*:

$$\epsilon \ll 1, \quad \eta \ll 1 \quad (3.23)$$

3.3. Perturbaciones en relatividad general

Se ha descrito hasta ahora cómo un campo escalar que domine la densidad de energía del universo es capaz de dar lugar a una etapa de inflación siempre y cuando cumpla ciertas condiciones. Sin embargo se han ignorado las fluctuaciones alrededor del valor clásico del campo. Estas se verán notablemente amplificadas por la expansión acelerada del universo, pasando rápidamente a una escala clásica y teniendo consecuencias directas en la evolución de este una vez finalizada la inflación.

En esta sección se presenta una introducción a la teoría de perturbaciones a primer orden en relatividad general, centrándose en sus principales resultados.

3.3.1. Perturbaciones de un campo escalar durante la inflación

El primer paso para entender cómo se comportan estas fluctuaciones pasa por estudiar cómo evolucionan las perturbaciones de un campo escalar cualquiera χ durante el periodo de inflación. Considerando primero el caso de un campo sin masa, es posible expresar sus perturbaciones mediante su transformada de Fourier:

$$\delta\chi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\chi_k(t) \quad (3.24)$$

donde el número de onda k se relaciona con la longitud de onda de la perturbación como $k = 2\pi/\lambda$. En estas variables la ecuación para las perturbaciones será:

$$\delta\ddot{\chi}_k + 3H\delta\dot{\chi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_k = 0 \quad (3.25)$$

De forma cualitativa se pueden distinguir dos casos extremos. En el caso en que la longitud de la perturbación se encuentre **dentro del radio de Hubble** ($k \gg aH$) se puede ignorar el término de fricción $3H\delta\dot{\chi}_k$ y la ecuación queda como:

$$\delta\ddot{\chi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\chi_k = 0 \quad (3.26)$$

Esta corresponde a la ecuación de un oscilador armónico. En este caso la perturbación oscilará con frecuencia (k/a) mientras aumenta su tamaño. Teniendo en cuenta que durante la inflación el valor del factor de escala

a crece muy rápidamente, es sencillo ver que llegará un punto en el que dejará de satisfacerse la condición $k \gg aH$, es decir, la perturbación cruzará el radio de Hubble.

En el caso opuesto, cuando la longitud de la perturbación sea **mucho mayor que H^{-1}** (y por tanto $k \ll aH$), se puede despreciar el término k^2/a^2 y la ecuación será:

$$\delta\ddot{\chi}_k + 3H\delta\dot{\chi}_k = 0 \quad (3.27)$$

Cuya solución son perturbaciones de valor constante. Es decir, una vez que la perturbación atraviesa el radio de Hubble, **su valor se congela y deja de oscilar**. Este resultado es clave a la hora de analizar las consecuencias finales de las fluctuaciones sobre el contenido del universo. Resolviendo esta última ecuación de forma cuantitativa [11] se tiene que en escalas mayores de H^{-1} :

$$|\delta\chi_k| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \quad (3.28)$$

En el caso de un campo escalar con masa, pasando directamente a la solución de las ecuaciones [11], se tiene que la solución es:

$$|\delta\chi_k| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2} - \nu_\chi} \quad (3.29)$$

donde:

$$\nu_\chi = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{H^2}} \quad (3.30)$$

siendo m_χ la masa asociada al campo escalar. Aparece en este caso una dependencia con el tiempo. Sin embargo, recordando las expresiones de las condiciones de slow-roll (3.22) vemos que la expresión del parámetro η corresponde aproximadamente a la cantidad $\frac{3}{2} - \nu_\chi$. El valor de η debe ser pequeño para que el campo del inflatón sea compatible con el modelo De Sitter, por lo que esta dependencia temporal será también pequeña. Se obtiene por tanto un resultado muy similar al caso anterior: una perturbación que se congela al sobrepasar el radio de Hubble.

3.3.2. Perturbaciones en la métrica

El caso del campo del inflatón es especial. Durante el periodo de inflación es el elemento principal de la densidad de energía del universo. Es por ello que cualquier perturbación sobre él conlleva una perturbación en el tensor energía-momento (2.4). A su vez, esta perturbación induce fluctuaciones en la métrica a través de las ecuaciones de Einstein (2.17).

Por otro lado, variaciones en la métrica dan lugar a variaciones en el campo del inflatón a través de la ecuación de Klein-Gordon [12]. Esto implica que ambas perturbaciones están estrechamente relacionadas y deben estudiarse en conjunto.

$$\delta\phi_I \Rightarrow \delta T_{\mu\nu} \Rightarrow \delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta\phi_I \quad (3.31)$$

La métrica de un universo plano FLRW con pequeñas perturbaciones puede escribirse como:

$$ds^2 = \left[{}^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma) \right] dx^\alpha dx^\beta \quad (3.32)$$

La métrica ${}^{(0)}g_{\alpha\beta}$ corresponde a la métrica sin perturbar, y las fluctuaciones cumplen que $|\delta g_{\alpha\beta}| \ll |{}^{(0)}g_{\alpha\beta}|$. Las perturbaciones de la métrica pueden clasificarse en tres tipos distintos según cómo se comporten ante rotaciones espaciales: escalares, vectoriales y tensoriales.

La componente δg_{00} de las perturbaciones se comporta como un escalar y se puede escribir en función

de ϕ , que es un 3-escalar¹.

$$\delta g_{00} = 2a^2 \phi \quad (3.33)$$

Las componentes δg_{0i} , de acuerdo al teorema de Helmholtz, pueden descomponerse en la suma del gradiente de un cierto escalar B y un vector S_i con divergencia nula. En esta sección se emplea la notación $B_{,i}$ para denotar $\partial B / \partial x^i$. Se emplea también el convenio de sumación de Einstein. Estas componentes son por tanto de la forma:

$$\delta g_{0i} = a^2 (B_{,i} + S_i), \quad S_{,i}^i = 0 \quad (3.34)$$

El resto de componentes δg_{ij} , de carácter tensorial, pueden descomponerse como:

$$\delta g_{ij} = a^2 (2\psi) \delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij} \quad (3.35)$$

Donde ψ y E son escalares, y el resto de funciones cumplen:

$$F_{,i}^i = 0, \quad h_{,i}^i = 0, \quad h_{j,i}^i = 0 \quad (3.36)$$

Se tiene por tanto que las perturbaciones escalares vienen descritas por las funciones ϕ , ψ , B y E . Estas perturbaciones se deben a inhomogeneidades en la densidad de energía y son las que dan lugar a variaciones en el potencial del universo primigenio, lo que más tarde llevará a la formación de grandes estructuras en el universo.

Las perturbaciones vectoriales se caracterizan por los vectores S_i y F_i . Están relacionadas con la vorticidad del campo de velocidades y no se ven excitadas durante el periodo de inflación. Por último los modos tensoriales describen las ondas gravitacionales. En una aproximación lineal las ondas gravitacionales no juegan ningún papel en las perturbaciones de la métrica. Sin embargo ganan protagonismo en aproximaciones a ordenes mayores. En este trabajo se tratarán solo las contribuciones escalares, que son las causantes de la mayor parte de los efectos observables.

Teniendo en cuenta solo las perturbaciones escalares, la métrica perturbada más sencilla posible es de la forma:

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} 1 + 2\phi & B_{,i} \\ B_{,i} & (1 - 2\psi) \delta_{ij} - 2E_{,ij} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Con elemento de línea:

$$ds^2 = a^2 [(1 + 2\phi) d\eta^2 + 2B_{,i} dx^i d\eta - ((1 - 2\psi) \delta_{ij} - 2E_{,ij}) dx^i dx^j] \quad (3.38)$$

A partir de esta métrica se pueden calcular de nuevo los símbolos de Levi-Civita, el tensor de Ricci, el tensor de Einstein y un nuevo tensor energía - momento, construyéndose de forma análoga toda la cosmología vista en el capítulo 2.

3.3.3. Elección del gauge

La principal diferencia entre el estudio de perturbaciones en relatividad general y el caso newtoniano es la libertad a la hora de escoger un sistema de coordenadas. Esta libertad puede dar lugar a la aparición de modos perturbativos ficticios, no asociados a ninguna inhomogeneidad real si no a propiedades del sistema de coordenadas. Esto puede verse al pensar en el valor de la perturbación como la diferencia entre el valor de una cierta cantidad en el espacio-tiempo real (con perturbaciones) y un espacio-tiempo ideal (FLRW) en un cierto punto. A la hora de computar esta diferencia debe especificarse una relación unívoca entre ese punto concreto

¹No debe confundirse el campo escalar del inflatón ϕ_I con uno de los potenciales escalares de las perturbaciones de la métrica ϕ .

expresado en el espacio-tiempo perturbado y en el ideal. Esto es lo que se conoce como elegir un gauge. Puede verse también como fijar un sistema de coordenadas, teniendo siempre en mente que no hay ningún sistema privilegiado.

Se abren ahora dos posibilidades. La primera es **fijar un gauge y trabajar en él**. Para eso se deben conocer las leyes de transformación de las cantidades con las que se está trabajando. En el caso de las perturbaciones escalares, para una transformación de coordenadas:

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \quad (3.39)$$

Donde la parte espacial del vector ξ^α se descompone, de nuevo según el teorema de Helmholtz, en:

$$\xi^i = \xi_\perp^i + \zeta^i \quad (3.40)$$

Se tiene que las transformaciones son [7]:

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a}(a\xi^0)'; \quad \tilde{B} = B + \zeta' - \xi^0 \quad (3.41)$$

$$\tilde{\Psi} = \Psi + \frac{a'}{a}\xi^0; \quad \tilde{E} = E + \zeta$$

Se puede ahora elegir un sistema de coordenadas imponiendo condiciones sobre estas perturbaciones escalares. Dos de los más sencillos son, por ejemplo, el **gauge longitudinal** y el **gauge síncrono**. En el caso del longitudinal, fijamos $E = B = 0$. Esto determina unívocamente un sistema de coordenadas.

En el caso síncrono se impone que $\phi = B = 0$. Esta condición no es satisfecha por un único sistema de coordenadas si no que existe un conjunto de sistemas de coordenadas síncronos. Esto se soluciona añadiendo otra restricción más que sí que defina unívocamente unas coordenadas. Existen otra serie de gauges posibles en cosmología, cada uno de ellos adecuado para trabajar en cierto tipo de situaciones. Otros ejemplos son el gauge espacialmente plano, el gauge ortogonal comóvil o el gauge de N-cuerpos.

La otra posibilidad consiste en construir cantidades que sean invariantes bajo estas transformaciones y **trabajar únicamente con invariantes gauge**. Los más empleados son los conocidos como potenciales de Bardeen [13]. En este texto se sigue la notación empleada en [7], en la que dichos potenciales se definen como:

$$\Phi := \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')] \quad (3.42)$$

$$\Psi := \psi + \frac{a'}{a}(B - E') \quad (3.43)$$

Al trabajar con estas cantidades se pueden distinguir las perturbaciones ficticias de las reales. Si ambos potenciales son cero, las perturbaciones son consecuencia de las coordenadas elegidas y pueden eliminarse mediante el cambio de coordenadas adecuado.

Otro invariante gauge de especial interés es la **perturbación comóvil de curvatura**. La curvatura espacial intrínseca en una hipersuperficie de tiempo propio η constante en un universo plano es:

$$R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \psi \quad (3.44)$$

Es por ello que la cantidad ψ se conoce como potencial de curvatura. Ninguna de estas dos cantidades (R, ψ) son invariantes gauge, pero se puede construir [11] una nueva función que si que lo sea, la perturbación

comóvil de curvatura:

$$\mathcal{R} = \psi + H \frac{\delta\phi_I}{\dot{\phi}_I} \quad (3.45)$$

Físicamente su significado es el valor de potencial gravitacional en hipersuperficies donde $\delta\phi = 0$. Situándose ahora en un cierto gauge es posible calcular su valor y, lo que es más interesante, su espectro de potencias. Para escalas mayores que el radio de Hubble, el espectro de potencias de \mathcal{R} es [11]:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{4\pi G}{\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_{\mathcal{R}}-1} = A_{\mathcal{R}}^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_{\mathcal{R}}-1} \quad (3.46)$$

donde el índice espectral $n_{\mathcal{R}} - 1$ se puede escribir en función de los parámetros de *slow roll* como:

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = 2\eta - 6\epsilon \ll 1 \quad (3.47)$$

Se puede ver por tanto que el espectro de potencias de la perturbación de curvatura comóvil a escalas super-Hubble es prácticamente plano, teniendo una dependencia mínima con k . Su amplitud también es prácticamente constante ya que el valor de H se mantiene constante durante la época de inflación. Se confirma entonces que para el campo del inflatón las perturbaciones se comportan igual que en el caso estudiado de un campo escalar cualquiera: **las perturbaciones que superan el radio de Hubble durante la inflación quedan congeladas fuera de este.**

Capítulo 4

Fondo cósmico de microondas

El fondo cósmico de microondas (CMB, Cosmic Microwave Background) es, tal y como su nombre indica, un fondo isótropo de radiación en microondas. Descubierta en 1965 por Penzias y Wilson, es frecuentemente designado como "la fotografía más antigua del universo". Su origen se remonta a $t = 370000$ años tras el origen del universo o, equivalentemente, a un redshift $z = 1100$. Es en esta época en la que la temperatura del plasma ha disminuido lo suficiente como para que los fotones se desacoplen de este. Antes de este momento los fotones permanecían confinados en el plasma, dispersándose constantemente con los electrones libres que lo formaban. Cuando la temperatura disminuye a unos 3000K los electrones empiezan a combinarse con los iones para formar átomos neutros, dando comienzo así a la recombinación. Cuando disminuye el número de electrones libres los fotones pueden escapar y viajar libremente por el universo hasta nuestros días. Esto se traduce en un fondo de radiación isótropo y casi homogéneo, correspondiente a un cuerpo negro con $T \approx 2.7$ K. Esta temperatura es el resultado del corrimiento al rojo debido a la expansión del universo, siguiendo la relación:

$$T_{\text{CMB}}(z) \approx 2.7K(1 + z) \quad (4.1)$$

Además, el CMB tiene prácticamente la misma temperatura en todo el cielo, tan solo midiéndose variaciones del orden $\Delta T/T \approx 10^{-5}$. Es esta isotropía la que daba lugar a el problema del horizonte (3.5) que resuelve la inflación. Sin embargo la inflación también juega un papel clave en la presencia de esas pequeñas anisotropías. Es ahora donde tienen relevancia las perturbaciones del campo del inflatón estudiadas en el capítulo anterior.

Históricamente, la primera misión que permitió observar experimentalmente dichas anisotropías fue el satélite Cosmic Background Explorer (COBE) en los años 90. A este le siguieron WMAP en 2001 y por último Planck, lanzado en 2009 y operativo hasta 2013. Esto sirve para hacerse una idea de cuan recientes son las observaciones de las diferencias de temperatura en el CMB. En la figura (4.1) se pueden ver estas diferencias tal y como fueron medidas por Planck.

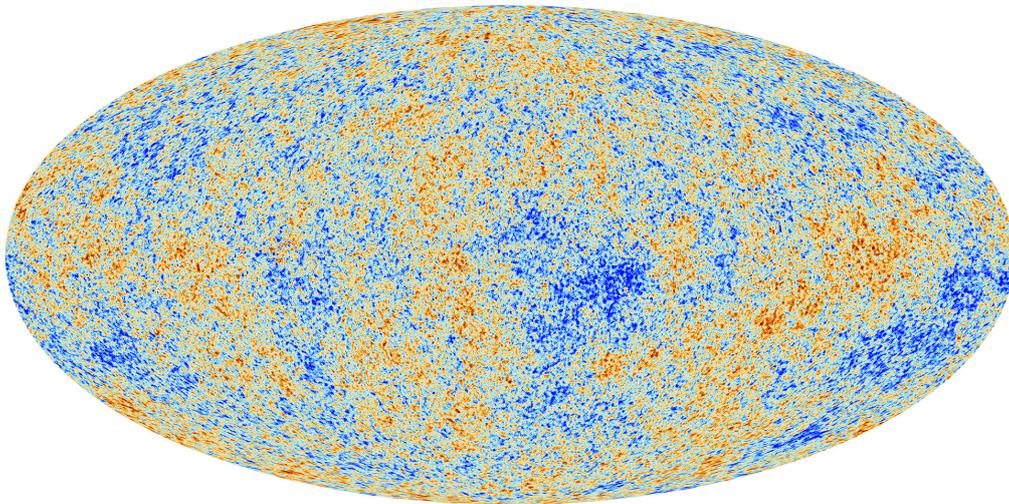


Figura 4.1: Anisotropías del fondo cósmico de microondas observadas por el satélite Planck. Crédito: ESA

4.1. Efecto Sachs-Wolfe

Se pasa ahora a estudiar los distintos efectos que dominan el CMB. En apartados anteriores se ha visto cómo las perturbaciones del campo del inflatón se comportan cualitativamente como las de un campo escalar cualquiera durante la inflación: la longitud de las perturbaciones oscila y crece exponencialmente hasta superar el radio de Hubble, donde su valor queda congelado. Una vez finalizada la inflación, el radio de Hubble comenzará de nuevo a crecer proporcionalmente a una potencia de a en función de la especie que domine la densidad de energía del universo.

Este crecimiento de H^{-1} conlleva que algunas perturbaciones reentrarán el radio de Hubble. Otras, sin embargo, permanecerán prácticamente intactas hasta el momento de la recombinación y la consecuente emisión del CMB. Son estas perturbaciones primigénias el principal ingrediente para la existencia de anisotropías a escalas angulares mayores de 1° , que es el ángulo subtendido por el radio de Hubble durante la recombinación (3.6). Estas perturbaciones implican una variación del potencial gravitatorio que da lugar a una pequeña variación en la energía con la que los fotones son emitidos (redshift gravitatorio). A esto hay que sumarle variaciones de temperatura intrínsecas del plasma, también relacionadas con el potencial gravitatorio. La relación entre las anisotropías y la variación del potencial es sencilla y es aproximadamente [14]:

$$\frac{\delta T}{T} \simeq -\frac{1}{3}\Phi \quad (4.2)$$

donde Φ es uno de los potenciales de Bardeen definidos en (3.42). Justo después de la recombinación, la radiación constituye una parte pequeña pero no despreciable de la densidad de energía. Igualmente, en cierto punto de la historia del universo la energía oscura pasa a ser la especie dominante en el universo. Ambas circunstancias dan lugar a una variación temporal de Φ y una nueva contribución a las anisotropías en temperatura. Es lo que se conoce como efecto Early-Integrated (EISW) y Late-Integrated Sachs Wolfe (LISW) respectivamente. Estos efectos no son especialmente importantes en una primera aproximación pero dan lugar a ciertas características que se ven reflejadas en el espectro de potencias del fondo cósmico de microondas.

4.2. Oscilaciones acústicas de bariones (BAO)

Por otro lado, hay perturbaciones que si que podrán reentrar en el radio de Hubble antes de que se emitan los fotones del CMB. La evolución temporal de estas perturbaciones depende de la especie dominante en el momento de la reentrada (radiación para $z \gg 3000$, materia para $z \ll 3000$), además del valor de ciertos parámetros cosmológicos como la densidad de bariones. La relación entre el espectro original de la perturbación y el nuevo espectro una vez se produzca la reentrada viene dado por las funciones de transferencia. El cálculo de estas funciones es complejo y requiere de una descripción detallada de la composición del plasma. Algunas aproximaciones pueden encontrarse en [7], [15]. No es el objetivo de este trabajo estudiar dichas funciones, si no reflejar las consecuencias que tienen sobre el universo primordial.

Tal y como se ha visto, estas perturbaciones producen fluctuaciones en la densidad de energía y por tanto del potencial gravitatorio. Esto da lugar a la aparición de pozos y colinas de potencial en el fluido de fotones y bariones del que está formado el universo primigenio. Estas variaciones del potencial, dominadas por la materia oscura, dan lugar a una serie de oscilaciones en el fluido fotones-bariones: los bariones constituyen la inercia del fluido y la presión fotónica actúa como mecanismo restaurador. Son estas lo que se conoce como oscilaciones acústicas de bariones (Barionic Acoustic Oscillations, BAO). Se puede establecer un símil sencillo si se piensa en el espacio como una serie de valles y colinas: los bariones son bolas que ruedan hacia las zonas de menor potencial y los fotones son muelles que se oponen a este movimiento, dando lugar a las oscilaciones. La amplitud de las oscilaciones es pequeña, por lo que estas evolucionan de forma lineal y con modos independientes. La frecuencia de estos modos viene dada por múltiplos de la velocidad del sonido en el plasma primordial.

Tras la recombinación los fotones escapan y viajan libres, cesando así las oscilaciones. En ese punto la fase de las oscilaciones queda congelada. En función de donde se encontrase cada fotón al ser emitido, en un pozo o en una colina de potencial, experimentará un redshift o un blueshift y una correspondiente variación

en la temperatura del CMB. Dentro de estas oscilaciones hay una serie de modos privilegiados. Las mayores diferencias de temperatura se darán para los modos que se encontrasen en un máximo o un mínimo dentro su periodo de oscilación en el momento de la recombinación. Estos modos son comparables a los modos acústicos de un instrumento. En concreto, la mayor variación de temperatura corresponderá al modo que solo ha tenido tiempo de contraerse una vez. El número de onda de este primer modo (k_1) es igual a π dividido entre la distancia que puede viajar el sonido hasta la recombinación. A esta distancia se le conoce como **horizonte de sonido**. El siguiente modo destacado será el $k_2 = 2k_1$, que oscilará el doble de rápido y por tanto se encontrará en el máximo de su expansión. Esto será así para modos sucesivos, formando de esta manera el conjunto de los armónicos. La amplitud de los modos disminuye según aumenta su frecuencia, lo que significa que los picos más significativos vendrán dados por los primeros modos.

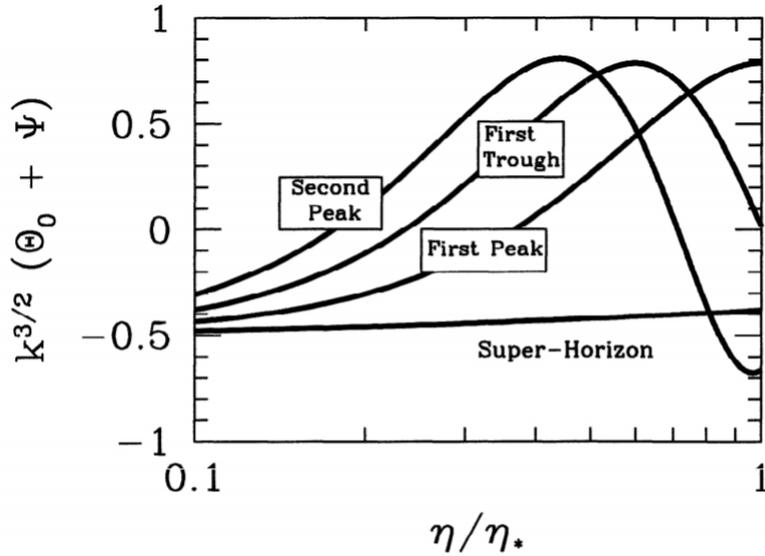


Figura 4.2: Evolución de cuatro modos distintos de perturbaciones antes de la recombinación (η_*). Corresponden a perturbaciones fuera del radio de Hubble, al primer pico acústico, el segundo pico acústico y una perturbación intermedia entre estos. [16]

Estas variaciones son significativamente más grandes que las producidas por el efecto Sachs-Wolfe y por ello son el mecanismo dominante para las anisotropías a pequeñas escalas. Su alcance sin embargo queda limitado por la distancia que pueden viajar las ondas de materia en el plasma. En la figura (4.2) se puede ver la amplitud de varios modos justo antes de darse la recombinación. El modo *Super-Horizon* corresponde a los descritos en el efecto Sachs-Wolfe y por tanto no evoluciona en el tiempo. El modo *First Peak* corresponde al modo con $k = k_1$ y se ve cómo en el momento de la recombinación ha completado solo medio periodo. De la misma forma, *Second Peak* corresponde al modo k_2 . Sin embargo el modo *First Trough* tiene un número de onda intermedio, distinto de los armónicos, y por tanto no lleva asociado ninguna variación significativa de temperatura a él.

4.3. Espectro de potencias del CMB

Una descripción de las anisotropías del fondo cósmico de microondas puede darse en función de una serie infinita de funciones de correlación. Para ello es conveniente expandir las variaciones de temperatura en armónicos esféricos

$$\frac{\Delta T}{T}(x_0, \eta_0, \mathbf{n}) = \sum_{lm} a_{lm}(x_0) Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (4.3)$$

donde (x_0, η_0) son nuestra posición y nuestro tiempo actuales, \mathbf{n} es la dirección y l es el valor de los distintos multipolos. Se definen también los coeficientes C_l como:

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l \quad (4.4)$$

Por último, la función de correlación entre 2 puntos se puede escribir en función de estos coeficientes como:

$$\left\langle \frac{\delta T(\mathbf{n})}{T} \frac{\delta T(\mathbf{n}')}{T} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \quad (4.5)$$

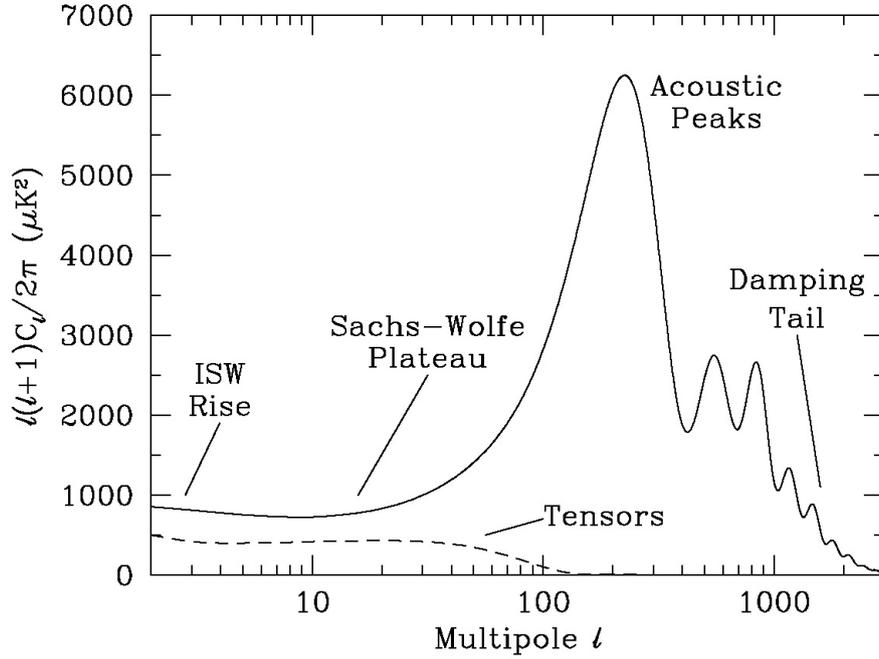


Figura 4.3: Espectro teórico de potencias del CMB para un modelo Λ CDM, obtenido con CMBFAST. El eje x está en una escala logarítmica para mostrar mejor la distintas regiones del espectro. [17]

A partir de esto se puede construir el espectro de potencias del CMB. El cálculo teórico de estos coeficientes es, por lo general, bastante complejo y requiere del empleo de programas de cálculo numérico. Dos de los códigos más utilizados para ello son CMBFAST y, más recientemente, CAMB. Estos códigos permiten, a partir de una serie de parámetros, reconstruir los distintos efectos que dan lugar a las anisotropías. En la figura (4.3) se pueden ver algunos de los efectos descritos previamente. La *Sachs-Wolfe Plateau* corresponde al efecto Sachs-Wolfe y se puede ver cómo es el efecto dominante a grandes escalas angulares (multipolos bajos). Su valor es prácticamente constante ya que, tal y como se ha estudiado, se origina a partir de perturbaciones en escalas mayores que el radio de Hubble. *ISW Rise* es la contribución del *Integrated Sachs-Wolfe Effect*, que da lugar a una pequeña variación en la anisotropía producida por el efecto SW.

La parte más destacada del espectro son los picos acústicos. Si se calcula el tamaño angular del horizonte de sonido al momento de la recombinación se obtiene:

$$\theta \simeq c_s \frac{\eta_{ls}}{\eta_0} \simeq c_s \left(\frac{T_0}{T_{ls}} \right)^{1/2} \sim 1^\circ \quad (4.6)$$

En multipolos, ese valor corresponde aproximadamente a

$$l = \frac{\pi}{\theta} \approx 200 \quad (4.7)$$

De acuerdo a lo visto sobre las BAO es de esperar la existencia en ese multipolo de una variación de temperatura asociada al primer modo de oscilación del plasma. Aproximadamente a la mitad de distancia, es decir, en un multipolo $l \approx 400$, debería verse una caída correspondiente al segundo modo de oscilación, aquél que alcanza su mínimo en el momento de la recombinación. Esto se produce para el resto de modos armónicos, apareciendo en el espectro una serie de picos acústicos. Para multipolos más elevados aparecen una serie de efectos que atenúan las anisotropías, como el *Silk damping* y el *free streaming*.

Si se observa ahora el espectro real (4.4) obtenido por la misión Planck en 2013 (4.4), se puede entender porque la inflación es una de las teorías más aceptadas en el ámbito de la cosmología. La posición de las distintas regiones, especialmente la de los picos acústicos, coincide de forma bastante precisa con la prevista por la teoría. Cabe destacar que la posición de estos picos es especialmente sensible a ciertos parámetros. En el caso del primer pico, su posición es sensible a la densidad total de las distintas especies del universo (y por tanto a su curvatura). Estas medidas experimentales nos confirman que la densidad total del universo es muy cercana a la densidad crítica (2.21), es decir, que el universo es prácticamente plano. Encontrar el segundo pico en una posición que corresponde a un armónico del primero permite confirmar que el origen de estas anisotropías son las ondas de sonido inducidas por las perturbaciones gravitacionales. La altura relativa de este pico respecto al primero es también un indicador de la densidad de bariones en el universo, ya que una mayor presencia de estos conlleva una mayor amplitud en los picos impares [18].

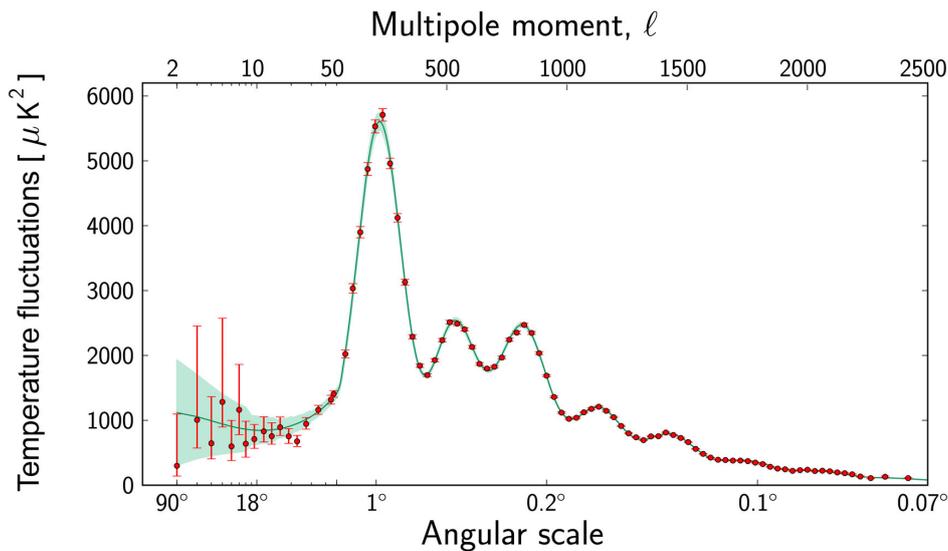


Figura 4.4: Espectro de potencias de las fluctuaciones de temperatura del CMB obtenido por Planck en 2013. Copyright: ESA and the Planck Collaboration

El espectro del fondo cósmico de microondas constituye por tanto uno de los recursos más valiosos a la hora de obtener información sobre las épocas más tempranas del universo. Más allá de lo descrito en este trabajo el CMB posee otra serie de características como sus distintos modos de polarización o los efectos de lente gravitatoria que pueden aportar aún más datos. En pocos años el estudio del CMB se ha convertido por sí solo en un campo de la física, siendo necesarias para su estudio múltiples ramas de conocimiento. Futuros experimentos del CMB con una mayor precisión prometen dar respuesta a preguntas tales como la naturaleza de la materia y la energía oscura, o testear algunas de las teorías actuales sobre física fundamental como gravedad modificada o física más allá del modelo estándar.

Parte II

Ajuste de parámetros

Capítulo 5

Desviaciones de Λ CDM: otras parametrizaciones

El modelo Λ CDM combinado con la teoría de la inflación constituye el paradigma de la cosmología moderna. Ya se han citado varios de sus éxitos a lo largo del texto: la existencia del CMB o la posición precisa de los picos acústicos de su espectro. A estos se suman otros como la predicción de la abundancia relativa de los elementos ligeros (nucleosíntesis) o la existencia del modo B de polarización del CMB [19]. Sin embargo, Λ CDM es solo una de las posibles parametrizaciones del modelo del Big Bang. El empleo de otras parametrizaciones, tal y como se describe en esta segunda parte, permite testear hasta que punto Λ CDM es el modelo que mejor se ajusta a los datos observacionales.

Uno de los problemas que la adición de la teoría de la inflación no alcanza a explicar es la naturaleza de la **energía oscura**. Λ CDM asume una energía oscura descrita con una constante cosmológica, de ecuación de estado $\rho = -p$. Sin embargo, tal y como se ha visto en (3.8), la única condición necesaria para una expansión acelerada del universo es $w < -1/3$. Existen por tanto otras parametrizaciones para esta ecuación de estado perfectamente compatibles con dicha expansión. Comparar estas parametrizaciones alternativas con los datos experimentales permite acotar hasta que punto una constante cosmológica da una descripción adecuada de la realidad, y estudiar así posibles desviaciones respecto a lo predicho por el modelo estándar.

Una de estas modificaciones en la ecuación de estado es el modelo conocido como wCDM. En este caso la relación entre densidad y presión viene dada por:

$$P = w\rho \quad (5.1)$$

donde w es una constante que puede asumir cualquier valor. Para una función cualquiera del redshift $w(z)$, la ecuación (2.25) se escribe como:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \left[\Omega_{0,R}(1+z)^4 + \Omega_{0,M}(1+z)^3 + \Omega_{0,\Lambda} \exp\left\{3 \int_0^z \frac{1+w(z)}{1+z} dz\right\} \right] \quad (5.2)$$

Para el caso concreto de wCDM, la ecuación es

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \left[\Omega_{0,R}(1+z)^4 + \Omega_{0,M}(1+z)^3 + \Omega_{0,\Lambda}(1+z)^{3(1+w)} \right] \quad (5.3)$$

Como cabría esperar esta reproduce la expresión vista en Λ CDM para $w = -1$ (2.25). Si las fuentes de datos con las que se está trabajando se encuentran a redshifts pequeños, la contribución de la densidad de radiación (del orden de 10^{-5}) a la densidad total puede despreciarse. Si además se tiene en cuenta que los datos experimentales indican que el universo es espacialmente plano entonces:

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda = \Omega_{0,M} + \Omega_{0,\Lambda} \approx 1 \quad (\text{a } z \text{ pequeños}) \quad (5.4)$$

Con estas consideraciones se puede escribir la ecuación (5.3) como:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \left[\Omega_{0,M}(1+z)^3 + (1-\Omega_{0,M})(1+z)^{3(1+w)}\right] \quad (5.5)$$

El modelo wCDM deja por tanto dos parámetros libres, la densidad actual de materia $\Omega_{0,M}$ y el parámetro adimensional de la ecuación de estado de la energía oscura w .

Otra parametrización posible es la parametrización de Chevallier-Polarski-Linder (CPL). El modelo CPL da una mayor libertad al parámetro w y permite que este varíe con el tiempo. Concretamente postula una variación con el redshift de la forma:

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} \quad (5.6)$$

donde w_0 y w_1 son constantes. Con esta expresión y realizando las mismas suposiciones que en el caso anterior, la ecuación (5.2) pasa a ser:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \left[\Omega_{0,M}(1+z)^3 + (1-\Omega_{0,M})(1+z)^{3(1+w_0+w_1)} \exp\left(-3w_1 \frac{1}{1+z}\right)\right] \quad (5.7)$$

que contiene tres parámetros libres: $\Omega_{0,M}$ y las constantes w_0 y w_1 .

Estas nuevas ecuaciones de estado de la energía oscura abren las puertas a nuevos tipos de energía oscura. Se designa como energía oscura fantasma a aquella que tiene un valor $w < -1$. Esta predice una expansión del universo aún mayor que la asociada a una constante cosmológica, dando lugar eventualmente a un escenario de *Big Rip*. Por otro lado, se conoce como quintaesencia a aquellos modelos de energía oscura basados en campos escalares, en los que se suele cumplir que $0 \geq w > -1$. La parametrización wCDM da cabida a alguno de estos tipos mientras que CPL permite que la energía oscura evolucione a lo largo de la historia del universo, siendo posibles transiciones entre tipos de energía oscura.

En este trabajo se realizan ajustes de parámetros en estas dos parametrizaciones con el fin de comprobar si alguno de estos tipos de energía oscura se ajusta mejor a los datos experimentales o si, por el contrario, Λ CDM es la única respuesta posible a la naturaleza de la energía oscura.

Capítulo 6

Fuentes de datos

Se describen ahora los distintos conjuntos de datos empleados en los ajustes del modelo. Se han usado datos correspondientes a fuentes cercanas provenientes de supernovas Ia, $H(z)$ y BAO, así como datos a redshifts grandes dados por el CMB.

6.1. Supernovas tipo Ia

Las supernovas tipo Ia son lo que se conoce como candelas estándar, es decir, objetos cuyo brillo es bien conocido. Midiendo su magnitud aparente en la Tierra y a través de la ley de la inversa del cuadrado podemos calcular fácilmente la distancia a la que se encuentran. En este caso se ha empleado la Union2 Compilation [20], que incluye datos de 557 SNe Ia con redshifts comprendidos entre $z = 0.01$ y $z = 1.39$. Para nuestro ajuste se comparan los valores observados del módulo de la distancia μ_i^{obs} con el valor teórico predicho por el modelo $\mu_i^{\text{th}}(z_i)$. El módulo de la distancia se define como:

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \frac{D_L(z)}{10 \text{pc}}, \quad D_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})/H_0} + \mu_0(H_0) \quad (6.1)$$

Donde D_L es la distancia de luminosidad y 10 pc corresponde a una distancia de 10 pársecs. El análisis de los datos se basa en la búsqueda del valor mínimo de χ^2 . Para ello se calcula la diferencia entre los datos experimentales y los valores teóricos y se marginaliza respecto al parámetro μ_0 , que combina el valor de H_0 y la magnitud absoluta de una supernova estándar. Los detalles sobre cómo marginalizar parámetros se describirán en el capítulo 7.

$$\tilde{\chi}_{SN}^2 = \sum_{i=1}^{557} \frac{(\mu_i^{\text{obs}} - \mu_i^{\text{th}}(z_i, \Omega_{0,M}, w_0, w_1))^2}{\sigma_i^2}, \quad \chi_{SN}^2 = \min_{H_0} \tilde{\chi}_{SN}^2 \quad (6.2)$$

6.2. $H(z)$

Es posible estimar valores del parámetro de Hubble a partir de medidas de la edad diferencial de galaxias. Tal y como se describe en [21], se puede relacionar $H(z)$ con la diferencia de edades entre galaxias formadas a la vez pero separadas por un intervalo Δz tal que:

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} \quad (6.3)$$

Para esta fuente se comparan los valores del parámetro de Hubble estimados de forma experimental con los valores teóricos. Estos dependerán de nuevo de H_0 por lo que se marginaliza respecto a ese parámetro:

$$\tilde{\chi}_H^2 = \sum \frac{(H^{\text{obs}}(z_i) - H^{\text{th}}(z_i, \Omega_{0,M}, w_0, w_1))^2}{\sigma_i^2}, \quad \chi_H^2 = \min_{H_0} \tilde{\chi}_H^2 \quad (6.4)$$

Los datos empleados y su procedencia aparecen reflejados en la tabla (6.1)

z	$H(z)$	σ_H	Ref	z	$H(z)$	σ_H	Ref
0.070	69	19.6	[22]	0.4783	80.9	9	[23]
0.090	69	12	[24]	0.480	97	62	[25]
0.120	68.6	26.2	[22]	0.593	104	13	[26]
0.170	83	8	[24]	0.6797	92	8	[26]
0.1791	75	4	[26]	0.7812	105	12	[26]
0.1993	75	5	[26]	0.8754	125	17	[26]
0.200	72.9	29.6	[22]	0.880	90	40	[25]
0.270	77	14	[24]	0.900	117	23	[24]
0.280	88.8	36.6	[22]	1.037	154	20	[26]
0.3519	83	14	[26]	1.300	168	17	[24]
0.3802	83	13.5	[23]	1.363	160	33.6	[27]
0.400	95	17	[24]	1.430	177	18	[24]
0.4004	77	10.2	[23]	1.530	140	14	[24]
0.4247	87.1	11.2	[23]	1.750	202	40	[24]
0.445	92.8	12.9	[23]	1.965	186.5	50.4	[27]

Tabla 6.1: Valores de $H(z)$ y sus correspondientes errores obtenidos de [22–27]

6.3. BAO

Los datos de las oscilaciones acústicas de bariones se obtienen a través del estudio de la distribución de un número muy elevado de galaxias. Estas forman parte de las **reglas estándar**, objetos con un tamaño conocido que pueden usarse para obtener otras medidas de distancias. Más concretamente las BAO están relacionadas con la distancia del horizonte de sonido durante la recombinación. Tal y como se ha descrito anteriormente, esta distancia corresponde a la aparición del primer pico acústico del CMB. Esto a su vez se relaciona con la distancia a la que se encontraban los pozos de potencial que serían la semilla para la posterior formación de agrupaciones de galaxias.

Del estudio de estas distancias se obtienen dos parámetros (Tabla (6.2)):

$$d_Z(z) = \frac{r_s(z_d)}{D_V(z)}, \quad A(z) = \frac{H_0 \sqrt{\Omega_m^0}}{cz} D_V(z) \quad (6.5)$$

Donde $r_s(z_d)$ es el horizonte de sonido en el momento de la recombinación y $D_V(z)$:

$$D_V(z) = \left[\frac{cz D_L^2(z)}{(1+z)^2 H(z)} \right]^{1/3} \quad (6.6)$$

Para el valor de $r_s(z_d)$ se han tomado las consideraciones expuestas en [28] y se ha considerado como:

$$r_s(z_d) = \frac{104.57 \text{Mpc}}{H_0/100 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})} \quad (6.7)$$

z	$d_z(z)$	σ_d	$A(z)$	σ_A	Ref
0.106	0.336	0.015	0.526	0.028	[30]
0.15	0.2232	0.0084	-	-	[31]
0.20	0.1905	0.0061	0.488	0.016	[32, 33]
0.275	0.1390	0.0037	-	-	[32]
0.278	0.1394	0.0049	-	-	[34]
0.314	0.1239	0.0033	-	-	[33]
0.32	0.1181	0.0026	-	-	[35]
0.35	0.1097	0.0036	0.484	0.016	[32, 33]
0.35	0.1126	0.0022	-	-	[36]
0.35	0.1161	0.0146	-	-	[37]
0.44	0.0916	0.0071	0.474	0.034	[33]
0.57	0.0739	0.0043	0.436	0.017	[38]
0.57	0.0726	0.0014	-	-	[35]
0.60	0.0726	0.0034	0.442	0.020	[33]
0.73	0.0592	0.0032	0.424	0.021	[33]
2.34	0.0320	0.0021	-	-	[39]
2.36	0.0329	0.0017	-	-	[40]

Tabla 6.2: Datos de $d_z(z)$ y $A(z)$ con sus respectivos errores y referencias. Algunos de estos parámetros se derivan el uno a partir del otro, por lo que solo se ha empleado uno de ellos para cada redshift. Aparecen destacados en negrita los datos empleados para los ajustes.

Para el cálculo de χ^2 se ha tenido en cuenta la posible correlación entre los distintos datos a través de las correspondientes matrices de correlación C_d y C_A descritas en [29]. El cálculo queda por tanto:

$$\chi_{\text{BAO}}^2(\Omega_m^0, w_0) = \Delta d_z \cdot C_d^{-1} \cdot (\Delta d_z)^T + \Delta A \cdot C_A^{-1} \cdot (\Delta A)^T \quad (6.8)$$

donde:

$$\Delta d_z = d_z^{\text{obs}}(z) - d_z^{\text{th}}(z), \quad \Delta A = A^{\text{obs}}(z) - A^{\text{th}}(z) \quad (6.9)$$

6.4. CMB

Los datos provenientes del fondo cósmico de microondas corresponden a cantidades a redshifts muy elevados ($z_{\text{CMB}} \approx 1090$), a diferencia del resto de fuentes empleadas. Es por tanto fundamental tener en cuenta la contribución de la densidad de radiación al valor del parámetro de Hubble. A la hora de realizar los ajustes se ha añadido la contribución de la radiación a las ecuaciones (5.5) y (5.7) fijando el valor de $\Omega_{R,0}$ en $9.28 \cdot 10^{-5}$, según los datos más recientes de Planck [6]. Se han comparado las siguientes cantidades:

$$R = \sqrt{\Omega_m^0} \frac{H_0 D_m(z_{\text{CMB}})}{c}, \quad l_A = \frac{\pi D_m(z_{\text{CMB}})}{r_s(z_{\text{CMB}})}, \quad \omega_b = \Omega_b^0 h^2 \quad (6.10)$$

Donde Ω_b^0 es la densidad actual de bariones, y el horizonte de sonido r_s y la distancia comóvil transversal D_M se calculan como:

$$r_s(a_{\text{CMB}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{a_{\text{CMB}}} \frac{da}{a^2 H(a) \sqrt{1 + [3\Omega_b^0 / (3\Omega_r^0)] a}}, \quad D_M(z_{\text{CMB}}) = \frac{D_L(z_{\text{CMB}})}{1 + z_{\text{CMB}}} \quad (6.11)$$

Los datos teóricos se comparan con los datos obtenidos por Planck en 2015 [6] y su correspondiente matriz de correlación [41].

$$R^{Pl} = 1.7448 \pm 0.0054, \quad l_A^{Pl} = 301.46 \pm 0.094, \quad \omega_b^{Pl} = 0.0224 \pm 0.00017 \quad (6.12)$$

$$C_{\text{CMB}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1131.2 & 4.8061 & 5234.42 \\ 4.8061 & 1.1678 & 1077.22 \\ 5234.42 & 1077.22 & 2.48145 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

A partir de estos datos se ha calculado χ^2 , marginalizando en este caso los parámetros w_b y H_0 .

$$\tilde{\chi}_{\text{CMB}}^2 = \Delta \mathbf{x} \cdot C_{\text{CMB}}^{-1} \cdot (\Delta \mathbf{x})^T, \quad \chi_{\text{CMB}}^2 = \min_{H_0, \omega_b} \tilde{\chi}_{\text{CMB}}^2 \quad (6.14)$$

Capítulo 7

Metodología

Para realizar el ajuste de parámetros de los modelos propuestos se ha empleado el algoritmo de Metropolis-Hastings. Este es un método de Monte Carlo basado en Cadenas de Markov (MCMC), un conjunto de algoritmos que se utilizan frecuentemente para la estimación de parámetros cosmológicos. En concreto se emplean para obtener la distribución de un parámetro a partir de un muestreo aleatorio. La principal característica de estos métodos es que poseen falta de memoria: la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior.

Dentro de los MCMC, el algoritmo de Metropolis-Hastings se basa en proponer una distribución intuitiva de un parámetro e ir probando valores de este. De estos valores algunos serán aceptados y otros rechazados, en función de cómo se ajusten a los datos reales. Para el caso de un solo parámetro, el algoritmo se desarrolla así:

1. Se elige un valor inicial del parámetro de forma intuitiva.
2. Se escoge una distribución que determine cuál va a ser el parámetro en la próxima iteración. Esta distribución debe cumplir la condición de que la probabilidad de volver al punto anterior es la misma que la de alejarse de él. La forma más sencilla de lograrlo es mediante una distribución gaussiana centrada en el parámetro.
3. Una vez escogido un nuevo parámetro se calcula su *likelihood* ($f(x_i)$) respecto a los datos experimentales. Se compara ahora con el *likelihood* anterior ($f(x_{i-1})$). En función del resultado se tiene que:
 - a) Si el *likelihood* es mayor ($f(x_i) > f(x_{i-1})$), el nuevo parámetro se acepta y se escoge un nuevo parámetro a partir de una gaussiana centrada en este.
 - b) Si el *likelihood* es menor ($f(x_i) < f(x_{i-1})$), se genera un número aleatorio entre 0 y 1 y:
 - I. Si el cociente $f(x_i)/f(x_{i-1})$ es mayor que el número, se acepta y se prueba un nuevo parámetro a partir de x_i .
 - II. Si el cociente $f(x_i)/f(x_{i-1})$ es menor que el número, se rechaza y el valor anterior permanece una iteración más.

Finalmente el algoritmo devuelve un histograma con los valores de los parámetros y el número de iteraciones que corresponden a cada uno. El comportamiento del algoritmo consiste en empezar en una región de baja probabilidad e ir migrando poco a poco hacia regiones más probables. El hecho de aceptar valores del parámetro que sean menos probables que el anterior permite al algoritmo explorar regiones cercanas a los máximos. Esto evita que este se quede “encerrado” en un máximo local. Tras suficientes iteraciones el algoritmo habrá explorado las regiones de mayor densidad de probabilidad y sus alrededores, convergiendo así hacia una distribución del parámetro que se ajusta a los datos experimentales.

Este método se encuentra condicionado por la elección inicial del valor del parámetro, así como por la elección de la distribución que rige el paso de un valor a otro. Para evitar lo primero se realiza un número elevado de iteraciones y se descartan las primeras, lo que se conoce como *burn-in*. La elección de la distribución depende de cuán compleja sea la distribución final del valor del parámetro. Por suerte, para nuestros parámetros de interés la elección de una gaussiana resulta totalmente adecuada.

En nuestro caso el ajuste se ha realizado a dos y tres parámetros para Λ CDM y CPL respectivamente. Primero se han designado unos valores iniciales para los parámetros a ajustar. El número de iteraciones en cada cadena ha sido elevado (siempre superior a 10^4) para minimizar la dependencia del ajuste con las condiciones iniciales. Para escoger hacia que valor moverse en cada iteración se ha escogido seguir una distribución gaussiana centrada en el valor anterior. Una vez obtenidos los cálculos teóricos, el criterio seguido para avanzar a la siguiente iteración ha sido tratar de minimizar el valor de χ^2 . La fórmula seguida para cada fuente de datos aparece detallada en el apartado 6. Para comparar los distintos χ^2 se ha calculado el *likelihood* \mathcal{L} , que se obtiene como:

$$\mathcal{L} = e^{-\chi^2/2} \quad (7.1)$$

Los datos provenientes del CMB se han utilizado solamente como complemento para corregir los ajustes del resto de fuentes. Al solo constar de 3 puntos no resultan una fuente de datos adecuada para ser empleada en este tipo de ajustes.

Para ciertas fuentes de datos se han marginalizado uno o varios parámetros. Se describe a continuación este procedimiento para el caso del ajuste a partir de SNe Ia, siendo idéntico para el resto de fuentes. En el caso de las SNe Ia, el valor de la distancia de luminosidad depende de μ_0 , y esto a su vez del parámetro de Hubble hoy, H_0 . Para marginalizar respecto a este parámetro podemos expandir la expresión (6.2):

$$\tilde{\chi}_{SN}^2 = A - 2\mu_0 B + \mu_0^2 C \quad (7.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{557} \frac{(\mu_i^{\text{obs}} - \mu_i^{\text{th}}(z_i, \Omega_{0,M}, w_0, w_1))^2}{\sigma_i^2} \\ B &= \sum_{i=1}^{557} \frac{(\mu_i^{\text{obs}} - \mu_i^{\text{th}}(z_i, \Omega_{0,M}, w_0, w_1))}{\sigma_i^2} \\ C &= \sum_{i=1}^{557} \frac{1}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Derivando respecto a μ_0 vemos que la ecuación de $\tilde{\chi}_{SN}^2$ alcanza un mínimo en $\mu_0 = B/C$, por lo que:

$$\chi_{SN}^2 = \min_{H_0} \tilde{\chi}_{SN}^2 = A - \frac{B^2}{C} \quad (7.4)$$

Se puede por tanto pasar a minimizar esta nueva expresión y olvidarse del valor de μ_0 o de H_0 . Para el resto de marginalizaciones se ha seguido un procedimiento similar. En los casos en los que se ha empleado una combinación de datos de distinta fuentes, el χ^2 total se ha definido como la suma de los χ^2 de cada fuente.

Una vez obtenido el *likelihood* de cada iteración se sopesa si conservar los parámetros anteriores o avanzar al nuevo parámetro según los criterios descritos en el algoritmo. El programa guarda un registro de que parejas/ternas de parámetros han sido aceptados, y cuantas iteraciones se ha repetido cada uno. Una vez finalizado, el programa da como salida un archivo con estos datos en formato de histograma, acompañándolos del valor de χ^2 asociado a cada pareja/terna de valores. Todo este algoritmo se ha implementado en el lenguaje de programación de *Mathematica* y se encuentra disponible en la plataforma GitHub a través de <https://github.com/diegoalvar98/AjustesMCMC>.

A partir del histograma de los distintos parámetros se ha obtenido la distribución de cada uno, así como los valores del *best-fit* (la pareja/terna con menor χ^2), los valores medios y sus rangos de confianza. Como *burn-in* se han descartado el 20% de los datos, para minimizar aún más la dependencia de los valores iniciales. Este análisis se ha realizado en el lenguaje de programación Python, sirviéndose del paquete *GetDist*, especializado en obtener estos datos a partir de cadenas de Markov. Los resultados obtenidos de estos ajustes se presentan a continuación en el siguiente apartado.

Capítulo 8

Resultados

8.1. wCDM

En la figura (8.1) se presentan las distribuciones finales de $\Omega_{M,0}$ y de w para cada una de las fuentes de datos, así como para una combinación de estas y de los datos del CMB en la parametrización wCDM. Se incluyen también con distintos tonos los contornos de confianza a 1σ , 2σ y 3σ para la combinación de ambos parámetros.

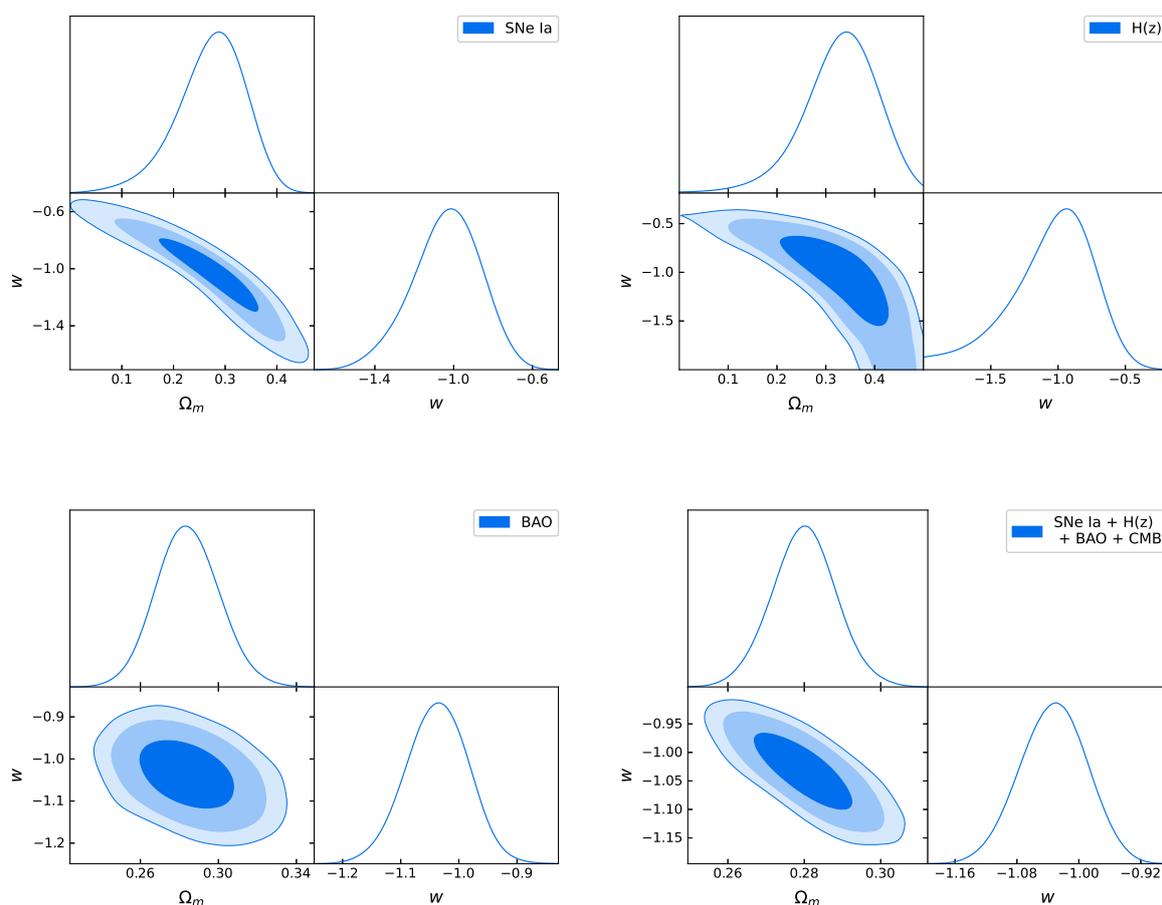


Figura 8.1: Distribución de los parámetros Ω_m y w en wCDM para cada fuente de datos y para una combinación de ellas. Se muestran también los contornos de confianza para 1σ , 2σ y 3σ .

En la figura (8.2) se representan estos mismos contornos de confianza, pero esta vez en una misma escala para que sean más sencillos de comparar. Se incluye en todos los gráficos una línea punteada que representa el valor de w correspondiente al modelo Λ CDM ($w = -1$). Se incluyen también dos gráficas mostrando la superposición

de los contornos de confianza de distintas fuentes: SNe Ia, H(z) y BAO por separado y estas tres fuentes junto al ajuste realizado con el conjunto de todos los datos.

En ambos casos se ve cómo las regiones de confianza a 1σ coinciden claramente en un punto de la recta $w = -1$, en una densidad de materia próxima a 0.30, valor que concuerda con los últimos datos de Planck. Esto queda aún más patente cuando se incluyen los ajustes realizados con todos los datos. Queda por tanto claro que los datos experimentales apuntan a un valor muy próximo a -1 para el parámetro w en w CDM, apoyando así la teoría de que Λ CDM es la descripción más correcta de la naturaleza de la energía oscura. Los valores numéricos obtenidos aparecen reflejados en la tabla 8.1.

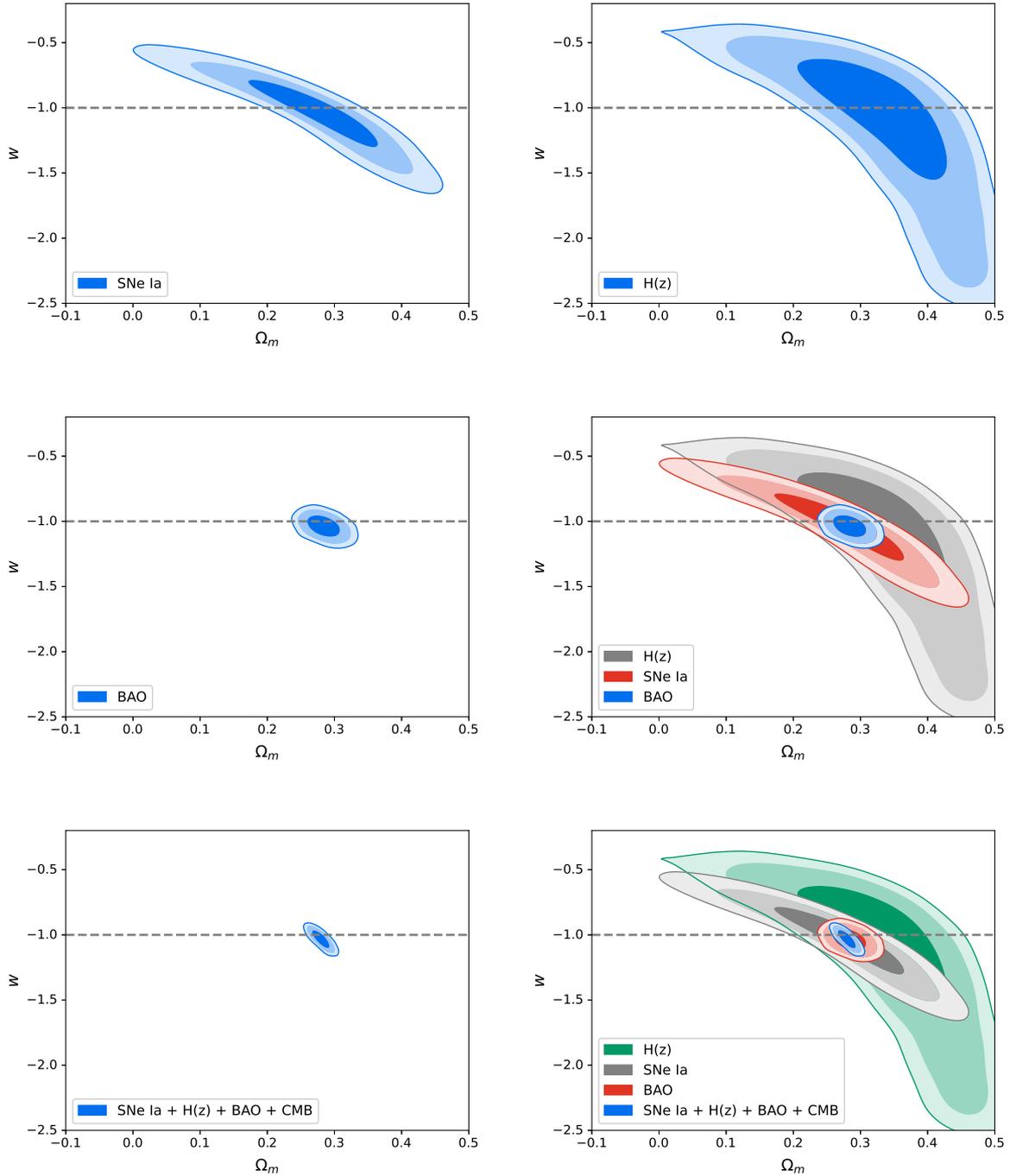


Figura 8.2: Contornos de confianza de Ω_m y w en w CDM para cada fuente de datos y para una combinación de ellas. Los contornos muestran los datos a 1σ , 2σ y 3σ . La línea punteada indica el valor correspondiente a una energía oscura con constante cosmológica ($w = -1$).

8.2. CPL

Al igual que en la sección anterior, en la figura (8.3) se presentan los contornos de confianza para los parámetros w_0 y w_1 a 1σ , 2σ y 3σ en la parametrización CPL. Se han omitido las distribuciones finales de los parámetros en pos de una mayor claridad a la hora de exponer los resultados. Se omiten también las posibles correlaciones con el parámetro $\Omega_{0,M}$ ya que el interés se encuentra en estudiar el comportamiento de los parámetros w_0 y w_1 y la ecuación de estado de la energía oscura.

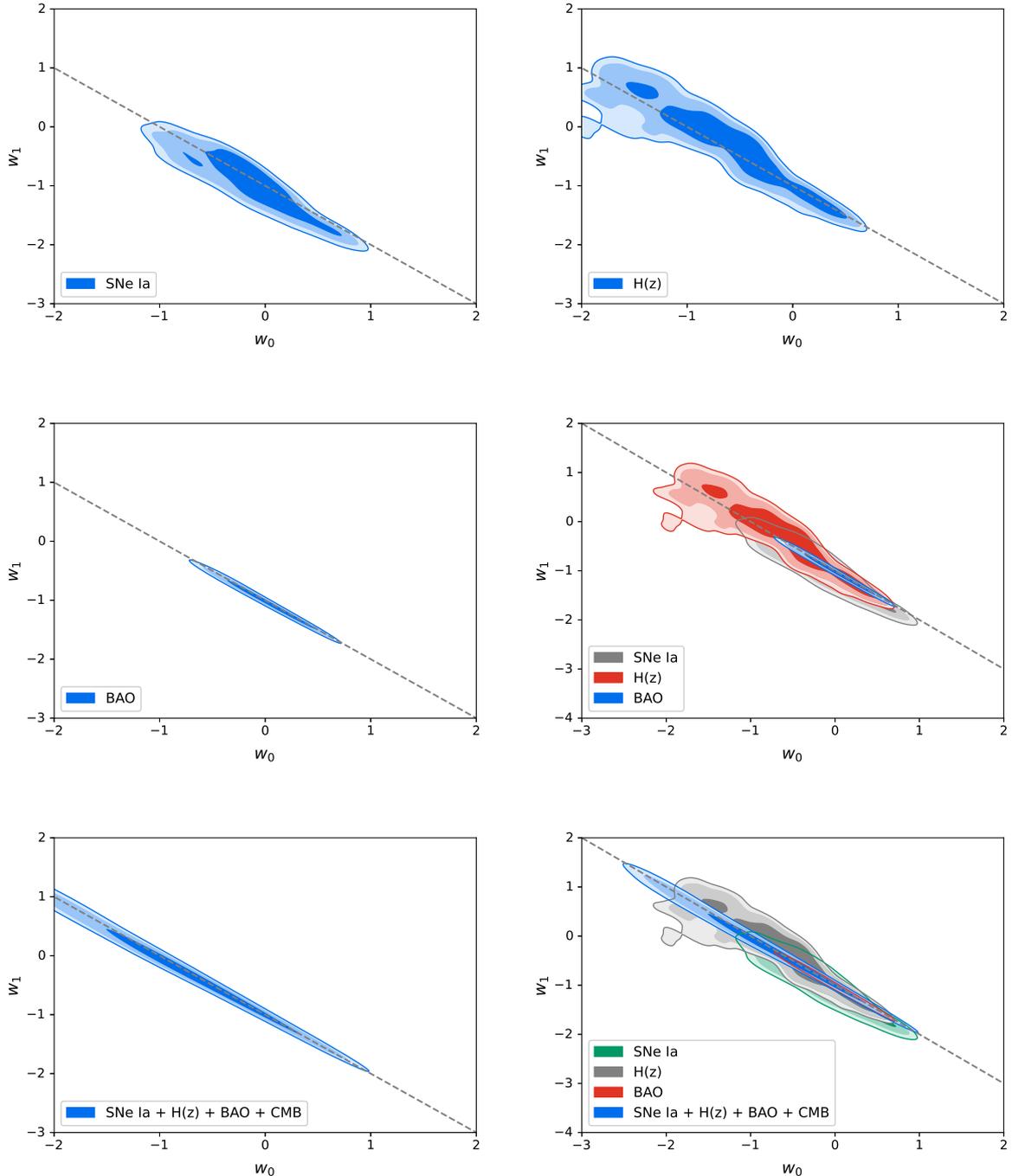


Figura 8.3: Contornos de confianza de Ω_m , w_0 y w_1 en w_0w_1 CDM para cada fuente de datos y para una combinación de ellas. Los contornos muestran los datos a 1σ , 2σ y 3σ . La línea punteada indica la recta correspondiente a una energía oscura compatible con el modelo Λ CDM a un redshift 0.

De nuevo se han representado los contornos obtenidos con cada una de las fuentes, con una combinación de ellas y dos superposiciones para poder comparar los resultados. Se incluye en cada gráfica una recta que

corresponde a la combinación de w_0 y w_1 que sería compatible con el modelo Λ CDM a $z = 0$. Esta combinación corresponde a $w_0 + w_1 = -1$ y es sencillo de comprobar evaluando la ecuación (5.7) en $z = 0$.

La principal conclusión que se puede extraer de estas gráficas es que existe una clara correlación entre ambos parámetros. Sin embargo, en este caso es más difícil evaluar los resultados solamente a partir de sus regiones de confianza. Para ello se ha procedido en la figura (8.4) a representar la evolución del ratio entre la densidad de energía oscura y la densidad de energía oscura actual. En la parametrización CPL este viene dado por:

$$\left. \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{0,\Lambda}} \right|_{\text{CPL}} = (1+z)^{3(1+w_0+w_1)} \exp\left(-3w_1 \frac{1}{1+z}\right) \quad (8.1)$$

Mientras que este ratio en Λ CDM es igual a:

$$\left. \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{0,\Lambda}} \right|_{\Lambda\text{CDM}} = 1 \quad (8.2)$$

Esto nos permite estudiar la evolución de la densidad de energía oscura en función del redshift. En la figura (8.4) se incluye con una línea rayada el valor en Λ CDM, y con una línea punteada el valor correspondiente al *best-fit*. Este último corresponde a la terna de parámetros con los que se ha obtenido un menor χ^2 , lo cuál tampoco significa que sea el valor más probable. Son mucho más representativos los valores dentro de los contornos de confianza. De nuevo se representan gráficamente los resultados para las distintas fuentes y para una combinación de estas.

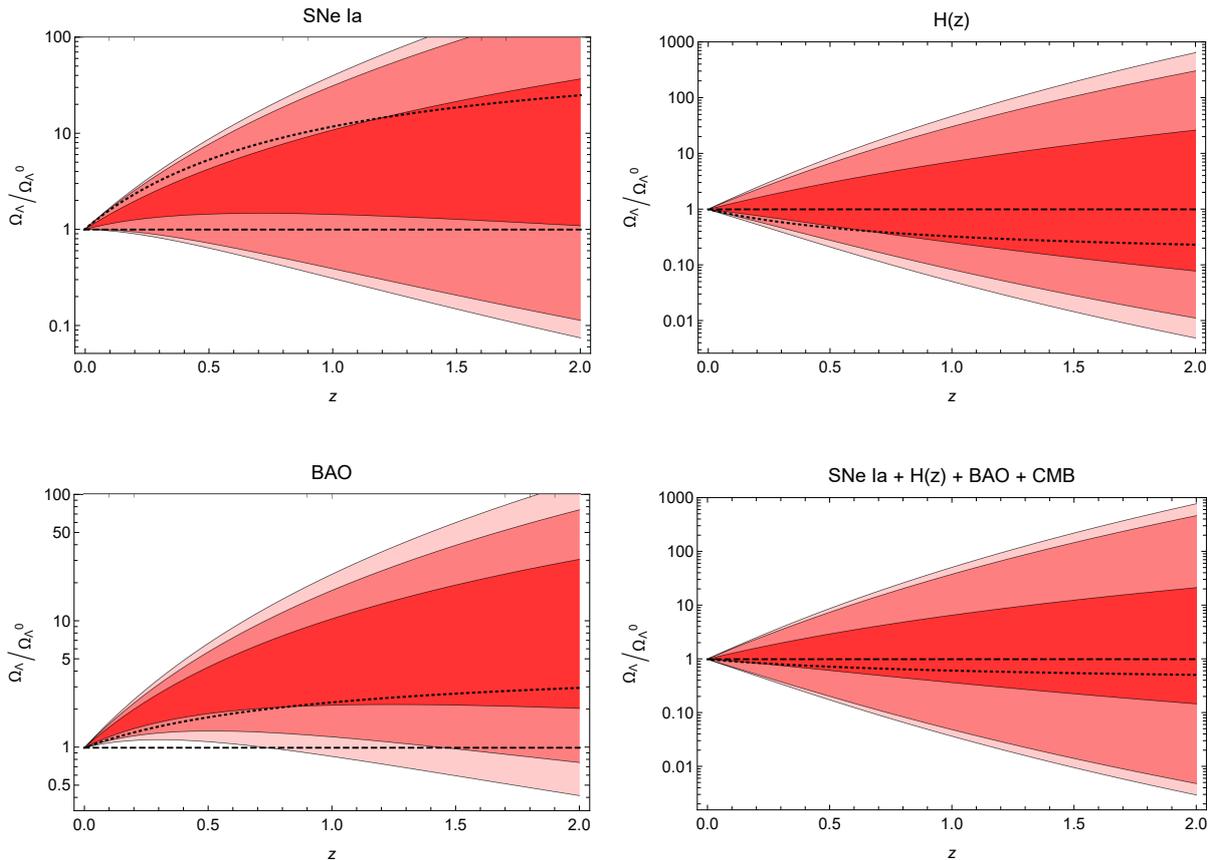


Figura 8.4: Evolución del cociente $\Omega_\Lambda/\Omega_\Lambda^0$ en función del redshift para cada fuente de datos y para una combinación de ellas. En distintos tonos se muestran las regiones de confianza a 1σ , 2σ y 3σ . La línea punteada indica la evolución con los parámetros del *best-fit* y la línea rayada indica la evolución en un universo descrito por una constante cosmológica ($w = -1$).

En estas figuras se puede ver cómo todos los datos concuerdan con el *statu quo* marcado por Λ CDM, aunque varias fuentes (SNe Ia, BAO) se inclinan por la existencia de una mayor densidad de energía oscura en el pasado. Sin embargo, al emplear todas las fuentes en conjunto el resultado es bastante claro. Un ratio constante e igual a 1 se sitúa en el centro de la región 1σ posicionándose como una de las opciones más posibles.

No obstante, a diferencia del caso anterior, en esta parametrización los contornos de confianza permiten la presencia de distintos tipos de energía oscura con $w \neq -1$. Esto abre la puerta a posibles modelos alternativos de energía oscura distintos a la constante cosmológica pero perfectamente compatibles con los datos experimentales.

Es también interesante representar la evolución del valor de $w(z)$ en función del redshift. En la figura (8.5) se representa dicha evolución para la combinación de todas las fuentes de datos. En este caso se han omitido los gráficos individuales de cada fuente ya que los resultados han sido prácticamente idénticos para todas ellas.

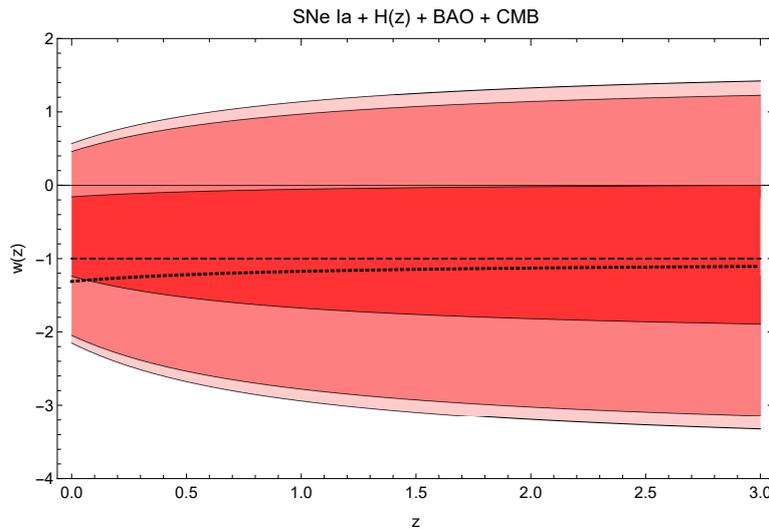


Figura 8.5: Evolución de $w(z)$ en función del redshift obtenido a partir de una combinación de varias fuentes. En distintos tonos se muestran las regiones de confianza a 1σ , 2σ y 3σ . La línea punteada indica la evolución con los parámetros del *best-fit* y la línea rayada indica la evolución en un universo descrito por una constante cosmológica ($w = -1$).

La conclusión es clara, los contornos de confianza rápidamente sitúan a $w = -1$ en el centro de la región a 1σ y de nuevo posicionan a Λ CDM como el modelo de energía oscura más plausible. Sigue existiendo cierto margen para otros modelos, pero sin ninguna duda los datos experimentales concuerdan con el modelo estándar de la cosmología.

Por último, todos los resultados correspondientes tanto a la parametrización w CDM como a la GPL se encuentran reflejados en la tabla 8.1. Se incluyen valores máximos y mínimos a 3σ , *best-fit* y valores mínimos de χ^2 para cada uno de los ajustes realizados.

Datos	Valor 3σ	Best Fit	χ^2
$w(z) = w_0$			
SNe IA	$0.04 < \Omega_m^0 < 0.42$ $-1.54 < w_0 < -0.62$	$\Omega_m^0 = 0.29$ $w_0 = -1.05$	542.63
H(z)	$0.09 < \Omega_m^0 < 0.51$ $-2.33 < w_0 < -0.39$	$\Omega_m^0 = 0.33$ $w_0 = -0.97$	14.58
BAO	$0.24 < \Omega_m^0 < 0.33$ $-1.18 < w_0 < -0.90$	$\Omega_m^0 = 0.28$ $w_0 = -1.04$	9.84
SNe IA + H(z) + BAO + CMB	$0.26 < \Omega_m^0 < 0.30$ $-1.14 < w_0 < -0.931$	$\Omega_m^0 = 0.28$ $w_0 = -1.03$	571.91
$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z}$			
SNe IA	$0 < \Omega_m^0 < 0.48$ $-1.01 < w_0 < 0.785$ $-1.98 < w_1 < -0.05$	$\Omega_m^0 = 0.42$ $w_0 = 0.70$ $w_1 = -1.83$	541.85
H(z)	$0.01 < \Omega_m^0 < 0.46$ $-1.99 < w_0 < 0.56$ $-1.58 < w_1 < 1.02$	$\Omega_m^0 = 0.33$ $w_0 = -1.78$ $w_1 = 0.83$	14.56
BAO	$0.24 < \Omega_m^0 < 0.32$ $-0.62 < w_0 < 0.63$ $-1.64 < w_1 < -0.41$	$\Omega_m^0 = 0.28$ $w_0 = -0.44$ $w_1 = -0.58$	9.85
SNe IA + H(z) + BAO + CMB	$0.28 < \Omega_m^0 < 0.31$ $-2.14 < w_0 < 0.57$ $-1.57 < w_1 < 1.13$	$\Omega_m^0 = 0.29$ $w_0 = -1.31$ $w_1 = 0.27$	570.35

Tabla 8.1: Resultados de todos los ajustes realizados para las parametrizaciones w CDM y CPL. Se incluyen valores a 3σ , best-fit y valor mínimo de χ^2 .

Capítulo 9

Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido ampliar en la medida de lo posible los conocimientos de cosmología adquiridos durante el Grado en Física, así como familiarizarse con algunos de los métodos empleados actualmente para estudiar modelos cosmológicos. Para ello se ha presentado una descripción introductoria pero completa del modelo cosmológico vigente, una combinación de Λ CDM con la teoría de la inflación. Se ha partido de la cosmología básica, definiendo sus características y calculando todas las cantidades relevantes. Después se ha justificado la necesidad de una teoría complementaria al modelo Λ CDM, la inflación cósmica. Se ha estudiado en que consiste y cómo da lugar a una serie de perturbaciones que repercuten sobre la estructura a gran escala del universo. Por último se ha profundizado en una de sus principales consecuencias: las anisotropías del fondo cósmico de microondas. Se han explicado sus causas y cómo estas se reflejan en una de las fuentes de datos más importantes en cosmología como es el espectro de potencias del CMB

Una vez entendidas las características y las consecuencias de la teoría de la inflación se ha procedido a trabajar con distintos datos experimentales. Se han introducido dos parametrizaciones alternativas para la ecuación de estado de la energía oscura: w CDM y CPL. A continuación se han empleado distintas fuentes de datos para ajustar los parámetros libres de ambos modelos y ver hasta que punto dichos datos son compatibles con las predicciones de Λ CDM. Para ello se ha implementado el algoritmo Metropolis Hastings en el lenguaje de programación Mathematica. Este algoritmo permite obtener mediante métodos de Monte Carlo basados en cadenas de Markov una distribución de los distintos parámetros a partir de un set de datos. Los resultados obtenidos claramente sitúan a la constante cosmológica como la descripción más probable de la energía oscura. Estos ajustes han servido además para estudiar cómo se obtienen los datos a partir de distintas fuentes y cómo son posteriormente analizados.

En líneas generales el trabajo ha permitido ahondar en el modelo que a día de hoy mejor describe el universo a grandes escalas y comprobar su validez a través del ajuste de parámetros en modelos alternativos, una metodología de uso común en cosmología. Todo esto constituye una base sólida para dar el salto a aspectos más complejos en el estudio del universo y poder adentrarse en un futuro en la investigación en este campo.

Bibliografía

- [1] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 15(3):168–173, 1929.
- [2] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, and et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038, Sep 1998.
- [3] S. J. Maddox, G. Efstathiou, W. J. Sutherland, and J. Loveday. Galaxy correlations on large scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 242:43–47, 1990.
- [4] Wayne Hu. Dark energy probes in light of the cmb. *arXiv: Astrophysics*, 2004.
- [5] C. J. MacTavish, P. A. R. Ade, J. J. Bock, and et al. Cosmological parameters from the 2003 flight of boomerang. *The Astrophysical Journal*, 647(2):799–812, Aug 2006.
- [6] P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, and et al. Planck2015 results. *Astronomy Astrophysics*, 594:A13, Sep 2016.
- [7] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Oxford, 2005.
- [8] E. Di Valentino, O. Mena, S. Pan, and et al. In the realm of the hubble tension - a review of solutions. *Classical and Quantum Gravity*, Jun 2021.
- [9] Rita Tojeiro. Understanding the cosmic microwave background temperature power spectrum, 2006.
- [10] Edward W. Kolb. Dynamics of the inflationary era, 1999.
- [11] Antonio Riotto. Inflation and the theory of cosmological perturbations, 2002.
- [12] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37, Dec 1926.
- [13] James M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, 22:1882–1905, Oct 1980.
- [14] M. White and W. Hu. The sachs-wolfe effect. *Astron. Astrophys.*, 321:8–9, Oct 1997.
- [15] A. R. Liddle. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structures*. Cambridge University Press, 2000.
- [16] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [17] Douglas Scott and George Smoot. Cosmic microwave background mini-review. 05 2010.
- [18] Wayne Hu. Intermediate guide to the acoustic peaks and polarization. <http://background.uchicago.edu/~whu/intermediate/intermediate.html>, 2008. [Online; acceso el 22/06/2021].
- [19] D. Hanson, S. Hoover, A. Crites, P. A. R. Ade, and et al. Detection of b-mode polarization in the cosmic microwave background with data from the south pole telescope. *Physical Review Letters*, 111(14), Sep 2013.
- [20] R. Amanullah, C. Lidman, D. Rubin, Aldering, and et al. Spectra and hubble space telescopelight curves of six type ia supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the union2 compilation. *The Astrophysical Journal*, 716(1):712–738, May 2010.
- [21] Raul Jimenez and Abraham Loeb. Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages. *The Astrophysical Journal*, 573(1):37–42, Jul 2002.

- [22] Cong Zhang, Han Zhang, Shuo Yuan, Siqi Liu, Tong-Jie Zhang, and Yan-Chun Sun. Four new observational $h(z)$ data from luminous red galaxies of sloan digital sky survey data release seven, 2014.
- [23] Michele Moresco, Lucia Pozzetti, Andrea Cimatti, Raul Jimenez, and et al. A 6% measurement of the hubble parameter at $z \sim 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(05):014–014, May 2016.
- [24] Joan Simon, Licia Verde, and Raul Jimenez. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. *Physical Review D*, 71(12), Jun 2005.
- [25] Daniel Stern, Raul Jimenez, Licia Verde, Marc Kamionkowski, and S. Adam Stanford. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. $i: h(z)$ measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(02):008–008, Feb 2010.
- [26] M Moresco, A Cimatti, R Jimenez, L Pozzetti, and et al. Improved constraints on the expansion rate of the universe up to $z = 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(08):006–006, Aug 2012.
- [27] Michele Moresco. Raising the bar: new constraints on the hubble parameter with cosmic chronometers at $z = 2$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 450(1):L16–L20, Apr 2015.
- [28] Sergei D. Odintsov, Diego Sáez-Chillón Gómez, and German S. Sharov. Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history? *The European Physical Journal C*, 77(12), Dec 2017.
- [29] G.S. Sharov. Observational constraints on cosmological models with chaplygin gas and quadratic equation of state. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(06):023–023, Jun 2016.
- [30] Florian Beutler, Chris Blake, Matthew Colless, D. Heath Jones, and et al. The 6df galaxy survey: baryon acoustic oscillations and the local hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416(4):3017–3032, Jul 2011.
- [31] Ashley J. Ross, Lado Samushia, Cullan Howlett, Will J. Percival, Angela Burden, and Marc Manera. The clustering of the sdss dr7 main galaxy sample – i. a 4 per cent distance measure at $z = 0.15$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449(1):835–847, Mar 2015.
- [32] Will J. Percival, Beth A. Reid, Daniel J. Eisenstein, Neta A. Bahcall, and et al. Baryon acoustic oscillations in the sloan digital sky survey data release 7 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401(4):2148–2168, Feb 2010.
- [33] Chris Blake, Eyal A. Kazin, Florian Beutler, Tamara M. Davis, and et al. The wigglez dark energy survey: mapping the distance-redshift relation with baryon acoustic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 418(3):1707–1724, Oct 2011.
- [34] Eyal A. Kazin, Michael R. Blanton, Román Scoccimarro, Cameron K. McBride, and et al. The baryonic acoustic feature and large-scale clustering in the sloan digital sky survey luminous red galaxy sample. *The Astrophysical Journal*, 710(2):1444–1461, Feb 2010.
- [35] Lauren Anderson, Éric Aubourg, Stephen Bailey, Florian Beutler, and et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data releases 10 and 11 galaxy samples. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441(1):24–62, Apr 2014.
- [36] Nikhil Padmanabhan, Xiaoying Xu, Daniel J. Eisenstein, Richard Scalzo, Antonio J. Cuesta, Kushal T. Mehta, and Eyal Kazin. A 2 per cent distance to $z = 0.35$ by reconstructing baryon acoustic oscillations – i. methods and application to the sloan digital sky survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(3):2132–2145, Nov 2012.
- [37] C.-H. Chuang and Y. Wang. Modelling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and single-probe measurements of $h(z)$, $d_a(z)$ and $f(z)$ $\delta(z)$ from the sloan digital sky survey dr7 luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 435(1):255–262, Aug 2013.
- [38] C.-H. Chuang, F. Prada, A. J. Cuesta, Eisenstein, and et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: single-probe measurements and the strong power of $f(z)$ $\delta(z)$ on constraining dark energy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433(4):3559–3571, Jul 2013.
- [39] Timothée Delubac, Julian E. Bautista, Nicolás G. Busca, James Rich, and et al. Baryon acoustic oscillations in the lyforest of boss dr11 quasars. *Astronomy Astrophysics*, 574:A59, Jan 2015.

- [40] Andreu Font-Ribera, David Kirkby, Nicolas Busca, Miralda-Escudé, and et al. Quasar-lyman forest cross-correlation from boss dr11: Baryon acoustic oscillations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(05):027–027, May 2014.
- [41] Qing-Guo Huang, Ke Wang, and Sai Wang. Distance priors from planck 2015 data. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(12):022–022, Dec 2015.

Corrección de erratas

10 de julio de 2021

En las ecuaciones que describen la evolución de la densidad de energía oscura en la parametrización Chevallier-Polarski-Linder (CPL) (5.7)(8.1) la expresión correcta incluye un término z en la exponencial. Así mismo, lo que se compara en estas expresiones (8.1)(8.2) es el cociente de la *densidad de energía oscura* ρ_Λ , no del *parámetro de densidad de energía oscura* Ω_Λ .

Las expresiones corregidas quedan por tanto como:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \left[\Omega_{0,M}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{0,M})(1+z)^{3(1+w_0+w_1)} \exp\left(-3w_1 \frac{z}{1+z}\right) \right] \quad (5.7)$$

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{0,\Lambda}} \Big|_{\text{CPL}} = (1+z)^{3(1+w_0+w_1)} \exp\left(-3w_1 \frac{z}{1+z}\right) \quad (8.1)$$

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{0,\Lambda}} \Big|_{\Lambda\text{CDM}} = 1 \quad (8.2)$$

