



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**DE LA GRAVEDAD NEWTONIANA A LA GRAVEDAD DE NEWTON-  
CARTAN: CURVATURA EN EL ESPACIO-TIEMPO NO RELATIVISTA**

*Autora: Nuria Santervás Arranz*

*Tutor: Mariano Santander Navarro*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Motivos a favor de estudiar la gravitación newtoniana . . . . .	5
1.3. Desarrollo histórico . . . . .	6
<b>2. Marcos de referencia</b>	<b>11</b>
2.1. Primera ley de la dinámica y marcos de referencia inerciales y no inerciales . . . . .	11
2.2. Marcos de referencia y coordenadas . . . . .	13
<b>3. Descripción pregeométrica de la gravedad</b>	<b>15</b>
3.1. Descripción convencional de la gravitación en un marco de referencia “inercial” . . . . .	15
3.1.1. El campo gravitatorio . . . . .	15
3.1.2. El potencial gravitatorio . . . . .	17
3.1.3. De la ley de Newton a las ecuaciones del campo gravitatorio . . . . .	17
3.1.4. El campo de marea . . . . .	18
3.1.5. Campo de marea y fuerzas de marea . . . . .	19
3.1.6. Los efectos del campo de marea: mareas y precesión de los equinoccios . . . . .	20
3.1.7. Recapitulación sobre el Campo de marea . . . . .	20
3.1.8. La densidad de energía del campo gravitatorio . . . . .	21
3.2. Descripción de la gravitación en un marco de referencia “no inercial” . . . . .	21
3.2.1. Relación entre marcos “inerciales” y “no inerciales” . . . . .	22
3.2.2. Relación entre coordenadas espaciales en los marcos “inerciales” y “no inerciales” . . . . .	22
3.2.3. La ecuación de caída libre en un marco “no inercial” . . . . .	24
3.2.4. Los datos de no inercialidad de un marco de referencia “no inercial” . . . . .	24
3.2.5. Descomposición electromagnética de las fuerzas gravitatorio-inerciales . . . . .	25
3.2.6. ¿Es posible distinguir y/o separar los efectos gravitatorios de los inerciales? . . . . .	26
3.2.7. El potencial de las fuerzas puramente inerciales en un marco “no inercial” . . . . .	29
3.2.8. El potencial gravitatorio-inercial en un marco “no inercial” . . . . .	30
3.2.9. Las fuerzas de marea en un marco “no inercial” . . . . .	31
3.2.10. Las ecuaciones de campo en un marco de referencia “no inercial” . . . . .	33
3.3. Describiendo la gravitación en un marco de referencia no rotante y en caída libre . . . . .	34
<b>4. La formulación geométrica de Newton-Cartan</b>	<b>37</b>
4.1. Conexiones y tensores de curvatura asociados . . . . .	37
4.1.1. La conexión inercial . . . . .	39
4.1.2. La conexión gravitatoria . . . . .	40
4.2. El tensor de curvatura y el campo de marea . . . . .	41
4.3. Ecuaciones de campo en términos del tensor de Ricci . . . . .	42
<b>5. Conclusiones</b>	<b>43</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

La Teoría de la Gravedad Newtoniana, postulada por Newton en el siglo XVII, supuso una revolución científica, debido a que fue la primera teoría formulada sobre la gravitación. Al verla desde el punto de vista de la Mecánica Clásica moderna, resulta que es posible dar dos formulaciones de la gravitación newtoniana: la “convencional” y la “propriadamente geométrica”. Son formulaciones diferentes estructuralmente, pero sus predicciones físicas coinciden.

La formulación convencional de la teoría newtoniana de la gravedad (TNG) establece que la gravitación es una fuerza que actúa en el espacio euclídeo, que es un espacio tridimensional sin curvatura. Sus fuentes son las distintas masas y los cuerpos sobre los que actúa son también aquellos con masa.

La formulación geométrica o de Newton-Cartan se sitúa en un Espacio-Tiempo newtoniano de cuatro dimensiones, tres espaciales y una temporal, que tiene curvatura, aunque es no nula solamente según la dirección temporal, manteniendo un 3-espacio sin curvatura. En esta formulación la gravedad no es una fuerza, sino que es debida a la curvatura del Espacio-Tiempo.

En 1905, Einstein formuló la Relatividad Especial, que describe el espacio-tiempo en ausencia de campo gravitatorio. Fue todo un cambio de paradigma porque el tiempo dejó de ser absoluto y pasó a ser una coordenada más. Además, unió el espacio y el tiempo en una entidad conocida como espacio-tiempo.

Diez años más tarde, en 1915, Einstein formuló la Relatividad General, que describe el espacio-tiempo en presencia de campo gravitatorio. En ella, la gravedad se debe a la curvatura del espacio-tiempo (además de en el tiempo, también hay curvatura en el 3-espacio) y es descrita por las ecuaciones de Einstein. Con esta teoría cambió completamente la noción de espacio-tiempo: en la Física Newtoniana el espacio es un marco estático en el que suceden, a lo largo del tiempo, los fenómenos físicos; en la Teoría de la Relatividad Especial el papel de marco lo adquiere el espacio-tiempo, que sigue permitiendo una separación, ahora dependiente del observador, entre espacio y tiempo, pero que como entidad sigue siendo el marco estático, absoluto, en el que suceden los fenómenos físicos; mientras tanto, en la Relatividad General el espacio-tiempo pasa a ser un objeto dinámico, cuyo comportamiento está determinado por su contenido. El espacio-tiempo y todo lo que hay en él pasan a estar estrechamente relacionados. En cosmología, esa nueva teoría, basada en un carácter dinámico del espacio-tiempo, ha permitido efectuar muchas predicciones nuevas, como la expansión acelerada del universo, no explicables en el contexto de un espacio-tiempo estático.

La Teoría de la Relatividad General se basa en dos principios:

1. El principio de covariancia: Las leyes de la física formuladas correctamente tienen la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.
2. El principio de equivalencia: Los efectos locales de un campo gravitatorio son equivalentes a los efectos que aparecen al describir los fenómenos físicos en un marco de referencia acelerado.

El principio de equivalencia establece que se puede “eliminar” la gravedad (estrictamente hablando, en un punto del espacio) sustituyéndola por una aceleración equivalente del propio marco de referencia. En la gravitación newtoniana también se cumple este principio, pero de una manera adaptada a la estructura geométrica que tienen el espacio y el tiempo en esa teoría. En ausencia de gravedad, los observadores newtonianos están relacionados entre sí mediante transformaciones de Galileo, entre las que se encuentran las traslaciones espacio-temporales, las transformaciones inerciales puras de Galileo y las rotaciones espaciales. Sin embargo, en presencia de gravedad, las cosas se complican, tal y como se verá más adelante.

El cumplimiento de este principio de equivalencia parece indicar que la gravitación newtoniana también se puede explicar como una teoría de curvatura. Esto fue lo que motivó a Elie Cartan a realizar su formulación geométrica de la gravitación newtoniana, que con el paso del tiempo ha dado lugar a la formulación que hoy se conoce como Teoría de Newton-Cartan.

La Teoría de Newton-Cartan es el límite de la Teoría de la Relatividad General cuando la gravedad es débil y las partículas se mueven a velocidades muy pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Sin embargo, conceptualmente, ambas teorías son muy diferentes. Esto se debe a que en las teorías de la Relatividad Especial y General, la métrica es no degenerada y permanece invariante frente a las transformaciones locales de Lorentz. Por el contrario, en la teoría de Newton-Cartan, debido a que el tiempo se considera absoluto, la métrica temporal es degenerada; no hay ninguna métrica espacio-temporal (no degenerada) y la información sobre las distancias espaciales está contenida en otro objeto matemático, que codifica la métrica en cada 3-espacio de simultaneidad del tiempo absoluto.

Pese a las complicaciones derivadas a partir de tener una métrica degenerada, la teoría de Newton-Cartan permite realizar una descripción completa de la gravedad newtoniana como una teoría de curvatura del espacio-tiempo. Además, cumple el principio de covariancia general, que establece que las leyes físicas no dependen de las coordenadas escogidas. Einstein planteó esta característica dando a entender que era exclusiva de su teoría, pero tal y como demostró Eric Kretschmann, cualquier teoría física puede reformularse de manera que satisfaga el principio de covariancia general. Gracias a este principio es posible formular la gravedad newtoniana como una teoría de curvatura del espacio-tiempo.

Al expresar la Teoría de la Gravitación Newtoniana como una teoría de curvatura es posible comprobar que ambas teorías de la gravedad están estrechamente relacionadas. Aunque la formulación newtoniana sea el límite de la formulación relativista, puede ser obtenida de forma independiente a esta última y permite acceder a la Teoría de la Relatividad General de una manera más o menos sencilla.

En la teoría newtoniana, debido al concepto de espacio absoluto, la elección de marcos de referencia puede suponer un problema conceptual añadido. Aun así, esta teoría facilita el estudio de fenómenos físicos que son más complicados de analizar desde el punto de vista de la Relatividad General.

## 1.2. Motivos a favor de estudiar la gravitación newtoniana

Como la teoría de la Relatividad General supuso un exitoso cambio de paradigma, hay una creencia extendida de que la teoría de Newton debe descartarse por ser incorrecta. Es inadecuado plantearlo así. Lo que sucede es que abarca una región de validez menor, ya que solo explica las situaciones físicas en las que la velocidad de la luz puede considerarse infinita. También para las teorías de gravedad se cumple un principio de correspondencia, que fue formulado en primer lugar por Niels Bohr para la Mecánica Cuántica (8) y establece que la nueva teoría, en nuestro caso la Relatividad General, debe reproducir la teoría antigua, la teoría de Newton, en ciertos límites.

Entonces, si las teorías de Newton y de Newton-Cartan son aplicables en menos situaciones que la Relatividad General, ¿por qué las estudiamos? A lo largo de este apartado se van a ver una serie de motivos para estudiar estas teorías.

El primer motivo es que, aunque la teoría de la Relatividad General es mucho más elegante conceptual y matemáticamente que la teoría de Newton, también es mucho más complicada computacionalmente que esta última. Además, como la mayoría de situaciones de la vida diaria pertenecen al límite newtoniano, esta teoría suele ser más que suficiente.

Un segundo motivo es que muchos problemas de la Relatividad General se pueden entender de una forma mucho más sencilla viéndolos desde el punto de vista de la mecánica newtoniana. Un ejemplo de esto es la cosmología, ya que para estudiar la formación del universo temprano se pueden tomar aproximaciones no relativistas (11). Otro ejemplo es el conocido teorema cósmico del no pelo, que establece que las soluciones de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica positiva convergen a la solución de deSitter. Este teorema es más sencillo de analizar mediante la cosmología de Newton-Cartan (12).

El tercer motivo es la correspondencia AdS/CFT, que relaciona la teoría cuántica de campos con la gravedad. Más concretamente, permite reformular una teoría gravitacional fuertemente acoplada en espacio-tiempos Anti-de Sitter como una teoría de campos débilmente acoplada sin gravedad, y viceversa. Esta correspondencia ha tenido un auge en los últimos años porque permite estudiar de una manera mucho más sencilla problemas de materia condensada (13), (14).

El cuarto motivo tiene que ver con una técnica muy importante en Relatividad General que se conoce como aproximación post-newtoniana, que es un desarrollo en serie de potencias de  $1/c^2$  en el cual la gravitación newtoniana es el término de orden cero. Esta aproximación es muy efectiva incluso en situaciones donde los campos gravitatorios son fuertes y los objetos se mueven muy rápido, aunque todavía no está claro por qué, tal y como señalan varios autores. Estudiar la gravitación newtoniana permite entender mejor esta aproximación.

Por último, el quinto motivo se puede condensar en la siguiente cita de Feynman (15), que traducida al castellano es más o menos así: “Psicológicamente, debemos mantener todas las teorías en nuestra cabeza, y cualquier buen físico teórico se sabe seis o siete representaciones teóricas diferentes para el mismo fenómeno físico.” Además, la teoría de Newton-Cartan incluye conceptos como la covarianza general o las simetrías espacio-temporales y gauge, que permiten entender mejor la Relatividad General.

### 1.3. Desarrollo histórico

En el año 1687 Newton formuló su teoría general de la gravedad. En ella el tiempo es absoluto y el espacio se considera tridimensional euclídeo sin curvatura. Esta teoría revolucionó la física del momento y estuvo vigente durante más de dos siglos sin que los científicos de la época la pusieran en duda.

Algo más de dos siglos después, en el año 1905, Einstein publicó la Teoría de la Relatividad Especial, la cual describe el espacio-tiempo en ausencia de campo gravitatorio. Esta teoría se desarrolló inicialmente como una teoría formulada en el lenguaje tridimensional espacial y supuso un cambio de paradigma porque el tiempo dejó de considerarse absoluto y pasó a ser una coordenada más del espacio-tiempo.

En 1908, Minkowski desarrolló la geometría que ahora se conoce como geometría de Minkowski y reformuló la Teoría de la Relatividad Especial de tal manera que pasó de ser tridimensional euclídea a estar descrita en un espacio-tiempo cuadridimensional. Un año después, P. Frank fue el primero en intentar reformular la mecánica newtoniana mediante la geometría diferencial. Esta idea fue retomada posteriormente, tal y como se expondrá a continuación, por E. Cartan.

Diez años después de publicar la Teoría de la Relatividad Especial, en 1915, Einstein añadió la gravedad a su teoría y formuló la Teoría de la Relatividad General, que sigue vigente actualmente. El principio de covariancia establece que las coordenadas que se utilizan para describir los sucesos del espacio-tiempo son solo etiquetas, por lo que las leyes de la física no dependen de las coordenadas escogidas para describirlas. Einstein demostró que las leyes de la Relatividad General son invariantes frente a todo tipo de cambios de coordenadas, es decir, comprobó que la Relatividad General cumple el principio de covariancia. Esto le permitió describir la gravedad mediante la geometría diferencial y pensó que la covariancia era una característica exclusiva de su teoría. Sin embargo, en 1917, E. Kretschmann observó que prácticamente cualquier ecuación de campo es invariante frente a cambios generales de coordenadas (9). Esta observación abre la puerta a apreciar que la gravedad newtoniana también cumple el principio de covariancia.

Poco después, en 1923, Elie Cartan, motivado por el descubrimiento de Kretschmann y siguiendo los pasos de P. Frank, propuso la formulación general covariante de la Teoría de Newton de la Gravitación. Así, la teoría newtoniana pasó de ser invariante únicamente bajo transformaciones de Galileo a serlo bajo todo tipo de transformaciones, cumpliendo con el principio de covariancia general. En su reformulación mostró explícitamente cómo describir mediante la geometría diferencial la gravedad newtoniana. Introdujo una conexión en el espacio-tiempo que es esencial para explicar la ley de la inercia. Este conjunto de ideas han dado lugar a lo que se conoce actualmente como la teoría de Newton-Cartan (10).

La teoría de Newton-Cartan fue olvidada hasta los años 1960, en los que fue redescubierta por varios autores entre los que destacan C. Kilmister, A. Trautman, P. Havas y G. Dautcourt. Estos científicos estudiaron las similitudes y diferencias entre las teorías de Newton y Einstein.

En octubre de 1964, Peter Havas publicó "*Four-Dimensional Formulations of Newtonian Mechanics and Their Relation to the Special and the General Theory of Relativity*" (6). En dicho artículo estudió las propiedades de los grupos de Galileo y de Lorentz. También comparó la teoría newtoniana de la gravedad con la Relatividad Especial y con la Relatividad General, haciendo hincapié en sus principios variacionales y en sus leyes de conservación, así como en sus leyes del movimiento y sus fuerzas inerciales. Además, comprobó que las fórmulas newtonianas son el límite de las relativistas cuando la velocidad de la luz tiende a infinito y que las trayectorias de las partículas libres en las tres teorías siguen líneas geodésicas o autoparalelas de cierta conexión.

En 1966, Andrej Trautman (5) modificó el concepto de marco inercial, estableciendo que en ausencia de gravedad éste se corresponde con los movimientos libres, y en presencia de ésta, con los movimientos de caída libre. Destacó que el espacio-tiempo tanto en las teorías relativistas como en las no relativistas es continuo y diferenciable de cuatro dimensiones (en la teoría newtoniana el tiempo, aunque sea absoluto, es una dimensión más). También explicó que un punto en común entre ambas teorías es que están descritas por una conexión simétrica en el espacio-tiempo, que aparece debido a que las leyes de la Física tienen un carácter local y pueden expresarse mediante la geometría diferencial, y que codifica de manera matemáticamente correcta la idea intuitiva del principio de inercia. En relación a la métrica vio que la newtoniana, que es degenerada, es el límite cuando la velocidad de la luz tiende a infinito de la métrica de Einstein. Ambas métricas tienen las mismas características, es decir, sus propiedades, entre las que destaca la invariancia frente al transporte paralelo asociado a la conexión, se conservan al realizar el proceso de límite. Pese a las similitudes entre ambas teorías, una de sus principales diferencias tiene que ver con el electromagnetismo, que realmente no admite una descripción correcta y consistente dentro de una teoría no relativista. Por último, Trautman demostró que, en relación con la cosmología, la teoría newtoniana obtiene las mismas fórmulas para el efecto Doppler que la teoría de Einstein.

En los años 1980 comenzó cierto resurgimiento de la teoría de Newton-Cartan. Entre los físicos que la estudiaron destacan H. Leihkauf, C. Duval y H. P. Künzle.

En 1984, C. Duval y H. P. Künzle (24) fueron los primeros en utilizar el grupo de Bargmann (un grupo extendido de Galileo de 11 dimensiones) para describir el espacio-tiempo newtoniano mediante una mecánica cuántica no relativista. La utilización de este grupo permite entender la teoría newtoniana como una teoría gauge que da como resultado una ecuación de Schrödinger covariante de cuatro dimensiones. Además, esta teoría es el límite no relativista de la teoría de Einstein-Klein-Gordon de la mecánica cuántica relativista.

En 1989, Leihkauf desarrolló la formulación covariante de la teoría de Newton-Cartan (19). Se centró en el estudio de las propiedades de los cuadvectores que aparecen en esta teoría.

En 1996, Christian Rüede y Norbert Straumann demostraron que la cosmología obtenida a partir de la teoría de Newton-Cartan es muy parecida a la obtenida a partir de la Relatividad General (22). Esto se cumple porque, a escalas no demasiado grandes, la velocidad de expansión del universo es muy pequeña con respecto a la velocidad de la luz, por lo que se puede tomar el límite no relativista. Sin embargo, en el borde del universo visible la velocidad de expansión se aproxima a la velocidad de la luz y esta aproximación ya no es aplicable. Por lo tanto, para escalas lo suficientemente pequeñas se puede describir la cosmología mediante una teoría no relativista y las ecuaciones obtenidas son similares a las que se obtienen mediante una descripción relativista.

Se puede pensar que la teoría de Newton-Cartan ya no se estudia en la actualidad debido a que ha sido desplazada por la teoría relativista que hoy se cree correcta: la Relatividad General. Sin embargo, es un tema en el que se continúa investigando activamente. Además, como se expuso en el apartado anterior, hay numerosos argumentos a favor de estudiar esta teoría.

En la Física Moderna, con la llegada de la Relatividad General, la relación entre la geometría del espacio-tiempo y la gravitación es de sobra conocida. Sin embargo, como ya se ha visto, esta relación no es exclusiva de la física relativista y también se cumple en la gravitación de Newton-Cartan. Se dan a continuación unos pocos ejemplos de trabajos recientes sobre el tema.



En 2014, Kevin Morand escribió su tesis (20). En ella estudió el límite no relativista de algunas estructuras necesarias para la geometrización de los fenómenos gravitatorios. Estudió los tipos de ondas gravitatorias que permiten incluir las características no relativistas, relacionándolas con la geometría diferencial de Newton-Cartan.

Ese mismo año Leo Rodriguez, James St. Germaine-Fuller y Sujeev Wickramasekara estudiaron la teoría de Newton-Cartan desde una nueva perspectiva (21). Se centraron en las propiedades de las transformaciones para marcos de referencia no inerciales y no relativistas. Este conjunto de transformaciones pertenecen a un grupo de Lie de infinitas dimensiones, en el que está contenido el subgrupo de Galileo. Demostraron que las fuerzas no inerciales, que resultan únicamente del sistema de referencia escogido y no de otras fuerzas externas, no contribuyen al tensor de Ricci, que es el encargado de describir la curvatura del espacio-tiempo newtoniano. Además, vieron que la única componente no nula del tensor de Ricci es la  $00$ , que es igual a la densidad de masa en cualquier marco de referencia multiplicada por  $4\pi$ . Por otra parte, se percataron de que mientras que las ecuaciones de Ricci y de Gauss se cumplen para marcos de referencia no inerciales linealmente acelerados, no se cumplen para marcos no inerciales rotantes, en los que hay que considerar una densidad de masa efectiva que tiene su origen en los campos gravieléctrico y gravimagnético. Estos campos se llaman así porque, formalmente, tienen una expresión similar a la de los campos eléctrico y magnético de las ecuaciones de Maxwell.

Recientemente se han estudiado ciertos fenómenos de física de la materia condensada mediante el acoplo de la materia con el espacio-tiempo de Newton-Cartan. Para ello, es necesario tener un espacio-tiempo general, sin restricciones geométricas a priori, con simetrías locales no relativistas consistentes con los campos de materia. En 2015, Michael Geracie, Kartik Prabhu y Matthew M. Roberts construyeron un espacio-tiempo de Bargmann que cumplía estos requisitos (26), en el que añadieron a la geometría de Newton-Cartan un campo gauge adicional para acoplarlo a la masa. En (27) aplicaron esos conocimientos para estudiar fenómenos de transporte y termodinámica de fluidos no relativistas.

En 2016, Roel Andringa profundizó en la teoría de Newton-Cartan para intentar obtener a partir de ella una teoría no relativista de cuantización de la gravedad (7). Para ello, en primer lugar repasó las teorías de la Relatividad Galileana, Especial y General, así como los conceptos de supersimetría y supergravedad. A continuación, estudió las partículas tanto relativistas como no relativistas e investigó las simetrías de las cuerdas y las branas. Después obtuvo, basándose en (16), la gravedad newtoniana de la teoría de Newton-Cartan mediante transformaciones gauge realizadas en el álgebra de Bargmann. Repitió este procedimiento también en las teorías de gravitación de cuerdas y branas, con y sin constante cosmológica. Por último, realizó una extensión supersimétrica de la teoría de la gravedad de Newton-Cartan tridimensional basándose en (17).

Ese mismo año L. Filipe Costa y José Natário presentaron un artículo sobre el campo de Coriolis en la teoría de Newton-Cartan (25). Dieron varios ejemplos sobre soluciones de las ecuaciones de Newton-Cartan para marcos de referencia no inerciales rotantes, entre los que destaca la solución para un universo de Gödel newtoniano. Además, se centraron en cómo detectar los efectos de Coriolis en diferentes giróscopos y en los efectos de Coriolis generados por corrientes de masa en la Relatividad General.

En 2019, Eric A. Bergshoeff, Jaume Gomis, Jan Rosseel, Ceyda Simsek y Ziqi Yanb describieron, a partir de la geometría de Newton-Cartan, una teoría de cuerdas no relativista denominada geometría de cuerdas de Newton-Cartan (18).

Por último, cabe destacar que la teoría de Newton-Cartan también ha suscitado un gran interés en la filosofía de la ciencia. Un ejemplo de esto es el artículo (28) escrito en 2017 por el filósofo James Owen

Weatherall de la Universidad de California, en el que abordó los espacio-tiempos de Galileo, Newton y Leibniz desde un punto de vista filosófico, sin entrar en el formalismo matemático.



## Capítulo 2

# Marcos de referencia

La elección de marcos de referencia en la teoría de la gravitación newtoniana puede suponer un problema conceptual añadido, debido al papel que juega el Espacio Absoluto. En este capítulo se va a realizar un estudio sobre los diferentes marcos de referencia y sus coordenadas, con el objetivo de facilitar la comprensión de los capítulos posteriores.

### 2.1. Primera ley de la dinámica y marcos de referencia inerciales y no inerciales

Aparentemente hay una asimetría en la interpretación convencional de la gravitación newtoniana dependiendo de si el marco de referencia para las coordenadas espaciales es inercial o no. La caracterización y existencia de marcos de referencia inerciales en presencia de un campo gravitatorio es un tema que genera mucha confusión. Para entender bien este concepto, se va a recordar en primer lugar la primera ley de la dinámica.

En Mecánica Newtoniana el tiempo se considera absoluto. Para cada instante de tiempo  $t$  existe en el espacio-tiempo una hipersuperficie euclídea de tres dimensiones que comúnmente se conoce como “espacio”, así que las coordenadas de este espacio están expresadas en función del tiempo absoluto:  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . En ausencia de campos gravitatorios, la primera ley de la dinámica establece que “todo cuerpo que no esté sometido a ninguna interacción, es decir, lo que se conoce como cuerpo libre o aislado, permanece en reposo o se traslada con velocidad constante”. Las ecuaciones del movimiento para una partícula libre son las siguientes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (2.1)$$

La trayectoria seguida por una partícula libre es una línea recta en el espacio euclídeo, recorrida a velocidad constante. Entonces, en ausencia de un campo gravitatorio, el espacio newtoniano es un espacio afín euclídeo en el que los movimientos libres son líneas rectas.

En presencia de un campo gravitatorio dos partículas de masas diferentes con las mismas condiciones iniciales, es decir, que se encuentran en el mismo punto con la misma velocidad instantánea, adquieren la misma aceleración y siguen la misma trayectoria. Entonces, los “movimientos libres” en este caso serán aquellos en los que solo actúa el campo gravitatorio sobre las partículas. Su ecuación es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (2.2)$$

siendo  $\varphi(x, y, z, t)$  el potencial gravitatorio.

Se va a ver ahora cómo se pueden aplicar estos dos resultados a la elección de diferentes marcos de referencia. La Física Newtoniana caracteriza los marcos de referencia inerciales como “marcos espaciales rígidos” que se encuentran en reposo o en movimiento uniforme respecto al “Espacio Absoluto”. Las fuerzas gravitatorias que actúan sobre un cuerpo en dicho espacio producen una aceleración en su movimiento respecto al Espacio Absoluto, que coincide con la aceleración medida desde cualquier marco de referencia inercial. Llegados a este punto, se plantea la pregunta de si este espacio y los marcos de referencia inerciales son construcciones observables de alguna forma o si son construcciones inobservables de las que habría que desprenderse.

Cuando se emplea un marco de referencia “inercial” las únicas fuerzas que intervienen en las ecuaciones de Newton son las gravitatorias. Podría considerarse que en un marco inercial se elige como origen del marco una partícula libre en presencia de un campo gravitatorio con las ecuaciones del movimiento dadas por [2.2]. Las transformaciones Galileanas, que dejan invariantes las ecuaciones fundamentales de la mecánica newtoniana, son las que permiten pasar de un marco de referencia inercial a otro marco de referencia también inercial.

En un marco de referencia “no inercial”, además de las fuerzas propiamente gravitatorias, se deben añadir en las ecuaciones de Newton las llamadas fuerzas inerciales para así obtener el movimiento relativo de la partícula respecto a este marco de referencia. Entre estas fuerzas se encuentran la fuerza centrífuga y la de Coriolis y aparecen como consecuencia del movimiento del marco de referencia en el Espacio Absoluto. No se deben a ningún efecto gravitatorio, pues no hay masas que las produzcan.

El problema asociado a la elección de los marcos de referencia se encuentra en el papel que juega el Espacio Absoluto. Las asimetrías en la descripción del movimiento se producen según el marco de referencia se mueva o no de manera uniforme respecto a dicho espacio.

En este trabajo se expondrá la formulación convencional de la Teoría de Newton de la Gravedad tal y como podría haberla realizado un físico de finales del siglo XIX en el momento en que se estableció el concepto de marco de referencia inercial. Se utilizará la idea de observadores en caída libre y sin rotación a los que se denominará “observadores localmente inerciales”, evitando así hablar de un “sistema de referencia” para no generar confusión. Estos observadores pueden establecer en sus proximidades marcos de referencia locales que son los que más se parecen a los anteriormente llamados “sistemas de referencia inerciales” en la Naturaleza.

La nomenclatura utilizada, al ser histórica, es bastante confusa, ya que los sistemas de referencia establecidos por un observador inercial en sus cercanías no coinciden con lo que anteriormente se denominaba como “sistemas de referencia inerciales”. Es por esto por lo que se utilizará el término “observadores” en lugar de “sistemas de referencia” al referirse a estos sistemas.

Como conclusión, en presencia de un campo gravitatorio los únicos observadores que se considerarán inerciales en la concepción conocida como post-1900 serán los localmente inerciales y no rotantes. Esto es debido a que el concepto de sistema de referencia inercial en el sentido anterior es confuso y solo tiene sentido cuando no hay un campo gravitatorio o éste puede considerarse despreciable. En la Naturaleza no existe un sistema de referencia inercial, ya que siempre hay presente un campo gravitatorio.

Se presenta la dificultad de conseguir un nivel de claridad conceptual teniendo en cuenta que no es posible ignorar la nomenclatura anterior a 1900, ya que es de uso común. Para poder comprender la gravitación se debe tener claro que lo que de verdad es interesante son los marcos de referencia locales asociados a “observadores localmente inerciales” y que los “marcos de referencia inerciales” no existen.

## 2.2. Marcos de referencia y coordenadas

A partir de ahora  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{X}$  serán los vectores de posición en el espacio  $S_t$ . Las componentes de estos vectores serán cartesianas y se denotarán como  $x^I$ , con  $I = 1, 2, 3$ . Cuando el marco de referencia sea “inercial” en el sentido pre-1900, se utilizarán índices latinos mayúsculos: I, J, K... Sin embargo, cuando el marco de referencia sea no inercial las coordenadas  $x^i$  tendrán índices latinos minúsculos: i, j, k...

A continuación se muestran algunos ejemplos de marcos de referencia:

- Se considera un marco cuyo origen se encuentra en el centro de la Tierra y con sus ejes apuntando a las “estrellas fijas”. Este marco es conocido como sistema CTNR (Centrado en la Tierra, No Rotante). No es estrictamente “inercial” en el sentido pre-1900, debido a que el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol no es uniforme, sino que su velocidad cambia ligeramente de módulo y de dirección. Desde el punto de vista de este sistema el centro de la Tierra está “en reposo”, pero debido a la rotación y a la traslación de la Tierra alrededor del Sol, un punto de su superficie estará “en movimiento”.
- El marco de referencia que se utiliza habitualmente, el marco “de laboratorio”, está centrado en la Tierra y rota según el movimiento de rotación de ésta (sistema CTFT). Este marco es aun menos “inercial” que el anterior, ya que le añadimos la rotación terrestre. Como consecuencia de la rotación, al estudiar el movimiento de los objetos respecto a este marco se deben considerar fuerzas centrífugas y fuerzas de Coriolis. Estas fuerzas no son muy grandes pero tampoco se pueden despreciar, solo se pueden ignorar en ciertas situaciones en las que no se necesite una gran aproximación. En esas situaciones se puede considerar que se está trabajando en un sistema “inercial”.
- Por último, se va a mencionar un marco de referencia que desde el punto de vista de la Física Newtoniana no parece tener mucho sentido. Este marco es el asociado a un observador en caída libre sin rotación. Cubre solo una región local del espacio de un tamaño y durante un intervalo temporal limitados, a diferencia de los marcos utilizados anteriormente, que cubren todo el Espacio-Tiempo o, como mínimo, una región muy extensa de él. Si consideramos la Estación Espacial Internacional (ISS) “ideal”, es decir, sin rozamiento con la atmósfera y sin rotar sobre sí misma, el marco de referencia fijo en su interior sería el de un observador en caída libre y sin rotación.

Aunque la elección del último marco de referencia pueda parecer forzada, los marcos (locales) asociados a un observador en caída libre y sin rotación son los que se consideran “inerciales” en la física post-1900. Esto es debido a que, siguiendo el ejemplo anterior de la ISS, el acelerómetro de un astronauta que se encuentre en el interior de ésta marcará 0, lo que implica que el campo gravitatorio parece haber desaparecido localmente.

Para distinguir cuando un observador se encuentra en caída libre y sin rotación, se utiliza el siguiente convenio notacional: los índices (latinos minúsculos) de las coordenadas espaciales cartesianas llevarán un acento circunflejo:  $\hat{i}$ .

En un marco de referencia “inercial” en el que  $t$  es el tiempo absoluto y  $x^I$  las coordenadas cartesianas, las coordenadas  $(t, x^I)$  se denominan coordenadas galileanas o newtonianas. La métrica referida a este sistema de coordenadas es no degenerada y sus componentes contravariantes están dadas por un 3-tensor dos veces contravariante cuyos únicos elementos no nulos son  $\delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = 1$ . Es importante apreciar que esta métrica solo está definida en cada espacio de simultaneidad  $S_t$  y no procede de ninguna métrica definida en el Espacio-Tiempo cuatridimensional.

Se debe tener en cuenta para más adelante que el hecho de que determinados objetos sean escalares (potencial escalar  $\varphi$ ), vectores (intensidad de campo gravitatorio y campos gravieléctrico y gravimagnético) o tensores (campo de marea  $A^k_l$ ) no aporta ninguna información sobre cómo transformarlos bajo grupos de transformaciones más generales. Entre ellos serán relevantes el grupo de Galileo (que incluye las rotaciones espaciales y las transformaciones espaciales inerciales puras, que son las que pasan de un marco de referencia inercial a otro que se mueve con velocidad uniforme respecto al primero) y el de las transformaciones rígidas en el Espacio-Tiempo newtoniano (que pasan de un marco de referencia “inercial” a otro “no inercial”).

Como ejemplo de lo anterior se puede pensar que en Mecánica Clásica Newtoniana la posición ( $\mathbf{x}$ ), la velocidad ( $\mathbf{v}$ ) y la aceleración ( $\mathbf{a}$ ) son todos vectores en el 3-espacio. Sin embargo, cuando se pasa de un marco de referencia inercial a otro que se mueve con velocidad  $\mathbf{V}$  constante respecto al primero, los tres vectores se transforman de forma diferente:  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t$ ,  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ ; lo que corresponde a que en el Espacio-Tiempo esos tres objetos tienen diferentes leyes de transformación.

## Capítulo 3

# Descripción pregeométrica de la gravedad

### 3.1. Descripción convencional de la gravitación en un marco de referencia “inercial”

La descripción clásica del campo gravitatorio tiene lugar en un marco de referencia “inercial” y se realiza a partir del vector intensidad de campo gravitatorio  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ . Este objeto es un vector espacial en cada espacio de simultaneidad.

La gravitación newtoniana se describe a partir de tres “niveles” con una jerarquía entre ellos. El primer “nivel” que apareció históricamente, tanto teórica como experimentalmente, fue la intensidad de campo gravitatorio, que ocupa la posición intermedia de la jerarquía. Por encima se encuentra el potencial gravitatorio, y por debajo, el campo de marea.

#### 3.1.1. El campo gravitatorio

La fuerza gravitatoria  $\mathbf{F}_{gr}$  ejercida sobre una partícula de masa gravitatoria  $m_{gr}$  en el punto  $\mathbf{x}$  debido a una serie de masas puntuales de masa gravitatoria  $M_{(s)}$  situadas en  $\mathbf{X}_{(s)}(t)$  está dada por la ley de Newton:

$$\mathbf{F}_{gr} = -m_{gr}G \sum_{(s)} \frac{M_{(s)}}{(\mathbf{x} - \mathbf{X}_{(s)}(t))^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_{(s)}(t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}_{(s)}(t)|} \quad (3.1)$$

siendo  $G \simeq 6,67 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$  la constante gravitatoria de Newton.

Además, teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, se obtiene una relación que da la derivada segunda de la posición de la partícula en términos de la fuerza ejercida sobre ella.

La masa inercial,  $m_{in}$ , es universalmente proporcional a la masa gravitatoria,  $m_{gr}$ . Esta hipótesis se conoce como principio de Galileo. Las primeras comprobaciones precisas de tal hipótesis comienzan con el barón húngaro L. Eötvös a partir de 1890, realizando medidas muy precisas con diferentes sustancias como cobre, agua, sulfato de cobre, madera o asbesto con una balanza de torsión y comparándolas con un patrón de platino.



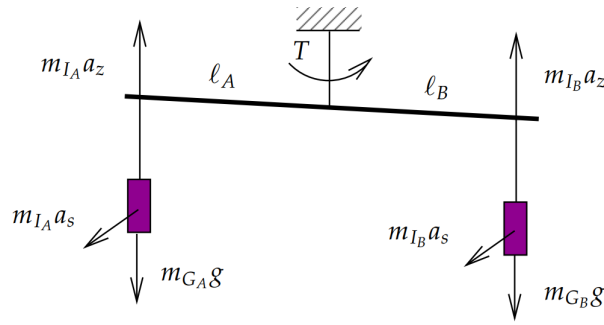


Figura 3.1: Esquema de la balanza de torsión de L. Eötvös.

Fuente: <http://www.ugr.es/jillana/SR/sr9.pdf>

Si se toma la hipótesis anterior como un hecho experimental exacto, ajustando las unidades, la masa inercial y la gravitatoria resultan ser iguales, por lo que se puede prescindir de los subíndices inercial y gravitatorio en las relaciones anteriores y hablar directamente de la masa de la partícula:  $m$ . Por lo tanto, las masas inercial y gravitatoria de la expresión se simplifican y, como consecuencia, el movimiento de una partícula en un campo gravitatorio no dependerá ni de su masa, ni de su composición, ni de ningún otro aspecto asociado a ella. Entonces, dos partículas de masa y composición diferentes pero con las mismas condiciones iniciales seguirán la misma trayectoria en un campo gravitatorio.

Teniendo en cuenta que la intensidad de campo gravitatorio (o campo gravitatorio),  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ , se define como la fuerza por unidad de masa o “fuerza específica” que la distribución de materia restante que crea el campo gravitatorio ejerce sobre la partícula test, se obtiene que el campo gravitatorio coincide con la aceleración de la partícula:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \quad (3.2)$$

Como se ha dicho anteriormente, se cumple que la trayectoria seguida por una partícula en un campo gravitatorio es independiente de la composición de la partícula.

En mecánica newtoniana y bajo transformaciones de Galileo (cambios entre marcos de referencia “inerciales”), la aceleración es un “3-vector absoluto”, es decir, es un objeto que cambia como un vector ordinario bajo rotaciones, pero que no cambia cuando se pasa a un marco que se mueve con velocidad  $\mathbf{V}$  uniforme y constante con respecto al marco inicial.

Las ecuaciones de campo, las cuales se obtendrán después, que relacionan la distribución de masa, que es la fuente del campo, con la intensidad del campo gravitatorio en un MRI para coordenadas cartesianas son las siguientes:

$$\nabla \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = -4\pi G \rho(t, \mathbf{x}) \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (3.4)$$

donde  $\rho(t, \mathbf{x})$  es la densidad de masa de la distribución.

### 3.1.2. El potencial gravitatorio

Si conceptualmente se considera el 3-vector campo gravitatorio como el “nivel 1” en la descripción de la gravitación, el potencial gravitatorio será el “nivel 0”. Este potencial se puede obtener de dos maneras diferentes, tal y como se verá a continuación.

Como el vector campo gravitatorio es irrotacional, localmente es posible escribir la intensidad de campo gravitatorio como el vector asociado al covector gradiente de otra función,  $\varphi(t, \mathbf{x})$ , que es lo que se conoce como potencial gravitatorio. Utilizando la métrica espacial,  $\delta^{IJ}$ , se obtiene la siguiente expresión para el potencial gravitatorio:

$$\mathbf{g}^I(t, \mathbf{x}) = -\delta^{IJ} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial x^J} \quad (3.5)$$

El potencial gravitatorio,  $\varphi(t, \mathbf{x})$ , está definido salvo por una cantidad aditiva arbitraria, constante respecto a las coordenadas espaciales, pero que puede ser función de la coordenada temporal. Además, deberá transformarse de tal forma que garantice que el vector campo gravitatorio,  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ , sea un “3-vector absoluto”, tal y como se dijo anteriormente. Para ello,  $\varphi(t, \mathbf{x})$  debe ser un escalar bajo el grupo de Galileo.

La otra manera de introducir el potencial se basa en considerar la expresión de la energía potencial,  $U(t, \mathbf{x})$ , de una partícula test de masa  $m$  que en el instante  $t$  se encuentra en el punto  $\mathbf{x}$  en presencia de un campo gravitatorio:

$$U(t, \mathbf{x}) = -mG \sum_{(s)} \frac{M_{(s)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}_{(s)}(t)|} \quad (3.6)$$

Al fijarse en [3.1] y [3.6] se puede comprobar que la fuerza gravitatoria es igual a menos el gradiente de la energía potencial. Entonces, simplificando términos, se obtiene que el potencial gravitatorio es la energía gravitatoria por unidad de masa para cada punto del espacio e instante de tiempo determinados:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{m} U(t, \mathbf{x}) \quad (3.7)$$

Escribiendo las ecuaciones del movimiento en función del potencial, la masa de la partícula test desaparece y se puede escribir la primera ecuación de campo [3.3] en términos del potencial, obteniendo así la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \varphi(t, \mathbf{x}) = 4\pi G \rho(t, \mathbf{x}) \quad (3.8)$$

### 3.1.3. De la ley de Newton a las ecuaciones del campo gravitatorio

En este apartado se va a indicar cómo obtener la ecuación de Poisson [3.8] a partir de [3.1] y de las relaciones obtenidas para el potencial gravitatorio.

Para ello, hay que pasar del discreto al continuo. Se considera una distribución de masa  $\rho(\mathbf{x})$  y se integra en una región  $D$ . Utilizando la identidad

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.9)$$

y teniendo en cuenta que en todos los pasos realizados se ha considerado un instante de tiempo  $t$  fijo se obtiene finalmente la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \varphi(t, \mathbf{x}) = 4\pi G \rho(t, \mathbf{x}) \quad (3.10)$$

### 3.1.4. El campo de marea

En este apartado se va a tratar la evolución de la posición relativa o separación entre dos partículas en caída libre en un campo gravitatorio,  $\delta\mathbf{x}(t)$ . Se denotarán las trayectorias de las partículas, que son soluciones de las ecuaciones del movimiento, como  $\mathbf{x}(t)$  y  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(t)$  y se medirá la separación entre ellas tomando como referencia la posición de la partícula con trayectoria  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}(t)$ :

$$\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \overset{\circ}{\mathbf{x}}(t) \quad (3.11)$$

Si las dos partículas están muy próximas, se puede considerar que la diferencia de campo gravitatorio entre los dos puntos es aproximadamente la que corresponde al gradiente de dicho campo, esto es, se trunca en primer orden el desarrollo de Taylor. Entonces, lo importante de este problema no es la intensidad del campo gravitatorio en la región considerada, sino el gradiente de  $\mathbf{g}$  en el espacio. Este nuevo objeto se conoce como campo de marea  $A(t, \mathbf{x})$ :

$$A^I{}_J(t, \mathbf{x}) := - \left. \frac{\partial g^I(t, \mathbf{x})}{\partial x^J} \right|_x \quad (3.12)$$

La ecuación que regula la evolución temporal de la separación en términos del campo de marea es:

$$m \frac{d^2 \delta x^I(t)}{dt^2} \simeq -A^I{}_J(t, \overset{\circ}{\mathbf{x}}(t)) \delta x^J(t) \quad (3.13)$$

Teniendo en cuenta que el campo gravitatorio es la derivada espacial del potencial gravitatorio, se puede obtener también el campo de marea en función del potencial:

$$A^I{}_J = \delta^{IK} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^K \partial x^J} \quad (3.14)$$

El campo de marea se transforma como un (3D)tensor de tipo (1,1) bajo rotaciones, pero permanece invariante bajo transformaciones inerciales puras de velocidad  $V$ . Al contrario que el potencial y el vector campo gravitatorio, el campo de marea sí tiene un sentido absoluto. Esto quiere decir que permanece invariante al pasar de un marco de referencia inercial a otro no inercial, convirtiéndose en la auténtica firma de la gravedad.

Se pueden escribir las ecuaciones de campo en función de este nuevo objeto, obteniendo así la relación local entre el campo de marea y la densidad de masa, que es la fuente del campo gravitatorio:

$$A^I{}_J(t, \mathbf{x}) = A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3 = 4\pi G \rho(t, \mathbf{x}), \quad \delta^{JK} A^I{}_J = \delta^{IJ} A^K{}_J \quad (3.15)$$

que utilizando la métrica para expresarlas en notación tensorial serán:

$$A^I{}_I(t, \mathbf{x}) = 4\pi G \rho(t, \mathbf{x}), \quad A^{IK} = A^{KI} \quad (3.16)$$

Hasta ahora se han visto tres niveles para la descripción de la gravedad: el potencial gravitatorio, el campo gravitatorio y el campo de marea. Sus unidades son:

$$[\varphi] = L^2 T^{-2}, \quad [\mathbf{g}] = L T^{-2}, \quad [A] = T^{-2}$$

Cada nivel es la derivada espacial del anterior, por lo que dimensionalmente cada nivel tiene un factor  $L^{-1}$  más que el anterior.

El campo de marea a una distancia  $r$  creado por un cuerpo de masa  $M$  con simetría esférica tiene como orden de magnitud  $\frac{GM}{r^3}$ .

El Sol tiene una masa mucho mayor que la de la Tierra, por lo que cabría esperar que el campo de marea en su propia superficie fuera mayor que el de la Tierra también en su propia superficie. Sin embargo, al calcularlos numéricamente, se puede apreciar que el campo de marea del Sol es un orden de magnitud inferior que el producido por la Tierra. Esto es debido a que el radio del Sol es mucho mayor que el de la Tierra.

En un experimento, se toman dos partículas cercanas a la superficie terrestre inicialmente en reposo y con una separación de 1 metro, cayendo hacia la Tierra. La aceleración de marea causada por la Tierra es del orden de  $10^{-6} \text{ ms}^{-2}$ , es decir, siete órdenes de magnitud menor que la aceleración gravitatoria producida también por la Tierra en ese punto, que es del orden de  $10 \text{ ms}^{-2}$ . Por lo tanto, a efectos prácticos se pueden despreciar las aceleraciones de marea producidas por cuerpos como el Sol, la Tierra o la Luna a escalas de 1 metro.

A pesar de su pequeñez, el campo de marea terrestre creado por la Tierra sobre un objeto en caída libre cercano a su superficie se puede medir con un gradiómetro. Los gradiómetros actuales más precisos permiten medir los campos de marea debidos a la Luna en la Tierra.

### 3.1.5. Campo de marea y fuerzas de marea

En este apartado se va a considerar el campo de marea para el caso en que la segunda partícula esté en caída libre y no rote con respecto al marco de la partícula de referencia. Este marco de referencia es “inercial” en el sentido post-1900, pero hay que tener cuidado porque en la visión pre-1900 sería “no inercial”. Un ejemplo de esto serían dos partículas en caída libre en el campo gravitatorio terrestre. Se debe tomar una partícula como partícula de referencia e interpretar las ecuaciones obtenidas anteriormente dando la aceleración relativa experimentada por la segunda partícula respecto a la de referencia.

De acuerdo con el modelo newtoniano, se pueden considerar las aceleraciones relativas entre las dos partículas como el resultado de la acción de las fuerzas de marea,  $f^I(t, \mathbf{x}(t))$ , que están relacionadas con la aceleración de la separación entre las dos partículas mediante la segunda ley de Newton. Las fuerzas de marea no son “absolutas”, sino que son relativas al movimiento de la partícula de referencia escogida.

Teniendo en cuenta [3.13], la fuerza de marea para una separación inicial horizontal en la dirección será:

$$f \simeq -m \frac{GM}{r^3} \delta x \quad (3.17)$$

donde  $M$  es la masa de la Tierra,  $m$  la masa de la partícula test, y  $r$  la distancia del centro de la tierra a la partícula test, que en este caso coincide con el radio terrestre. La fuerza es horizontal, atractiva y proporcional a la separación horizontal inicial  $\delta x$ .

Para una separación inicial vertical en la dirección  $z$  la fuerza de marea será:

$$f \simeq 2m \frac{GM}{r^3} \delta z \quad (3.18)$$

siendo la fuerza vertical, repulsiva y proporcional a la separación vertical inicial  $\delta z$ . Las diferencias con la anterior son que el valor absoluto de la fuerza es el doble que el de la que actúa en la separación horizontal y que las fuerzas tienen sentidos contrarios.

En una región en la que la densidad de masa no sea nula, lo que sucede por ejemplo en el interior de un planeta o de una estrella, las fuerzas de marea siempre serán atractivas.

### 3.1.6. Los efectos del campo de marea: mareas y precesión de los equinoccios

#### Las mareas

En este caso, en vez de dos partículas se va a considerar una gota de agua líquida en la superficie terrestre. Bajo la acción de las fuerzas de marea de la Luna y del Sol, la gota adopta la forma de un elipsoide de revolución: su eje “horizontal”, (X, Y), se encoge, tal y como se vio anteriormente, mientras que el “vertical”, Z, se estira hasta que las fuerzas de marea se equilibran con las fuerzas que unen la gota (la cohesión y la tensión superficial). La deformación absoluta causada por las fuerzas de marea es proporcional al tamaño de la gota. Entonces, las fuerzas de marea deforman la esfera a un elipsoide. Al medir esta deformación se obtendrá una medida absoluta de la presencia de campo gravitatorio.

#### Precesión del eje de un cuerpo rotante

El torque  $\tau_J$  que un campo de marea produce sobre un cuerpo con tensor de inercia  $I^K_L$  viene dado por:

$$\tau_J = \epsilon_{JKL} A^K_S \left( -\delta^{SN} I^L_N + \frac{1}{3} \delta^{LS} I^M_M \right) \quad (3.19)$$

siendo  $\epsilon_{JKL}$  el tensor de Levi-Civita.

Si el cuerpo rotante es una esfera, como su tensor de inercia es  $I^L_S = I \delta^L_S$ , el torque producido por el campo de marea es nulo, porque se anula el término entre paréntesis de [3.19]. Sin embargo, los cuerpos que no tienen simetría esférica perfecta sufren una precesión en su eje de giro a causa del torque. Debido a esto, como la Tierra no es una esfera perfecta, el campo de marea es el responsable de la precesión de su eje de giro, lo que se conoce como precesión de los equinoccios. Esta precesión se descubrió en la antigüedad y fue medida con una alta precisión por Hiparco.

### 3.1.7. Recapitulación sobre el Campo de marea

Mientras que el campo de marea se puede representar como  $A = -\frac{1}{m} \frac{f}{\eta}$ , el vector campo gravitatorio se puede expresar como  $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}$ . En ambos casos aparece el factor de proporcionalidad  $m^{-1}$ , debido a que las fuerzas gravitatorias y las de marea son proporcionales a la masa de la partícula test. Sin embargo, el factor  $\frac{1}{\eta}$  indica que el campo de marea no está relacionado directamente con las propias fuerzas de marea, sino que está relacionado con los gradientes de estas fuerzas. Por lo tanto, el campo de marea no es un vector, sino que es un tensor.

Finalmente, hay que tener en cuenta que las fuerzas de marea que realmente aparecen en la naturaleza son más complicadas que las descritas aquí y que su descripción correcta es la dada por la teoría de Einstein de la gravitación. Aún así, las fuerzas de marea de la teoría newtoniana son muy parecidas a las fuerzas de marea reales de prácticamente todos los fenómenos gravitatorios del Sistema Solar. Esta aproximación empieza a fallar en presencia de campos gravitatorios más intensos o rápidamente variables con el tiempo, que se dan en situaciones astrofísicas. Los campos de marea reales dependen tanto de la velocidad del punto de referencia, como de la de la partícula test respecto al punto de referencia.

### 3.1.8. La densidad de energía del campo gravitatorio

El objetivo de este apartado es hallar la energía potencial total del campo gravitatorio,  $U_{tot}$ , y su densidad de energía en cada punto,  $\epsilon(\mathbf{x})$ . Como se vio en [3.7], se puede expresar el potencial gravitatorio como la energía potencial por unidad de masa en cada punto. Por lo tanto, la energía potencial total será la integral de esa energía por unidad de masa multiplicada por 1/2 para evitar un conteo repetido (la energía de la materia en el punto  $\mathbf{x}$  debida a su interacción con la materia situada en todos los demás puntos y la energía de la materia situada en todos los demás puntos debida a la materia del punto  $\mathbf{x}$ ):

$$U_{tot} = \frac{1}{2} \int \int \int_D \varphi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (3.20)$$

Sustituyendo la densidad de masa por el laplaciano del campo gravitatorio mediante la ecuación de Poisson y aplicando el teorema de Green teniendo en cuenta que las masas ocupan una región finita del espacio, por lo que en el infinito el potencial será constante, se obtiene que la energía total del campo gravitatorio será:

$$U_{tot} = -\frac{1}{8\pi G} \int \int \int_D |\nabla\varphi(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} \quad (3.21)$$

El integrando de [3.21] será la densidad de energía del campo gravitatorio:

$$\epsilon(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi G} |\nabla\varphi(\mathbf{x})|^2 \quad (3.22)$$

que también se puede expresar en función del vector campo gravitatorio:

$$\epsilon(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{g}(\mathbf{x})|^2}{8\pi G} \quad (3.23)$$

## 3.2. Descripción de la gravitación en un marco de referencia “no inercial”

Las expresiones obtenidas en la sección anterior tienen la ventaja de ser muy sencillas. Sin embargo, esas ecuaciones solo son aplicables en marcos de referencia “inerciales”. Si se escoge como marco de referencia, por ejemplo, la Tierra, hay que tener en cuenta las aceleraciones centrífugas y de Coriolis que, como se ha hecho hasta ahora, pueden despreciarse en una primera aproximación. Sin embargo, limitarse al empleo únicamente de marcos de referencia “inerciales” no permite una comprensión completa de la gravedad. Para ello es necesario describir la gravedad también desde marcos de referencia no inerciales.

El empleo de la ecuación de Newton en un marco de referencia “no inercial” necesita de la incorporación de las fuerzas inerciales,  $F_{inerc}$ , para poder describir de manera correcta el movimiento en dicho marco. A partir de ahora se denotarán los marcos de referencia inerciales y no inerciales en el sentido post-1900 con los acrónimos MR“I” y MR“nI”, respectivamente.

Como se vio en el apartado relativo a la primera ley de la dinámica y los marcos de referencia inerciales y no inerciales, los movimientos “ideales” en marcos inerciales en ausencia completa de todo tipo de fuerzas, incluidas las de gravitación, están descritos por la ecuación  $\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{0}$ , por lo que las tres coordenadas newtonianas  $x^I$  dependen del tiempo de una manera afín lineal.

Estos movimientos observados desde un marco de referencia “no inercial” estarán descritos por funciones dependientes del tiempo que ya no serán de la forma afín lineal anterior y que, por lo tanto, no satisfarán la ecuación anterior, sino que cumplirán otra de la forma  $\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}_{inerc}$ , en la que  $\mathbf{F}_{inerc}$  son las fuerzas inerciales.

Nunca es obligatorio utilizar un marco de referencia no inercial, ya que siempre es posible encontrar un marco inercial para resolver un problema. Aún así, en la práctica, los marcos de referencia que se utilizan en la mayoría de experimentos son no inerciales, debido a que los laboratorios están fijos en la superficie terrestre y se mueven de manera solidaria con la rotación terrestre. Entonces, para entender de manera completa la gravitación, se deben conocer en detalle las características de los marcos de referencia no inerciales.

### 3.2.1. Relación entre marcos “inerciales” y “no inerciales”

Un marco de referencia “no inercial” se puede imaginar como un marco espacial rígido que se mueve en el espacio de una forma tal que cuando se observa desde un MR “I” cada punto de dicho marco tiene un movimiento no uniforme. Esta no uniformidad, vista desde el MR “I”, se puede deber a una de las dos circunstancias siguientes o a una combinación de ambas:

1. El marco rígido se traslada con una velocidad variable en el tiempo, pero sin rotación.
2. El marco rígido está rotando alrededor de un punto fijo en el MR “I”, pero sin traslación.

Por ejemplo, el marco de referencia habitual del laboratorio, conocido como CTFT (centrado en la Tierra y fijo en la Tierra), es “no inercial” porque se encuentra ligado a la superficie terrestre, así que le afectan la rotación de la Tierra y, en menor medida, el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, que no es un movimiento a velocidad constante. Además, teniendo en cuenta correcciones cada vez más pequeñas, también afectan el movimiento no uniforme del Sistema Solar alrededor de la galaxia, el movimiento de la galaxia, etc.

Si se ignoran estos efectos y se considera el sistema CTFT un marco “inercial”, lo que es una aproximación admisible a muchos efectos prácticos, entonces un marco de referencia general “no inercial” será el ligado a un cuerpo que se encuentre en movimiento arbitrario con respecto a la superficie de la Tierra.

### 3.2.2. Relación entre coordenadas espaciales en los marcos “inerciales” y “no inerciales”

Si se denota como  $\{R\}_i^{i'}$  al elemento de la matriz de rotación de la fila  $i'$  y la columna  $i$ , entonces la transformación de un juego de coordenadas inerciales  $x^i$  a otro de coordenadas no inerciales  $x^{i'}$  será:

$$x^{i'} = \{R\}_i^{i'} x^i, \quad x^i = \{R^{-1}\}_i^i x^{i'} \quad (3.24)$$

La matriz  $R$  puede depender del tiempo, pero para aligerar la escritura no se indica de manera explícita en las ecuaciones.

La matriz de rotación es ortogonal. Además, al trabajar en el espacio euclídeo, la matriz de la métrica,  $G$ , coincide con la matriz identidad. Entonces, la relación entre las matrices de rotación directa e inversa será:

$$\{R^{-1}\}_l^i = \sum_{j,k} \{G^{-1}\}_j^i \{R\}_j^k \{G\}_l^k \quad (3.25)$$

A lo largo de este trabajo se va a utilizar la siguiente notación tensorial para los objetos anteriores:

$$R^{i'}_i := \{R\}_i^{i'}, \quad g^{ij} := \{G^{-1}\}_j^i, \quad g_{kl} := \{G\}_l^k \quad (3.26)$$

Teniendo en cuenta que en el espacio euclídeo la métrica  $g^{ij}$  coincide con la matriz identidad,  $\delta^{ij}$ , las ecuaciones de transformación en este espacio serán:

$$x^{i'} = R^{i'}_i x^i, \quad x^i = R_{i'}^i x^{i'} \quad (3.27)$$

Usando la notación indicada en [3.26], las leyes de transformación para un vector contravariante,  $\xi^k$ , para un covector,  $\Xi_l$ , y para un tensor  $A^k_l$  serán:

$$\xi^{k'} = R^{k'}_k \xi^k, \quad \Xi_{l'} = R_{l'}^l \Xi_l, \quad A^{k'}_{l'} = R^{k'}_k R_{l'}^l A^k_l \quad (3.28)$$

Se considera ahora que el origen del marco no inercial se mueve con un movimiento no uniforme que en el sistema inercial está descrito por la trayectoria dependiente del tiempo  $a^I(t)$  y que además los ejes espaciales del marco rotan con respecto al sistema inercial con una rotación dependiente del tiempo,  $R(t)$ , alrededor de un eje que pasa por el origen del marco no inercial. Entonces, la relación entre las coordenadas inerciales  $(t, x^I)$  y las no inerciales  $(t, x^i)$  estará dada por

$$x^i = \{R\}_I^i(t)(x^I - a^I(t)), \quad x^I = \{R^{-1}\}_i^I(t)x^i + a^I(t) \quad (3.29)$$

en notación matricial.

En notación tensorial, [3.29] tomará la forma

$$x^i = R^i_I(t)(x^I - a^I(t)), \quad x^I = R_i^I(t)x^i + a^I(t) \quad (3.30)$$

En lo que respecta a la traslación no uniforme,  $a^I(t)$ , la cantidad que interviene en la expresión de las fuerzas de inercia no es la propia función  $a^I(t)$ , sino su segunda derivada con respecto al tiempo, que se denotará como  $w^I(t)$ . Las componentes de esta aceleración vistas desde el marco no inercial serán:

$$w^i := R^i_I(t) \frac{d^2 a^I}{dt^2} \quad (3.31)$$

Para la rotación, la cantidad que interviene en la expresión de las fuerzas de inercia tampoco es directamente la rotación  $R^i_I(t)$ , sino su primera derivada con respecto al tiempo, es decir, la velocidad angular instantánea,  $\omega_k(t)$ . Como la matriz  $R(t)$  es ortogonal, la matriz  $\Omega(t) = \frac{dR(t)}{dt} R^T(t)$  es antisimétrica. En notación tensorial,  $\Omega^i_k(t)$  será un tensor de tipo (1, 1) en el espacio euclídeo “instantáneo” del marco “no inercial”.

Como consecuencia de que la matriz de rotación siempre es ortogonal, el tensor  $\Omega^{ij}(t)$  que se obtiene subiendo los índices es antisimétrico y es el dual del covector velocidad angular instantánea,  $\omega_k(t)$ :

$$\Omega^{ij}(t) = \epsilon^{ijk} \omega_k(t), \quad \omega_k(t) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega^{ij}(t) \quad (3.32)$$

Subiendo el índice de  $\omega_k(t)$  con la métrica espacial se obtiene el vector velocidad angular instantánea

$$\omega^l(t) = \delta^{lk} \omega_k(t) = \frac{1}{2} \delta^{lk} \epsilon_{ijk} \Omega^{ij}(t) \quad (3.33)$$

Entonces, en el 3-espacio euclídeo,  $\Omega^i_k$  es un tensor (1, 1) de segundo orden una vez contravariante y otra covariante. El tensor  $\Omega^{ij}$  es dos veces contravariante, y por contracción con el tensor de Levi-Civita, produce un covector dual  $\omega_k$ , cuyo índice también puede subirse para obtener un vector espacial  $\omega^l$ .



### 3.2.3. La ecuación de caída libre en un marco “no inercial”

El vector intensidad de campo gravitatorio permanece invariante bajo transformaciones inerciales puras, solamente se transforma como un vector absoluto bajo rotaciones. Entonces, cabe suponer que en las transformaciones que pasan de un MR“I” a un MR“nI” ocurra lo mismo. Los movimientos de rotación y de traslación pueden tener una dependencia temporal, mientras que para las transformaciones de Galileo eran constantes.

Por lo tanto, bajo una traslación no uniforme la intensidad de campo no varía. Sin embargo, bajo una rotación habrá que transformar mediante la rotación el vector campo gravitatorio. Partiendo de las ecuaciones de transformación obtenidas en el apartado anterior, se obtiene que la aceleración del movimiento relativamente al marco no inercial será:

$$\frac{d^2x^k(t)}{dt^2} = g^k(t, \mathbf{x}) - w^k(t) + \{\dot{\Omega}_i^k(t) - \Omega_j^k(t)\Omega_i^j(t)\}x^i(t) + 2\Omega_i^k(t)\frac{dx^i(t)}{dt} \quad (3.34)$$

En la ecuación anterior intervienen conjuntamente aceleraciones cuyos orígenes son aparentemente distintos:

- Aceleraciones de origen gravitatorio,  $g^i$ , que dependen de las coordenadas espaciales y de las temporales.
- Aceleraciones cuyo origen es el movimiento no inercial del marco de referencia,  $w^k(t)$  y  $\Omega_l^k(t)$ , que no están producidas por la presencia de masas y que describen la velocidad angular del marco no inercial. Dependen únicamente de las coordenadas espaciales. Son las aceleraciones inerciales, contenidas en cuatro sumandos:
  1. El término de arrastre no lineal,  $-w^k(t)$ , debido a la no uniformidad de la traslación.
  2. El término de “arrastre de rotación”,  $\dot{\Omega}_i^k x^i(t)$ , que se debe a la no uniformidad de la rotación y que a veces se denomina término de Euler.
  3. El término centrífugo,  $-\Omega_j^k \Omega_i^j x^i(t)$ .
  4. El término de Coriolis,  $2\Omega_i^k \frac{dx^i(t)}{dt}$ .

Resumiendo, en las aceleraciones “de inercia” hay un término,  $-w^k(t)$ , independiente de la posición, un término,  $\{\dot{\Omega}_i^k(t) - \Omega_j^k(t)\Omega_i^j(t)\}x^i(t)$ , lineal con la posición, y otro término,  $2\Omega_i^k \frac{dx^i(t)}{dt}$ , lineal con la velocidad de la partícula con respecto al MR“nI”. Todos los términos pueden depender del tiempo.

Sustituyendo las matrices antisimétricas  $\Omega_j^i$  en [3.34] por sus duales se obtiene la siguiente expresión equivalente para la ecuación de caída libre en un marco de referencia no inercial

$$\frac{d^2x^k(t)}{dt^2} = g^k - w^k - \delta^{kl} \epsilon_{lij} \frac{d\omega^i}{dt} x^j - \omega^k (\omega_l x^l) + (\omega_l \omega^l) x^k - 2\delta^{kl} \epsilon_{lij} \omega^i \frac{dx^i}{dt} \quad (3.35)$$

### 3.2.4. Los datos de no inercialidad de un marco de referencia “no inercial”

La no inercialidad está descrita en cada instante de tiempo por las cantidades  $w^k(t)$  y  $\Omega_l^i(t)$ , que como se ha explicado, dependen únicamente del tiempo. Se conocen como “datos de no inercialidad” del marco no inercial y contienen toda la información necesaria para caracterizar la no inercialidad de dicho marco.

$w^k(t)$  es la aceleración lineal instantánea del marco no inercial, tal y como la mediría un “acelerómetro absoluto” en reposo situado en el origen del marco inercial, mientras que  $\Omega^i_l(t)$  es el tensor antisimétrico que describe la velocidad angular instantánea del MR“nI” que mediría un sistema de tres “girómetros absolutos” situados en reposo en el origen del marco inercial y cada uno de ellos orientado perpendicularmente a cada eje. Que sean absolutos quiere decir que estos instrumentos serían capaces de registrar las aceleraciones o las velocidades angulares de rotación con respecto al “espacio absoluto” newtoniano. Sin embargo, ¿existen estos acelerómetros y girómetros? Si la respuesta a esta pregunta fuera afirmativa, las cantidades  $w^k(t)$  y  $\Omega^i_l(t)$  serían observables.

La aceleración lineal solamente es observable sin ambigüedad si se tiene la seguridad de que no hay ningún campo gravitatorio. En ese caso, un conjunto de tres acelerómetros reales orientados según los ejes del marco no inercial y solidarios con él medirían la aceleración lineal instantánea del MR“nI”. Por el contrario, si no se puede determinar con exactitud la existencia o no de un campo gravitatorio, no es posible medir  $w^k(t)$  sin ambigüedad.

En contraste, haya o no un campo gravitatorio, la cantidad  $\omega^l(t)$ , por lo que también las correspondientes  $\Omega^k_l(t)$  y  $\Omega^{kl}(t)$ , son realmente observables en la teoría newtoniana mediante el sistema de tres girómetros. Se debe tener en cuenta que  $\omega^l(t)$ , o equivalentemente  $\Omega^k_l$ , solo es observable en la teoría newtoniana, en la teoría de la Relatividad General no lo será.

### 3.2.5. Descomposición electromagnética de las fuerzas gravitatorio-inerciales

Al describir la gravedad en un MR“I” solamente aparecen aceleraciones independientes de la velocidad, descritas por  $g^k$ . Sin embargo, al realizar la descripción en un MR“nI” aparecen contribuciones adicionales, unas independientes de la velocidad y otras lineales con ella. Esto recuerda al electromagnetismo, donde la fuerza específica que se ejerce sobre una partícula de carga  $q$  es:

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \times \mathbf{B} \quad (3.36)$$

siendo  $\mathbf{E}$  el campo eléctrico,  $\mathbf{B}$  el campo magnético y  $\mathbf{x}(t)$  la posición de la partícula en un instante de tiempo.

En el caso de la gravitación newtoniana, tanto las fuerzas gravitatorias como las inerciales son proporcionales a la masa de la partícula, por lo que las fuerzas específicas coinciden con las aceleraciones. Se puede escribir una expresión análoga a [3.36] para el campo gravitatorio:

$$\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{g} + \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \times \mathbf{b} \quad (3.37)$$

donde se han introducido dos nuevos vectores denotados en cursiva,  $\mathbf{g}$  (no confundir con  $\mathbf{g}$ , el campo gravitatorio) y  $\mathbf{b}$ , que se definen como:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{w}(t) - (\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{x}) - [\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x})] = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{b}(t) = 2\boldsymbol{\omega}(t) =: \tilde{\mathbf{b}}(t) \end{cases} \quad (3.38)$$

donde  $\tilde{\mathbf{g}}$  y  $\tilde{\mathbf{b}}$  son las contribuciones a  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{b}$  que provienen exclusivamente de la no inercialidad del movimiento.

Para resaltar la analogía con el electromagnetismo, se denomina “campo gravieléctrico” a  $\mathbf{g}$ . Este campo describe la parte de las aceleraciones relativas al marco de referencia independientes de la velocidad. Entonces, en cada marco de referencia, el campo gravieléctrico es la aceleración neta que, bajo el efecto conjunto de las fuerzas gravitatorias e inerciales que existen en el marco de referencia en el que se esté trabajando, adquiere una partícula que inicialmente esté en reposo en dicho marco.

Además, la partícula test sufre una aceleración lineal con la velocidad de la partícula respecto al marco de referencia,  $\mathbf{b}$ . Para asegurar coherencia con la nomenclatura anterior, a esta parte de la aceleración, que es lineal en la velocidad, se la denominará campo gravimagnético.

Es muy importante resaltar que aunque se utilice esta nomenclatura no hay ninguna relación física con el electromagnetismo. La única relación es formal.

Una de las diferencias físicas más destacadas entre ambas expresiones es que, en el caso del electromagnetismo, el campo magnético es debido a un movimiento de cargas. Éste puede existir también en un marco de referencia inercial, mientras que el campo gravimagnético resulta ser nulo en cualquier marco de referencia inercial y solo aparece cuando se emplean marcos de referencia no inerciales. Además, aunque el campo magnético depende de la posición, el gravimagnético es constante en el espacio y solo depende del tiempo. Por último, mientras que en el campo electromagnético el movimiento de cargas crea efectos adicionales, el movimiento de masas no tiene ningún efecto de creación de una nueva componente gravimagnética del campo gravitatorio.

### 3.2.6. ¿Es posible distinguir y/o separar los efectos gravitatorios de los inerciales?

Es habitual mezclar aceleraciones de origen gravitatorio y de origen inercial. Por ejemplo, al estudiar los fenómenos físicos que suceden en la superficie terrestre, es muy frecuente incluir el efecto de la fuerza centrífuga de rotación de la Tierra junto con el del campo gravitatorio de la Tierra, obteniendo así un campo gravitatorio efectivo. Como consecuencia de esto, la vertical efectiva no coincide exactamente con la puramente gravitatoria. Al estar trabajando en un MR“nI” en el que solamente hay una rotación uniforme con respecto a otro MR“I”, la única fuerza de inercia existente en el término independiente de la velocidad es la centrífuga. Entonces, en este caso se considera el vector  $\mathbf{g}$  en lugar de  $\mathbf{g}$  como el campo gravitatorio efectivo.

Parece que el origen de las aceleraciones inerciales es completamente diferente del de las gravitatorias, pero, por el contrario, las propiedades de ambas fuerzas son análogas. La principal semejanza entre estas aceleraciones es que ambas son independientes de la masa.

Las fuerzas de inercia a veces son calificadas como fuerzas ficticias o pseudofuerzas. Esto solo es aceptable si se entiende en el sentido de que dichas fuerzas desaparecen por completo al utilizar un marco inercial. Sin embargo, es falso en un sentido más filosófico, es decir, si se entiende como contrario a real, ya que sus efectos son observables.

Tal y como se plantea en la formulación de Newton-Cartan, que se verá en el próximo capítulo, las fuerzas de inercia están descritas por una conexión en el espacio-tiempo. Este objeto matemático tiene la propiedad de que su anulación en un sistema de coordenadas no implica que se anule en cualquier otro (a diferencia del comportamiento de un tensor) y por eso las fuerzas de inercia aparecen únicamente en determinados marcos de referencia.

La principal controversia que se presenta en las discusiones sobre fuerzas de inercia es la creencia de que, para que algo sea real, debe manifestarse para cualquier observador. Sin embargo, hay muchos ejemplos en la Naturaleza en los que dichas fuerzas se manifiestan aunque no sean medibles en todos los marcos de referencia: los volantes de las primeras máquinas de vapor que se rompían debido a una resistencia insuficiente a las fuerzas centrífugas que actuaban sobre ellos, las aceleraciones que siente una persona en una montaña rusa, etc. Además, cuando se calculan las órbitas circulares de los planetas, se tiene en cuenta el equilibrio medido en el marco co-rotante, que es no inercial, entre la fuerza de atracción gravitatoria y la fuerza centrífuga.

Entonces, cualquier formulación de la gravitación newtoniana que sea aplicable a todo tipo de marcos de referencia debe incluir, además de las fuerzas gravitatorias, las fuerzas inerciales. El nombre de fuerzas inerciales puede que no sea el más indicado, ya que estas fuerzas solo aparecen en los sistemas de referencia no inerciales, pero es la notación histórica.

Después de esta introducción, surge la siguiente pregunta: ¿pueden separarse de manera inambigua y “absoluta” los efectos puramente gravitatorios de los inerciales? Atendiendo a [3.34], la respuesta lógica a la pregunta parece ser que la parte puramente gravitatoria es  $g^k(t, \mathbf{x})$ , mientras que la parte puramente inercial sería el resto de la ecuación. Sin embargo, ¿es esto correcto?

Para responder a esta pregunta, primero se debe tener claro si, en el contexto de la gravitación newtoniana en el que se está trabajando es posible averiguar, sin ninguna duda, mediante medidas realizadas sobre el movimiento de las partículas test en caída libre, si un marco de referencia es inercial o no. Más concretamente, si es posible determinar mediante este tipo de medidas los datos de no inercialidad que determinan el estado de movimiento instantáneo del marco no inercial relativamente a un MR “I”.

Si se escogen diferentes partículas test con la misma posición inicial pero con distintas velocidades iniciales, las aceleraciones iniciales dadas por la ecuación del movimiento de caída libre en un marco no inercial diferirán únicamente en el término  $2\Omega_i^k(t) \frac{dx^i(t)}{dt}$ , lineal con la velocidad, mientras que el resto de términos serán idénticos. Si se toma una muestra amplia de partículas, se puede determinar sin ninguna duda la cantidad  $\Omega_i^k$  en el instante en el que se ha realizado la observación. A continuación, realizando el proceso repetidamente en instantes cercanos:  $t$ ,  $t+dt$ , etc., mediante un proceso de límite se obtendría el valor instantáneo de  $\Omega_i^k(t)$ .

Teniendo esto en cuenta, se puede responder parcialmente a la pregunta anterior: sí que es posible separar de manera inambigua y absoluta los efectos puramente gravitatorios de los inerciales y sí que se pueden determinar los datos de no inercialidad, pero solo para el término de rotación. Esto significa que las fuerzas de inercia debidas a la rotación tienen sentido observacional en la gravitación newtoniana. De hecho, Newton defendía esta postura y dio varios argumentos a su favor, entre los que destaca el del cubo de Newton.

El argumento del cubo de Newton consiste en llenar un cubo de agua y observar su comportamiento al girar el cubo. Si el cubo se encuentra en reposo, la superficie del agua permanecerá plana. Sin embargo, al girar el cubo, la superficie adquiere un perfil parabólico, tal y como se muestra en la figura siguiente.

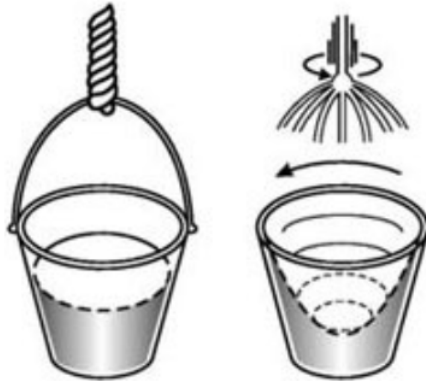


Figura 3.2: Experimento del cubo de Newton

Fuente: <https://culturacientifica.com/2014/03/11/del-espacio-y-el-tiempo/cubo-de-newton/>

Sin embargo, la estrategia tomada por Newton no fue capaz de zanjar la discusión sobre qué ocurre con los marcos que no son inerciales debido a un movimiento de traslación no uniforme. Se va a ver que en este caso, tal y como Leibniz defendía, es imposible determinar si un marco es o no inercial debido a su movimiento de traslación no uniforme.

La ecuación del movimiento de un marco no inercial en el que solo hay traslación no uniforme será:

$$\frac{d^2 x^k(t)}{dt^2} = g^k(t, \mathbf{x}) - w^k(t) \quad (3.39)$$

En esta ecuación se ve que no se pueden separar de forma inambigua los términos  $g^k(t, \mathbf{x})$  y  $w^k(t)$ . Esto es debido a la equivalencia entre las masas gravitatoria e inercial.

Un ejemplo de esta imposibilidad es el siguiente. Un observador que se encuentra en una nave espacial cerrada, desde la que no puede ver el exterior, propone como criterio para saber si está acelerando linealmente o no con respecto al “espacio absoluto” medir la aceleración en tres direcciones del espacio mutuamente perpendiculares utilizando los tres acelerómetros de su kit. Si, por ejemplo, dos de los acelerómetros marcan cero y el que mide la aceleración en el eje  $z$  marca una aceleración  $g \neq 0$ , se podría interpretar dicha lectura de dos maneras alternativas:

1. El observador se encuentra en reposo respecto al Espacio Absoluto en una región en la que hay un campo gravitatorio en la dirección  $z$  y de sentido negativo de valor  $\mathbf{g}$ . La nave podría estar, por ejemplo, sobre la superficie de un planeta.
2. El observador se encuentra en una región en la que no hay campo gravitatorio, moviéndose con un movimiento de traslación no uniforme de aceleración  $\mathbf{g}$  positiva en el eje  $z$ .

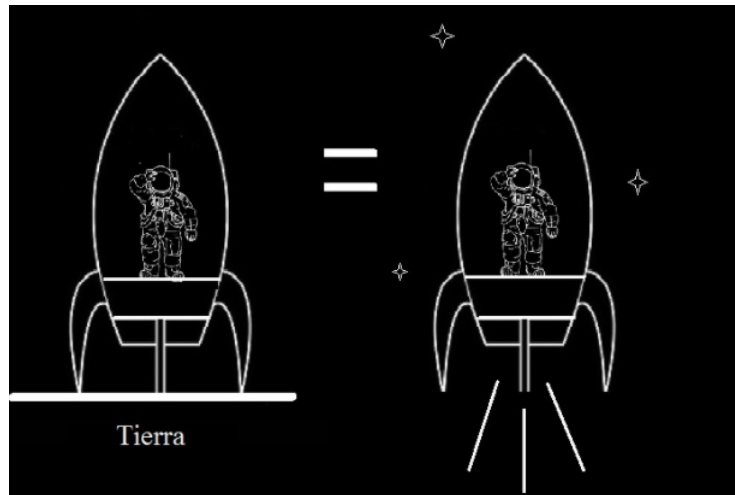


Figura 3.3: Izquierda: (1) Observador en reposo respecto al Espacio Absoluto.  
 Derecha: (2) Observador en una región en ausencia de campo gravitatorio.  
 Fuente: <http://www.laizquierdadiario.com/Un-siglo-de-relatividad-general>

Este ejemplo muestra que es imposible decantarse por la opción 1) o por la 2) únicamente mediante resultados observacionales. Entonces, es imposible medir la “aceleración lineal con respecto al espacio absoluto” y determinar los valores de  $g^k(t, \mathbf{x}(t))$  y  $w^k(t)$  por separado. Esto quiere decir que no se va a poder determinar si un marco de referencia no rotante es inercial o no.

Por lo tanto, se pueden determinar los datos de no inercialidad para la rotación, pero no para las traslaciones no uniformes.

### 3.2.7. El potencial de las fuerzas puramente inerciales en un marco “no inercial”

En este apartado se va a trabajar en ausencia de campo gravitatorio. Por lo tanto, habrá que eliminar el vector campo gravitatorio de las ecuaciones del movimiento. Es decir, se utilizarán los vectores  $\tilde{\mathbf{g}}$  y  $\tilde{\mathbf{b}}$ , definidos en [3.38], en lugar de  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{b}$ . Las aceleraciones de inercia que aparecen en dichas ecuaciones no pueden derivar de un potencial escalar, es decir, de una función que en el marco de referencia escogido se comporte como un escalar bajo rotaciones (permanezca invariante). Esto es así porque el término de Coriolis de la aceleración,  $2\Omega^k_i \frac{dx^i(t)}{dt} = -2\delta^{kl}\epsilon_{lij}\omega^i \frac{dx^j}{dt}$ , depende de forma lineal de la velocidad de la partícula, y como un potencial ordinario no puede dar lugar a fuerzas que dependan de la velocidad, estas fuerzas no pueden provenir de tal potencial ordinario. Las aceleraciones puramente gravitatorias, por el contrario, sí que derivan del potencial gravitatorio.

Volviendo a la analogía con el campo electromagnético, la fuerza que este campo ejerce sobre una partícula con carga también tiene una parte que depende linealmente de la velocidad, la fuerza magnética. Las fuerzas electromagnéticas provienen tanto de un potencial escalar como de un potencial (co)vector. En el caso del electromagnetismo, el potencial será no nulo en cuanto haya un campo eléctrico y/o magnético no nulo, y eso ocurre en cualquier marco de referencia inercial. Al realizar transformaciones entre marcos inerciales, dicho potencial se transforma como un covector en el espacio-tiempo. Al considerar cambios entre marcos de referencia arbitrarios, tanto inerciales como no inerciales, la ley de transformación covectorial se mantiene.

Sin embargo, lo que sucede con las fuerzas de inercia es distinto porque dichas fuerzas solo aparecen en los marcos no inerciales. Entonces, la naturaleza matemática de los potenciales gravitatorios no puede ser un covector en el espacio-tiempo, ya que si un covector es nulo en un marco de referencia inercial, automáticamente lo será para cualquier otro marco, inercial o no.

Las aceleraciones inerciales que sufre una partícula en caída libre, relativas al MR“nI”, provienen de un objeto matemático llamado potencial inercial, que en cada marco no inercial está descrito por dos objetos  $(\tilde{U}(t, \mathbf{x}), \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}))$ , que son funciones de las coordenadas espaciales no inerciales y del tiempo. Bajo rotaciones,  $\tilde{U}(t, \mathbf{x})$  es un escalar, mientras que  $\tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x})$  es un vector. Las expresiones de dichos potenciales están dadas por

$$\begin{cases} \tilde{U}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{w}(t)\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x})^2 = \mathbf{w}(t)\mathbf{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})^2 \\ \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.40)$$

que se pueden expresar también en notación tensorial:

$$\begin{cases} \tilde{U} = \delta_{ij}\omega^i x^j - \frac{1}{2}\omega_j\omega^j(\delta_{kl}x^k x^l) + \frac{1}{2}(\omega_j x^j)^2 = \delta_{ij}x^i \ddot{a}^j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\Omega_l^i \Omega_l^j x^k x^l \\ \tilde{V}_k = \epsilon_{kij}\omega^i x^j = -\delta_{ki}\Omega_l^i x^j \end{cases} \quad (3.41)$$

El lagrangiano expresado en función de los potenciales que cumple las ecuaciones del movimiento deseadas es de la forma:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m(\tilde{U} - \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m(\tilde{U} - \tilde{V}_k v^k) \quad (3.42)$$

Para comprobarlo, habría que calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange, multiplicarlas por  $\delta^{kl}$ , contraer el índice  $l$ , y por último, sustituir las expresiones de los potenciales.

La ecuación del movimiento en función de los potenciales será:

$$\frac{d^2 x^k(t)}{dt^2} = \delta^{kl} \left( -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x^l} - \frac{\partial \tilde{V}_l}{\partial t} \right) + \delta^{kl} \left( \frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial x^l} - \frac{\partial \tilde{V}_l}{\partial x^j} \right) \frac{dx^j(t)}{dt} \quad (3.43)$$

Además, se obtiene que los vectores  $\tilde{\mathbf{g}}$  y  $\tilde{\mathbf{b}}$  en función de los potenciales son:

$$\tilde{\mathbf{g}}^k = \delta^{kl} \left( -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x^l} - \frac{\partial \tilde{V}_l}{\partial t} \right), \quad \tilde{\mathbf{b}}^k = \epsilon^{klj} \frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial x^l} \quad (3.44)$$

### 3.2.8. El potencial gravitatorio-inercial en un marco “no inercial”

En esta sección se realizará lo mismo que en la anterior pero en presencia de campo gravitatorio. Se utilizarán las ecuaciones del movimiento obtenidas en [3.34]. En este caso, los potenciales serán:

$$\begin{cases} U(t, \mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}) + \tilde{U}(t, \mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}) + \mathbf{w}(t)\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x})^2 \\ \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x} \end{cases} \quad (3.45)$$

que en notación de índices tensoriales pueden escribirse como:

$$\begin{cases} U = \varphi(t, \mathbf{x}) + \delta_{ij}\omega^i x^j - \frac{1}{2}\omega_j\omega^j(\delta_{kl}x^k x^l) + \frac{1}{2}(\omega_j x^j)^2 \\ V_k = \epsilon_{kij}\omega^i x^j \end{cases} \quad (3.46)$$

El lagrangiano en función de dichos potenciales vendrá dado por:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m(U - \mathbf{V}\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m(U - V_k v^k) \quad (3.47)$$

y actuando como en el apartado anterior se puede comprobar que a partir de dicho lagrangiano se obtienen las ecuaciones del movimiento deseadas.

La ecuación del movimiento en función de los potenciales será:

$$\frac{d^2 x^k(t)}{dt^2} = \delta^{kl} \left( -\frac{\partial U}{\partial x^l} - \frac{\partial V_l}{\partial t} \right) + \delta^{kl} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x^l} - \frac{\partial V_l}{\partial x^j} \right) \frac{dx^j(t)}{dt} \quad (3.48)$$

Por último, los términos  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{b}$ , que incluyen tanto las aceleraciones puramente gravitatorias como las inerciales, en función de los potenciales están dados por:

$$g^k = \delta^{kl} \left( -\frac{\partial U}{\partial x^l} - \frac{\partial V_l}{\partial t} \right), \quad b^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \left( \frac{\partial V_j}{\partial x^l} - \frac{\partial V_l}{\partial x^j} \right) = \epsilon^{kij} \frac{\partial V_j}{\partial x^i} \quad (3.49)$$

Por lo tanto, queda demostrado que en cada marco de referencia no inercial el conjunto de las fuerzas gravitatorias e inerciales derivan de un potencial construido por dos objetos:  $U$ , que bajo rotaciones se transforma como un escalar, y  $\mathbf{V}$ , que bajo rotaciones se transforma como un covector. Queda abierta aquí la cuestión de cómo deben comportarse estos potenciales bajo cambios entre marcos de referencia que incluyan movimiento relativo. Esta discusión, en la que no se entra en detalle, confirma que la ley de transformación de estos dos objetos no es la de un covector en el espacio-tiempo, sino que forman parte, necesariamente, de un tensor simétrico de segundo orden, dos veces covariante, cuyas componentes espacio-espacio coinciden con la métrica en cada espacio de simultaneidad.

### 3.2.9. Las fuerzas de marea en un marco “no inercial”

Si se utiliza la ecuación de caída libre en un MR“ni” para determinar la separación relativa entre una partícula test de referencia y otra partícula próxima a ella,  $\delta x^k(t) = x^k(t) - \overset{o}{x}^k(t)$ , se obtiene que la aceleración de dicha separación será:

$$\frac{d^2 \delta x^k(t)}{dt^2} \simeq \frac{\partial g^k(t, \overset{o}{x}(t))}{\partial x^l} \delta x^l(t) + \{ \dot{\Omega}_l^k - \Omega_j^k \Omega_l^j \} \delta x^l(t) + 2\Omega_l^k \frac{d\delta x^l(t)}{dt} \quad (3.50)$$

Esta ecuación se puede entender como la descripción completa de las aceleraciones de marea, tanto gravitatorias como inerciales, que aparecen en un marco no inercial según la teoría newtoniana.

Al igual que se hizo en los apartados anteriores, se puede separar la parte lineal con la velocidad de la separación de las partículas, a la que denotaremos  $B(t)$ , de los coeficientes que dependen linealmente de la separación relativa,  $-A(t, x)$ , cuyo signo negativo se toma por convenio:

$$A_l^k(t, x) := -\frac{\partial g^k(t, x)}{\partial x^l} - \{ \dot{\Omega}_l^k(t) - \Omega_j^k(t) \Omega_l^j(t) \} \quad (3.51)$$

$$B_l^k(t) := 2\Omega_l^k(t) \quad (3.52)$$

así que [3.50] expresada en términos de  $A(t, x)$  y  $B(t)$  tendrá la forma:

$$\frac{d^2 \delta x^k(t)}{dt^2} \simeq -\overset{o}{A}_l^k \delta x^l(t) + \overset{o}{B}_l^k \frac{d\delta x^l(t)}{dt} \quad (3.53)$$



Por analogía con el caso anterior, puede surgir la idea de denominar a  $A(t, x)$  y  $B(t)$  campos de marea eléctrico y magnético, respectivamente. Sin embargo, como se verá a continuación, no es la mejor opción.

Los campos  $A$  y  $B$  se pueden expresar en términos de los campos gravieléctrico,  $g$ , y gravimagnético,  $b$ :

$$A_l^k(t, x) = -\frac{\partial g^k(t, x)}{\partial x^l} \quad B_l^k(t) = \delta^{ki} \epsilon_{ilj} b^j(t) \quad (3.54)$$

donde las componentes de  $A_l^k(t, x)$  coinciden con los gradientes espaciales del campo gravieléctrico,  $g^k$ , mientras que las de  $B_l^k(t)$  son directamente el tensor dual del vector campo magnético  $b^j(t)$ .

Las aceleraciones de marea medidas desde un MR“nI” adquieren componentes adicionales a las que aparecen en un MR“I”. Dichas componentes dependen de las velocidades de separación entre ambas partículas. Esto puede tomarse como un indicio de que, en la Naturaleza, las aceleraciones de marea reales, es decir, las de la Teoría de Einstein de la Gravedad, tienen una componente gravimagnética debida únicamente al campo gravitatorio. Sin embargo, en la teoría newtoniana no se describe este comportamiento. Por lo tanto, se mantendrá la notación  $b(t)$  para el campo gravimagnético y  $B(t)$  para el objeto que resulta ser un tensor ya que, aunque en la gravitación newtoniana sean iguales, en la TEG no todo el campo gravimagnético es no inercial, así que las cosas cambiarán.

Procediendo como en los apartados anteriores se pueden desglosar  $A_l^k(t, x)$  y  $B_l^k(t)$ :

$$\begin{cases} A_l^k(t, x) := -\frac{\partial g^k(t, x)}{\partial x^l} - \{\dot{\Omega}_l^k(t) - \Omega_j^k(t)\Omega_l^j(t)\} = \mathbf{A}_l^k(t, x) + \tilde{A}_l^k(t) \\ B_l^k(t) := 2\Omega_l^k(t) = \tilde{B}_l^k(t) \end{cases} \quad (3.55)$$

En el desglose se han introducido tres objetos nuevos:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_l^k(t, x) = -\frac{\partial g^k(t, x)}{\partial x^l} \Big|_x = -\delta^{ki} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^l \partial x^i} \\ \tilde{A}_l^k(t) := -\{\dot{\Omega}_l^k(t) - \Omega_j^k(t)\Omega_l^j(t)\} \\ \tilde{B}_l^k(t) := 2\Omega_l^k(t) \end{cases} \quad (3.56)$$

Anteriormente se comprobó que  $g^k(t, x)$  no se puede determinar con exactitud. Sin embargo, esta ambigüedad no se transmite a  $\mathbf{A}_l^k(t, x)$ . Esto se debe a que el gradiente del dato de no inercialidad,  $w^k(t)$ , es nulo porque  $w^k(t)$  solo depende del tiempo. Por lo tanto, en la diferencia  $g^k(t, x) - w^k(t)$ , el único término que aporta una contribución a dicho gradiente es el campo gravitatorio,  $g^k(t, x)$ .

Actuando como en el apartado anterior, se obtiene que los campos  $A_l^k(t, x)$  y  $B_l^k(t)$  se pueden expresar en función de los potenciales  $U$  y  $V$  como

$$A_l^k(t, x) = -\delta^{ki} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^l \partial t} \right), \quad B_l^k(t) = \delta^{ki} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x^l} - \frac{\partial V_l}{\partial x^i} \right) = 2\delta^{ki} \epsilon_{ilj} \omega^j \quad (3.57)$$

Cabe destacar que las componentes  $A_l^k$  involucran derivadas segundas de los potenciales, mientras que las componentes  $B_l^k$  involucran solamente derivadas primeras. Sustituyendo y derivando, [3.57] se puede reescribir así:

$$A_l^k(t, x) = -\delta^{kl} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^l \partial x^i} - \omega^k \omega_l + \delta^{kl} (\omega_j \omega^j) - \delta^{kl} \epsilon_{ilj} \dot{\omega}^j, \quad B_l^k(t) = 2\delta^{kl} \epsilon_{ilj} \omega^j \quad (3.58)$$

Es conveniente insistir en que al calcular las componentes  $A_l^k$  a través de los gradientes espaciales del campo gravitatorio, únicamente el término  $\frac{\partial \mathbf{g}^k(t,x)}{\partial x^l}$  puede depender de las coordenadas espaciales. En el resto de sus términos solo intervienen los  $\Omega_j^k$ , que dependen exclusivamente del tiempo. Por eso se separa  $A_l^k(t, x)$  en dos términos, uno que sí que depende de las coordenadas espaciales y otro que no.

Como el campo  $\mathbf{g}$  se comporta como un vector absoluto en la transformación de un marco inercial a otro no inercial,  $\mathbf{A}$  debe ser un tensor absoluto de segundo orden, que se transformará al pasar de un MR“I” a un MR“nI” de la forma:

$$\mathbf{A}^i_j = R^i_I(t)R^J_j(t)\mathbf{A}^I_J$$

donde  $R$  involucra solamente la parte de rotación de la transformación. Entonces, como  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$  se transforma como un tensor absoluto, será fundamental en la descripción del campo gravitatorio. Es lo que se conoce como “tensor campo de marea”. [3.50] puede expresarse en términos del tensor campo de marea de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 \delta x^k(t)}{dt^2} \simeq -\mathbf{A}^k_l(t, \dot{x}(t))\delta x^l(t) + \{\dot{\Omega}_l^k - \Omega_j^k \Omega_l^j\}\delta x^l(t) + 2\Omega_l^k \frac{d\delta x^l(t)}{dt} \quad (3.59)$$

Al contrario de lo que sucedía con el campo gravitatorio al escoger un MR“nI” adecuado, en el nivel de las fuerzas de marea, el campo de marea,  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ , nunca puede anularse eligiendo un marco, sea este inercial o no. Esto se debe a que el tensor campo de marea se transforma de manera tensorial lineal, así que si es nulo en un marco concreto, lo será en todos.

### 3.2.10. Las ecuaciones de campo en un marco de referencia “no inercial”

Partiendo de las ecuaciones de campo para un marco inercial y aplicando la ley de transformación del vector campo gravitatorio, se obtiene que las ecuaciones de campo en un MR“nI” son equivalentes a las de un MR“I”:

$$-\frac{\partial \mathbf{g}^i(t, x)}{\partial x^i} = 4\pi G\rho(t, x), \quad \delta^{il}\epsilon_{jkl}\frac{\partial \mathbf{g}^j(t, x)}{\partial x^i} = 0 \quad (3.60)$$

Debido a que  $\mathbf{g}^i(t, x)$  no se puede determinar sin ambigüedad, puede parecer extraño que las ecuaciones de campo se den en términos de  $\mathbf{g}^i(t, x)$  en lugar de en términos de  $\mathbf{g}^k(t, x) - w^k(t)$ . Esto es así porque lo que interviene en las ecuaciones es el gradiente de dichas cantidades, así que  $w^k(t)$  “desaparece” de la ecuación, tal y como se dijo anteriormente. Aún así, las ecuaciones del campo gravitatorio se podrían haber escrito sustituyendo  $\mathbf{g}^i(t, x)$  por  $\mathbf{g}^k(t, x) - w^k(t)$ .

Las ecuaciones de campo [3.60] pueden expresarse en términos del potencial:

$$\nabla^2 \varphi(t, x) = 4\pi G\rho(t, x) \quad (3.61)$$

obteniendo así, al igual que en un marco inercial, la ecuación de Poisson, pero ahora relativa a las coordenadas espaciales del marco no inercial.

Derivando  $\mathbf{g}^k(t, x) - w^k(t)$  y realizando las sustituciones oportunas, se obtiene la siguiente relación:

$$-\frac{\partial (\mathbf{g}^k(t, x) - w^k)}{\partial x^l} = -\frac{\partial \mathbf{g}^k(t, x)}{\partial x^l} = \mathbf{A}^k_l(t, x) \quad (3.62)$$

Por lo tanto, sustituyendo, se obtienen las ecuaciones de campo en función del campo de marea para un marco no inercial:

$$\mathbf{A}^k_k(t, x) = 4\pi G\rho(t, x), \quad \mathbf{A}^{ij} = \mathbf{A}^{ji} \quad (3.63)$$

Queda demostrado que la ecuación que relaciona las fuentes del campo,  $\rho(t, x)$ , con el campo gravitatorio descrito por el campo de marea,  $\mathbf{A}_j^i$ , tiene la misma forma en cualquier marco de referencia, inercial o no inercial. [3.63] es la precursora más directa de las ecuaciones de Einstein, que describen el campo gravitatorio de acuerdo con la teoría de la Relatividad General desde el punto de vista de un observador arbitrario.

Se ha visto que, aunque las ecuaciones de caída libre y de desviación del campo de marea no parecen ser iguales en un MR“I” y en un MR“nl”, se pueden escribir de forma equivalente para todo tipo de marcos. Al expresarlas de esta manera, aparece la estructura geométrica del espacio-tiempo newtoniano, una conexión, descrita por la formulación de Newton-Cartan. En esta formulación el movimiento de caída libre en el campo gravitatorio sigue una autoparalela de esta conexión en el Espacio-Tiempo newtoniano con aceleración absoluta nula.

Por último, se pueden expresar las ecuaciones de campo en términos del vector campo gravitatorio. Para ello, se deben tener en cuenta los términos “de Euler” y centrífugo, y contrayendo en los índices  $k$ ,  $i$  del término  $\{\dot{\Omega}_i^k(t) - \Omega_j^k(t)\Omega_i^j(t)\}$ , se llega a  $-\Omega_j^k(t)\Omega_k^j(t) = 2\omega_j\omega^j$ , obteniendo así:

$$-\frac{\partial g^k(t, x(t))}{\partial x^k} = 4\pi G\rho(t, x) - 2\omega_j\omega^j$$

### 3.3. Describiendo la gravitación en un marco de referencia no rotante y en caída libre

Las ecuaciones obtenidas hasta ahora toman una forma más sencilla y clara si se utilizan marcos de referencia asociados a un observador en caída libre y no rotante (MRclnr). Estos marcos, al contrario que los que se utilizan habitualmente en Mecánica Clásica, son locales, es decir, describen una pequeña región del espacio durante un periodo de tiempo finito. Su origen está ligado al centro de masas de un objeto en caída libre en un marco no rotante y son esenciales en la teoría relativista de la gravitación.

Las dos exigencias que se han impuesto para describir este tipo de marcos se pueden comprobar observacionalmente. El origen del marco estará en caída libre siempre y cuando tres acelerómetros mutuamente perpendiculares situados en dicho origen marquen cero. Además, para comprobar que el marco es no rotante, basta con que tres girómetros mutuamente perpendiculares marquen también cero.

El movimiento del centro de masas del objeto estará descrito por  $\frac{d^2 \overset{\circ}{X}^I(t)}{dt^2} = g^I(t, \overset{\circ}{X}(t))$ , donde  $\overset{\circ}{X}(t)$  describe la posición del centro de masas del objeto y se supone conocido. Las coordenadas medidas se denotan con un índice minúsculo con un ángulo circunflejo.

La condición de ser no rotante respecto a un marco de referencia inercial implica, debido a que la rotación en el espacio-tiempo newtoniano tiene carácter absoluto, que la rotación  $R^i_I(t)$  es independiente del tiempo. Reorientando el eje de coordenadas de tal forma que la rotación sea la identidad,  $R^i_I = \delta^i_I$ , la transformación entre las coordenadas newtonianas,  $x^I$ , y las del MRclnr,  $x^{\hat{i}}$ , será de la forma

$$x^{\hat{i}} = \delta^{\hat{i}}_I(x^I - \overset{\circ}{X}^I(t)) \quad (3.64)$$

Entonces, como la velocidad angular del sistema “no inercial”,  $\omega(t, x^{\hat{i}})$ , es nula, la ecuación del movimiento en este sistema será, teniendo en cuenta las leyes de transformación tensoriales:

$$\frac{d^2 x^{\hat{k}}(t)}{dt^2} = g^{\hat{k}}(t, x(t)) - w^{\hat{k}}(t) = g^{\hat{k}}(t, x(t)) - g^{\hat{k}}(t, x = 0) \quad (3.65)$$

Mientras que en el MRclnr  $g^{\hat{k}}(t, x(t))$  es función del tiempo coordinado y de la posición espacial,  $w^{\hat{k}}(t)$ , como es la aceleración de caída del objeto, depende únicamente del tiempo.

Sobre la trayectoria completa de la partícula de referencia, que en el MRclnr es  $x^{\hat{k}}(t) = 0$ , la fuerza gravitatoria “real”,  $g^{\hat{k}}(x, t)$ , se cancela con la inercia de arrastre,  $w^{\hat{k}}(t)$ , dando lugar a un “campo gravie-léctrico” que se anula durante toda la trayectoria de la partícula. Por lo tanto,  $x^{\hat{k}}(t) = 0$  para  $\hat{k} = 1, 2, 3$ , es solución de la ecuación del movimiento. Sin embargo, las coordenadas de otra partícula cercana que también se encuentre en caída libre no serán constantes a lo largo del tiempo. Es decir,  $x^{\hat{k}}(t) = 0$  es una solución de la ecuación que corresponde a un movimiento de caída libre, mientras que  $x^{\hat{k}}(t) = y^{\hat{k}}$ , donde  $y^{\hat{k}}$  es una constante no nula, no es solución.

Para verlo mejor hay que fijarse en la ecuación del movimiento en términos del tensor de marea:

$$\frac{d^2 x^{\hat{k}}(t)}{dt^2} \simeq -A^{\hat{o}\hat{k}}_{\hat{i}}(t, x(t))x^{\hat{i}}(t); \quad A^{\hat{k}}_{\hat{i}}(t, x) = -\frac{\partial g^{\hat{k}}(t, x(t))}{\partial x^{\hat{i}}} = \mathbf{A}^{\hat{k}}_{\hat{i}}(t, x) \quad (3.66)$$

donde se ve que si  $x^{\hat{k}}(t) = y^{\hat{k}}$  donde  $y^{\hat{k}} = cte \neq 0$  es solución o no de la ecuación de caída libre depende de si el campo de marea es nulo o no.

Si el campo de marea es nulo, entonces  $x^{\hat{k}}(t) = y^{\hat{k}}$  donde  $y^{\hat{k}} = cte \neq 0$  será solución de la ecuación. La separación entre diferentes partículas cercanas en caída libre se mantiene constante, es decir, la aceleración de la separación entre ellas es nula. Esto es lo que sucede en ausencia de gravitación.

Sin embargo, si el campo de marea  $\mathbf{A}$  es no nulo, las partículas inicialmente cercanas y en reposo respecto a la partícula de referencia no van a permanecer en reposo relativo respecto a ella:  $\delta x^{\hat{k}}(t) = y^{\hat{k}}$  con  $y^{\hat{k}} = cte \neq 0$  ya no es solución. Esto es lo que sucede en presencia de gravitación.

La anulación / no anulación del campo de marea  $\mathbf{A}$  es la auténtica firma de la ausencia / presencia de campo gravitatorio.

En un marco de referencia en caída libre y no rotante asociado a un objeto que se toma como fiducial, el movimiento de otras partículas cercanas que también se encuentran en caída libre en el campo gravitatorio resulta ser muy parecido al movimiento ideal, visto en un marco de referencia “inercial” en ausencia de gravitación, pero nunca resulta ser exactamente igual, porque las aceleraciones, tal y como se ha visto, solo se anulan en el origen del marco de referencia, es decir, sobre el centro de masas del objeto de referencia. Como consecuencia, a estos marcos de referencia se los conoce, en la nomenclatura “post-1900”, como marcos de referencia localmente inerciales (MRLI). Por desgracia, esta terminología puede llevar a confusión, ya que en el sentido “pre-1900” estos marcos no son inerciales.



## Capítulo 4

# La formulación geométrica de Newton-Cartan

Como se ha expuesto anteriormente, a partir de 1923, con el trabajo de E. Cartan, se comprobó que la gravitación newtoniana admite una interpretación como teoría de curvatura, es decir, la gravedad no aparece como una fuerza, sino como una manifestación de que el espacio-tiempo es curvo. Las formulaciones convencional y geométrica de la gravitación newtoniana son muy diferentes formalmente, pero son equivalentes observacionalmente. En este capítulo se van a introducir las estructuras básicas de la formulación geométrica de Newton-Cartan, tomando como punto de partida la descripción detallada de la formulación convencional hecha en el capítulo anterior.

### 4.1. Conexiones y tensores de curvatura asociados

El objetivo de este apartado es reinterpretar las ecuaciones presentadas en la formulación convencional en términos de objetos geométricos: conexiones y sus respectivas curvaturas. Para ello, se comienza recordando el concepto de curvatura.

Para describir los espacios curvos se utiliza la geometría Riemanniana. Esta geometría fue formulada por Gauss para el caso bidimensional y fue extendida posteriormente por Riemann para espacios de dimensión arbitraria. Las propiedades del espacio a pequeñas escalas se parecen a la geometría euclídea, pero no son exactamente iguales. Estas diferencias se deben a la curvatura, así que cuanto más difiera el espacio de la geometría euclídea, mayor será su curvatura.

Para el caso bidimensional, la curvatura en cada punto se define mediante un único número, conocido como curvatura gaussiana. Si la curvatura cambia de un punto a otro, se denomina curvatura variable, sin embargo, si no lo hace, se denomina curvatura constante. Además, puede ser positiva, como en una esfera, o negativa, como en un plano de Lobachewski.

Para dimensiones superiores, al haber infinitas direcciones bidimensionales para cada punto, habrá infinitas curvaturas seccionales relacionadas entre sí. Gracias a estas relaciones, la curvatura se puede expresar en cada punto del espacio mediante el tensor de curvatura, caracterizado por un número finito de valores en cada punto.

Cabe preguntarse si el espacio físico es curvo. Para comprobarlo, Gauss midió la suma de los tres ángulos de un triángulo (si hay curvatura la suma de los ángulos es diferente de  $180^\circ$ ) formado por tres

montañas y llegó a la conclusión de que, o la curvatura del espacio es nula, o es muy pequeña. Lobachewski llegó a la misma conclusión midiendo el paralelaje de una estrella. Hoy en día, gracias a la gravitación de Einstein, se sabe que el espacio-tiempo es curvo. Sin embargo, en la mayoría de situaciones esta curvatura es extremadamente pequeña.

Aunque este hecho tardó más de 50 años en quedar claramente establecido, es la conexión, y no la métrica, el objeto matemático que puede tener curvatura. En parte, se tardó tanto en darse cuenta de ello porque la métrica de los espacios riemannianos es no degenerada, así que hay una única conexión asociada a ella, por lo que la métrica es suficiente para describir la geometría de dichos espacios. Sin embargo, cuando la métrica es degenerada, hay varias conexiones asociadas a ella y se hace imprescindible describir la curvatura mediante la conexión.

La curvatura mide la aceleración de la separación relativa entre geodésicas. En una superficie curva con geometría localmente euclídea y métrica definida positiva, si se mide el progreso a lo largo de la geodésica de referencia por la longitud recorrida  $l$ , la aceleración de dicha separación,  $\delta x(l)$ , será:

$$\frac{d^2\delta x(l)}{dl^2} \simeq -K\delta x(l) \quad (4.1)$$

siendo  $K$  la curvatura. Se puede ver el parecido entre [4.1] y las ecuaciones que se obtuvieron para la aceleración de la separación relativa de dos partículas en un campo gravitatorio, [3.17] y [3.18].

Para poder explicar el principio de inercia es necesaria una conexión, que permite realizar una formulación matemática completa del espacio-tiempo. La formulación geométrica elimina el concepto confuso de Espacio Absoluto y lo sustituye por una conexión en el espacio-tiempo, que es un elemento esencial tanto en la teoría de la gravitación newtoniana como en la de Einstein. Las fuerzas de inercia, que son nulas o no dependiendo del marco de referencia, reflejan las propiedades de transformación de la conexión, que también puede ser nula o no dependiendo de las coordenadas con las que se describa, debido a que su ley de transformación no es lineal.

Conviene insistir en que en la teoría de Einstein de la gravedad la conexión cuyas geodésicas son los movimientos de caída libre es también el objeto esencial. La diferencia con la teoría de Newton-Cartan es que en esta última la conexión no está determinada por las dos estructuras métricas degeneradas, lo que deriva en que la conexión pueda no ser única, mientras que en la teoría de Einstein la conexión es única y está determinada por la métrica. En la teoría newtoniana las fuerzas de inercia están descritas por una conexión, llamada conexión inercial, pero hay otra conexión que describe conjuntamente las fuerzas de inercia y las fuerzas gravitatorias, conocida como conexión gravitatoria o de caída libre.

Tal y como se explicó anteriormente, por el principio de equivalencia de Galileo, la conexión inercial, al igual que el espacio absoluto, es inobservable. Sin embargo, la conexión gravitatorio-inercial, al describir conjuntamente los efectos gravitatorios e inerciales, sí que será medible mediante un sistema de tres acelerómetros y tres girómetros. Con estos instrumentos se podrá comprobar si el movimiento de una partícula sigue o no una autoparalela de la conexión gravitatorio-inercial.

En ambas formulaciones el espacio-tiempo newtoniano es una variedad de cuatro dimensiones. Por lo tanto, los sucesos están etiquetados mediante cuatro coordenadas,  $x^\mu$ , con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . El índice 0 se reserva para la coordenada temporal y el resto para las espaciales. La duración temporal y la distancia espacial se codifican mediante dos objetos: la métrica temporal  $t_{\mu\nu}$  y la (co)métrica espacial  $h^{\mu\nu}$ , ortogonales entre sí. Las dos métricas están degeneradas. Además,  $t_{\mu\nu}$  solo define las duraciones temporales y  $h^{\mu\nu}$  solo define las distancias espaciales.

$$t_{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad h^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (4.2)$$

Un vector del espacio-tiempo será de género tiempo futuro/pasado si  $t_\mu w^\mu > 0$  /  $t_\mu w^\mu < 0$ . Si  $t_\mu w^\mu = 0$ ,  $w^\mu$  es un vector de género espacio.

Es importante insistir en que el objeto  $h^{\mu\nu}$ , que es un tensor 2 veces contravariante y degenerado, no puede entenderse como una métrica definida en todo el espacio-tiempo. La cantidad que juega el papel de métrica espacial solo está definida en cada subvariedad de simultaneidad  $S_t$ , especificada por un determinado valor de  $t$ .

A partir de la elección de  $t_{\mu\nu}$  y  $h^{\mu\nu}$  se derivan dos conclusiones importantes. La primera es que  $t_{\mu\nu}$  incorpora el tiempo absoluto característico de la física newtoniana y define una coordenada temporal privilegiada, que es la misma para marcos inerciales y no inerciales. La segunda es que  $h^{\mu\nu}$  está asociada con un espacio euclideo.

#### 4.1.1. La conexión inercial

Para poder describir de forma completa el espacio-tiempo newtoniano es necesaria, además de la métrica temporal y la cométrica espacial, una conexión compatible con ambas métricas, pero que no está determinada totalmente por ellas.

Al intentar describir el movimiento de una partícula desde un marco de referencia no inercial en el sentido pre-1900 es necesario introducir unas fuerzas de inercia, que describen el movimiento del marco respecto al espacio absoluto.

En la formulación geométrica de la gravitación newtoniana el principio de inercia es de la siguiente manera: “En el espacio-tiempo hay una conexión, denominada conexión inercial, cuyas autoparalelas son exactamente los movimientos inerciales ideales cuando el parámetro afín a lo largo de estas autoparalelas es el tiempo absoluto”.

Las autoparalelas de una conexión son las líneas cuya descripción paramétrica en términos del parámetro afín  $\tau$  satisface la ecuación

$$\frac{D}{D\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (4.3)$$

siendo  $D$  la derivada covariante, definida para un vector arbitrario  $\zeta^\mu(\tau)$  a lo largo de esa misma curva como

$$\frac{D\zeta^\mu(\tau)}{D\tau} = \frac{d\zeta^\mu(\tau)}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \zeta^\alpha(\tau) \frac{dx^\beta}{d\tau} \quad (4.4)$$



donde  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  son los coeficientes de la conexión y se transforman de acuerdo con las leyes de transformación de los símbolos de Christoffel.

Para encontrar una conexión cuyas autoparalelas sean exactamente los movimientos inerciales ideales, se debe definir la conexión  $\tilde{\Gamma}$ , cuyos coeficientes son todos nulos en un marco de referencia inercial:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}^0_{00}(t, x) = 0, & \tilde{\Gamma}^0_{j0}(t, x) = \tilde{\Gamma}^0_{0j}(t, x) = 0, & \tilde{\Gamma}^0_{JK}(t, x) = 0 \\ \tilde{\Gamma}^I_{00}(t, x) = 0, & \tilde{\Gamma}^I_{j0}(t, x) = \tilde{\Gamma}^I_{0j}(t, x) = 0, & \tilde{\Gamma}^I_{JK}(t, x) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Si se introduce  $\tilde{\Gamma}$  en [4.4] y [4.3] se llega a [2.1] para las coordenadas espaciales, que es la ecuación del movimiento en un marco inercial para una partícula libre. Además, para la coordenada temporal se obtiene  $\frac{d^2x^0}{dt^2} = 0$  y resolviendo la ecuación se obtiene que  $x^0 = t$ , es decir, que la coordenada temporal coincide con el tiempo absoluto.

Aplicando la ley de transformación de la conexión, se obtiene que para un marco de referencia no inercial todas las componentes de la conexión son nulas excepto

$$\tilde{\Gamma}^i_{00} = -w^i(t) + \{\dot{\Omega}^i_l(t) - \Omega^i_j(t)\Omega^j_l(t)\}x^l, \quad \tilde{\Gamma}^i_{0j} = \tilde{\Gamma}^i_{j0} = -\Omega^i_j(t) \quad (4.6)$$

La curvatura de una conexión viene dada por la siguiente fórmula:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \quad (4.7)$$

siendo  $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$  el tensor de curvatura.

Sustituyendo los valores de la conexión inercial en [4.7], se obtiene que la curvatura de la conexión  $\tilde{\Gamma}$  se anula, así que  $\tilde{\Gamma}$  es una conexión llana. Como  $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$  es un tensor, si es nulo en un sistema de coordenadas determinado, lo será en todos.

En resumen, con la conexión inercial el espacio-tiempo newtoniano tiene curvatura nula. En esa interpretación el movimiento en un campo gravitatorio debe verse como una fuerza externa.

#### 4.1.2. La conexión gravitatoria

Debido al principio de Galileo, por el que se vio que no se pueden separar de forma absoluta las fuerzas inerciales de las gravitatorias, la conexión inercial no es observable. Por eso es conveniente introducir la conexión gravitatoria o de caída libre, que describe conjuntamente las fuerzas gravitatorias e inerciales.

Se pueden identificar los movimientos en caída libre en un campo gravitatorio con las líneas autoparalelas de una conexión  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  con el tiempo absoluto como parámetro afín. Además, como el hecho de que una curva sea autoparalela de una conexión es una característica intrínseca, esta identificación es independiente del marco de referencia. Por lo tanto, es suficiente con realizar el análisis para un marco inercial, ya que el resultado en un marco no inercial será automáticamente correcto.

Para definir la conexión, hay que relacionar la ecuación del movimiento de un marco inercial en presencia de un campo gravitatorio,  $\frac{d^2x^I(t)}{dt^2} = g^I$ , con la ecuación que describe las autoparalelas de una

conexión, [4.3]. Así se obtiene una conexión con todas las componentes nulas excepto  $\Gamma^I_{00}(x, t) = -\mathbf{g}^I(x, t)$ :

$$\begin{cases} \Gamma^0_{00}(t, x) = 0, & \Gamma^0_{J0}(t, x) = \Gamma^0_{0J}(t, x) = 0, & \Gamma^0_{JK}(t, x) = 0 \\ \Gamma^I_{00}(t, x) = -\mathbf{g}^I(x, t), & \Gamma^I_{J0}(t, x) = \Gamma^I_{0J}(t, x) = 0, & \Gamma^I_{JK}(t, x) = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

que es la conocida conexión gravitatoria,  $\Gamma$ , también llamada conexión gravitatorio-inercial.

Sustituyendo en [4.7] se obtiene que todas las componentes del tensor de curvatura son nulas excepto

$$R^I_{0M0} = -\frac{\partial \Gamma^I_{00}}{\partial x^M} = -\frac{\partial \mathbf{g}^I(t, x)}{\partial x^M} = \delta^{IJ} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^M \partial x^J} \quad (4.9)$$

en coordenadas cartesianas.

Las componentes puramente espaciales del tensor de curvatura de la conexión gravitatorio-inercial se anulan. Esto concuerda con la suposición que se hizo al principio de que el 3-espacio de la teoría newtoniana es plano.

## 4.2. El tensor de curvatura y el campo de marea

Comparando [3.62] y [4.9], se puede escribir el tensor de curvatura en términos del campo de marea:

$$A^I_M \equiv R^I_{0M0} \quad (4.10)$$

así que el tensor tridimensional campo de marea  $A^I_M$  se identifica con las únicas componentes no nulas del tensor cuadrimensional de curvatura de la conexión gravitatorio-inercial del espacio-tiempo newtoniano,  $R^I_{0M0}$ .

En este apartado se va a analizar el comportamiento del campo de marea y su relación con el tensor de curvatura. La separación de dos geodésicas próximas  $\tau \rightarrow x^\mu(\tau)$  y  $\tau \rightarrow x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$  está dada por la siguiente ecuación de desviación geodésica:

$$\frac{D^2 \delta x^\mu(\tau)}{D\tau^2} + R^\mu_{\nu\alpha\beta} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \simeq 0 \quad (4.11)$$

A continuación, se reduce [4.11] de 4 dimensiones a 3+1, es decir, se separa la componente temporal de las espaciales. De la componente temporal se obtiene una identidad, ya que  $\delta x^0 = 0$  y  $R^0_{\nu\alpha\beta} = 0$  también. Para las componentes espaciales, teniendo en cuenta que las derivadas covariantes para  $\delta x^I$  respecto al tiempo están dadas por las derivadas ordinarias y que solo los elementos  $R^I_{0J0}$  y  $R^I_{00J}$  del tensor de Riemann pueden ser no nulos, se obtiene que

$$\frac{d^2 \delta x^I(t)}{dt^2} + R^I_{0J0} \delta x^J(t) \simeq 0 \quad (4.12)$$

y comparando otra vez [4.12] con la ecuación obtenida para el campo de marea se vuelve a obtener la relación

$$A^I_J \leftrightarrow R^I_{0J0} \quad (4.13)$$

Se ha demostrado que el campo de marea coincide con las componentes no nulas del tensor de curvatura asociado a la conexión gravitatorio-inercial.

### 4.3. Ecuaciones de campo en términos del tensor de Ricci

Para terminar, se van a reformular las ecuaciones de campo [3.63]. Teniendo en cuenta la relación [4.13], estas ecuaciones se pueden reescribir de la forma:

$$R^I{}_{0I0}(t, x) = R^1{}_{010} + R^2{}_{020} + R^3{}_{030} = 4\pi G\rho(t, x), \quad \delta^{JK} R^I{}_{0J0} = \delta^{IJ} R^K{}_{0J0} \quad (4.14)$$

El tensor de Ricci asociado al tensor de curvatura se define como

$$R_{\nu\beta} := R^{\mu}{}_{\nu\mu\beta} \quad (4.15)$$

Entonces, las ecuaciones de campo en términos del tensor de Ricci están dadas por

$$R_{00} = 4\pi G\rho(t, x), \quad R^I{}_{0K0} = R^K{}_{0I0} \quad (4.16)$$

siendo las demás componentes de  $R_{\mu\nu}$  nulas.

Con esto queda claro el paso de la formulación convencional de la gravitación newtoniana, que se ha descrito con detalle en el Capítulo 3, a una reinterpretación geométrica en la que el campo gravitatorio newtoniano pasa a ser una manifestación de la curvatura de un espacio-tiempo newtoniano, que físicamente se identifica con el campo de marea. Queda así claramente establecido que la auténtica firma del campo gravitatorio no es la presencia de un valor no nulo del vector intensidad del campo gravitatorio, sino un valor no nulo del campo de marea.

## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo se ha presentado la Teoría Convencional de la Gravitación Newtoniana de una manera que facilite el paso a la llamada teoría de Newton-Cartan, también conocida como formulación geométrica. Además, se ha procurado mostrar que esta interpretación se puede entender como la presencia de una curvatura en el espacio-tiempo newtoniano cuyas únicas componentes no nulas coinciden con el campo de marea. El objeto matemático clave para describir esta curvatura es una conexión, que está estrechamente relacionada con la ley de la inercia.

Para ello, en el primer capítulo se han dado los motivos a favor de este estudio y se ha realizado una recapitulación de todos los hitos históricos en la reformulación de la teoría newtoniana de la gravedad como una teoría de curvatura del espacio-tiempo no relativista, iniciada por Cartan y que ha proseguido a lo largo del último siglo.

En el segundo capítulo se han estudiado los distintos marcos de referencia. En la teoría newtoniana, debido al concepto de Espacio Absoluto, la existencia de marcos de referencia inerciales y no inerciales representa un problema conceptual añadido. Se han expuesto los distintos tipos de marcos y las coordenadas asociadas a ellos.

En el tercer capítulo se ha realizado un desarrollo matemático de la teoría convencional de Newton de la gravedad. Se ha partido de conceptos básicos como el campo y el potencial gravitatorios para llegar al campo de marea, que no suele estudiarse a niveles elementales. Este desarrollo se ha efectuado de manera muy completa y con un alto nivel de detalle, dejando así debidamente enunciadas todas las ideas y relaciones que luego permitirán el paso a la formulación geométrica de Newton-Cartan.

Por último, en el cuarto capítulo se han reformulado geoméricamente las relaciones más importantes obtenidas en el tercer capítulo. Esta reformulación permite acceder de manera sencilla a la formulación de Newton-Cartan, lo que realmente es el objetivo esencial del trabajo.



# Bibliografía

- [1] Santander, Mariano, “La descripción newtoniana del campo gravitatorio”, *Universidad de Valladolid*
- [2] Santander, Mariano, “La interpretación geométrica de la gravitación newtoniana como curvatura del espacio-tiempo (Gravitación de Newton-Cartan)”, *Universidad de Valladolid*
- [3] <http://www.ugr.es/jillana/SR/sr9.pdf>
- [4] <http://www.laizquierdadiario.com/Un-siglo-de-relatividad-general>
- [5] Trautman, Andrzej (1966), “Comparison of Newtonian and Relativistic Theories of Space-Time”, *Perspectives in Geometry and Relativity, Essays in honor of V. Hlavat*, 413-425
- [6] Havas, Peter (1964), “Four-Dimensional Formulations of Newtonian Mechanics and Their Relation to the Special and the General Theory of Relativity”, *Reviews of Modern Physics, October 1964*, 938-965
- [7] Andringa, Roel (2016), “Newton-Cartan gravity revisited”, *Rijksuniversiteit Groningen*
- [8] Bohr, Niels (1920), “Über die Serienspektren der Elemente”, *Zeitschrift für Physik*, vol. 2, 423-469
- [9] Kretschmann, Erich (1917), *Ann. Phys.* 53, 575-614
- [10] Cartan, Elie (1923) “Sur les Variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (suite)”, *Ann. Ecole Norm. Sup.* 40, 325-412
- [11] Ruede, C. y Straumann, N. (1997), “On Newton-Cartan cosmology” *Helv. Phys. Acta* 70
- [12] Brauer U., Rendall A. y Reula O. (1994), “The Cosmic no hair theorem and the nonlinear stability of homogeneous Newtonian cosmological models”, *Class. Quant. Grav.* 11 2283
- [13] Balasubramanian, K. y McGreevy, J. (2008) *Phys. Rev. Lett.* 101
- [14] Goldberger, W. D. (2009), *Journal of High Energy Physics* 0903
- [15] Feynman, Richard Phillips (1965), *The Character of Physical Law*
- [16] Andringa, R.; Bergshoeff, E. A.; Panda, S. y Roo, M. de (2011), “Newtonian Gravity and the Bargmann Algebra”, *Class. Quant. Grav.* 28
- [17] Andringa, R., Bergshoeff, E. A., Rosseel, J. y Sezgin, E. (2013), “3D NewtonCartan supergravity” *Class. Quant. Grav.* 30
- [18] Bergshoeff, Eric A.; Gomis, Jaume; Rossel, Jan; Simsek, Ceyda y Yan, Ziqi (2019), “String Theory and String Newton-Cartan Geometry” <http://arxiv.org/abs/1907.10668v1>

- [19] Leihkauf, H. (1989), “On Newton-Cartan-Theory”, *Annalen der Physik 7. Folge, Band 46, Heft 4*, 312-314
- [20] Morand, Kevin (2014) “Symétries nonrelativistes et gravité de Newton-Cartan.” *Physique des Hautes Energies - Théorie [hep-th]. Laboratoire de mathématiques et physique théorique; Université François Rabelais*
- [21] Rodriguez, Leo; St. Germaine-Fuller, James y Wickramasekara, Sujeev (2014), “Newton-Cartan Gravity in Noninertial Reference Frames”, <http://arxiv.org/abs/1412.8655v1>
- [22] Rüede, Christian y Straumann, Norbert (1996), “On Newton-Cartan Cosmology”, *Institute of Theoretical Physics, University of Zürich*
- [23] <https://www.physicsforums.com/insights/revival-newton-cartan-theory/>
- [24] Duval, C. y Künzle, H. P. (1984), “Minimal Gravitational Coupling in the Newtonian Theory and the Covariant Schrödinger Equation”, *General Relativity and Gravitation, Vol. 16, No. 4, 1984*
- [25] Costa, L. Filipe y Natário, José (2016), “The Coriolis field”, *American Journal of Physics 84, 388 (2016)*
- [26] Geracie, Michael; Prabhu, Kartik y Roberts, Matthew M. (2015), “Curved non-relativistic spacetimes, Newtonian gravitation and massive matter”, *J. Math. Phys. 56, 103505 (2015)*
- [27] Geracie, Michael; Prabhu, Kartik y Roberts, Matthew M. (2015), “Fields and fluids on curved non-relativistic spacetimes”, <http://arxiv.org/abs/1503.02680>
- [28] Weatherall, James Owen (2017), “Classical Spacetime Structure”, *arXiv:1707.05887v1*
- [29] <https://culturacientifica.com/2014/03/11/del-espacio-y-el-tiempo/cubo-de-newton/>