



Universidad de Valladolid

FACULTAD EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL
Departamento Didáctica de la Matemática

TRABAJO FIN DE GRADO:

NUMICON COMO MATERIAL MANIPULATIVO
EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE FRACCIONES

2021/2022

Presentado por Erica MOTREL LÁZARO
para optar al Grado de Educación Primaria

Tutelado por D^o José Roberto ARIAS GARCÍA

Índice de Contenidos

1. RESUMEN	4
2. INTRODUCCIÓN	6
2.1. JUSTIFICACIÓN	6
2.2. APRENDER MATEMÁTICAS SINTIENDO Y JUGANDO	6
2.3. OBJETIVOS Y ALCANCE	8
3. MARCO TEÓRICO.....	9
3.1. LAS FRACCIONES Y SU IMPORTANCIA	9
3.2. TIPOS DE FRACCIONES	10
3.3. OPERACIONES CON FRACCIONES.....	11
3.4. DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES	11
3.4.1. Dificultades en la Comprensión del Concepto de Fracción	12
3.4.2. Dificultades en las Operaciones con Fracciones.....	13
3.5. MÉTODOS DE ENSEÑANZA DE FRACCIONES	14
3.5.1. El Tangram	14
3.5.2. La Metodología Montessori.....	15
3.6. EL MÉTODO NUMICON	16
4. PROPUESTA METODOLÓGICA	21
4.1. OBJETIVOS.....	21
4.2. CONSTRUCCIÓN DE NUMICON.....	22
4.3. INSTRODUCCIÓN DE NUMICON A LOS ALUMNOS	23
4.4. SESIONES DE ACTIVIDADES DE FRACCIONES	25
5. CONCLUSIONES.....	42
6. BIBLIOGRAFÍA.....	44

Índice de Figuras

Figura 1. Fracción $\frac{1}{2}$ con el Modelo de Áreas.....	12
Figura 2. Fracción $\frac{3}{8}$ con el Modelo de los Conjuntos Discretos.....	12
Figura 3. Fracción $\frac{2}{5}$ con el Modelo de la Recta Numérica.....	13
Figura 4. Valor en Fracción de cada Figura del Tangram.....	15
Figura 5. Círculos de Fracciones Montessori.....	15
Figura 6. Formas Numicon Ordenadas Ascendentemente.....	17
Figura 7. Material Numicon.....	18
Figura 8. Porcentaje del Grupo 1 y del Grupo 2 en cada rango del test I Can Do Maths.....	19
Figura 9. Dado con Fracciones en las Caras.....	22
Figura 10. Dado Convencional.....	22
Figura 11. Fichas Numicon del 1 al 10 con Tapones.....	23
Figura 12. Regletas de Fracciones entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{12}$	23
Figura 13. Estructura Básica de las Sesiones de Actividades Numicon.....	25
Figura 14. Esquema de Actividades de Fracciones con Numicon.....	26

1. RESUMEN

El presente trabajo desarrolla una propuesta de intervención en el aula utilizando un método didáctico basado en el material manipulativo Numicon para enseñar fracciones a los alumnos de primaria. Teniendo en cuenta algunas aportaciones de la literatura matemática. Se centra en la explicación de tres bloques fundamentales. El primero el concepto de fracción, diferenciar entre numerador o “partes tomadas” y denominador o “todo dividido”, esta parte es la que genera más dificultades entre los alumnos. A continuación, trabajamos los tipos de fracciones haciendo hincapié en impropias (números mixtos) e irreducibles. Y como tercer concepto, seguiremos profundizando en las fracciones mediante las operaciones; incluyendo la relación entre decimales y porcentajes. Para enseñar estos conceptos, el paso inicial va a consistir en desarrollar el material Numicon con elementos reciclados; elaborando los dados, las regletas de cartón y las formas Numicon del 1 al 10 con tapones de botellas. Lo siguiente será realizar una sesión en el aula para introducir el trabajo más básico con el material manipulativo, es decir; contar, ordenar, hacer patrones y operaciones sencillas con Numicon. Ya familiarizados con el material, se llevarán a cabo dos actividades por sesión en la clase de matemáticas de cada punto del temario. Y finalmente, se reforzará lo aprendido con más tareas que fomenten la participación, el trabajo en equipo, la creatividad y la necesidad de los niños de asociar desde la educación primaria las fracciones a su vida cotidiana.

Palabras clave: fracción, primaria, método didáctico, Numicon.

1. ABSTRACT

The present work develops a proposal for intervention in the classroom using a didactic method based on the Numicon manipulative material to teach fractions to primary school students. Taking into account some contributions of mathematical literature. It focuses on the explanation of three fundamental blocks. The first is the concept of fraction, differentiating between the numerator or “parts taken” and the denominator or “everything divided”, this part is the one that generates more difficulties among students. Next, we work on the types of fractions, emphasizing improper (mixed numbers) and irreducible. And as a third concept, we will continue to delve into fractions through operations; including relationship with decimals and percentages. To teach these concepts, the initial step will be to develop the Numicon material with recycled elements; making the dice, the cardboard strips and the Numicon shapes from 1 to 10 with bottle caps. The next thing will be to hold a session in the classroom to introduce the most basic word with the manipulative material, that is; counting, ordering, patterning and simple operations with Numicon. Once familiar with the material, two activities per session will be carried out in the math class for each point of the agenda. And finally, what has been learned will be reinforced with more tasks that encourage participation, teamwork, creativity and the need for children to associate fractions with their daily lives from primary education.

Key Words: fraction, primary, teaching methods, Numicon.

2. INTRODUCCIÓN

2.1. JUSTIFICACIÓN

Teniendo en cuenta las competencias que aparecen en el apartado Fin de Grado de la página de la Facultad de Educación de la Universidad de Valladolid, pretendo llevar a cabo una eficaz propuesta práctica de la enseñanza y aprendizaje de fracciones en el área de matemáticas de Educación Primaria y pudiendo cooperar con otras áreas de estudio. Para ello, he reunido una serie de información teórica, que considero esencial y que permite el estudio, reflexión y la adecuada praxis educativa de manera individual y grupal; fomentando el respeto hacia las ideas propias y de los demás y el aprendizaje continuo. También he tenido en cuenta el compromiso y la toma de conciencia con el respeto hacia el medio ambiente dando especial importancia a la tarea de reciclar.

Tanto en la parte teórica como en la propuesta metodológica he tenido presente incluir la terminología educativa apropiada. También he considerado las características psicológicas y pedagógicas del alumnado en las diferentes etapas del sistema educativo, y por este motivo, he presentado las actividades en orden ascendente de dificultad; empleando como técnica de enseñanza y aprendizaje la construcción y adecuada utilización de materiales manipulativos como son las regletas y las fichas Numicon para la explicación y entendimiento de las fracciones en cuarto, quinto y sexto de Ed. Primaria. Otra de las competencias que incluyo en el presente trabajo es el transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no.

2.2. APRENDER MATEMÁTICAS SINTIENDO Y JUGANDO

Las matemáticas son una de las disciplinas troncales durante la educación primaria de los niños, ya que los conocimientos asociados a los números y las formas son los que permiten comprender la realidad y analizar situaciones de la vida diaria. Además, las matemáticas tienen una gran influencia en el desarrollo cognitivo, mejorando la atención, la memoria, los procesos de planificación y la flexibilidad mental, entre otras. Se establece que se puede dar una asociación de reciprocidad entre los conceptos básicos de la metacognición y el estudio de las matemáticas (Cabanés y Colunga, 2017).

La estructura de resolución de problemas es uno de los ejes principales dentro del área matemática a lo largo de Educación Primaria (Ruiz, 2001). La gran dificultad común entre los alumnos es la exploración de diversas vías de solución, ya que tienden a tratar de calcular

un resultado sin centrarse en el proceso que tuvieron que desarrollar para llegar a él. Lo ideal durante las clases es plantear verdaderos interrogantes que impliquen buscar estrategias no convencionales y procedimientos reflexivos para resolver las diferentes cuestiones.

Las matemáticas son una disciplina que implica trabajar de manera individual todas sus expresiones, incluyendo el aprendizaje mediante el movimiento, pasando por el entendimiento, la exteriorización verbal y las asociaciones entre los cálculos que hay que realizar. En general, las ideas numéricas son muy abstractas y los niños necesitan que se les presenten en una amplia variedad de formas para que así puedan formar asociaciones.

Basándonos en la teoría de Piaget, se demuestra que los niños adquieren los conceptos y las operaciones numéricas construyéndolas internamente. Al igual que un albañil construye un edificio, el edificio de la mente es construido por el individuo mismo, él construye su conocimiento ya sea conocimiento físico, conocimiento lógico matemático o conocimiento social, que son los tres tipos de conocimiento que menciona Piaget (Adams, 2015).

El medio físico requiere de reconocimiento y estudio y esto se lleva a cabo mediante la identificación de los elementos del entorno; por ejemplo, que una pelota pese medio kilo y que sea de color rojo forma parte de las cualidades que atribuimos a objetos de la realidad externa, es decir, que podemos observar y conocer empíricamente. El conocimiento lógico-matemático consiste en la relación que crea cada individuo. En el caso de presentarnos una pelota azul y una roja, pensamos automáticamente que son diferentes. Las pelotas son objetos observables, pero la diferencia entre ellas es una relación que cada individuo crea mentalmente al colocar ambos objetos en relación. Si por otro lado queremos pensar en las pelotas numéricamente, deducimos que son “dos”, el número dos es la relación que crea cada observador (Cramer y Henry, 2002, 41-48).

Si introducimos el rol del juego en el aprendizaje, observaremos una mayor capacidad de aprendizaje gracias a los siguientes beneficios (Alsina, 2004, 10-11):

El juego forma parte de la vida más real de los niños. Utilizándolo como recurso metodológico se traslada la realidad de los niños a la escuela y pueden apreciar la importancia de aprender matemáticas.

Las actividades lúdicas requieren de una gran implicación del alumno, lo que aumenta su motivación.

Desaparece el miedo al fracaso, pudiendo afrontar retos cada vez mayores, y aprendiendo de los errores propios y de los demás.

Facilita el proceso de sociabilización y respeto, analizando las capacidades de cada uno y jugando en función de ellas.

Permite desarrollar procesos psicológicos básicos necesarios para el aprendizaje matemático, como son la atención, la concentración, la percepción, la memoria, la resolución de problemas y la búsqueda de estrategias.

2.3. OBJETIVOS Y ALCANCE

El objetivo general que se pretende alcanzar con el siguiente trabajo es explicar y proponer tareas para obtener resultados satisfactorios con los alumnos de Educación Primaria (segundo y tercer ciclo; cuarto, quinto y sexto curso) en el aprendizaje de fracciones teniendo en cuenta los aportes que nos ofrece la literatura matemática y apoyándonos en materiales manipulativos más concretamente el Numicon.

Los objetivos específicos que se pretenden conseguir con la realización del presente Trabajo Fin de Grado son los siguiente:

- Conocer la importancia del aprendizaje de las fracciones en la vida cotidiana.
- Identificar las dificultades de los alumnos de primaria a la hora de reconocer fracciones y operar con ellas.
- Analizar los métodos didácticos de enseñanza de fracciones, sus beneficios, ventajas e importancia.
- Profundizar en el método Numicon y en las posibilidades que presenta a la hora de explicar matemáticas.
- Desarrollar un método estructurado de explicación de fracciones con Numicon, desde el desarrollo del material, pasando por diferentes actividades, hasta una evaluación de los conocimientos adquiridos por los alumnos.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. LAS FRACCIONES Y SU IMPORTANCIA

El uso de las fracciones está muy presente en nuestra vida cotidiana, es habitual que empleemos expresiones como “tengo un décimo de lotería”, “me queda la mitad”, “tiene un descuento del diez por ciento”, “falta media hora”... En todas estas expresiones estamos haciendo uso de las fracciones. Su uso es tan antiguo como nuestro lenguaje, de ahí que se haya necesitado aprender a representarlas matemáticamente, reconocer su valor numérico y poder resolver operaciones básicas con ellas. Manejar adecuadamente el concepto de fracción implica conocer en profundidad el concepto de divisibilidad, por eso es tan importante trabajar desde edades tempranas y de manera más formal en la escuela las fracciones.

Se tiene la creencia de que el origen de las fracciones se remonta a la época de los egipcios. Ellos serían los primeros en encontrar, por necesidad, las soluciones a dificultades que se les presentaban en el día a día resolviendo tales cuestiones mediante fracciones. Como por ejemplo, el reparto de comida, la edificación o las unidades de medida del globo terráqueo. En el papiro de Rhind de mediados del siglo XVI a.C., podemos encontrar el registro donde se describe el uso de fracciones como expresiones de las cantidades de magnitud obtenidas al ejecutar repartos igualitarios. En cuanto a las operaciones con fracciones, fue en el siglo VI después de Cristo cuando los hindúes comenzaron a establecer las reglas para poder realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con fracciones. (Gairín, 2001).

Llinares y Sánchez (1998, 52) definen a la fracción como “un par ordenado de números naturales escritos de la forma a/b , donde b es diferente de 0”. La fracción relaciona “lo que elegimos” del todo, es decir, de la división que hacemos del total entendido como unidad y de las partes con las que nos quedamos de ese total para llevar a cabo la acción (pintar, comer...).

Dentro del campo didáctico-pedagógico matemático el simbolismo a/b tiene significado de partición y representa la combinación de dos hechos dividir/tomar. Dividir el todo en tres partes iguales y coger dos lo representamos así $2/3$. En E. Primaria es habitual emplear tartas, pizzas o figuras geométricas ya que permiten hacernos a la idea del concepto involucrado al que hacemos referencia (Dogan y Testemiz, 2020).

En un fraccionamiento intervienen tres datos: dos cantidades, el todo y la parte, y la relación entre ellas, que es la fracción. Para resolver problemas nos preguntan por uno de los

tres datos y hemos de trabajar con los otros dos que vienen dados. Podemos trabajar el fraccionamiento de diferentes maneras: manipulando objetos, dividiendo representaciones y utilizando materiales didácticos, con recursos geométricos y mediante operaciones aritméticas. Un folio o una tira de papel es un buen recurso para iniciar el fraccionamiento ya que se pueden identificar de manera sencilla las partes por superposición (Flores y Rico, 2015).

3.2. TIPOS DE FRACCIONES

Según Arias y Maza (2017, 67-85) existen diferentes tipos de fracciones que los alumnos deben aprender durante la etapa primaria:

- **Iguales a la unidad:** El numerador es igual que el denominador.
- **Propias:** El numerador es menor que el denominador. Se caracterizan por ser equivalentes a una cifra entre el cero y la unidad en términos absolutos, por tanto, se utilizan para expresar una parte de un todo que es de mayor tamaño, representan la porción de algo.
- **Impropias:** El numerador es mayor que el denominador. Las fracciones impropias se pueden expresar en forma de números mixtos ya que son equivalentes a un número mayor a la unidad.
- **Equivalentes:** Son fracciones con distinto numerador y denominador, pero valen lo mismo; por tanto, cada fracción tiene infinitas equivalentes a ella ya que basta con multiplicar o dividir sus términos por el mismo número. Para comprobar si dos fracciones son equivalentes, el método más sencillo es el de los productos cruzados, el producto del numerador de una fracción por el denominador de la otra ha de dar lo mismo en ambos casos.
- **Irreducibles:** Aquellas cuyo numerador y denominador no puede ser más pequeño. Para simplificar una fracción y encontrar su irreducible, debemos buscar el mayor número que sea divisor del numerador y del denominador para dividirlos por él, es decir, debemos encontrar el máximo divisor de ambos.
- **Inversas:** La inversa de una fracción es otra fracción que al ser multiplicada por ella da la fracción unidad, lo que significa, que tienen el numerador y el denominador intercambiados. La fracción de valor 0 es la única que no tiene inversa.
- **Decimales:** El denominador es la unidad seguida de ceros. Una forma equivalente de representar las fracciones decimales son los números decimales, ambos corresponden a las partes de un entero que se ha dividido en decenas, centenas, etc. Cualquier fracción la podemos convertir a decimal, encontrando un número que, al multiplicarlo por el denominador, nos permita convertirla en una potencia de 10 y por ese mismo número

debemos multiplicar el numerador para obtener la fracción equivalente decimal.

3.3. OPERACIONES CON FRACCIONES

Según Segovia y Rico (2019) al realizar operaciones con fracciones hay que distinguir entre obtener aquella parte que es resultado del problema y expresar esa parte por medio de una fracción. La primera acción requiere trabajar con material manipulativo o representaciones y la segunda identificar elementos, identificar quién es el todo y quién la parte, qué tamaño tiene la parte en relación al todo y la forma de expresarla simbólicamente.

Al operar con fracciones se debe tener en cuenta es que no es lo mismo tener mitades que tener tercios, o, por ejemplo, si repartimos las porciones de una tarta habiéndola dividido en 6 y tomamos una, la cantidad a la que tocamos será mucho mayor que si la dividimos en 9. Para poder operar con fracciones, se debe trabajar con cantidades equivalentes que representen lo mismo. Las operaciones con sumas y restas de fracciones requieren que tengan todas el mismo denominador, para ello, se transforman las fracciones en fracciones equivalentes (Copur-Gencturk, 2021).

- **Suma y resta de fracciones:** Sumar consiste en reunir partes y restar en retirarlas. Si las fracciones tienen distintos denominadores, se cambian por otras equivalentes con el mismo, ese denominador común a ambas se calcula como mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones iniciales. Cuando tenemos las fracciones equivalentes, se suman o restan los numeradores y se pone el mismo denominador. Finalmente, y si es posible, se simplifica el resultado.
- **Multiplicación de Fracciones:** Multiplicamos los numeradores y el resultado será el numerador, y de nuevo, de forma independiente, multiplicamos los denominadores y el resultado será el denominador de la fracción final.
- **División de Fracciones:** Dividir una fracción por otra es lo mismo que multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda.

3.4. DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE FRACCIONES

El medio social es el que proporciona a los escolares desde edades muy tempranas el contacto con las fracciones, volviendo a expresiones habituales o conversaciones que se pueden dar como “quiero media manzana”, “lléname dos tercios del vaso” o “compra medio kilo de carne”. Es en la escuela donde se aprende a utilizar correctamente el concepto de

fracción y todos sus significados de forma adecuada. Además, es conveniente evitar la utilización de términos fraccionarios desligados de su significado.

3.4.1. Dificultades en la Comprensión del Concepto de Fracción

Como principal dificultad, los alumnos encuentran considerar como números únicos al numerador y denominador de manera que no presentan relación alguna y los conciben como valores aislados. Representar o dar sentido a la fracción como una o más divisiones de un todo es la manera más sencilla para los alumnos y da lugar a menos errores. En la primera fase de comprensión es donde descubren que una región entera se puede dividir en partes iguales, y que, de todas esas partes, podemos elegir un número determinado. Además, deben asimilar que cada parte es considerada como un “todo” y el “todo” se conserva, aun dividiéndolo en partes (Butto, 2013).

El modelo que se utiliza para la representación del significado influye en la evaluación de las respuestas de los escolares. En la imagen inferior la fracción $1/2$ está representada de tres formas diferentes, los escolares reconocen con más facilidad la primera y con menos la tercera. En la primera forma, la representación es lineal y visualmente se aprecia que hemos tomado la mitad del todo ya que las partes sombreadas están contiguas; en la segunda, aparece la dificultad de que las partes seleccionadas no están contiguas; y en la tercera, vemos como la división del todo no se ha realizado de forma equitativa.

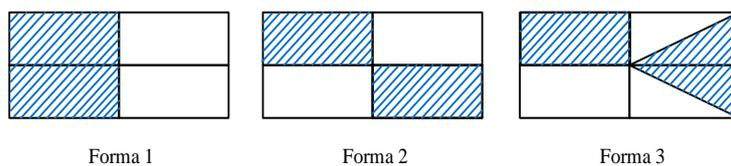


Figura 1. Fracción $1/2$ con el Modelo de Áreas
Fuente: Adaptado de Flores y Rico (2015, 234)

El modelo de áreas suele ser el más sencillo de comprender por los alumnos. Existe uno similar, el de los conjuntos discretos; sin embargo, el concepto del todo es menos visual (Bezerra et. al, 2002). Con los conjuntos discretos son capaces de identificar rápidamente el numerador, pero presentan dudas con el denominador, llegando a restarle las partes del numerador. El denominador debería ser el número total de puntos, pero como hay dos tipos de puntos,

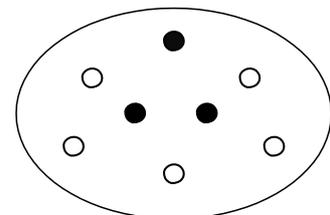


Figura 2. Fracción $3/8$ con los Conjuntos Discretos
Fuente: Elaboración propia

blancos y negros, tienden a creer que un tipo de puntos es el numerador y el otro el denominador.

El modelo que más dificultad presenta es el de la recta numérica. La explicación puede ser que la recta numérica asocia la representación de fracción similar a 0 ó 1; no deja representada claramente la idea de partes de un todo o parte de un conjunto de objetos y simplifica la fracción a un número abstracto. La mayor dificultad aparece cuando la recta representa la fracción con varias divisiones más allá del uno y da error a la hora de elegir la unidad.

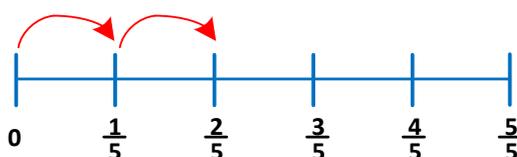


Figura 3. Fracción 2/5 con el Modelo de la Recta Numérica
Fuente: Elaboración propia

3.4.2. Dificultades en las Operaciones con Fracciones

La tendencia de la mayoría de alumnos, cuando tienen su primera toma de contacto con las operaciones con fracciones, es realizar las operaciones de los numeradores entre sí, y de los denominadores entre sí. Tienden a generalizar las propiedades de las sumas y restas de números naturales en el campo de los números racionales (Son, 2016).

Es recomendable antes de comenzar con las operaciones, asegurarnos que tienen claro el concepto de “partes” y de “todo”, para ello, podemos darles una lista sencilla de fracciones para que la ordenen de mayor a menor. Si pedimos ordenar $1/2$, $2/3$ y $1/5$, descendientemente, es posible que la respuesta sea que el número mayor es $1/5$ argumentando que el 5 es el número mayor.

También podemos encontrar el caso de que no sean capaces de diferenciar el numerador y el denominador, es decir, consideran que el valor de la fracción $1/3$ es el mismo que el de $3/1$. O que no realicen equivalencias de forma correcta, por ejemplo, piensan que $1/2$, $5/6$ y $9/10$ son fracciones equivalentes porque al pasar de la primera a la segunda y de la segunda a la tercera hemos sumado 4 tanto en el numerador como en el denominador.

3.5. MÉTODOS DE ENSEÑANZA DE FRACCIONES

3.5.1. El Tangram

El Tangram es un puzle chino también conocido como “tabla de la sabiduría” o “tabla de los siete elementos” ya que requiere cierto grado de reflexión, análisis e inteligencia. El Tangram es un conjunto simple de siete formas geométricas obtenidas a partir de la división de un cuadrado: tres tamaños de triángulos (dos grandes, uno mediano y dos pequeños), un cuadrado y un romboide. La manipulación de las diferentes formas de este objeto es de gran ayuda en la creación del concepto abstracto de figuras planas y sus propiedades (Kmetova & Lehocá, 2021).

El Tangram permite a los niños comprender el concepto de fracción y equivalencia de fracciones mediante la manipulación de los siete elementos, formando con todos ellos las siluetas y formas que se les vayan ocurriendo. Para ello, en un primer momento deben construir su propio Tangram con los siguientes pasos:

- Doblar un cuadrado al medio juntando los vértices opuestos.
- Cortamos el cuadrado por la diagonal para obtener dos triángulos equiláteros idénticos. Y uno de ellos lo doblamos por la mitad para volverlo a dividir en dos al cortar.
- Ahora tenemos un triángulo grande y dos pequeños. Cogemos el grande y juntamos el vértice opuesto al lado desigual, con el centro de este lado y recortamos por el dobléz.
- Tenemos dos triángulos grandes, uno pequeño y un trapecio. Seguimos con el trapecio y el vértice con ángulo agudo lo llevamos al centro del lado de mayor longitud de la figura y recortamos por el dobléz.
- En el trapecio rectángulo obtenido, juntamos los vértices del lado recto, paralelo al otro lado recto, y de menor longitud; y volvemos a recortar, obteniendo un cuadrado.
- El último paso es doblar en el trapecio rectángulo juntando el vértice con ángulo obtusángulo y su opuesto, y cortar.

Una vez familiarizados con el puzle, los alumnos pueden definir el valor de cada figura geométrica y lo que representa respecto al total del Tangram. Además, a través del doblado y la comparación de figuras, son capaces de imaginar operaciones llegando al concepto de partes de un todo, por tanto, podrán formar en su cabeza la imagen de la Figura 4.

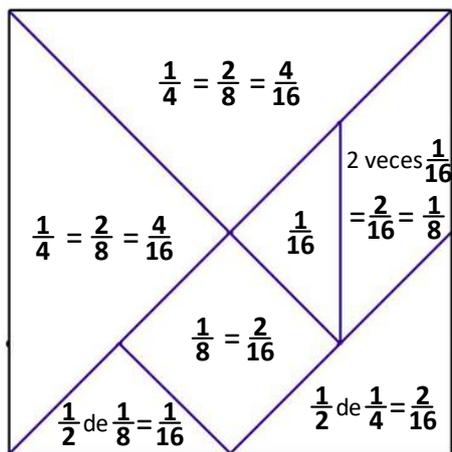


Figura 4. Valor en Fracciones de cada Figura del Tangram
 Fuente: Adaptado de Matemáticas Divertidas (2021)

3.5.2. La Metodología Montessori

Según Daoust (2016) las ideas principales en las que se basa la metodología de María Montessori son las siguientes:

“El aprendizaje se hace”.

“El movimiento puede mejorar el conocimiento y el aprendizaje”.

Estos dos principios implican que el aprendizaje requiere de materiales pedagógicos que puedan ser manipulados por los niños. De esta forma, se crean como material básico de Montessori los “Círculos de fracciones”, son círculos divididos en partes diferentes del 1 al 10 que ayudan al alumno a comprender lo que representan las fracciones, sus equivalencias y a operar con ellas.

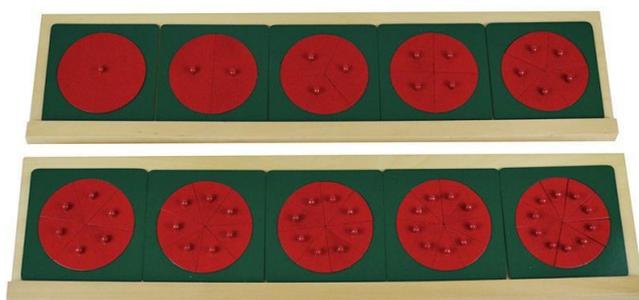


Figura 5. Círculos de Fracciones Montessori
 Fuente: Bonicos Montessori (2021)

Durante los primeros pasos con Montessori el alumno irá asimilando que el entero unidad se puede formar con medios, tercios, cuartos, etc; es decir, jugando y sin darse cuenta podrá ir realizando equivalencias. Además, el hecho de ir completando los círculos o, por el contrario, quitándoles piezas, serán sus primeras sumas y restas de fracciones.

Una de las explicaciones en las que tiene más éxito este método es en el concepto de fracciones impropias, es decir, aquellas fracciones en las que el numerador es superior al denominador. Los niños son capaces de comprobar de una manera visual y rápida que necesitan más de un círculo para representar la fracción porque las partes/numerador que queremos, son superiores a las partes en las que tengo dividido el todo/denominador. En cuanto a las fracciones equivalentes, también es muy efectivo, los alumnos comprueban que el tamaño total de las porciones que tengo en un círculo es idéntico al tamaño total de otro, con independencia del tamaño de las porciones de ambos.

3.6. EL MÉTODO NUMICON

Numicon es un método de enseñanza que surge de un proyecto de investigación en el aula, financiado por la “Teaching Training Agency” realizado entre 1996 y 1998 por Ruth Atkinson, Romey Tacon y el Dr. Tony Wing. Intentaron descubrir por qué tantos niños fracasaban en aritmética cuando presentaban resultados exitosos en el resto de áreas del plan de estudios. Querían averiguar si utilizando imágenes estructuradas, es decir, empleando la lógica visual, apoyarían la comprensión aritmética de los niños. A través de la investigación, se diseñó un programa de actividades de enseñanza utilizando “Formas Numicon” para que de una forma multisensorial los maestros puedan hacer las matemáticas más atractivas y divertidas para los alumnos (Wing y Tacon, 2007).

Las principales actividades que han mostrado un auténtico éxito en escolares al enseñarlas con Numicon, son las siguientes (Díaz, P. y Arnal, M., 2020):

- **Patrones:** se pueden usar las diferentes formas, colores y números para crear una amplia variedad de patrones y series para mostrarles a los niños, o incluso desafiarles a que creen los suyos propios.
- **Ordenar:** las formas numéricas se pueden utilizar de forma ordenada en una secuencia, ya sea de mayor a menor, al revés o por valor numérico.
- **Contar:** contando los agujeros en cada forma y comparando sus tamaños, los niños pueden comenzar a comprender el orden en que deben ir los números.
- **Cálculo Temprano:** las formas de Numicon son excelentes para practicar sumas y restas simples. Usando las formas que representan cada número en la suma, pueden sumar y quitar cuando sea necesario y permitir que los niños cuenten a su propio ritmo.

Este método, comercializado hoy en día por la editorial Oxford University Press España, utiliza múltiples materiales para trabajar los conceptos matemáticos, pudiendo adaptarlos a las diferentes etapas de aprendizaje. Según Oxford University Press España

(2021), entre los más destacados encontramos:

- **Formas Numicon:** son piezas de plástico que representan los números del 0 al 10 en función del número de agujeros que poseen. Además de tener una forma característica para cada número, también presentan colores diferentes. Estas piezas tienen su origen las denominadas placas de Herbière-Lebert.



Figura 6. Formas Numicon Ordenadas Ascendentemente

Fuente: Diaz-Serrano, P. y Arnal-Palacín, M., 2020

- **Clavijas:** con ellas pueden trabajar tanto la seriación como la clasificación, la comprensión de las diferentes cantidades y ayuda a los conceptos de sumar y restar.
- **Bolsas sensoriales:** son materiales opacos que permiten la manipulación y distinción de las diferentes formas únicamente utilizando el tacto, de esta forma se desarrolla la discriminación táctil.
- **Tableros:** permiten encajar las formas y las clavijas para realizar diversas combinaciones.
- **Líneas numéricas:** disponen de distintos intervalos, del 1 al 10, al 30, al 100, o simplemente mostrando las decenas. El objetivo es poder asociar la forma y la cantidad que representa con la gráfica correspondiente.
- **Regleta Numicon:** con origen en las regletas Cuisenaire.
- **Balanza Numicon:** permite a los niños entender el concepto de igualdad matemática, unidades de medida, comparar y ordenar pesos.

Existen materiales adaptados para alumnos con dificultades visuales como formas grises y clavijas blancas y negras. También podemos encontrar materiales para aumentar las posibilidades del juego y la diversión, como pueden ser dados y cartas. Con todo ello, los alumnos son capaces de convertir ideas abstractas en operaciones aritméticas.

El método Numicon permite “tocar las matemáticas”, los números se convierten en algo real mientras los ven, tocan y juegan con sus compañeros. Propiciar un espacio de trabajo y situaciones donde las matemáticas, y por tanto, los números estén presentes como protagonistas y los escolares puedan buscar soluciones a sus dudas, hacer asociaciones, apoyar sus explicaciones... y gracias a ello, pueden desarrollar su pensamiento matemático.



Figura 7. Material Numicon,

Fuente: Oxford University Press España, 2021

En el colegio de primaria Stradbroke de Australia, con 750 alumnos de entre 5 y 13 años, se llevó a cabo uno de los proyectos más famosos con Numicon. Se basó en introducir los siguientes principios descritos por Oxford University Press (2013):

- Todas las clases de matemáticas incorporaron Numicon en sus lecciones diarias.
- Los materiales Numicon se hicieron fácilmente accesibles y las formas y líneas numéricas se mostraron y explicaron en todas las aulas; de esta forma, se familiarizaban con sus características y el orden.
- El maestro preparaba las actividades por grupos y se iba moviendo de unos a otros para analizar los progresos y dificultades.
- La mayoría de los educadores desarrollaron un ciclo semanal, el primer día se utilizó para

presentar conceptos y tareas, seguido de un trabajo en pareja o independiente por parte de los estudiantes para reforzar la tarea. En el segundo y siguientes días, si el alumno había asimilado bien los conceptos, se les asignó una tarea adicional o trabajo de investigación. Los estudiantes cuya comprensión aún requería consolidación se rotaron en grupos pequeños y se les asignó nuevas tareas o juegos para practicar.

Los datos de rendimiento de los estudiantes se recopiló utilizando *I can Do Maths* (ICDM) – Prueba A (ACER Assessment, 2021), una prueba que permite conocer el rendimiento en matemáticas siguiendo las normas australianas. Se evaluaron dos grupos de alumnos, el primero (grupo 1) en rojo en la Figura 8 fueron los 98 alumnos que realizaron la prueba tras trabajar durante el curso con Numicon, y el segundo grupo (grupo 2) en azul en la Figura 8 representa los 78 alumnos que realizaron la prueba sin conocer Numicon.

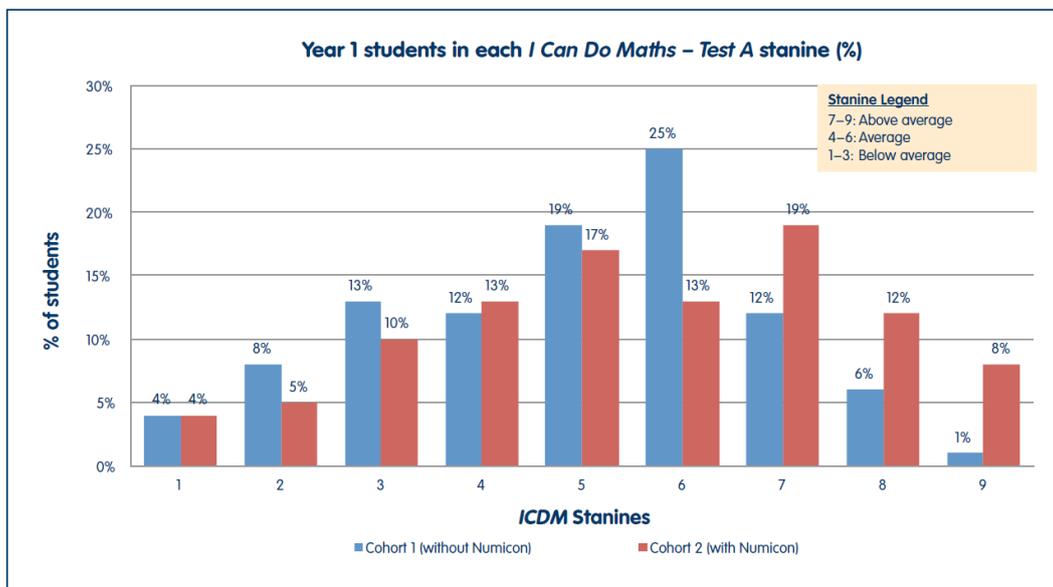


Figura 8. Porcentaje del Grupo 1 y del Grupo 2 en cada rango del test I Can Do Maths
Fuente: *Exploring the Impact of Numicon: An Australian Context* por Oxford University Press, 2013

Los resultados cuantitativos del proyecto que podemos extraer de la gráfica:

- El 39% de los estudiantes del grupo 2 (con Numicon) obtuvieron puntuaciones por encima del promedio (entre 7 y 9), altos o muy altos en comparación con el 19% del grupo 1.
- Solo el 19% del grupo 2 (con Numicon) obtuvo puntuaciones por debajo del promedio o muy bajas (entre 1 y 3) en comparación con el 25% del grupo 1.
- El 82% del grupo 2 (con Numicon) se consideró promedio o superior (entre 4 y 9) en

- comparación con el 75% del grupo 1.
- El 20% del grupo 2 (con Numicon) tuvo puntuaciones altas o muy altas (entre 8 y 9) en comparación con solo el 7% del grupo 1.

Este proyecto australiano con alumnos de primaria, muestra como el trabajo con Numicon refuerza considerablemente la comprensión de las matemáticas por parte de los niños. Los alumnos obtienen resultados mucho mejores en las evaluaciones si durante las clases diarias se trabaja con Numicon, que si se trabaja sin este material de una forma tradicional. El trabajo en equipo y la accesibilidad al material Numicon son factores claves para que los niños disfruten jugando, trabajando en equipo y aprendiendo.

4. PROPUESTA METODOLÓGICA

4.1. OBJETIVOS

Como objetivo general la propuesta pretende crear un método de enseñanza-aprendizaje de fracciones de forma estructurada, para que con material didáctico, en concreto Numicon, las fracciones sean visuales y a través de los sentidos faciliten la comprensión por parte de los alumnos de primaria.

Como objetivos específicos incluyo los siguientes:

- Leer, escribir y representar fracciones utilizando razonamientos apropiados.
- Comprender la diferencia entre numerador como partes y denominador como todo.
- Interpretar fracciones según su valor, en situaciones del aula y también de la vida cotidiana.
- Identificar, representar y distinguir cuando una fracción es propia o impropia.
- Obtener la fracción inversa de una fracción dada y distinguir entre las propias e impropias.
- Establecer correspondencia entre fracciones impropias y números mixtos.
- Comparar e interpretar los números mixtos como una parte entera y una fracción propia.
- Ordenar fracciones básicas por comparación.
- Reducir dos o más fracciones a común denominador y calcular fracciones equivalentes.
- Identificar, representar y distinguir cuando una fracción es irreducible.
- Obtener una fracción irreducible de una dada.
- Realizar sumas y restas de fracciones con igual denominador.
- Calcular el producto de una fracción por un número.
- Realizar sumas y restas de fracciones con distinto denominador y transformar en equivalentes con denominador común.
- Realizar multiplicaciones con diferentes fracciones, representar y reducir.
- Realizar divisiones de fracciones, representar y reducir correctamente.
- Trabajar en la resolución de problemas que impliquen los contenidos trabajados.
- Reflexionar sobre el proceso de la resolución de problemas: revisar operaciones, comprobar resultados e interpretarlos.
- Establecer correspondencia entre fracción, decimal y porcentaje.
- Utilizar porcentajes correctamente en la representación de partes.

4.2. CONSTRUCCIÓN DE NUMICON

Durante la infancia, es fundamental transmitir a los alumnos la importancia de respetar el entorno en el que vivimos y los problemas ambientales que estamos sufriendo, derivados de la acción humana. Para ayudar al planeta, hay que tener en cuenta en el día a día la regla de las tres “R”: reducir, reciclar y reutilizar. En todas las aulas debemos disponer de papeleras de reciclaje en función del tipo de residuo, ya sea papel, orgánico, plástico o vidrio; de esta forma, introducimos la tarea de reciclar como algo cotidiano. La reutilización es más compleja ya que requiere de imaginación y creatividad por parte de alumnos y profesores, vamos a tratar de usar objetos que ya han sido utilizados, para una actividad diferente, en lugar de tirarlos. De esta forma introducimos el concepto de economía circular y desplazamos al tradicional método de economía lineal.

El material Numicon, en lugar de comprarlo nuevo, vamos a ser nosotros mismos los que lo construyamos reutilizando todo el material posible.

- **Formas Numicon:** Necesitamos cartulinas, una regla para hacer cuadrados, un lápiz, tijeras y como piezas fundamentales, tapones de botellas.
- **Regletas Numicon:** Se pueden realizar con papel.
- **Dados:** Ya sean los dados de algún juego que tengamos olvidado en casa o los podemos construir con papel escribiendo en cada cara los números del uno al seis como se hace tradicionalmente, o escribiendo fracciones

El hecho de que sea el propio alumno el que construya las piezas Numicon va a implicar un mayor grado de compromiso por su parte y de comprensión, se va a sentir responsable del resultado y podrá disfrutar del juego desde el primer instante.

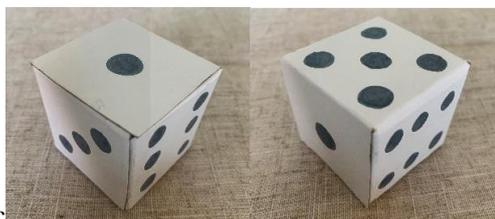


Figura 9. Dado con Fracciones

Fuente: Elaboración propia



Figura 10. Dado Convencional

Fuente: Elaboración propia

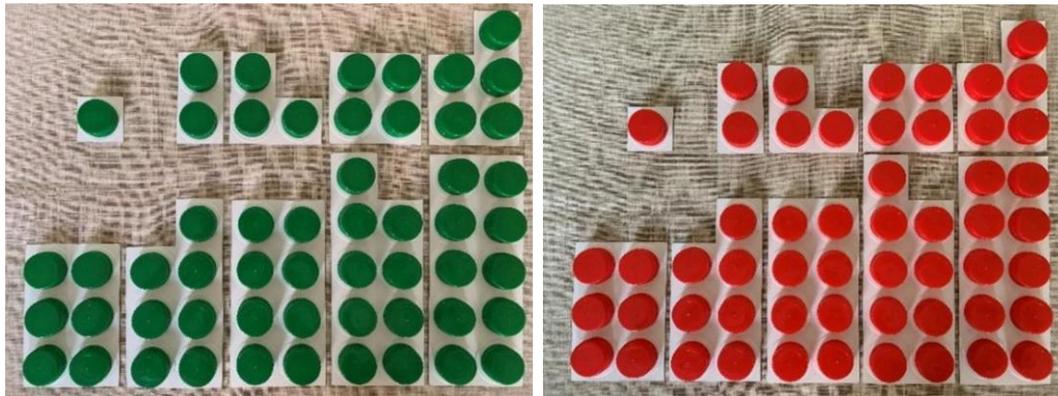


Figura 11. Fichas Numicon del 1 al 10 con Tapones
Fuente: Elaboración propia

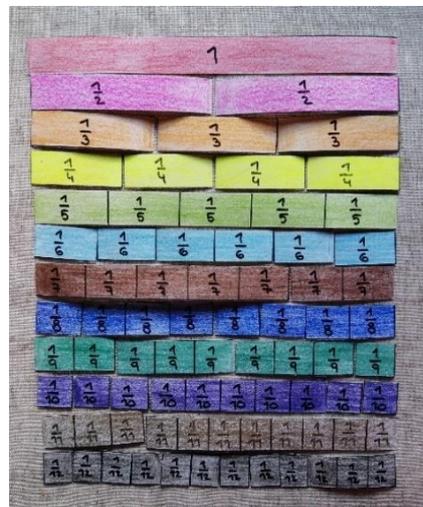


Figura 12. Regletas de Fracciones entre $1/2$ y $1/12$
Fuente: Elaboración propia

4.3. INTRODUCCIÓN DE NUMICON A LOS ALUMNOS

Durante las clases, vamos a evaluar el pensamiento matemático de los alumnos. Para ello, no vamos a empezar con ejercicios o problemas específicos de cálculo, si no que vamos a poner a prueba la capacidad para relacionar ideas; es decir, el sistema lógico-deductivo que organiza y estructura todos los elementos del sistema numérico. Para ello, las explicaciones deben comenzar con ejemplos tanto dentro como fuera del aula, donde podamos usar las matemáticas. El patio también puede ser un buen entorno si hay árboles, contamos el total y analizamos cuántos son frutales o de otro tipo. También podemos acudir al gimnasio, para plantear cuestiones con el material de deporte.

Uno de los aspectos fundamentales será el trabajo en equipo y la colaboración, es fundamental que todos los niños se expresen y compartan sus ideas, con independencia de que esas ideas sean mejores o peores que otras. Hay que evitar calificar las ideas erróneas de los niños como equivocadas, siendo preciso ayudarles a corregir el proceso de razonamiento en vez de la respuesta. De esta forma, se aumenta su seguridad y autonomía, y son capaces de expresar sus pensamientos sin temor a ser juzgados ya que, en vez de relacionar las ideas erróneas con el fracaso, las asocian al intento y a seguir intentándolo. En la Tabla 1 se puede observar cómo se va a organizar cada actividad, si de forma individual, en grupo con las mesas en forma de U o por parejas o equipos.

Otro de los aspectos relevantes a trabajar con Numicon es el pensamiento sistemático. En las edades más tempranas, los alumnos tienden a considerar que sólo hay una respuesta correcta ante cualquier pregunta del profesor. Además, sienten el impulso de hacer suposiciones precipitadas en vez de pararse, analizar y reflexionar antes de llegar a una conclusión. En cada clase, se aplicarán los conceptos matemáticos en situaciones cotidianas para facilitar la capacidad de asociación, y obligar a los alumnos a detenerse y analizar lo que ocurre a su alrededor, destacando la importancia que tienen las matemáticas para poder comprenderlo.

Una vez que cada alumno tenga su material Numicon hecho, llega el momento de conocer sus posibilidades, para ello, se realizará una sesión rápida de conceptos de cursos previos para los que fue creado este material (contar, ordenar, patrones y cálculo temprano), realizando las siguientes actividades:

- Coger de una caja algunas formas Numicon (sin mirar), ordenarlas e indicar cuál es la diferencia (resta) entre una forma y la siguiente de la serie. Tendremos en cuenta durante la explicación que restar implica quitar tapones de una forma (hacerla más pequeña) y sumar añadirlos (ampliar el tamaño de mi forma).
- Realizar sumas y restas con la balanza, pudiendo observar que el equilibrio entre ambos lados nos permite encontrar el resultado correcto en cada operación.
- Juguemos con los dados para realizar series de números, relacionados por el valor obtenido al azar con el dado. También pueden retarse entre los alumnos y comparar los resultados de sus series.
- Operaciones con cifras superiores al 10, para tener que trabajar juntando fichas Numicon para llegar a los números necesarios.

4.4. SESIONES DE ACTIVIDADES DE FRACCIONES

El concepto matemático de fracción es complejo de entender por los niños, por lo que se comenzará a explicar buscando asociaciones y dando sentido al numerador y al denominador. En primer lugar, se deben plantear ejemplos de la vida cotidiana de los niños, como un reloj, practicando con las horas; o los ejemplos de comida son muy visuales, las porciones de una pizza o las porciones del pan. Un entorno rico en fracciones es el supermercado, se les debe animar a acompañar a sus padres y compartir en el aula lo que han observado acerca de precios y cantidades de los alimentos. De esta forma verán que las fracciones no son sólo necesarias para la clase de matemáticas sino para el día a día.

Una vez que hayamos planteado el uso de fracciones en el entorno, comenzaremos con el material Numicon, lo que va a permitir a los alumnos ampliar la riqueza de las imágenes conceptuales de las fracciones. De este modo, cuando se cite “dos quintos” en la cabeza del niño se formará la imagen de una ficha con 5 agujeros y dos tapones. Con el trabajo continuado, serán capaces de crear disposiciones aleatorias de las fracciones, ordenar un grupo determinado, crear series, operar e imaginar sus propios ejercicios. Además de la visualización mental de fracciones, se refuerza la visión espacial ya que al trabajar con Numicon deben manipular las formas, girarlas, darles la vuelta, juntarlas y moverlas.

Contenidos Matemáticos Básicos

TÍTULO: Ideas Principales Relacionadas con la Sesión

Objetivo: Capacidad que se Quiere Desarrollar

Actividad X

Descripción de cada uno de los pasos de la actividad, acompañadas de fotografías

++++
Ideas adicionales para evaluar el aprendizaje de los alumnos

Figura 13. Estructura Básica de las Sesiones de Actividades Numicon
Fuente: Elaboración propia

En cada clase de fracciones con Numicon, se trabajará un tema específico, ya sea sobre el concepto de fracciones, sus tipos o las operaciones, utilizando como guía unas fichas numeradas, con el formato mostrado en la Figura 13. En cada una de las clases debe estar

bien indicado el objetivo, qué va a aprender el alumno y qué capacidades va a desarrollar. Además, se definirán detalladamente las actividades a realizar con imágenes ilustrativas. Y al final de la ficha, aparece una actividad final para que el profesor pueda evaluar si efectivamente se han adquirido las capacidades descritas en el objetivo.

Tras cada sesión, es decir, al completar una ficha, el profesor debe registrar la evaluación de cada alumno. Esta evaluación, detallada al final del capítulo, es fundamental porque es lo que nos va a determinar si encuentran ciertas dificultades y debemos incluir más fichas de los conceptos que no han quedado claros o si, por el contrario, los alumnos han desarrollado un gran pensamiento lógico-matemático con las fracciones y se puede aumentar la complejidad de los ejercicios y el nivel de exigencia.

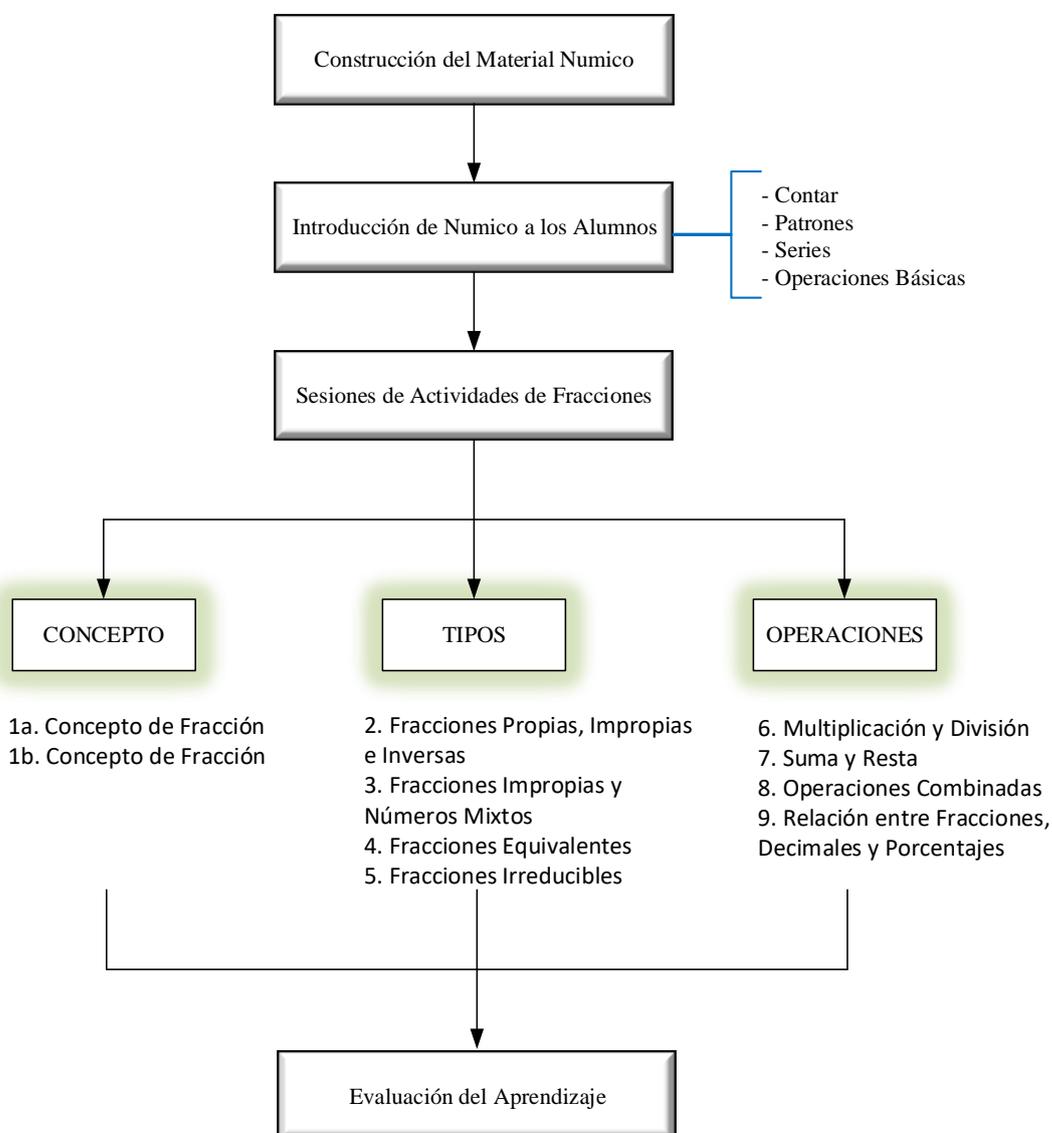


Figura 14. Esquema de Actividades de Fracciones con Numicon
Fuente: Elaboración propia

En la Figura 14 se muestra el esquema completo de las actividades y los pasos a seguir, para explicar y comprender las fracciones con Numicon; desde la construcción del material, pasando por las actividades básicas y llegando a las fichas de fracciones por temática. Por último, se evalúa para medir el grado de comprensión adquirido por los alumnos. En la Tabla 1 aparece el tiempo, la organización y la evaluación de cada actividad llevada a cabo.

Tabla 1. Tiempo, Organización y Evaluación de cada Actividad de Fracciones con Numicon

Ficha	Actividad	Tiempo	Organización	Evaluación
1a. EL CONCEPTO DE FRACCIÓN	1. A partir de una Forma Numicon, Representar todas las Fracciones Posibles	0.5 hr	Trabajo individual	Evaluación apartados 1.1., 1.2. y 1.3.
	2. Elegir las “Partes” de las Formas Numicon con un Dado	0.5 hr	Trabajo en grupo (forma de U)	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en grupo (forma de U)	
1b. EL CONCEPTO DE FRACCIÓN	1. Comparar la Unidad con Diferentes Fracciones	0.5 hr	Trabajo individual	
	2. Representar Fracciones con Regletas y Formas Numicon	0.5 hr	Trabajo individual	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en equipos (de 4-5)	
2. FRACCIONES PROPIAS, IMPROPIAS E INVERSAS	1. Representar Fracciones Propias e Impropias con Formas Numicon	0.5 hr	Trabajo individual	Evaluación apartados 2.1. y 2.2.
	2. Representar una Fracción y su Inversa con Formas Numicon	0.5 hr	Trabajo en grupo (forma de U)	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en grupo (forma de U)	
3. FRACCIONES IMPROPIAS Y NÚMEROS MIXTOS	1. De Fracción Impropia a Número Mixto con Formas Numicon	0.5 hr	Trabajo individual	Evaluación apartados 3.1. y 3.2.
	2. De Fracción Impropia a Número Mixto con Regletas Numicon	0.5 hr	Trabajo individual	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en equipos (de 4-5)	
4. FRACCIONES EQUIVALENTES	1. Completar la Serie con Formas Numicon	0.5 hr	Trabajo en grupo (formas de U)	Evaluación apartados 4.1. y 4.2.
	2. Emparejar las Fracciones Equivalentes representadas con Formas Numicon	0.5 hr	Trabajo en grupo (forma de U)	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en equipos (de 4-5)	
5. FRACCIONES IRREDUCIBLES	1. Dividir Fracciones en Partes Iguales	0.5 hr	Trabajo individual	Evaluación apartados 5.1. y 5.2.
	2. Completar la Serie Decreciente	0.5 hr	Trabajo en equipos (parejas)	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en equipos (parejas)	

Tabla 1. Tiempo, Organización y Evaluación de cada Actividad de Fracciones con Numicon

Ficha	Actividad	Tiempo	Organización	Evaluación
6. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES	1. Suma de Fracciones	0.5 hr	Trabajo individual	Evaluación apartados 6.1. y 6.2.
	2. Resta de Fracciones	0.5 hr	Trabajo individual	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en equipos (de 4-5)	
7. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES	1. Multiplicación de Fracciones	0.5 hr	Trabajo individual	Evaluación apartados 7.1. y 7.2.
	2. División de Fracciones	0.5 hr	Trabajo individual	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en equipos (de 4-5)	
8. OPERACIONES COMBINADAS CON FRACCIONES	1. Representar, Ordenar y Reducir	0.5 hr	Trabajo en equipos (de 4-5)	Evaluación apartados 8.1. y 8.2.
	2. Identificar, Dividir y Sumar	0.5 hr	Trabajo en equipos (de 4-5)	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en equipos (de 4-5)	
9. RELACIÓN ENTRE FRACCIONES, DECIMALES Y PORCENTAJES	1. Analizar la Forma Numicon del 10	0.5 hr	Trabajo individual	Evaluación apartados 9.1. y 9.2.
	2. Pasar de Fracción a Decimal y a Porcentaje	0.5 hr	Trabajo individual	
	++++ Actividades Complementarias	1 hr	Trabajo en equipos (de 4-5)	

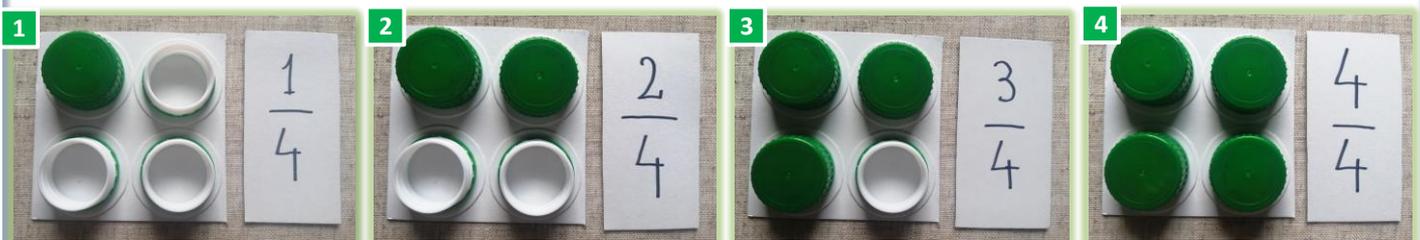
EL CONCEPTO DE FRACCIÓN

Objetivo: Entender el concepto de “Partes” y “Todo” de una Fracción a través de las Formas Numicon

Actividad 1: A partir de una Forma Numicon, Representar todas las Fracciones Posibles

1. Cada alumno debe elegir una forma Numicon de las que él mismo ha construido.
2. Debe ir añadiendo los tapones en cada boquilla de uno en uno.
3. Cada vez que añada un tapón, tiene que representar numéricamente la fracción de su forma Numicon.

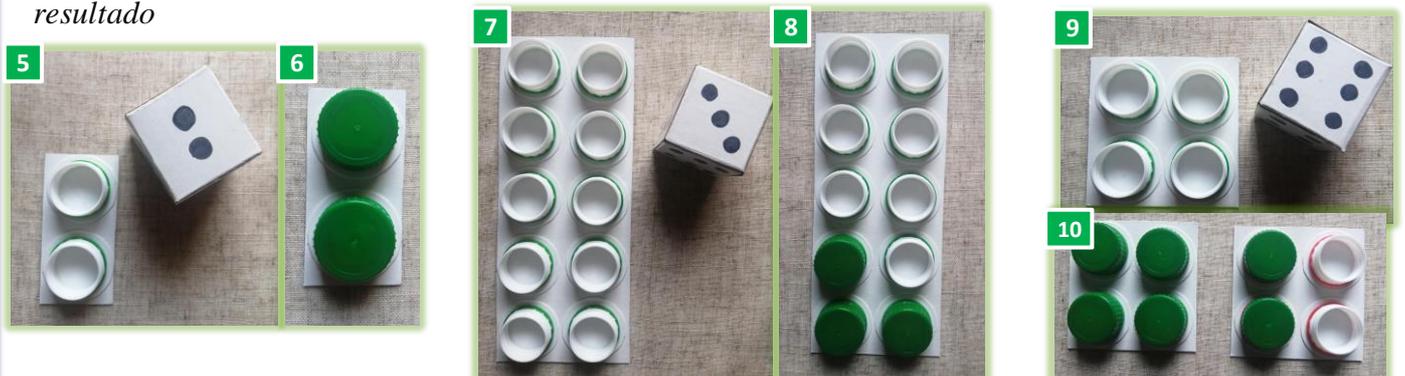
En las siguientes fotos aparecen las posibles fracciones a representar con la forma Numicon del cuatro



Actividad 2: Elegir las “Partes” de las Formas Numicon con un Dado

1. Cada alumno debe elegir una forma Numicon de las que él mismo ha construido. El número de huecos de la forma representa el “todo”, es decir, el denominador de la fracción.
2. Debe tirar el dado una vez, el número que salga indica el número de tapones a añadir en su forma.
3. Compartir el resultado entre los compañeros para ayudarse y comparar, especialmente cuando el número del dado sea superior al de la forma (en cuyo caso se necesitan más formas).

En las fotos 5, 7 y 9 aparecen las formas elegidas y el número del dado; y en las 6, 8 y 10, la fracción resultado



Una vez que los alumnos dominen el concepto de fracción con las formas Numicon y sean capaces de representarlas numéricamente sin dificultad, el profesor irá recitando diferentes fracciones para poder comprobar si efectivamente han asimilado el concepto de “partes” y “todo”.

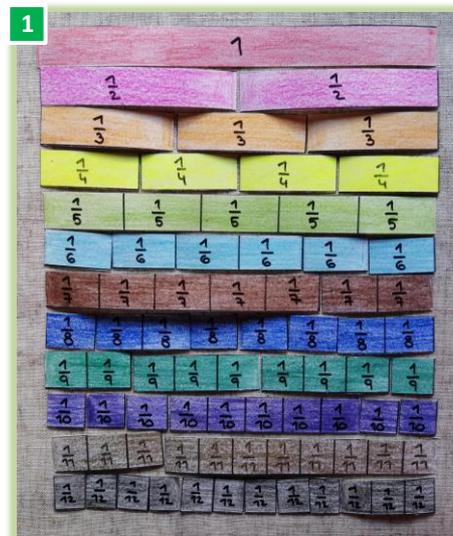
EL CONCEPTO DE FRACCIÓN

Objetivo: Entender el concepto de “partes” y “todo” de una Fracción a través de las Regletas

Actividad 1: Comparar la Unidad con Diferentes Fracciones

1. Cada alumno debe coger la regleta que representa la unidad.
2. A continuación, cogerá del sobre de regletas 2 más al azar, y las comparará con la unidad para comprender cuál es superior.
3. Por último, elegirá más regletas del mismo tamaño para saber cuántas fracciones iguales equivalen a la unidad.

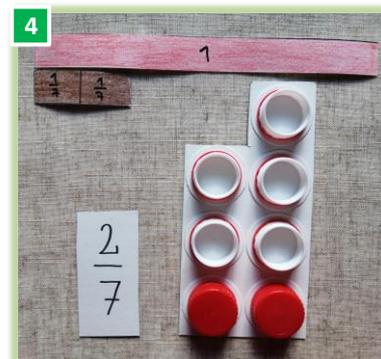
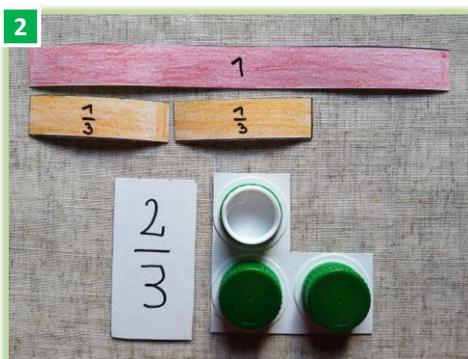
En la foto 1 aparecen regletas de fracciones entre $1/2$ y $1/12$, con tal cantidad que permite formar la equivalencia con la unidad



Actividad 2: Representar Fracciones con Regletas y Formas Numicon

1. Cada alumno debe coger del sobre diferentes regletas, algunas que sean iguales para formar fracciones con numerador superior a uno.
2. Cada fracción de las regletas podrá representarla con formas Numicon.
3. El último paso será escribir cada fracción e indicar cuál es el numerador, siendo este la suma del número de regletas y cuál el denominador, tratándose del denominador común de las regletas.

En las fotos 2, 3 y 4 se ven diferentes fracciones representadas con formas Numicon y regletas



Los alumnos se pondrán en grupos para retarse entre ellos, uno entregará a otro diferentes regletas, para que el segundo las represente con formas Numicon.

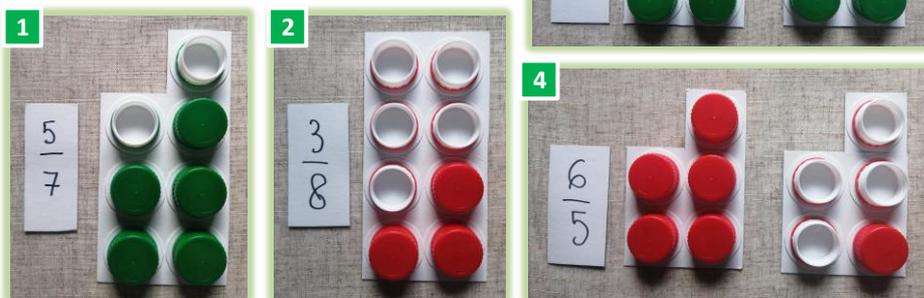
FRACCIONES PROPIAS, IMPROPIAS E INVERSAS

Objetivo: Comprender conceptualmente la Diferencia entre Fracción Propia e Impropia, y entender las Inversas

Actividad 1: Representar Fracciones Propias e Impropias con Formas Numicon

1. El profesor irá eligiendo diferentes fracciones para que representen los alumnos.
2. El alumno cogerá las formas y tapones que necesite para la representación.
3. Momento de reflexión, si el numerador es superior al denominador, esto indicará que para representar la fracción necesita más de una forma y se trata de una fracción impropia; en caso contrario, si el numerador es inferior al denominador sólo necesita una forma y se trata de una fracción propia.

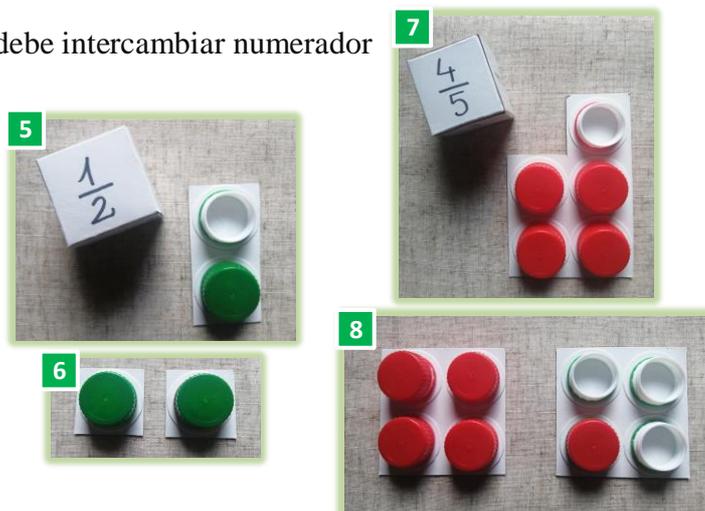
Fotos 1 y 2 de la representación de fracciones propias y, 3 y 4 impropias



Actividad 2: Representar una Fracción y su Inversa con Formas Numicon

1. Cada alumno debe lanzar el dado de fracciones y representar la fracción que obtenga.
2. Una vez conocida y comprendida esta fracción, debe intercambiar numerador y denominador.
3. Esta nueva fracción es la inversa de la obtenida con el dado, y también debe representarla con las formas Numicon.

Fotos 5 y 7 de las fracciones del dado, fotos 6 y 8 de la representación de sus inversas



Una vez comprendidos los conceptos de fracción propia, impropia e inversa; el profesor dictará fracciones para que representen la fracción dictada y la inversa, y entre esas dos, deben identificar cuál es la propia y cuál la impropia.

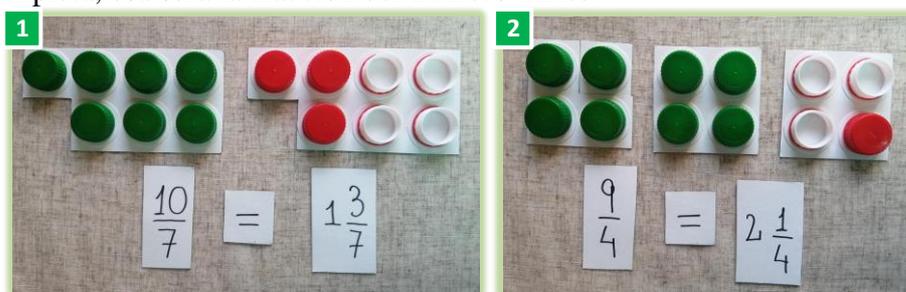
FRACCIONES IMPROPIAS Y NÚMEROS MIXTOS

Objetivo: Comprender los Números Mixtos y pasar de Fracción Impropia a Número Mixto

Actividad 1: De Fracción Impropia a Número Mixto con Formas Numicon

1. El profesor dictará diferentes fracciones impropias para que los alumnos las representen.
2. El alumno identificará que el numerador es superior al denominador y usará las formas Numicon que sean necesarias para realizar la representación.
3. Cuántas formas completas ha necesitado, ese número de formas será la parte entera del número mixto, y qué fracción hay en la forma incompleta, esa será la fracción del número mixto.

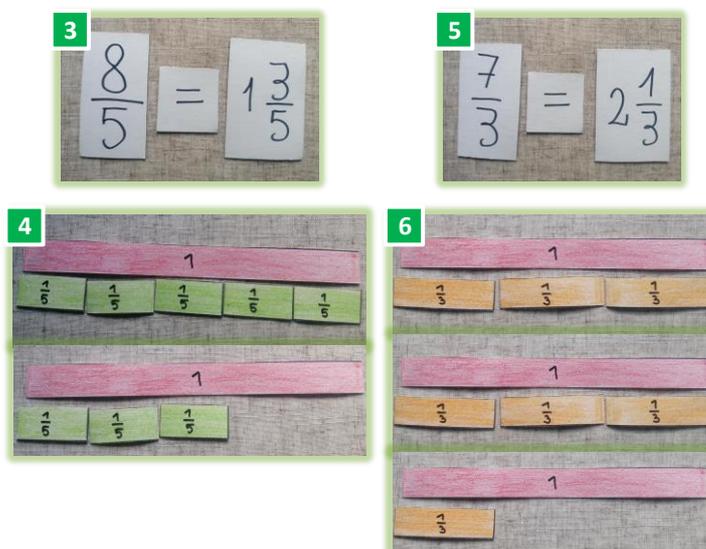
Fotos 1 y 2 de la representación con formas Numicon de dos fracciones impropias donde las formas completas representan la parte entera del número mixto



Actividad 2: De Fracción Impropia a Número Mixto con Regletas Numicon

1. El profesor dictará diferentes fracciones impropias para que los alumnos las representen.
2. El alumno identificará que el numerador es superior al denominador y, verá cuántas regletas 1/denominador forman la unidad.
3. Con regletas comprobamos cuántas unidades podemos crear, y cuántas fracciones faltan para completar la fracción inicial.

Fotos 3 y 5 de las fracciones impropias a representar y sus equivalencias en número mixto, y fotos 4 y 6 de la representación con regletas



Juguemos por grupos con los dados, primero tiramos el de fracciones, si la fracción resultado es propia tiramos el dado común para multiplicar el numerador hasta obtener una fracción impropia, a continuación los alumnos deben representarla tanto con regletas como con formas Numicon.

FRACCIONES EQUIVALENTES

Objetivo: Identificar y Calcular cuando dos o más Fracciones son Equivalentes

Actividad 1: Completar la Serie con Formas Numicon

1. El profesor entregará series de fracciones representadas con formas Numicon.
2. El alumno debe identificar qué relación hay entre cada una de las formas y la siguiente, se trata de identificar la equivalencia. Para ello, debe comparar los denominadores/huecos de las formas entre sí, y los numeradores/tapones para calcular el número que al multiplicar o dividir numerador y denominador de una fracción, nos permite obtener la siguiente.
3. Una vez conocida esta equivalencia podrá completar la serie con al menos un par de formas más.

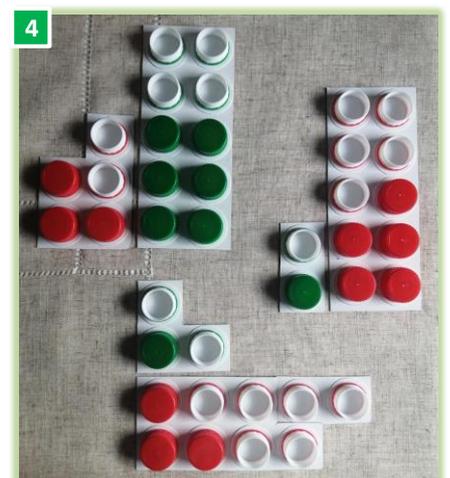
Fotos 1 y 2 de ejemplos de series a completar por los alumnos



Actividad 2: Emparejar las Fracciones Equivalentes representadas con Formas Numicon

1. El profesor entregará varias fracciones representadas con formas Numicon.
2. El alumno debe emparejar las formas, buscando las fracciones equivalentes de dos en dos. Se debe preguntar si existe un número que al multiplicar o dividir numerador y denominador dé como resultado otra fracción de las entregadas por el profesor.
3. Una vez que tenga las parejas, debe añadir una tercera forma que represente otra fracción equivalente a las dos primeras.

Foto 3 con un ejemplo de posibles fracciones mezcladas por el profesor, y 4 con las formas emparejadas por equivalencias



Una vez asimilado el concepto de equivalencia, trabajaremos en grupos y compararemos, el profesor irá recitando diferentes fracciones y cada alumno debe buscar una forma Numicon equivalente. En cuanto todos tengan su fracción elegida, discutirán con el grupo para confirmar si la elección es correcta.

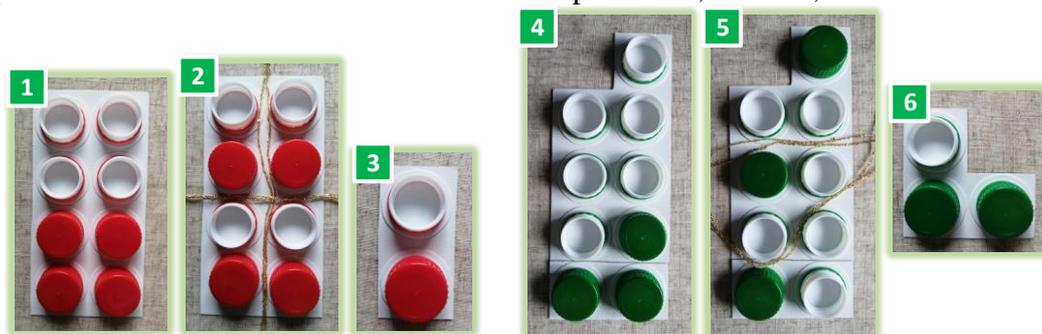
FRACCIONES IRREDUCIBLES

Objetivo: Entender el concepto de Fracción Irreducible, Identificarlas y Calcularlas

Actividad 1: Dividir Fracciones en Partes Iguales

1. El profesor irá dictando fracciones que los alumnos deben representar con formas Numicon.
2. Los alumnos deben tratar de colocar los tapones de tal forma que puedan dividir la figura con cordones o tiras de colores, en partes que contengan tanto el mismo número de huecos, como el mismo de tapones.
3. Por último, hay que representar una de las divisiones de forma independiente, es decir, la fracción irreducible.

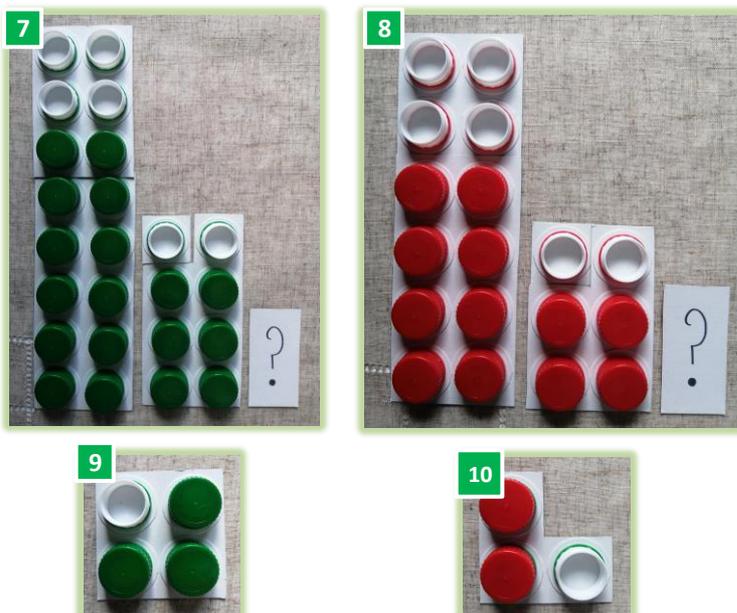
Fotos 1 y 4 de las fracciones a reducir, 2 y 5 recolocando tapones y dividiéndolas, y 3 y 6 de las fracciones irreducibles



Actividad 2: Completar la Serie Decreciente

1. El profesor entregará varias series decrecientes de fracciones equivalentes representadas con formas Numicon.
2. El alumno debe identificar la relación entre las formas y continuar la serie.
3. Al ser series decrecientes, llegará un momento en que dará por finalizada la actividad, esa última forma que ha añadido, debe identificarla como la fracción irreducible.

Fotos 7 y 8 de las series decrecientes a completar, y 9 y 10 de las fracciones irreducibles que completan las series



Para poner a prueba el conocimiento de fracciones irreducibles, el profesor entregará formas Numicon de fracciones; para que los alumnos, por parejas, devuelvan al profesor la fracción irreducible.

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Objetivo: Sumar y Restar Fracciones con fluidez

Actividad 1: Suma de Fracciones

1. Cada alumno lanzará el dado con fracciones en sus caras dos veces para conocer la suma a realizar, y representará cada fracción con las formas Numicon.
2. Con regletas, debe calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores, viendo cuántas regletas $1/\text{numerador } 1$ equivalen a $1/\text{denominador } 2$, y multiplicando ambas cantidades, ese es el mínimo común múltiplo. A continuación, debe transformar las fracciones a sumar en equivalentes a las iniciales y ambas con el mismo denominador con el valor del mínimo común múltiplo.
3. Para obtener el resultado final, se deben sumar los numeradores y dejar el denominador común calculado en el paso 2.

Fotos 1, 2 y 3 de la suma de $1/2$ más $4/5$

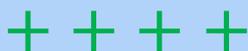
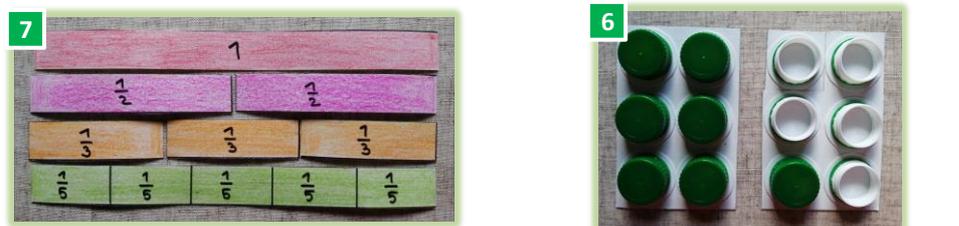
En la foto 7 aparecen las regletas para calcular el mínimo común múltiplo



Actividad 2: Resta de Fracciones

1. Cada alumno lanzará el dado con fracciones en sus caras dos veces para conocer las fracciones que va a restar, y representará cada fracción con las formas Numicon.
2. Con regletas, debe calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores (de la misma forma que en la actividad 1) y transformar las fracciones a sumar en equivalentes a las iniciales y ambas con el mismo denominador.
3. Para obtener el resultado final, se deben restar los numeradores y dejar el denominador común calculado en el paso 2.

Foto 4, 5 y 6 de la resta de $3/2$ menos $1/3$



Una vez dominadas las operaciones de sumar y restar, dejaremos a un lado el dado, y será el profesor el que elija las operaciones para que compitan por grupos en la resolución de sumas y restas.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

Objetivo: Multiplicar y Dividir Fracciones con fluidez

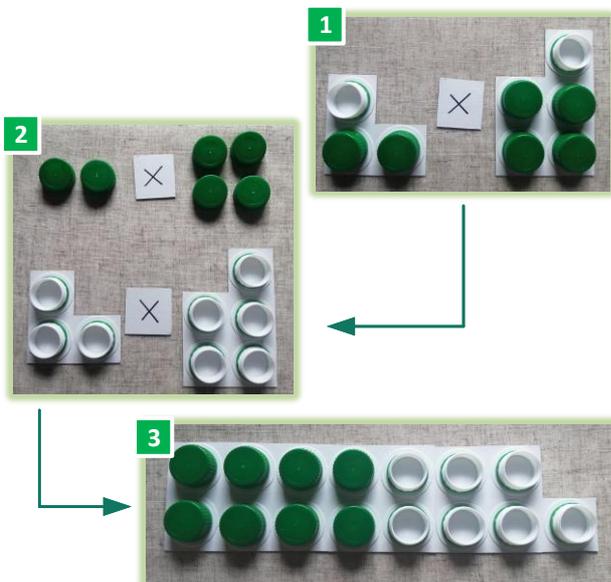
Actividad 1: Multiplicación de Fracciones

1. Cada alumno lanzará el dado con fracciones en las caras dos veces, y esas serán las dos fracciones a multiplicar. A continuación, debe representar cada una con las formas Numicon.

2. De cada forma, debe retirar los tapones y separarlos, sin mezclar los de una forma y los de la otra.

3. Ahora tiene que multiplicar el numero de tapones de un grupo por los del otro, el resultado será el numerador final. Por otro lado, debe multiplicar los huecos de una forma por los de la otra, y el resultado será el denominador final.

En las siguientes fotos (1, 2 y 3) se ve el procedimiento para multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$



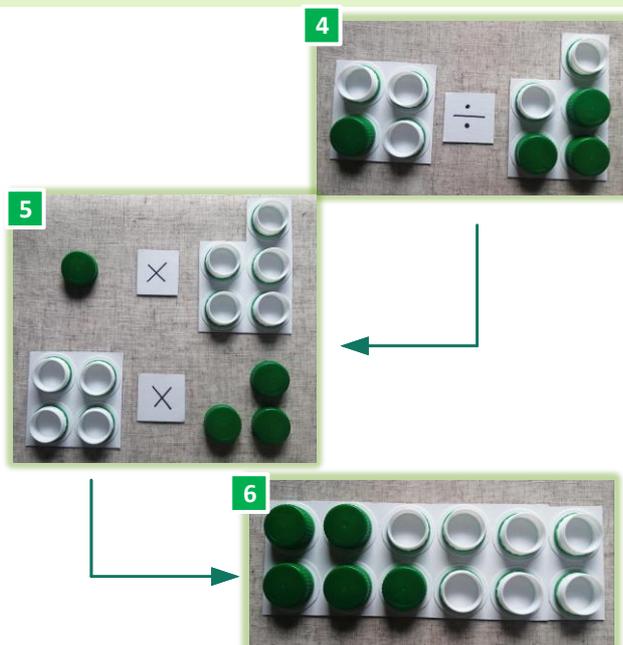
Actividad 2: División de Fracciones

1. Cada alumno lanzará el dado con fracciones en las caras dos veces, y esas serán las dos fracciones a dividir. A continuación, debe representar cada una con las formas Numicon.

2. De cada forma, debe retirar los tapones y separarlos, sin mezclar los de una forma y los de la otra.

3. Ahora tiene que multiplicar el numero de tapones del primer grupo y los huecos de la segunda forma, el resultado será el numerador final. Por otro lado, debe multiplicar los tapones de la segunda forma por los huecos de la primera, y el resultado será el denominador final.

En las siguientes fotos (4, 5 y 6) se ve el procedimiento para dividir $\frac{1}{4}$ entre $\frac{3}{5}$



Una vez dominadas las operaciones de multiplicar y dividir, dejaremos a un lado el dado, y será el profesor el que elija las operaciones para que compitan por grupos en la resolución de multiplicaciones y divisiones.

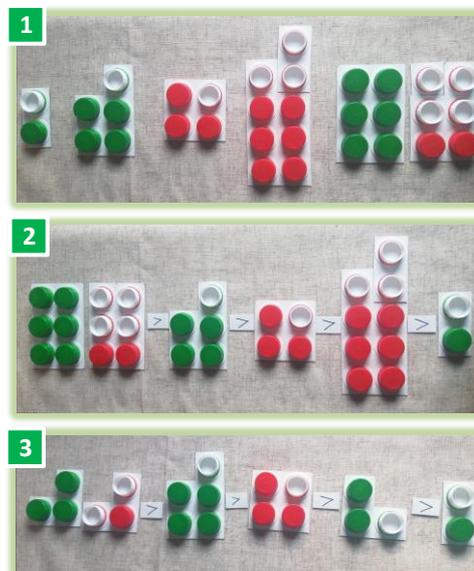
OPERACIONES COMBINADAS CON FRACCIONES

Objetivo: Relacionar Operaciones y Resolverlas con Fluidez

Actividad 1: Representar, Ordenar y Reducir

1. Los alumnos se colocarán en grupos y en círculo, y el profesor entregará una fracción representada con formas Numicon a cada uno.
2. El alumno representará la fracción y pasará la forma al siguiente compañero, repetimos este paso hasta apuntar todas las fracciones entregadas por el profesor.
3. Se deben ordenar las fracciones de mayor a menor y calcular la irreducible si no es ella misma.

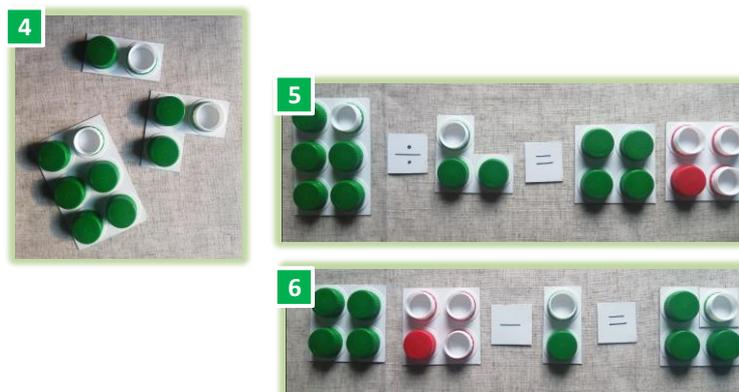
Foto 1 de la representación de varias fracciones, foto 2 de las mismas fracciones ordenadas de mayor a menor y foto 3 de la serie con las fracciones irreducibles



Actividad 2: Identificar, Dividir y Sumar

1. El profesor dictará fracciones de tres en tres, y el primer paso del alumno será representarlas con formas Numicon.
2. De esas tres, debe dividir la mayor, entre la siguiente mayor y representar el resultado obtenido.
3. La tercera fracción restante la debe restar al resultado del punto 2 y, si es posible, este último resultado reducirlo.

Foto 4 de tres fracciones ejemplo, foto 5 de la división de las dos mayores y foto 6 de la resta del resultado con la tercera



Para seguir de forma dinámica, podemos concursar por grupos encadenando diferentes operaciones elegidas por el profesor, orden de fracciones, a continuación divisiones, o sumas, restas o multiplicaciones, búsqueda de equivalencias... es el momento de retornos y evaluar todo lo aprendido.

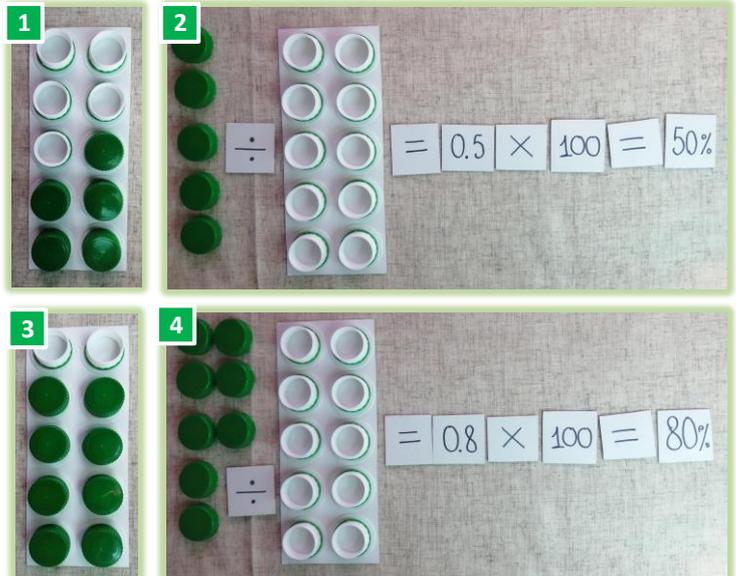
RELACIÓN ENTRE FRACCIONES, DECIMALES Y PORCENTAJES

Objetivo: Pasar de Fracción a Decimal y a Porcentaje entendiendo la Relación entre los tres

Actividad 1: Analizar la Forma Numicon del 10

1. Cada alumno debe coger la forma Numicon del 10 e irá añadiendo diferentes números de tapones.
2. Anotan la fracción representada, y dividen numerador entre denominador, obteniendo el número decimal.
3. El número decimal es multiplicado por 100 para hallar el porcentaje (recordando que el porcentaje es $X/100$).

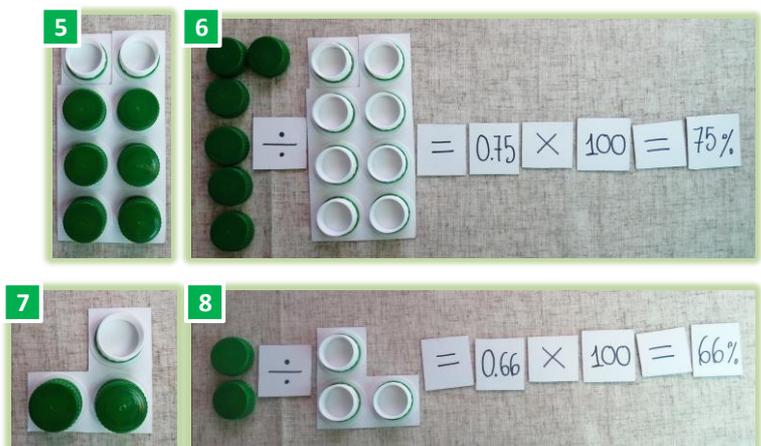
Fotos 1 y 3 de fracciones con denominador 10, y fotos 2 y 4 del paso de esas fracciones a decimal y a porcentaje



Actividad 2: Pasar de Fracción a Decimal y a Porcentaje

1. El profesor entregará formas Numicon a los alumnos, representando diferentes fracciones.
2. De esa forma, deben dividir tapones (numerador) entre huecos (denominador) para obtener el número decimal.
3. Por último, se multiplica el número decimal por 100 para calcular el porcentaje.

Fotos 5 y 7 de diferentes fracciones, y fotos 6 y 8 del paso de esas fracciones a decimal y a porcentaje



Trabajemos de forma inversa y por grupos, el profesor dictará porcentajes y números decimales, y el objetivo del alumno será representar la fracción equivalente con formas Numicon

Contenidos Matemáticos Básicos: Fracciones, sus Tipos y Operaciones

EVALUACIÓN DE CONTENIDOS

Alumno: _____

Grupo: _____

Fecha: ___/___/___

EN PROCESO | CONSEGUIDO | NOTA

1.1. Lee, escribe y representa fracciones utilizando razonamientos apropiados

1.2. Comprende la diferencia entre numerador como "partes" y denominador como el "todo"

1.3. Interpreta fracciones según su valor, en situaciones del aula y también de la vida cotidiana

2.1. Identifica, representa y distingue cuándo una fracción es propia y cuándo impropia

2.2. Obtiene la fracción inversa de una fracción dada y distingue entre ambas la propia y la impropia

3.1. Establece la correspondencia entre fracciones impropias y números mixtos

3.2. Comprende e interpreta los números mixtos como una parte entera y una fracción propia

4.1. Ordena fracciones básicas por comparación

4.2. Reduce dos o más fracciones a común denominador y calcula fracciones equivalentes

5.1. Identifica, representa y distingue cuándo una fracción es irreducible o no

5.2. Obtiene la fracción irreducible de una dada

6.1. Realiza sumas y restas de fracciones con el mismo denominador. Calcula el producto de una fracción por un número

6.2. Realiza sumas y restas de fracciones con distinto denominador, transformándolas en equivalentes con denominador común

Contenidos Matemáticos Básicos: Fracciones, sus Tipos y Operaciones

EVALUACIÓN DE CONTENIDOS

Alumno: _____

Grupo: _____

Fecha: ___/___/___

EN PROCESO | CONSEGUIDO | NOTA

7.1. Realiza multiplicaciones de diferentes fracciones, representa el resultado y lo reduce si es posible

7.2. Realiza divisiones de diferentes fracciones, representa el resultado y lo reduce si es posible

8.1. Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización

8.2. Reflexiona sobre el proceso aplicado a la resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, buscando otras formas de resolverlo

9.1. Establece la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes

9.2. Utiliza los porcentajes para expresar partes

VALORACIÓN DEL ALUMNO

- *¿Cómo se siente trabajando con fracciones?*

- *¿Encuentra dificultades? ¿Hay algo que no le guste?*

- *¿Tiene ideas para mejorar o hacer más divertido el trabajo de fracciones en el aula?*

5. CONCLUSIONES

- Las fracciones son un tema fundamental de la enseñanza de las matemáticas en educación primaria, y el primer paso para poder comprenderlas es establecer relaciones y ejemplos claros con situaciones dentro y fuera del aula. Además, si se crea una dinámica de juego y diversión durante las clases, la motivación de los niños aumenta y con ello las ganas de practicar y de aprender matemáticas.
- Las formas Numicon son materiales didácticos que refuerzan la comprensión de las matemáticas; y en especial, el concepto de “partes” y “todo” de una fracción, siendo este, una de las grandes dificultades mostradas en primaria. Este material deja a un lado la idea abstracta de fracción y permite ver físicamente en los huecos de sus formas la correspondencia con el denominador y en los tapones que se van añadiendo, la correspondencia con el numerador.
- En la posible puesta en práctica la representación de fracciones mediante formas Numicon la intencionalidad es identificar mucho más rápido el tipo de fracción del que estamos hablando que si escribimos la fracción con números. Esto es debido a que tenemos la imagen de la fracción delante, identificando si necesito varias formas para representarla (impropia), si dos son equivalentes por comparación o si una fracción determinada no la puedo reducir más, por tanto, la imagen que creamos con las formas Numicon va a favorecer el proceso de identificación de fracciones.
- Es importante la inclusión de diferentes materiales, no sólo formas Numicon, también regletas y dados con fracciones en las caras y dados convencionales. Cuanto mayor sea la diversidad de materiales, mayores son las opciones de juegos a desarrollar y más atractivas resultan las diferentes operaciones con fracciones para los alumnos. Cabe destacar que el hecho de realizar el mismo tipo de operación de forma correcta con regletas y con formas Numicon confirma que el alumno es independiente tanto con el material didáctico, como con las operaciones de fracciones en sí.
- El papel del profesor será fundamental durante todas las sesiones ya que debe guiar las actividades a realizar, marcar los tiempos y adaptar las exigencias de los ejercicios

en función de lo que vaya observando. Además, es el profesor el responsable de incentivar la participación mediante preguntas y llamadas a los niños, es él quien deja claro que todas las propuestas y argumentos son escuchados; y el que organiza la clase en parejas, grupos y equipos.

6. BIBLIOGRAFÍA

ACER Assessment. (06 de diciembre de 2021). Test Scoring and Analysis.

<https://www.acer.org/ae/tsa/tests>

Adams, G. (2015). Making numbers: where we are now. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 35(2), 19-24.

Alsina, Á. (2004). *Desarrollo de Competencias Matemáticas con Recursos Lúdico Manipulativos*. Ediciones Narcea.

Arias, J. M. y Maza, I. (2017). *Matemáticas 1º ESO*. Grupo Editorial Bruno S.L.

Bezerra, F.; Magina, S. y Spinillo, A. (2002). How to Promote Childrens Understanding Fractions? An Exploraty Study. *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 2, 89-96.

Boletín Oficial de Castilla y León (2016). Anexo IB: Áreas del bloque de asignaturas troncales.

Bonicos Montessori. (30 de noviembre de 2021). Fracciones en Metal con Bandeja Montessori del 1 al 10. <https://bonicos.es/tienda/material-montessori/matematicas/fracciones-en-metal-con-bandeja-montessori/>

Butto Zarzar, C. (2013). El Aprendizaje de Fracciones en Educación Primaria: Una Propuesta de Enseñanza en Dos Ambientes. *Horizontes Pedagógicos*, 15(1), 33-45.

Cabanes, L. y Colunga, S. (2017). La Matemática en el desarrollo cognitivo y metacognitivo del escolar primario. *Edusol*, Centro Universitario de Guantánamo, 17(60), 45-49.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fractions operations: results from a national sample of Elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 525–545.

- Cramer, K., y Henry, A. (2002). *Using manipulative models to build number sense for addition of fractions*. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Yearbook of Making sense of fractions, ratios, and proportions*.
- Daoust, C. J. (2004). *An Examination of Implementation Practices in Montessori eraly CHildhood Education*. Doctoral tesis, University of California, Berkeley.
- Diaz-Serrano, P. y Arnal-Palacín, M. (2020). Uso de Numicon en Educación Infantil con alumnos con Necesidades Educativas Especiales. *Pesquisa e Ensino*, Barreiras (BA), Brasil, 1, 1-22.
- Dogan, A. y Testemiz, N. (2020). Fraction Models Used by Primary School Teachers. *Ilkogretim Online - Elementary Education*, 19(4), 1888-1901.
- Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria*, Ediciones Pirámide (Grupo Anaya).
- Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México, CINVESTAV
- Gairín, J. (2001). Una interpretación de las fracciones Egipcias desde el Recto del Papiro de Rhind. *Revista Lull*, 24(1), 649-684.
- Kmetova, M. & Lehocká, N. (2021). Using Tangram as a Manipulative Tool for Transition between 2D and 3D Perception in Geometry. *Mathematics*, 9(18), 1-20.
- Llinares, S. y Sánchez M. V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.
- Matemáticas Divertidas (06 de noviembre de 2021). Tangram y Fracciones. <https://matematicasdivertidas.es/tangram-y-fracciones/>
- Oxford University Press España. (25 de noviembre de 2021). *Catálogo Oxford / NUMICON PRIMARIA*. <http://www.numicon.es/catalog.php>

- Oxford University Press. (2013). Exploring the Impact of Numicon: An Australian Context. Summary of a Numicon Pilot Project conducted in an Australian Primary School in 2012/13.
- Pruzzo de Di Pego, V. (2012). Las Fracciones. Problemas de Aprendizaje o Problemas de la Enseñanza?. *Revista Pilquen, Sección Psicopedagogía*, 8(1), 1-14.
- Segovia, I. y Rico, L. (2019). *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*, Ediciones Pirámide (Grupo Anaya).
- Son, J. (2016). Pre-service Teachers' Understanding of Fraction Multiplication, Representational Knowledge, and Computational Skills. *Mathematics Teacher Education and Development*, 18(2), 5-28.
- Ruiz, F. (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Síntesis Educación, 449-476.
- Wing, T. y Tacon, R. (2007). *Teaching number skills and concepts with Numicon materials*. *Number and Mathematics*, 12(1), 22-26.