http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351
Educación Matemática en la Infancia

Actividades con grafos para estudiantes con altas capacidades

Rocío Blanco Somolinos
Universidad de Castilla-La Mancha, Facultad de Educación, Cuenca, España, Mariarocio.blanco@uclm.es
Melody García-Moya
Universidad de Castilla-La Mancha, Facultad de Educación, Toledo, España, Melody.Garcia@uclm.es

Fecha de recepción: 1-11-2019
Fecha de aceptación: 2-12-2019
Fecha de publicación: 15-12-2019

RESUMEN
Presentamos una propuesta didáctica ideada para trabajar teoría de grafos, destinada a alumnos de Educación Primaria con Altas Capacidades en Matemáticas. Queremos aportar a los alumnos contenidos matemáticos motivadores fuera del currículo escolar para favorecer el desarrollo de sus capacidades, además de proporcionarles una herramienta sencilla y potente de representación y resolución de problemas de la vida real.
La propuesta se estructura en cuatro fases basadas en la metodología de Dienes, en las que seguimos el modelo de resolución de problemas de Pólya, con un número variable de sesiones en cada fase, según las necesidades del alumnado. Nuestro enfoque parte del coloreado de mapas como contexto en el que aparecen los grafos de forma natural, seguido del trazado de caminos y ciclos eulerianos. Aplicamos los grafos a la resolución de un problema de combinatoria mediante la inducción, y finalmente, descomponemos los grafos aparecidos en polígonos estrellados y estrellas. En una próxima publicación presentaremos los resultados de la puesta en práctica de esta propuesta.

Palabras clave: grafos, Educación Primaria, Altas Capacidades, propuesta de enseñanza.

Activities with graphs for gifted students

ABSTRACT
We present a didactic proposal designed to work graph theory, intended for Primary Education students with high skills in Mathematics. We want to provide students motivational mathematical contents outside school curriculum to promote the development of their abilities, as well as providing them with a simple and powerful tool for representing and solving real-life problems.
The proposal is structured in four phases based on the Dienes methodology, in which we follow the Pólya problem-solving model, with a variable number of sessions in each phase, according to the students' needs. Our approach starts with coloring maps as a natural context to introduce graphs, followed by the layout of paths and Eulerian cycles. We apply graphs to the resolution of a combinatorial problem by induction, and finally, we decompose the graphs appeared in star polygons and stars. In a forthcoming publication, we will present the results of the implementation of this proposal.

Key words: graphs, Primary Education, Gifted students, teaching proposal.

1. Introducción

En este artículo presentamos una propuesta de enseñanza destinada a alumnos de Educación Primaria con Altas Capacidades (AACC en adelante) en Matemáticas. Nuestra propuesta está orientada a alumnos a partir de 8 años, y les proporciona una herramienta útil para representar y resolver problemas: la teoría de grafos.

Ideamos un programa de enriquecimiento, en forma de talleres donde se trabajan problemas clásicos de combinatoria, lógica, probabilidad, teoría de grafos, geometría o álgebra, para que aprendan nuevas técnicas que les motiven, sin interferir con el currículum escolar. Se trata de trabajar contenidos distintos a los recogidos en el currículum, que les proporcionen herramientas útiles en su posterior recorrido académico.

Nuestra propuesta está pensada para implementarse a lo largo de todo el curso académico, realizando una sesión semanal individual de 45 minutos con cada alumno, durante el horario escolar en un aula distinta a la del grupo-clase, ya que los talleres se conciben como fases o partes de un único proceso de aprendizaje, donde los conceptos se interrelacionan, y en cada nuevo taller, se comienza recordando lo aprendido en las sesiones anteriores. Hablamos por tanto de experiencias de aprendizaje.

En este artículo describimos paso a paso las sesiones relativas a teoría de grafos, que presentamos como ejemplo de los talleres programados, y esperamos que sirvan a otros docentes como modelo para poner en práctica este tipo de experiencias.

1.1. Alumnos con Altas Capacidades en Matemáticas

Describir las características de los alumnos con AACC es complejo debido a que no existe una definición unánime que describa a las personas con AACC, por ser este un grupo heterogéneo con intereses diferentes y diversos dominios (Cordero Monge, 2017, p.19). A pesar de ello, destacamos la aportación que Renzulli (1994) hizo con su modelo de los tres anillos donde nos muestra conductas comunes entre todas las personas con rendimientos excepcionales, estas son: una alta capacidad intelectual, creatividad y compromiso con la tarea.

Los estudiantes con AACC presentan gran curiosidad por el mundo y suelen ir más allá de los conocimientos que el sistema educativo les ofrece. Son capaces de crear y resolver sus propios interrogantes, tienen gran capacidad para relacionar conceptos y los comprenden rápidamente, son perfeccionistas y hábiles encontrando estrategias para resolver problemas (Martínez Torres, 2012).

Centrándonos en las AACC en Matemáticas, mencionamos a Gardner (1995) quien ofrece la concepción de diferentes tipos de inteligencias entre las que se encuentra la lógico-matemática. Las personas con inteligencia lógico-matemática disfrutan aplicando sus conocimientos matemáticos en sus entornos habituales, presentan facilidad en resolución de problemas y tienen agilidad en las operaciones matemáticas.

En cuanto a las medidas que se llevan a cabo en Educación Primaria para atender las necesidades educativas de este tipo de alumnado, la legislación vigente (Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero) contempla actuaciones de varios tipos, entre las que se encuentran planes de actuación o programas de enriquecimiento curricular. Algunas de estas medidas se llevan a cabo dentro del aula ordinaria o en forma de adaptaciones curriculares, y otras fuera del horario escolar, en forma de programas de enriquecimiento extracurricular, en los que se desarrollan talleres o cursos de ampliación.

Actualmente, existen diversos programas de enriquecimiento puestos en marcha desde las comunidades autónomas, como el Programa de Enriquecimiento Educativo para alumnos con Altas Capacidades de la Comunidad de Madrid (PEAC, 2019), o el Programa Enriquecimiento Extracurricular Altas Capacidades de la Junta de Castilla y León (PEEACCYL, 2019), entre otros.

En algunos talleres de enriquecimiento extracurricular se trabaja de forma dinámica el ingenio y la resolución de problemas no familiares, potenciando lo cognitivo y socioemocional. Los contenidos y las actividades se distribuyen en tres bloques: matemáticas divertidas, pensamiento divergente y habilidades sociales. Se realizan actividades como criptogramas, matemáticas en las pompas de jabón, resolución de misterios y resolución de problemas interpersonales (Rojo et al., 2010).

También hay actividades extraescolares de pago ofertadas por asociaciones, que incluyen el uso de nuevas tecnologías, fomentando las vocaciones tecnológicas a través de la robótica (PEE, 2019).

El proyecto ESTALMAT (2019) tiene como objetivo estimular el talento matemático de estudiantes de 12-13 años, a lo largo de dos cursos académicos. En una sesión semanal de tres horas, se desarrollan contenidos matemáticos que no suelen trabajarse en las aulas de Educación Secundaria Obligatoria, pero que son de gran relevancia en las Matemáticas.

Teniendo en cuenta las características de los alumnos con AACC en Matemáticas, y las distintas formas de atender sus necesidades educativas, pensamos que una manera de potenciar la motivación que estos estudiantes tienen hacia las Matemáticas es proporcionarles talleres de enriquecimiento. Nuestra propuesta se encuentra a caballo entre el enriquecimiento curricular y el extracurricular, ya que el contenido trabajado está fuera del currículum, pero la experiencia no se hace fuera del horario escolar.

1.2. Teoría de grafos

Comentamos en este apartado algunas de las definiciones básicas en teoría de grafos, que son necesarias en nuestra propuesta. A grandes rasgos, un *grafo* es un conjunto de puntos o vértices, algunos de ellos unidos por líneas o aristas. Puede verse un ejemplo en la siguiente imagen.

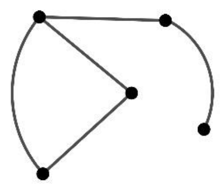

Figura 1. Ejemplo de un grafo

El *grado* de un vértice es el número de aristas que entran o salen de ese vértice. Los grafos pueden recorrerse, describiendo *caminos* que van de un cierto vértice a otro. Un camino es, por tanto, un conjunto de vértices conectados por aristas. Cuando todos los vértices están conectados por algún camino, se dice que el grafo es *conexo* (no hay vértices aislados del resto). Nosotros trabajaremos únicamente con grafos conexos.

Un grafo es *completo* si todo par de vértices está unido por una arista, es decir, teniendo un cierto número de vértices, el grafo tiene todas las aristas posibles, cada vértice está unido con todos los demás. Los grafos completos se denotan K_n donde n es el número de vértices, y tienen $n(n-1)/2$ aristas.

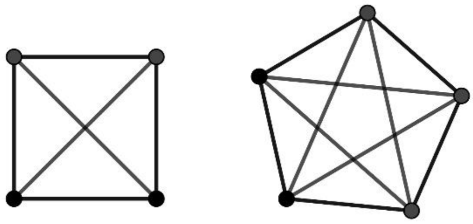

Figura 2. Ejemplos de grafos completos, K_4 y K_5

Cuando un grafo se puede dibujar en el plano de forma que no haya dos aristas que se crucen, entonces se dice que es un grafo *plano* (o planar). En nuestra propuesta hay grafos planos y no planos.

Al recorrer un camino, podemos volver al mismo vértice de partida, y describir un *camino cerrado* o *ciclo*. Un *camino euleriano* es un camino que pasa por cada arista una sola vez, aunque sí se puede pasar por un vértice más de una vez. Cuando el camino euleriano es cerrado tenemos un *ciclo euleriano*, esto es un camino cerrado donde se recorren todas las aristas exactamente una vez.

Podemos ampliar estos conceptos consultando cualquier manual introductorio a la teoría de grafos. La variedad de referencias sobre teoría de grafos es muy extensa, pudiendo encontrar publicaciones que se centran en la teoría matemática en sí, como el libro de Wilson (1983); libros con problemas resueltos como el de García Merayo y otros autores (García Merayo et al., 2018); y también artículos donde además de introducir la teoría, se trabaja alguna de sus aplicaciones, como por ejemplo la representación de la fórmula estructural de un compuesto químico mediante un grafo molecular en la asignatura de Química (Menéndez, 1998) o las aplicaciones de la teoría de grafos en la modelización de juegos de estrategia (Novo y Alonso, 2004) como *sumar 31* o el *juego de Nim*.

En otros casos, se ofrece un acercamiento a los grafos más divulgativo o adaptado a un contexto escolar. Entre estos últimos, se encuentran el libro de Coriat y otros autores (Coriat et al., 1989) o el libro de Alsina (2010).

En Coriat (et al., 1989) se propone el uso de los grafos a través de la modelización o resolución de algunos problemas, centrándose en su aplicación en las etapas de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria. Los autores reflexionan acerca de la incorporación de los grafos en los currículos educativos en estas etapas, resaltando como ventajas de esta inclusión la comprensión de estructuras de muchas situaciones prácticas sin una gran base matemática previa; y el hecho de que los alumnos puedan llegar a ser conscientes de sus propias estrategias de aprendizaje a través del trabajo con esas estructuras.

En Alsina (2010) se introducen los conceptos básicos y se realiza un recorrido bastante completo por los problemas clásicos donde aparecen los grafos, de una forma asequible y amena, y se presentan sus múltiples aplicaciones más recientes.

1.3. Polígonos estrellados

Al final de nuestra propuesta se relaciona el concepto de ciclo euleriano con el de polígono estrellado, por lo que incluímos aquí una breve introducción a los polígonos estrellados.

Los *polígonos estrellados* se obtienen al unir vértices no consecutivos en un polígono regular (es decir saltando de dos en dos, de tres en tres, etc.), siempre con el mismo número de salto pasando por todos los vértices del polígono, de forma que se pueden trazar sin levantar el lápiz del papel empezando y terminando en el mismo vértice.

Los polígonos estrellados pueden dibujarse de un solo trazo, por lo que, considerándolos grafos, son ciclos eulerianos (con todos los vértices de grado 2).

Cuando dentro de un polígono regular no es posible dibujar el polígono estrellado sin levantar el lápiz del papel, se obtiene una *estrella*. La condición para conseguir un polígono estrellado dentro de un polígono regular de n lados es que n y q (el salto) sean primos entre sí. El polígono estrellado que se obtiene se denota n/q (vértices/salto). Como da igual empezar a trazar el polígono en el sentido de las agujas del reloj o en el sentido contrario, un salto q produce siempre el mismo polígono que el salto $n-q$, por lo que el polígono estrellado $n/(n-q)$ es el mismo que el polígono n/q.
Como consecuencia, en un polígono regular de n lados se podrán dibujar tantos polígonos estrellados como números haya que sean menores que $\frac{n}{2}$ y primos con n a la vez.

En la siguiente figura tenemos como ejemplo el polígono estrellado 5/2, donde se han unido los 5 vértices del pentágono saltando de 2 en 2. Y la estrella 6/2, que son dos triángulos superpuestos.

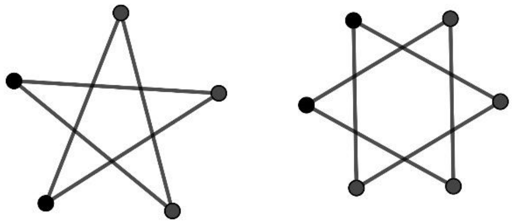

Figura 3. Polígono estrellado 5/2 y estrella 6/2

Las aristas del polígono estrellado se cruzan (sin cortarse en un vértice), por lo que en principio parece que este grafo no es plano, aunque en realidad sí lo es porque sí es posible dibujarlo de forma que las aristas no se crucen. Teniendo en cuenta que si lo dibujamos de otra forma, deja de tener aspecto de "estrella" y ya no sería un polígono estrellado, en lo sucesivo, consideraremos que los polígonos estrellados no son grafos planos.

De hecho, como consecuencia del Teorema de Kuratowski (Wilson, 1983, p.86) se tiene que ningún grafo completo K_n con $n \geq 5$ es plano. Por lo que, en el ejemplo anterior, el grafo completo K_5 no es plano.

Al hablar de grafos planos y no planos, tenemos la posibilidad de plantear actividades interesantes, donde se trate de averiguar si un grafo es plano o no, por ejemplo, el *problema de los pozos y las familias enemigas* (Alsina, 2010, p. 26). En García Merayo et al. (2018) también pueden encontrarse algunos ejercicios resueltos.

A su vez, los polígonos estrellados y las estrellas presentan propiedades interesantes y múltiples relaciones con otras construcciones geométricas. Fernández y Reyes (2003) nos muestran una breve introducción a los polígonos estrellados y las estrellas, a partir de la cual se desarrollan otras construcciones con el hexágono y el octógono, como proporciones y mosaicos, entre otros.

1.4. Revisión de la literatura sobre el tema

La teoría de grafos no es un contenido del currículum actual de Educación Primaria (Real decreto 126/2014, del 28 de febrero), de hecho, se trabaja a nivel universitario. Sin embargo, pensamos que es un contenido que debería integrarse en los currículums educativos desde la Educación Primaria, ya que la base matemática necesaria para su comprensión es sencilla, se aplica a múltiples problemas de la vida real y aporta al alumnado una estrategia potente de representación y resolución de problemas.

En esta línea, Alsina (2010) resalta el valor formativo de algunos recursos de la teoría de grafos, por lo que debería ser incorporada en los niveles preuniversitarios. En particular, destaca cuatro aspectos importantes: los grafos permiten modelizar muchas situaciones reales, facilitan las conexiones matemáticas constituyendo ejemplos de matemáticas en la vida cotidiana, promueven el aprendizaje de formas de razonamiento matemático y permiten trabajar la resolución de problemas.

En otros países se han realizado propuestas de inclusión de la teoría de grafos, y la Matemática Discreta en general, en la escuela (Rosentein, Franzblau, y Roberts, (Eds) 1997). De hecho, el National Council of Teachers of Mathematics recomienda su incorporación a los currículums escolares entre los 5 y los 18 años (NCTM, 1989, 2000).
La teoría de grafos se puede abordar desde muchas perspectivas y enfoques distintos, desde los recorridos, los árboles o el coloreado de mapas, entre otros. Además de los libros ya mencionados (Alsina 2010, y Coriat et al., 1989), se pueden encontrar diversos trabajos que parten de estos enfoques clásicos para integrar los grafos en las aulas de Educación Primaria o Secundaria. A continuación comentamos algunos de ellos.

En (Vergel, Molina y Echeverry, 2005) se propone una secuencia de enseñanza de tres actividades para introducir la teoría de grafos en la educación básica en Colombia. Parten de una adaptación del *problema del cartero chino* (Alsina, 2010, p.53), sin embargo, en las siguientes actividades se centran en aspectos teóricos sobre distintos tipos de grafos (si tienen ciclos eulerianos o no), en lugar de en sus aplicaciones. La propuesta se llevó a cabo en grado octavo, que corresponde a alumnos de 13-14 años.

Partiendo del coloreado de mapas, Braicovich y Cognigni (2011) presentan una experiencia realizada con estudiantes entre 5 y 14 años, distribuidos en grupos de máximo 6 estudiantes de distinta edad. El objetivo del trabajo es proponer actividades de coloreo de grafos para diversas edades, siguiendo la taxonomía de Bloom, aunque a lo largo del trabajo no aclaran cuántos estudiantes (ni de qué edades) participaron en el estudio ni en cada una de las experiencias, ordenadas por nivel de dificultad.
Entre las conclusiones del estudio, cabe destacar que el alumno es capaz de traducir un mapa al lenguaje de grafos a partir de los 7 años, y que no se encuentran dificultades a partir de los 9 años en las actividades de construcción del grafo correspondiente al mapa y coloreado del mismo.

El artículo de Nuñez y otros autores (2016) también defiende el uso de los grafos en Educación Secundaria y Bachillerato, por lo que está orientado a docentes de estos niveles educativos. Proponen varios problemas de la vida real resueltos mediante grafos, que pueden utilizarse en clase para introducir esta teoría.

Otros autores proponen partir de la matematización de juegos como el dominó y el sudoku, alejándose de las motivaciones históricas, para introducir los grafos en la Educación Secundaria. Véanse por ejemplo los siguientes trabajos, (Oller Marcén, y Muñoz Escolano, 2006) donde se presenta una actividad orientada para alumnos de cuarto de Educación Secundaria (alumnos de 15 años) introduciendo los grafos a través del juego del dominó; y (Martín Morales, Muñoz Escolano, y Oller Marcén, 2013) donde se desarrolla una actividad orientada desde Educación Secundaria (tercero de la ESO, alumnos de 14 años) a Universitaria, introduciendo los grafos a través de el dominó y el sudoku.

Es preciso enfatizar que son escasos los trabajos sobre grafos orientados específicamente a Educación Primaria, y más aun a alumnos con AACC en Matemáticas en este nivel educativo. Las pocas referencias existentes se limitan a incluir una o dos actividades sobre grafos en programas generales de enriquecimiento extracurricular (Araujo Guijo et al., 2015). A pesar de que en algunos programas de enriquecimiento extracurricular se ha podido verificar que los alumnos prefieren tareas creativas, aplicadas y prácticas, por proporcionar estas un aumento de la motivación (Rojo et al., 2010).
Como primer paso en esta dirección, ya que actualmente la teoría de grafos es un contenido fuera del currículum escolar, hacemos una propuesta para su inclusión dentro de los programas de enriquecimiento para alumnos con AACC en Matemáticas.

2. Descripción de la propuesta

A continuación, describimos una serie de actividades para introducir conceptos básicos de teoría de grafos, empleando el descubrimiento guiado como metodología de trabajo. Las actividades se agrupan por sesiones, de forma que cada sesión se lleve a cabo en un periodo de 45 minutos. Se detallan las indicaciones y las preguntas que deben realizarse al alumno para que vaya construyendo su propio aprendizaje.
Nuestro enfoque parte del coloreado de mapas, planteado como un reto a resolver. Esto nos proporciona un contexto en el que aparecen los grafos de forma natural, a partir del cual vamos desarrollando conceptos. Con el teorema de los cuatro colores introducimos el concepto de grafo (conjunto de vértices y aristas) de forma lúdica y motivadora.

En la siguiente sesión planteamos el problema clásico de los puentes de Köningsberg, donde además aparece el concepto de grado de un vértice y los ciclos eulerianos. Y a partir de ahí realizamos variantes, proponiéndole conjuntos de puntos que hay que unir utilizando un número concreto de trazos rectos.

Por último, le planteamos el problema "choca los 5", que es una variante del problema clásico "Handshake Problem", relacionándolo con polígonos estrellados, e introduciendo el concepto de grafo plano y grafo completo.

Hemos elegido este enfoque, en línea con los problemas clásicos, porque nos parece el más adecuado para introducir los grafos a alumnos con AACC a partir de 8 años. Ya que minimiza la cantidad de conceptos formales necesarios para poder empezar a trabajar y parte de situaciones cercanas al alumnado. Además, a lo largo de las sesiones se muestran algunas de las múltiples aplicaciones de los grafos en la resolución de problemas, y se relacionan con otros problemas más abstractos.

En concreto, las sesiones se estructuran siguiendo este esquema, basado en las etapas de enseñanza de la metodología de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas de Dienes (1997):

- Reto inicial (Adaptación): Se trata de una actividad "gancho" (coloreado de mapas), de enunciado simple, planteada como un reto con el objetivo de crear curiosidad en el alumno para que quiera aprender sobre el tema. Es el primer contacto con los grafos, aparece el concepto de grafo asociado a un mapa.
- Aplicación y práctica del nuevo concepto (Estructuración): Empezamos a usar los grafos para resolver problemas de recorridos o trazado de caminos con ciertas condiciones, aplicando lo aprendido. Aparece el concepto de camino cerrado, grado de un vértice, ciclo euleriano y grafo plano.
- Abstracción (Abstracción): Se usan los grafos para resolver un problema de mayor dificultad que los anteriores (choca los 5), donde aparecen procesos matemáticos más abstractos, en este caso la inducción, y aunque quede fuera de nuestros objetivos, la generalización. Aparecen los grafos completos.
- Actividad de cierre (Razonamiento): El objetivo de la actividad de cierre es relacionar los grafos estudiados con otros conceptos matemáticos. Se relacionan los grafos completos con los polígonos estrellados, elegidos por su vertiente lúdica.

La metodología de trabajo empleada en las sesiones siempre sigue el mismo patrón, inspirado en el modelo de resolución de problemas de Pólya (1981). Le planteamos una pregunta a modo de reto y le dejamos que intente resolverla libremente, pasamos a darle una indicación o ayuda, y continuamos planteándole nuevas preguntas. Prescindimos de formalismos y explicaciones teóricas, el alumno construye su propio aprendizaje, por lo que no hay definiciones teóricas ni se trabajan conceptos que no hayan aparecido de forma natural a lo largo del proceso.

A continuación, detallamos nuestra propuesta didáctica, que articula las actuaciones necesarias para la realización de esta experiencia de aprendizaje.

2.1. Objetivos específicos de aprendizaje

- Proporcionar a los alumnos de Educación Primaria con AACC en Matemáticas contenidos matemáticos fuera del currículo escolar adecuados a su nivel para potenciar el desarrollo de sus capacidades.
- Incluir la teoría de grafos como una estrategia de motivación para los alumnos de Educación Primaria con AACC en Matemáticas.
- Introducir a los estudiantes el concepto de grafo y algunos resultados básicos de la teoría de grafos, que les permitan representar gráficamente situaciones abstractas.
- Fomentar el uso de los grafos como herramienta de representación y resolución de problemas en las aulas de Educación Primaria desde una perspectiva lúdica.
- Facilitar las conexiones matemáticas a través de los grafos, relacionando las matemáticas con situaciones de la vida cotidiana.

2.2. Primera sesión. Coloreado de mapas. Teorema de los cuatro colores

El Teorema de los cuatro colores dice que se puede colorear cualquier mapa geográfico con cuatro colores, de forma que regiones vecinas no tengan el mismo color.

Cuando el mapa es simple, puede ser suficiente con 3 colores, el cuarto color es necesario cuando una región queda rodeada por un número impar de regiones, como es el caso de Cuenca. Como se puede observar en la siguiente imagen, al alternar los colores azul y rojo en las provincias limítrofes, necesitamos un cuarto color (amarillo) al haber un número impar de éstas.

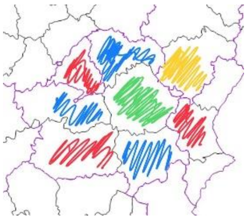

Figura 4. Coloreado de Cuenca y provincias limítrofes

El mapa completo se puede obtener por ejemplo en "Mapamundi" (Ramos Varas, 2018).

Desarrollo de la sesión

Le damos un folio con una imagen del mapa de España, con las provincias sin colorear y lápices de colores.

Cuestión 1 (Teorema de los cuatro colores): *¿Puedes colorear este mapa con el menor número posible de colores? Las provincias vecinas no pueden tener el mismo color.*

Le dejamos que coloree las provincias siguiendo la estrategia que quiera. En el primer intento es difícil que sea capaz de utilizar únicamente cuatro colores.

Sin embargo, será interesante ver qué tipo de estrategia sigue, por ejemplo, si empieza de forma ordenada por Galicia (provincia más próxima a la esquina superior izquierda) o elige alguna otra provincia por otro motivo (provincia de procedencia, residencia habitual, etc.)

Cuestión 2 (Grafo asociado): *Mira, para ir más rápido, podemos colorear solo un punto que llamaremos vértice, como un círculo pequeño, dentro de cada provincia, y unir los puntos de provincias vecinas con* *una línea, llamada arista. Obtenemos el grafo asociado al mapa, de forma que vértices unidos por una arista deben ser de distinto color.*

Se vuelve a plantear la tarea dibujando el grafo, permitiendo que realice varios intentos hasta que se dé cuenta de que las provincias problemáticas son aquellas rodeadas por un número impar de provincias. Si obtiene cinco colores o más, se le da la pista final de que es posible colorearlo con cuatro. Se pueden consultar algunos algoritmos secuenciales básicos de coloración de grafos en (García Merayo et al., 2018).

2.3. Segunda sesión. Trazado de caminos. Los puentes de Köningsberg

Contamos la historia de los puentes de Köningsberg, actualmente Kaliningrado. Esta ciudad tiene un río, llamado Pregel, que se bifurca dividiendo la ciudad en 4 zonas distintas comunicadas por 7 puentes.

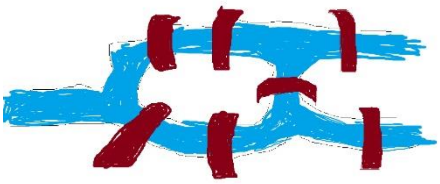

Figura 5. Representación de Köningsberg

Desarrollo de la sesión

Le damos una imagen similar a la anterior y hacemos las siguientes preguntas.

Cuestión 1 (Camino cerrado): *¿Puedes encontrar un camino para recorrer las 4 zonas de la ciudad, pasando solo una vez por cada puente y volviendo al punto de partida?*

Le dejamos que pruebe opciones usando el dedo para trazar los recorridos y/o dibujando sobre la imagen con rotuladores de colores. Obviamente no conseguirá hacerlo, ya que el problema no tiene solución.

Cuestión 2 (Grafo asociado): *¿Recuerdas cómo resolvimos el problema de colorear el mapa de España? Hacemos un punto en cada región y unimos mediante aristas las regiones conectadas por un puente. ¿Puedes resolver el problema usando el grafo asociado?*

El grafo asociado es similar a la siguiente imagen. Una vez dibujado, le dejamos que realice varios intentos siguiendo una estrategia libre.

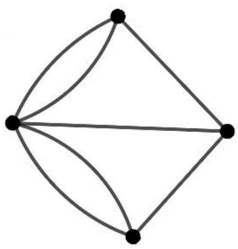

Figura 6. Grafo asociado al problema

Si sobre el grafo no llega a darse cuenta de que el problema no tiene solución, entonces le vamos dando indicaciones.

Cuestión 3 (Grado de un vértice): *Elige un vértice de partida y recorre el grafo. ¿Hay diferencias entre el vértice de partida y los demás? ¿Cómo deben ser los vértices intermedios?*

Cuestión 4: *Un vértice intermedio, ¿Cuántas aristas debe tener? El número de aristas que salen (o llegan) a un vértice, es el grado de ese vértice.*

Contamos el número de aristas que salen de cada vértice, tienen grados 5, 3, 3, 3.
Cuestión 5: *¿Un vértice intermedio debe tener grado par o impar? ¿Y el vértice de partida?*

En este punto debería darse cuenta de que todos los vértices tienen grado impar, pero los vértices intermedios deben tener grado par, porque por cada línea de llegada debe haber una de salida. Y también el vértice de partida, porque es también el vértice final. Así que el problema no tiene solución porque todos los vértices tienen grado impar.

2.4. Tercera sesión. Caminos especiales, los ciclos eulerianos. Variantes tipo acertijo

Relacionamos el problema de la sesión anterior con el recorrido de caminos en general, volviendo sobre la idea de camino cerrado e introduciendo el concepto de ciclo euleriano. Las variantes ayudan a desarrollar la creatividad del alumno, creando sus propios acertijos, lo que aumenta su motivación.
Al final, se relaciona el concepto de ciclo euleriano con el de polígono estrellado.

Desarrollo de la sesión

Cuestión 1 (Ciclo euleriano): *¿Recuerdas el problema del otro día? Este problema lo resolvió un matemático llamado Leonard Euler, así que, en su honor, se llama ciclo euleriano a un camino cerrado que recorre cada arista exactamente una vez. (Le damos un grafo como el de la imagen). ¿Este grafo es un ciclo euleriano?*

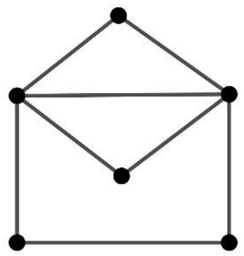

Figura 7. Sobre abierto

Para saberlo no hace falta recorrerlo, basta con contar el grado de cada vértice. Observaremos si comienza a recorrerlo para responder a la pregunta, o bien recuerda la sesión anterior y cuenta el grado de cada vértice. Como estrategia adicional que puede utilizarse a la hora de contar, se pueden numerar los vértices al contarlos para no repetir ninguno.

Cuestión 2: *Le pedimos que dibuje nuevos grafos que sean ciclos eulerianos, y otros que no lo sean, y posteriormente rete a sus compañeros a recorrerlos sin levantar el lápiz del papel ni pasar dos veces por el mismo sitio.*

Le dejamos tiempo para que realice varios ejemplos.

Cuestión 3 (Variantes tipo acertijo): *Le damos conjuntos de puntos para unir con trazos rectos sin levantar el lápiz del papel ni pasar dos veces por el mismo sitio, empezando y terminando en el mismo punto.*

Empezamos con los 9 puntos de la imagen, que se unen con 4 trazos rectos, y luego con 16, que se unen con 6 trazos rectos.

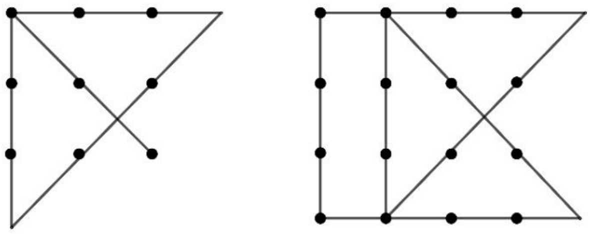

Figura 8. Conjuntos de 9 puntos y 16 puntos

Cuestión 4 (Otros ciclos eulerianos. Los polígonos estrellados): *¿Puedes dibujar una estrella de 5 puntas sin levantar el lápiz del papel?*

Le dejamos que realice los intentos necesarios hasta obtener una estrella similar a la de la *Figura 3*. Cada punta es un vértice y obtenemos un grafo que es un ciclo euleriano, y a la vez un polígono estrellado, donde se han unido los 5 vértices saltando de 2 en 2, por lo que este polígono estrellado se denota 5/2 (vértices/salto).

Cuestión 5: ¿Qué les ocurre a las aristas?

Las aristas se cruzan (sin cortarse en un vértice), como ya hemos comentado anteriormente. Lo que nos permite comenzar a hablar de grafos planos. Si se quiere profundizar en la teoría de grafos, se puede continuar en la siguiente sesión (o sesiones posteriores) estudiando grafos planos y no planos, aunque nosotros no lo haremos.

2.5. Cuarta sesión. Grafos aplicados a problemas de combinatoria. "Choca los cinco"

Se aplica lo aprendido a la resolución de un problema muy conocido, el problema de la fiesta, o de los apretones de manos (D'Angelo y West, 2000, p. 60). La versión más conocida dice que si en una habitación donde hay n personas, todas se saludan con un apretón de manos, ¿cuántos apretones de mano se producen? Para adaptarlo al contexto escolar, cambiamos los apretones de manos por "chocar los cinco" a modo de saludo. Una de las posibles estrategias de resolución, pasa por un proceso de inducción, contando el número de personas y el de veces que se chocan los cinco, quizá con el apoyo de una tabla:

Personas	2	3	4	5	6
Número de veces que chocan los cinco	1	3	6	10	15
Número de veces (contado añadiendo una persona al caso anterior)	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5

Tabla 1. Conteo del número de veces en función del número de personas

y generalizando el resultado a un número cualquiera, n. Cada nueva persona que se añade choca los cinco con las personas anteriores (n-1), por lo que continuando ese proceso inductivo, para n personas, obtenemos la suma 1+2+3+4+5+…+(n-1), cuyo resultado se puede calcular de varias maneras. La más sencilla, siempre que los números no sean grandes, consiste en realizar la suma.

Otra estrategia de cálculo más efectiva consiste en observar que cada persona choca con todos los demás menos él mismo, por lo que habría n*(n-1) choques, pero debemos dividir entre dos para no contarlos dos veces, así que son n*(n-1) /2.

Esta relación es muy abstracta para alumnado de unos 8 años de edad, aun considerando que sea alumnado con AACC en Matemáticas, ya que involucra el concepto de variable o "cantidad desconocida" o "número cualquiera", con el que no están familiarizados a esta edad. Por lo que consideraremos la actividad exitosa si llegan a deducir que cada persona choca los cinco con todos los demás menos él mismo, aunque no sepan expresarlo algebraicamente, ya que esa deducción lleva implícita la inducción.

Nuestro objetivo es por tanto trabajar la inducción, usando los grafos como herramienta de representación.

Los grafos aparecen aquí cuando representamos a cada persona con un vértice y unimos con una arista cuando chocan los cinco. Luego hay que contar el número de aristas para hallar la solución, lo que simplifica mucho el problema y lo reduce a representación y conteo.
De foma que con cantidades pequeñas, el alumno puede resolver el problema utilizando los grafos. Y esta representación puede ayudarle a deducir con cuánta gente choca los cinco cada persona cuando tenemos un grupo más numeroso, deduciendo posteriormente la fórmula.

Como cada par de vértices está conectado por una arista, se obtiene un grafo completo, que trataremos de descomponer en otros más simples en la siguiente sesión, para facilitar el recuento de las aristas cuando aumenta el número de vértices.

Desarrollo de la sesión

Se motiva el problema chocando los cinco al entrar en el aula. Se le plantea la pregunta inicial y vamos aumentando progresivamente el número de personas, 2, 3, 4, 5, 6 o más y luego un número alto, para que el número sea lo suficientemente grande como para que no pueda contarlo sin una estrategia.

Cuestión 1: *Si al encontrarnos tú y yo nos saludamos chocando los cinco una vez, ¿cuántas veces chocamos los cinco? ¿Y si viene un amigo y chocamos los cinco también con él?*

Le dejamos unos minutos para contestar, lo más sencillo es que lo hagan probando (chocando los cinco)

Cuestión 2: *¿Y si vienen dos amigos? ¿Y si somos 5 personas? ¿Y si somos 6 personas?*

Estos primeros casos pueden resolverlos probando y contando, no hace falta ninguna otra estrategia. Dependiendo del alumno, podemos valorar hasta qué número calcular, sin saltar ninguno. A partir de esa cifra empezamos a saltar.

Cuestión 3: *¿Y si somos 9 personas? ¿O 17 personas?*

A partir de aquí necesitan representar el problema de alguna forma, si no usan un grafo espontáneamente, les sugerimos que lo utilicen.

Cuestión 4: *¿Puedes representar las personas y los choques con un grafo?*

Aquí esperamos que el alumno sea capaz de contestar a la pregunta anterior, incluso que pueda responder preguntas similares con números más altos. Consideramos la actividad satisfactoria cuando relaciona el número de choques con el número de aristas que saldrían de un vértice sin necesidad de dibujarlas y contarlas todas. Y llega a la conclusión de que cada persona choca los cinco con todos los demás, por tanto, con el número de personas menos uno.

Alternativamente, si el alumno está previamente familiarizado con el lenguaje algebraico, entonces podemos hacerle la siguiente pregunta.

Cuestión 5: *¿Podrías decirme cuántos choques de manos hay sin dibujar el grafo ni contar las aristas una por una?*

Nuestro objetivo final llegado este punto es que generalice mediante un proceso inductivo. Apoyándose en la representación anterior, pero prescindiendo de ella, sea capaz de obtener una fórmula o un procedimiento eficaz de cálculo, por muy grande que sea n.

2.6. Quinta sesión. Actividad de cierre. Geometría lúdica, polígonos estrellados y estrellas

Volvemos sobre los polígonos estrellados, que aparecieron brevemente en la tercera sesión a modo de acertijo, y también en la cuarta sesión como parte de la solución al problema planteado para algunos números, aunque no se incidiera sobre ello.
Esta es la última sesión relativa a grafos dentro de nuestra propuesta, por lo que relacionamos los grafos con otros conceptos a modo de cierre de la experiencia y para afianzar la relación existente con las sesiones anteriores. Hemos elegido los polígonos estrellados por su componente lúdica.

Empezamos con el polígono estrellado de 5 puntas, dibujándolo dentro o fuera de un pentágono y relacionándolo con la sesión anterior. Con ello pretendemos que el alumno nos diga que las aristas del polígono estrellado son 5, que coincide con el número de vértices y también con el número de lados del pentágono. Además, este número es la mitad del número de veces que chocan los cinco 5 personas, y añadiendo el pentágono tendríamos la solución al problema de chocar los cinco, esto es 10 aristas o 10 choques.

Esto no ocurre en todos los casos, por ejemplo para 6 personas no es cierto que el polígono estrellado junto con el hexágono nos dé la solución al problema de chocar los cinco, ya que en este caso, no hay ningún polígono estrellado dentro del hexágono, porque no hay números menores que $\frac{6}{2}$ que sean primos entre sí con 6.

Cuando intentamos trazar el polígono estrellado con salto 2 se obtiene una estrella formada por dos triángulos superpuestos, por lo que no puede trazarse sin levantar el lápiz del papel ni empezando y terminando en el mismo vértice.

Para otros números hay varios polígonos estrellados, en lugar de únicamente uno, que juntos nos dan la solución al problema de chocar los cinco. Por ejemplo para 7 vértices, hay dos polígonos estrellados, 7/2 y 7/3, ambos con 7 aristas. Añadiéndoles el heptágono tenemos todas las aristas que proporcionan la solución al problema de chocar los cinco en un grupo de 7 personas, esto es 21.

Además de la componente lúdica, el objetivo de esta sesión es que aprecie la relación entre los polígonos estrellados y la solución al problema de chocar los cinco, en casos sencillos.

El uso de los polígonos estrellados en ese problema nos proporciona una estrategia de conteo sencilla y eficaz cuando aumenta el número de personas, y por tanto, el número de aristas o de veces que chocan los cinco entre ellas. Además, sirve como refuerzo para trabajar los procesos inductivos que aparecieron en la sesión anterior. Por otro lado, ofrecen una manera de descomponer un grafo completo en otros más sencillos.

Desarrollo de la sesión

Cuestión 1: ¿Te acuerdas de la estrella de cinco puntas? Ya ha aparecido otros días. ¿Recuerdas cómo se dibuja? ¿Se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel?

Le dejamos que la dibuje y responda, y continuamos preguntando.

Cuestión 2: Fíjate que has podido dibujarla sin levantar el lápiz del papel, uniendo los vértices de dos en dos, uno sí y uno no. Y si contamos las aristas ¿qué ocurre? ¿Qué número nos da el resultado? Solo las aristas de la estrella (en caso de que haya dibujado la estrella dentro de un pentágono).

Esperamos que nos diga que las aristas del polígono estrellado son 5, igual que el número de vértices y el número de lados del pentágono.

Cuestión 3: Si dibujamos también el pentágono que forman los vértices, ¿cuántas aristas salen en total?

Esperamos que nos diga que son 10, y que en ese caso coinciden con el número de veces que chocan los cinco un grupo de 5 personas, ya que cada vértice queda unido con todos los demás. Si no se da cuenta de ello continuamos con la siguiente pregunta.
Cuestión 4: Fijándonos en el dibujo, vemos que cada vértice queda unido con todos los demás, por lo que si pensamos en el problema de chocar los cinco, con 5 personas. ¿10 es el número de veces que chocan los cinco?

En este momento debería aparecer la relación entre ambos problemas. A partir de aquí podemos proponer diversas variantes:

- Una opción es continuar con 6 vértices y 7 vértices y ver qué ocurre, intentando descubrir que la relación entre el número de salto y el de vértices determina si hay polígonos estrellados y cuántos. Observando después (en una sesión posterior) que la suma del número de aristas de todos los polígonos estrellados más el polígono original coincide con el número de choques.
- Otra alternativa sería centrarnos únicamente en el trazado de polígonos estrellados, sin contar sus aristas. Aunque sí podemos estudiar en qué casos se obtiene un polígono estrellado y en cuáles no.
- Adicionalmente, proponemos dibujar polígonos estrellados usando regla y una plantilla, por ejemplo con un eneágono regular (tendremos solo dos polígonos estrellados, 9/2 y 9/4), un endecágono regular (se obtienen 4 polígonos estrellados: 11/2, 11/3, 11/4 y 11/5) o un heptadecágono regular (obtenemos 7 polígonos estrellados: 17/2, 17/3, 17/4, 17/5, 17/6, 17/7 y 17/8). Al aumentar el número de vértices es recomendable numerarlos para facilitar la construcción de los polígonos estrellados.

Continuamos relacionando ambos problemas, siguiendo con la primera opción.

Cuestión 5: ¿Crees que esto pasa siempre? Si dibujamos un hexágono y hacemos el polígono estrellado dentro, ¿también se podrá dibujar sin levantar el lápiz del papel? ¿Y nos saldrán en total 15 aristas?

En el caso del hexágono, sabemos que no se obtiene un polígono estrellado al unir los vértices de dos en dos. Cuando responda que no se puede, le sugerimos que una los vértices de tres en tres (salen tres aristas no conectadas) o de cuatro en cuatro (es equivalente a hacerlo de dos en dos, salen los mismos dos triángulos superpuestos) para que vea que sale lo mismo que de dos en dos.

Cuestión 6: Entonces con 5 vértices sí se puede, pero con 6 no. Vamos a intentarlo con 7 vértices, a ver si en ese caso se puede dibujar algún polígono estrellado.

Después de dibujar el polígono estrellado 7/2, le sugerimos unir los vértices saltando de 3 en 3, para que vea que también es posible y se obtiene un polígono estrellado distinto.

Cuestión 7: ¿Y si unimos los vértices de tres en tres? Hazlo aparte, para que no se mezcle con el anterior.

Una vez obtenido el polígono 7/3 le pedimos que haga lo mismo uniendo de cuatro en cuatro, para que observe que se obtiene el mismo polígono.

Cuestión 8: Con 7 vértices nos salen dos polígonos estrellados, ¿cuántas aristas tiene cada uno? Y si sumamos las 7 aristas del heptágono, ¿salen tantas aristas como veces chocan los cinco 7 personas?

Quizá vuelva a dibujar aparte los choques, para responder a la pregunta. Terminamos la sesión planteando la búsqueda de la relación entre el número de vértices y la existencia o no de polígonos estrellados.

Cuestión 9: ¿Por qué crees que con 5 y 7 vértices sí salen polígonos estrellados y con 6 vértices no?

Si al alumno le gusta el problema, en sesiones posteriores continuaríamos calculando el número de aristas.

3. Conclusiones

En este trabajo proponemos utilizar la teoría de grafos como una herramienta motivadora de enseñanza-aprendizaje para alumnos de Educación Primaria con AACC en Matemáticas. Diversos autores recomiendan incluir la teoría de grafos en los currículums escolares por los múltiples beneficios que ésta reporta, entre los que se encuentran su utilidad para modelizar situaciones reales y practicar la resolución de problemas (Alsina, 2010), o facilitar la comprensión de situaciones prácticas sin muchos conocimientos previos (Coriat et al.,1989).

Presentamos una propuesta de enseñanza estructurada en varias fases basadas en la metodología de Dienes, de forma que se puede ampliar el número de sesiones en cada fase según sea necesario, adaptándonos a las necesidades del alumnado. Para ello, a lo largo de la propuesta ofrecemos distintas variantes que se pueden realizar y referencias donde encontrar ejemplos de las mismas.

Para cada fase, exponemos al menos una sesión de forma detallada, que ejemplifica la metodología de trabajo fundamentada en el modelo de resolución de problemas de Pólya (1981), proporcionando las preguntas que deben realizarse al alumno en cada momento. Esto facilitará la puesta en práctica de nuestra propuesta a docentes no familiarizados previamente con la teoría de grafos o con el modelo de Pólya.

Las sesiones se interrelacionan unas con otras de forma que aportan al alumno una experiencia de aprendizaje cohesionada, pensada para alumnos con AACC en Matemáticas, aunque es susceptible de emplearse con todo el alumnado en el aula ordinaria. Nuestra propuesta contribuye a la mejora del aprendizaje de este tipo de alumnado proporcionándoles actividades que se salen del currículum oficial, les hacen pensar, y a la vez se adaptan a sus necesidades. Los alumnos con AACC en Matemáticas precisan actividades acordes a su ritmo de aprendizaje, por lo que nuestra propuesta se integra dentro del horario escolar, trabajando de forma individual o en pequeños grupos.

Como uno de los objetivos principales de nuestra propuesta es aumentar la motivación y el interés hacia las Matemáticas de estos alumnos, se intercalan algunas actividades tipo acertijo y de geometría lúdica (polígonos estrellados) en las que puedan desarrollar su creatividad aplicando los grafos.
Además de motivarles, con esta propuesta los estudiantes podrán adquirir nuevas estrategias para resolver problemas de la vida diaria, ya que los grafos permiten representar múltiples situaciones de su entorno, facilitando al mismo tiempo la aparición de conexiones matemáticas.

Aportamos una experiencia de aprendizaje novedosa, al proporcionar una metodología basada en el aprendizaje guiado sobre un concepto que apenas se trabaja en Educación Primaria (concepto de grafo) y el cual modela muchas situaciones de la vida cotidiana.

El siguiente paso es poner en práctica esta propuesta, realizando un estudio cuantitativo y cualitativo para evaluar el grado de consecución de los objetivos planteados. Valorando tanto la adquisición de los contenidos matemáticos y las estrategias involucradas, como la percepción que tiene el alumno hacia las Matemáticas antes y después de la realización de esta propuesta de enseñanza.

Ya hemos realizado una intervención en este sentido, por lo que presentaremos sus resultados en una próxima publicación.

Referencias

Alsina, C. (2010). *Mapas del metro y redes neuronales: la teoría de grafos*. Barcelona, España: RBA Coleccionables, S.A.

Araujo Guijo, I., Fernández Reyes, M.T., Núñez Valdés, J., y Sanz Gil, F.J. (2015). Aprendiendo de al tiempo que enseñando a alumnos de altas capacidades. *Pensamiento Matemático*, (1), 7-16.

BOE (10/9/13) Ley Orgánica 8/2013 del 9 de diciembre para la Mejora de la Calidad Educativa.

BOE (3/1/14) Real Decreto 126/2014, del 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

Braicovich, T., y Cognigni, R. (2011). Coloreando la geografía desde el plano al toroide. *Números*, *76*, 135-148.

Cordero Monge, M.C. (2017). Las características del alumnado con altas capacidades intelectuales. En M, Dorado (Coord.), *Altas Capacidades Intelectuales. Guía práctica de atención al alumnado* (pp.19-43). Barcelona, España: Publicaciones Altaria, S.L.

Coriat, M., Sancho, J., Marín, A., y Gonzalvo, P. (1989). *Nudos y nexos. Redes en la escuela.* Madrid, España: Síntesis.

ESTALMAT (2019). *Estímulo del Talento Matemático*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología. Ministerio de Ciencia, Innovación e Universidades. Recuperado de http://www.estalmat.org/

D'Angelo, J. P., y West, D. B. (2000). *Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Dienes, Z.P. (1977). *Las seis etapas del aprendizaje de matemáticas*. Barcelona, España: Teide.

Fernández, I., y Reyes, E. (2003). *Geometría con el hexágono y el octógono : papiroflexia, proporciones, disecciones, cuadraturas, mosaicos, geometría sagrada*. Armilla, Granada : Proyecto Sur, D.L.

Gardner, H. (1995). *Inteligencias Múltiples*. Barcelona, España: Paidós.

García Merayo, F., Hernández Peñalver, G., y Nevot Luna, A. (2018). *Problemas resueltos de matemática discreta*. 2ª ed. amp. Madrid, España : Paraninfo, D. L.

Martínez Torres, M. (2012). Características del alumnado con altas capacidades. En M., Torres Martínez y Á., Guirado. (Coord.), *Altas Capacidades Intelectuales. Pautas de actuación, orientación, intervención y evaluación en el periodo escolar* (pp. 71-118). Barcelona, España: Graó.

Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos. *Suma*, *28*, 11-26.

Martín Morales, J., Muñoz Escolano, J. M., y Oller Marcén, A. M. (2013). Empleo didáctico de juegos que se materializan mediante grafos: una experiencia. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, (12), 137-164.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council. Recuperado de http://www.standards.nctm.org/index.htm

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council. Recuperado de http://www.standards.nctm.org/index.htm

Novo, E., y Alonso, A. M. (2004). Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia. *Suma*, *46*, 31-35.

Nuñez, R., Nuñez, J., Paluzo, E., y Salguero, E. (2016). Jugueteando con grafos. *Unión, revista iberoamericana de educación matemática*, 46, 188-204.

Oller Marcén, A., y Muñoz Escolano, J. M. (2006). Euler jugando al dominó. *SUMA*, 53, 39-49.

PEAC (2019) *Programa de Enriquecimiento Educativo para alumnos con altas capacidades de la Comunidad de Madrid.* EducaMadrid. Recuperado de https://www.educa2.madrid.org/web/peac/inicio

PEE (2019). *Programa de Enriquecimiento Educativo*. Asociación de Robótica Educativa. Junta de Extremadura. Recuperado de https://www.yohagorobots.com/

PEEACCYL (2019). *Programa Enriquecimiento Extracurricular Altas Capacidades de la Junta de Castilla y León*. CREECYL. Equipo de orientación educativa y multiprofesional para la equidad educativa de Castilla y León. Recuperado de http://creecyl.centros.educa.jcyl.es/sitio/index.cgi?wid_seccion=26

Pólya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas.* Madrid, España: Servicios Editoriales Profesionales, S.A. Trillas.

Ramos Varas, A. (2018). *Mapa de España mudo.* Recuperado de https://mapamundi.online/europa/espana/

Renzulli, J.S. (1994). El concepto de los tres anillos de la superdotación: un modelo de desarrollo para una productividad creativa. En Y, Benito. (Coord.), *Intervención e investigación psicoeducativa en alumnos superdotados* (pp. 41-78). Salamanca, España: Amarú ediciones.

Rojo, Á., Garrido, C., Soto, G., Sáinz, M., Fernández, M. C., y Hernández, D. (2010). Talleres de enriquecimiento extracurricular para alumnos de altas habilidades. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado*, 13(1), 137-146.

Rosentein, J., Franzblau, D. y Roberts, F. (Eds) (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*, DIMACS Series in Discrete Mathematics Computer Science, Volume 36, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS).

Vergel, C., Molina, B., y Echeverry A. (2005). Grafos en la Educación Básica. *REVISTA EMA*, 10(2 y 3), 440-451.

Wilson, R. J. (1983). *Introducción a la teoría de grafos*. Madrid, España: Alianza.

Rocío Blanco Somolinos. Doctora en Matemáticas. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Facultad de Educación de la UCLM en Cuenca desde el curso 2009/2010. Miembro del grupo de investigación Enseñanza de las Matemáticas (EMAT) de la UCLM. Sus líneas de investigación se centran en diversos aspectos en resolución de problemas, incluyendo métodos estructurados de resolución de problemas, dificultades de los alumnos de primaria a la hora de resolver problemas aritméticos, dificultades de los alumnos con necesidades educativas especiales. Departamento de Matemáticas. Facultad de Educación Cuenca. Universidad de Castilla-La Mancha. Campus Universitario. 16071. Cuenca. Teléfono: (+34) 969 17 91 70. Ext: 4418.
Email: mariarocio.blanco@uclm.es

Melody García-Moya. Personal investigador en formación dentro del Doctorado en Investigación en Humanidades, Artes y Educación de la Universidad de Castilla-La Mancha. Colaboradora en el grupo de investigación Enseñanza de las Matemáticas (EMAT). Sus líneas de investigación son resolución de problemas en Educación Primaria y enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo. Departamento de Matemáticas. Facultad de Educación de Toledo. Universidad de Castilla-La Mancha. Campus Universitario Fábrica de Armas. 45071. Toledo. Teléfono: (+34) 925268800. Ext: 5935.
Email: melody.garcia@uclm.es