

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Departamento de Economía Aplicada



**NUEVOS ÍNDICES DE EFICIENCIA EN LA
TEORÍA CLÁSICA DE LA DEMANDA**

Tesis Doctoral

Luis Daniel López Matos
Ciencias Económicas y Empresariales

Valladolid, junio de 2011

A Chari

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mis directores, Dr. D. José Carlos Rodríguez Alcantud y Dr. Carlos Rodríguez Palmero, el constante apoyo que me han ofrecido en todo momento durante la realización de la tesis doctoral, su ejemplo personal, profesional e intelectual y, cómo no, su amistad. Además, deseo aprovechar la ocasión para poder expresarles mi agradecimiento más profundo por haber aceptado dirigir esta memoria, y por haberla dirigido con tanto cariño, sabiduría y paciencia. También deseo agradecerles sus esclarecedores comentarios, observaciones y recomendaciones. Así mismo, también deseo expresar mi gratitud, por su disponibilidad, generosidad y bondad, y por su entusiasmo y enorme paciencia que me han mostrado durante todo el tiempo que me ha llevado la elaboración de esta memoria.

Quisiera también agradecer a algunas personas la confianza y apoyo que me han transmitido, lo que ha resultado fundamental para mí, pues me han dado ánimos para superar todos los momentos difíciles. En primer lugar, deseo mostrar mi gratitud a todos los compañeros de las secciones de Estadística Económica y Empresarial y de Matemáticas Empresariales del Departamento de Economía Aplicada de la Universidad de Valladolid, por haberme tratado con tanto cariño durante los meses de estancia que estuve en el departamento en los años 2000 y 2002. En segundo lugar, quiero dar las gracias a todos mis amigos y a aquellos antiguos compañeros de la Universidad Católica “Santa Teresa de Jesús” de Ávila a los que me une una gratificante amistad. Estoy en deuda con Mario por todo el ánimo y ayuda que me ha transmitido, especialmente en los momentos difíciles que he pasado durante los años que he estado dedicado a la realización de esta memoria. A todos, mi más profundo agradecimiento.

Finalmente, pero desde luego no menos importante, quiero agradecer el apoyo, cariño y comprensión que he recibido de Chari, mi novia, y a mi familia su cariño, paciencia y la fuerza moral que durante todo momento me ha brindado.



Universidad de Valladolid

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Departamento de Economía Aplicada

**NUEVOS ÍNDICES DE EFICIENCIA EN LA
TEORÍA CLÁSICA DE LA DEMANDA**

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad de Valladolid

Directores:

Dr. D. José Carlos Rodríguez Alcantud
Depto. Historia y Análisis Económico
Universidad de Salamanca

Dr. D. Carlos Rodríguez Palmero
Depto. Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Valladolid

Valladolid, junio de 2011

Introducción

En economía numerosos problemas y postulados económicos descansan (se apoyan) en el principio de la optimización matemática: las empresas generalmente tratan de minimizar costes o maximizar beneficios; los consumidores de maximizar su utilidad, etc. En la teoría clásica de la demanda, que postula que las elecciones realizadas por un consumidor racional se derivan de un problema de la maximización de la utilidad sujeto a una restricción presupuestaria, el modelo de elección óptima impone algunas restricciones importantes sobre la conducta observada. Estas restricciones se formalizan mediante ciertas condiciones algebraicas, conocidas como condiciones de preferencia revelada derivadas de la función de demanda (WARP, SARP, GARP, HARP, etc) o condiciones basadas en el cálculo diferencial como, por ejemplo, las *condiciones de integrabilidad*. Así pues, en la literatura económica existen dos aproximaciones tradicionales que permiten analizar la racionalidad de un individuo: la aproximación econométrica, en adelante aproximación paramétrica, y la aproximación no paramétrica, basada en la teoría de la preferencia revelada. En su versión reducida esta teoría se limita a un conjunto finito de datos observables de precios y cantidades demandadas en un contexto competitivo, intentando descubrir todas las implicaciones empíricas de la hipótesis de consistencia de un individuo.

La aproximación paramétrica requiere sumergir los datos en alguna forma funcional específica (o flexible) de la utilidad, derivar el conjunto asociado de funciones de demanda, proceder – con la ayuda del conjunto de las elecciones de consumo– a la estimación de los parámetros desconocidos y, finalmente, comprobar si éstos satisfacen las condiciones teóricas del modelo de optimización. La aproximación econométrica a la teoría económica de la demanda puede realizarse desde dos enfoques diferentes. El primero se caracteriza por imponer restricciones implícitas o explícitas sobre la función de utilidad o de demanda que representa las preferencias de un individuo. En el segundo, se utilizan las formas funcionales flexibles (aproximaciones a las funciones de utilidad –directa o indirecta– o a la función de gasto) que proceden de aproximaciones de Taylor o de Laurent a la función de utilidad, en lugar de formas algebraicas específicas. En principio, los únicos requisitos exigidos son que, en primer lugar, posean un número suficiente de parámetros como para que pueda considerarse una aproximación adecuada a la verdadera función de utilidad o de gasto y, en segundo lugar, que generen funciones de

demanda potencialmente integrables dado que las condiciones de integrabilidad (la matriz de los términos de sustitución de Slutsky sea simétrica y semidefinida negativa) caracterizan las restricciones teóricas derivadas del proceso de maximización de la utilidad y, en consecuencia, la consistencia de la función de demanda con la teoría clásica de la demanda. El principal problema que surge al emplear esta aproximación en el análisis empírico de la demanda es que las conclusiones dependerán de las especificaciones paramétricas utilizadas y, por lo tanto, esta aproximación no es un procedimiento muy eficaz para determinar si un consumidor presenta (o ha presentado) un comportamiento optimizador. Si como resultado del contraste, las elecciones de consumo no verifican la hipótesis de la maximización de la utilidad, esta violación puede haber estado ocasionada por el hecho de que las elecciones no procedan realmente de una conducta optimizadora o ser consecuencia de que las restricciones paramétricas empleadas en el modelo no han sido las más apropiadas. Lo anterior sugiere la utilización de una aproximación alternativa que no presente estas limitaciones puesto que no hay necesidad alguna de sumergir el modelo de optimización en un contexto paramétrico. Además, contrastar las restricciones paramétricas (derivadas del particular modelo de optimización analizado) usando los tests de hipótesis clásicos supone un sentido demasiado restrictivo del significado de la “significatividad”, como mostraremos en esta memoria.

La aproximación no paramétrica, basada en la teoría de la preferencia revelada, permite contrastar modelos de optimización razonablemente complejos sin tener que sumergir el modelo de optimización en un contexto paramétrico. Esta aproximación (surgida a raíz de los trabajos seminales de Samuelson (1938), Houthakker (1950), Afriat (1967) y Varian (1982) sobre la preferencia revelada) postula la consistencia de los datos observados con el modelo de optimización analizado a partir de unos contrastes no paramétricos (basados en ciertas condiciones algebraicas de la preferencia revelada) que caracterizan la consistencia de un conjunto finito de datos con algún índice de utilidad¹. La hipótesis se rechaza si no se satisface al menos una de las restricciones del conjunto de restricciones no paramétricas que la caracterizan; en caso contrario, la hipótesis se acepta. A modo de ejemplo, supongamos que estamos interesados en contrastar la hipótesis de si una empresa está maximizando los beneficios en un entorno competitivo. La teoría económica establece que si la empresa está maximizando el beneficio en lo que se refiere a un conjunto de datos de tamaño n , la elección de la producción neta observada correspondiente a un determinado vector de precios debe generar un nivel de beneficios al menos tan grande como el que generaría cualquier otra producción neta que pudiera elegir la empresa. A esta condición se la denomina *Axioma Débil de la Maximización del Beneficio* (WAPM).

En la literatura económica son numerosos los trabajos que muestran que el comportamiento de un consumidor (resp. de una empresa) no es maximizador. En estos trabajos se ha comprobado la inconsistencia de los datos observados con las diferentes condiciones algebraicas de la preferencia revelada derivadas del correspondiente modelo de optimización. Al hablar de inconsistencia nos referimos a que el comportamiento observado del consumidor viola alguno de los

¹Los tests no paramétricos de la preferencia revelada son “contrastos exactos” de la optimización que no incorporan ningún error de medida ni de naturaleza aleatoria.

axiomas de la preferencia revelada y, por consiguiente, sus elecciones de consumo no proceden del correspondiente comportamiento optimizador. Si es improbable que las empresas maximicen beneficios o minimicen los costes de manera exacta, es aún más improbable que los consumidores exactamente maximicen la utilidad. En consecuencia, resultará de especial relevancia no solamente analizar si un consumidor (resp. una empresa) está maximizando exactamente su utilidad (resp. sus beneficios), sino saber en qué medida lo hace; esto es, inferir –a partir de los datos observados– si el modelo de maximización de la utilidad (resp. el modelo maximización del beneficio) describe razonablemente bien su conducta. Si el agente no es maximizador en muy pocas ocasiones, o por una cantidad “razonablemente pequeña”, tal vez estemos dispuestos a aceptar que el consumidor (resp. la empresa) “casi” esté maximizando su utilidad (resp. sus beneficios). Por otra parte, como para la mayoría de los propósitos un comportamiento “próximo a uno optimizador” puede considerarse como un comportamiento optimizador, resulta natural preguntarse si el modelo neoclásico del equilibrio del consumidor está en contradicción con los datos: ¿los errores son demasiado pequeños para ser ignorados?, ¿hasta qué punto se “parecen” las elecciones observadas a las elecciones maximizadoras? Para responder a estas cuestiones, además de contar con una definición razonable del significado de “parecido”, es necesario disponer de diferentes medidas de la bondad del ajuste del particular modelo de optimización.

La aproximación paramétrica a la teoría de la demanda se ha venido utilizando tradicionalmente para estudiar la eficiencia de las decisiones de consumo de un individuo; esto es, para analizar la bondad del ajuste del modelo de la maximización de la utilidad. En esta aproximación se supone que las preferencias de un consumidor han sido generadas a partir de una función de utilidad específica que depende de un parámetro (o lista de parámetros) desconocido. A partir de las elecciones efectuadas es posible estimar el parámetro (o lista de parámetros) que describe la función de demanda que mejor describe la conducta de elección observada y comparar el nivel de utilidad en las elecciones óptimas –calculada mediante la función de utilidad estimada– con la utilidad correspondiente a las elecciones reales. El problema que subyace con este procedimiento es la escasa relación existente entre las pruebas de hipótesis estadísticas y la significatividad económica de las posibles inconsistencias presentes en los datos. Supongamos, por ejemplo, que estamos analizando la bondad del ajuste del comportamiento de un consumidor cuyas preferencias se supone que están representadas por una función Cobb-Douglas. Si contrastamos esta hipótesis y resulta rechazada, ¿qué es lo que estaríamos rechazando?, ¿qué significado económico tiene que los parámetros estimados difieran considerablemente de lo establecido en las restricciones teóricas; esto es, que no sumen uno? En este caso diríamos que los datos violan las restricciones teóricas puesto que la optimización exacta implica que los parámetros estimados deben sumar uno². Además, podríamos afirmar que dicha violación es estadísticamente significativa; pero, ello no implicaría necesariamente que esta violación fuese también significativa desde el punto de vista económico puesto que, como muestra Varian (1990), una diferencia significativa (en términos de distancia euclídea) entre los parámetros estimados y los corres-

²La optimización exacta implica la existencia de algún tipo de relación entre algunos parámetros estimados. En términos generales, el modelo de optimización se rechaza si el valor observado del estadístico es improbable de acuerdo con la distribución de muestreo de los parámetros.

pondientes valores teóricos no implica necesariamente una clara violación de la hipótesis de la maximización de la utilidad³. El valor del test estadístico no suele dar ninguna pista en cuanto a si el agente económico en cuestión es casi o totalmente consistente con la hipótesis de la optimización de la optimización, o no, etc. Además, lo importante en economía no es saber si una violación del modelo de optimización del consumidor es estadísticamente significativa sino más bien si es económicamente significativa. Varian (1990) argumenta las limitaciones de utilizar la aproximación paramétrica para el análisis de la eficiencia en el consumo y sugiere utilizar la aproximación no paramétrica para cuantificar el grado de eficiencia de las decisiones de consumo de un individuo, así como para colegir si el consumidor (resp. una empresa) ha presentado un comportamiento “casi optimizador” o “próximo” a uno optimizador.

La aproximación no paramétrica es el marco idóneo para analizar la eficiencia en el consumo puesto que permite analizar el grado de eficiencia de las decisiones de consumo de un individuo y ofrece una interpretación económica del concepto de eficiencia en términos del dinero “derrochado” por un consumidor en sus decisiones de consumo inconsistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Afriat (1972, 1973) fue el primer autor en sugerir utilizar el enfoque de la teoría de la preferencia revelada para analizar la eficiencia económica y/o tecnológica de los modelos de optimización. Este autor propuso utilizar un índice global (como medida global de la bondad del ajuste del modelo optimizador de un consumidor) para determinar si un individuo ha presentado o presenta un comportamiento “casi optimizador” en sus decisiones de consumo. A raíz del trabajo seminal de Afriat han sido numerosos los intentos que, en los últimos años, han tratado de resolver este problema: Varian (1985) propone encontrar el conjunto de datos más próximo a los datos observados en alguna norma apropiada; Houtmann & Maks (1985) desarrollan un método para determinar todos los subconjuntos de elecciones de consumo consistentes con el *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada* (SARP); Swofford & Withney (1987) y McMillan & Amoako-Tuffour (1988) proporcionan un test basado en la comparación del número de elecciones de consumo que violan el *Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada* (GARP) con el número máximo posible; Famulari (1996) proporciona un índice que compara el número de violaciones GARP con el número posible de violaciones GARP; Gross & Kaiser (1996) diseñan dos algoritmos que permiten generar un subconjunto de elecciones de consumo consistentes con el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* (WARP); y, finalmente, Varian (1990, 1993) generaliza la aproximación de Afriat al permitir un nivel de eficiencia distinto en cada observación. Sin embargo, ninguna de estas aproximaciones a la eficiencia en el consumo han sido capaces de cuantificar el “porcentaje mínimo” de dinero que precisa gastar un consumidor en cada situación presupuestaria para obtener el mismo bienestar en comparación con la cantidad de dinero que utiliza realmente y, en consecuencia, no resultan muy eficaces para determinar (a partir de los datos observados) si el comportamiento de un individuo está próximo a uno optimizador.

³Véase Varian (1990).

Objetivos

Una vez establecido el marco de referencia, los objetivos de esta tesis doctoral son múltiples. En primer lugar, realizamos una breve revisión de la versión (reducida) de la teoría de la preferencia revelada y mostramos cómo encontrar una función de utilidad que representa la conducta observada de un consumidor racional es equivalente a resolver un problema de distancias mínimas en un grafo dirigido. En segundo lugar, y una vez caracterizadas las condiciones algebraicas de la preferencia revelada que caracterizan la consistencia de los datos con algún índice de utilidad, analizamos la cuestión de las decisiones de consumo de un individuo, y proporcionamos nuevas medidas de la bondad del ajuste que nos permitirán hallar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo (no necesariamente homo economicus). Además, abordaremos la cuestión de la operatividad de la preferencia revelada, aspecto que, a pesar de su importancia, no ha sido lo suficientemente tratado. Finalmente, reseñamos la importancia de la Economía Experimental en el estudio empírico del comportamiento de un consumidor y presentamos los resultados de dos experimentos económicos. Concluimos la memoria con la presentación de un glosario donde se definen algunos de los principales conceptos de diferentes disciplinas (psicología económica, marketing, matemáticas, etc.) relacionados directamente con esta memoria.

A lo largo de esta memoria utilizaremos el color **AZUL** para señalar los nuevos resultados proporcionados y el color **ROJO** para indicar las pruebas alternativas a resultados ya existentes en la literatura económica.

Sinopsis

A continuación se describe brevemente el contenido de cada uno de los capítulos que integran esta memoria.

Capítulo 1

El objetivo de este capítulo es diverso. En primer lugar, realizamos una breve revisión de la versión reducida de la Teoría de la Preferencia Revelada y caracterizamos los diferentes test de la preferencia revelada que permiten contrastar la racionalidad de un individuo en un contexto competitivo y analizamos las relaciones existentes entre los diferentes axiomas de la preferencia revelada. En segundo lugar, mostramos cómo el problema de encontrar una función de utilidad no saciada, continua, cóncava y monótona que racionaliza la conducta observada de un consumidor maximizador de la utilidad equivale a resolver un problema de distancias mínimas en un grafo dirigido. En tercer lugar, presentamos dos nuevas demostraciones del Teorema de Afriat. En la primera prueba presentamos una demostración constructiva del Teorema de Afriat más eficiente (desde el punto de vista computacional) que los procedimientos constructivos empleados por Diewert (1973), Varian (1982) y Scarf, Todd y Fostel (2004), entre otros. En la segunda utilizamos una versión del Teorema de la Alternativa para demostrar la existencia de

una relación de preferencia que racionaliza un conjunto finito de datos de demanda consistentes con GARP. Finalmente, mostramos la estrecha relación existente entre la versión reducida de la teoría de la preferencia revelada y la teoría de grafos dirigidos, fundamental a la hora de analizar la consistencia de los datos con algún índice de utilidad.

Capítulo 2

En este capítulo analizamos el problema de la bondad del ajuste de los modelos de optimización desde una perspectiva no paramétrica. En la sección 2.1 realizamos una revisión histórica de los principales resultados y trabajos que abordan la eficiencia en el consumo desde una perspectiva no paramétrica. En la sección 2.2 respondemos a una pregunta planteada por Gross (1991) en *The American Economic Review* al caracterizar a los subconjuntos de observaciones consistentes con GARP y proporcionar un procedimiento exacto que permite hallar subconjuntos maximales de cardinal máximo consistente con GARP. También proporcionamos diferentes métodos aproximativos eficientes que nos permiten calcular un subconjunto maximal (no necesariamente de cardinal máximo) de observaciones de demanda consistentes con GARP. En la sección 2.3 extendemos la aproximación no paramétrica a la eficiencia en el consumo de Afriat (1972, 1973) y Varian (1987, 1990) en varias direcciones. En primer lugar, construimos un procedimiento algorítmico para obtener el valor exacto del índice de Afriat en un tiempo polinomial. Este procedimiento no presenta las desventajas del método original de Afriat ni del método propuesto por Houtman y Maks. También presentamos un procedimiento matricial para obtener el índice de Varian a través de operaciones elementales (sumas, multiplicaciones booleanas, etc.) en el espacio de las matrices (booleanas y reales). En segundo lugar, construimos dos nuevos índices de eficiencia que son mejores en el sentido de Pareto que el índice de Varian. Finalizamos esta sección construyendo un nuevo índice que mejora simultáneamente en el sentido de Pareto los índices de Afriat y Varian. En la sección 2.4 generalizamos tanto la aproximación no-paramétrica planteada por Afriat, y posteriormente desarrollada por Varian, en varias direcciones. En primer lugar, demostramos que para cada serie finita de datos de demanda se puede construir –a partir de la familia formada por todos los subconjuntos inconsistentes (resp. fuertemente inconsistentes) con GARP– una familia finita de conjuntos de niveles de eficiencia. A continuación, creamos una familia de índices de eficiencia que generalizan la aproximación de eficiencia de Afriat, demostraremos cómo el índice de Afriat es un miembro de esta familia y caracterizamos a aquellos miembros que son mejores en el sentido de Pareto que el índice de Afriat. De manera análoga, creamos una familia de índices de eficiencia que generalizan la aproximación de eficiencia de Varian y demostramos cómo todos los miembros de esta familia describen mejor en el sentido de Pareto el comportamiento de la demanda que el índice de Varian. Además, construimos una tercera familia de índices que determina de manera exacta el porcentaje mínimo de dinero que se le permite “derrochar” a un consumidor para que sus decisiones de consumo sean consistentes con la teoría clásica de la demanda y colegir, por tanto, si un consumidor ha presentado un comportamiento próximo, o no, a uno “optimizador”. Esta familia de índices de eficiencia ofrece la respuesta a los problemas planteados por Varian (1990) en *The Journal of Econometrics* y por Gross (1995) en *The Review of Economics and*

Statistics. Finalmente, en la sección 2.5 presentamos dos estadísticos que nos permitirán realizar un contraste de hipótesis no-paramétrico, basado en una chi-cuadrado, para comprobar estadísticamente si las inconsistencias (con la hipótesis de la maximización de la utilidad) presentes en los datos son de carácter estructural o, por el contrario, están ocasionadas por la existencia de pequeños errores de medida o de naturaleza estocástica. Además, realizamos un experimento de Monte Carlo para probar cómo los estadísticos anteriores existentes en la literatura rechazan, en algunas ocasiones, GARP cuando esta violación ha sido producida por la existencia de un pequeño error de medida o de naturaleza estocástica.

Capítulo 3

En este capítulo abordamos la cuestión de la operatividad de la teoría de la preferencia revelada debido a que la estructura de las preferencias del consumidor es un fenómeno complejo que merece una investigación mayor de la que hasta ahora se ha realizado. Este capítulo ha sido diseñado con objeto de proporcionar una aportación modesta al desarrollo de métodos que sean útiles para describir correctamente la estructura de la revelada y mostrar esta teoría como un instrumento operativo del proceso de elección de un individuo. En la sección 3.1 presentamos una revisión histórica de los principales test no paramétricos de la optimización y de los numerosos estudios empíricos, tanto de economía aplicada como de economía experimental, que han utilizado la teoría de la preferencia revelada para analizar el comportamiento de un consumidor. En la sección 3.2 realizamos un análisis sobre la operatividad de la teoría de la preferencia revelada, extendiendo los análisis efectuados por Koo (1972) y Wakker (1997) en varias direcciones. En esta sección utilizamos el isomorfismo existente entre las relaciones binarias y las matrices booleanas (cuando el conjunto de opciones es finito) para tratar computacionalmente la estructura preferencial de un consumidor y proporcionamos dos nuevos índices de eficiencia. En la sección 3.3 presentamos el marco teórico del análisis de la sensibilidad de los diferentes tests no paramétricos de la preferencia revelada utilizados en el estudio empírico del comportamiento de un consumidor y proporcionamos una generalización natural de los diferentes modelos clásicos de comportamiento aleatorio de un consumidor que nos permitirán evaluar de manera más precisa la sensibilidad de los diferentes tests no paramétricos en cualquier estudio no paramétrico de la demanda. Finalmente, realizamos un experimento de Monte Carlo para comparar la potencia de los diferentes tests no-paramétricos. En la sección 3.4 presentamos una revisión histórica sobre la economía experimental en el ámbito de la teoría clásica de la demanda. Finalmente, en la sección 3.5 presentamos el diseño experimental y los resultados de dos experimentos económicos de la teoría neoclásica de la demanda –que determinan la existencia de una correlación positiva entre el nivel de formación económica de un individuo y el grado de coherencia de sus decisiones de consumo– y establecemos diferentes líneas futuras de trabajo.

Símbología

Símbolos

\wedge intersección lógica.	$\bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$, $\bigcup_\lambda X_\lambda$ reunión de una familia de conjuntos.
\vee unión lógica.	$\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$, $\bigcap_\lambda X_\lambda$ intersección de una familia de conjuntos.
\odot producto lógico.	$\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$, $\prod_\lambda X_\lambda$ producto de una familia de conjuntos.
\sim negación.	\mathbb{R} conjunto de los números reales.
\setminus diferencia de conjuntos.	$X - Y$ complemento de Y en X .
\mathbb{R}_+ conjunto de los números reales positivos.	\bowtie Para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_+^l$, " $\bar{x} \bowtie \bar{y}$ " significa que "existe un escalar $\lambda \geq 0$ tal que $\bar{x} = \lambda \bar{y}$ ".
\mathbb{R}_{++} conjunto de los números reales estrictamente positivos.	$ \bar{x} _p := \left(\sum_{j=1}^l x_j ^p \right)^{1/p}$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_l)^T \in \mathbb{R}^l$, $l \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$.
$\mathbb{R}_{\leq 0}$ conjunto de los números reales ≤ 0 .	$\ \bar{x}\ := \bar{x} ^2$ norma euclídea del vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^l$, ($2 \leq l < +\infty$).
\mathbb{R}_+^l conjunto $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^l \bar{x} \geq \bar{0}\}$.	$\bar{x} \cdot \bar{y} := \bar{x}' \bar{y} = \sum_{j=1}^l x_j y_j$ producto escalar de los vectores $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^l$.
\mathbb{R}_{++}^l conjunto $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^l \bar{x} \gg \bar{0}\}$.	\bar{x}' traspuesta del vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^l$ ($2 \leq l < +\infty$).
$\{x \in X P(x)\}$ el conjunto de elementos de X que tienen la propiedad P .	$\partial(\bar{p}, m) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l \bar{p}\bar{x} = m\}$ hiperplano pre-supuestario.
$\mathcal{P}(X)$ el conjunto de subconjuntos de X .	
$(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ familia.	

$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ producto escalar de \bar{x} por \bar{y} .

$\bar{x} := (x_1, \dots, x_l)$ vector de demanda en \mathbb{R}_+^l .

$\bar{p} := (p_1, \dots, p_l)$ vector de precios en \mathbb{R}_{++}^l .

l número de bienes ($2 \leq l < +\infty$).

m renta monetaria.

$(\bar{p}, m) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l \mid \bar{p} \cdot \bar{x} \leq m\}$ conjunto presupuestario.

\mathcal{B} familia de conjuntos presupuestarios.

(\mathcal{B}, h) estructura de elección.

$R(h)$ rango de h .

$h(\cdot)$ función o correspondencia de demanda.

Ω espacio de consumo.

\mathbb{P} espacio de precios.

$\bar{x} \geq \bar{y}$ significa “ $x_i \geq y_i$ ” para todo i .

$\bar{x} \gg \bar{y}$ significa “ $x_i > y_i$ ” para todo i .

$\bar{x} > \bar{y}$ significa “ $x_i \geq y_i$ ” para todo i y “ $x_j > y_j$ ” para al menos un j .

$\sharp(X)$ cardinal del conjunto X .

$[\xi]$ aplicación multiforme de eficiencia.

ξ aplicación de eficiencia.

(\mathcal{F}, ξ) estructura de eficiencia.

$(\mathcal{F}, [\xi])$ variedad de eficiencia.

$(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ estructura de eficiencia de Varian.

$(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$ estructura de eficiencia de Afriat.

$(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ variedad de eficiencia de Varian.

$(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ variedad de eficiencia de Afriat.

$m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R)$ función de sobrecompensación de Samuelson.

$m(\bar{p}_t, \bar{x}_t)$ función de compensación de Samuelson.

$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ serie finita de datos de demanda.

$A \equiv (a_{ij})$ matriz de números reales
($a_{ij} = \bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i)/\bar{p}_i\bar{x}_i, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$).

R^0 relación de preferencia revelada directa
($\bar{x}_i R^0 \bar{x}_j \Leftrightarrow \bar{p}_i \bar{x}_i \geq \bar{p}_i \bar{x}_j$).

P^0 relación de la preferencia revelada directa estricta
($\bar{x}_i P^0 \bar{x}_j \Leftrightarrow \bar{p}_i \bar{x}_i > \bar{p}_i \bar{x}_j$).

P relación de la preferencia revelada estricta
($\bar{x}_i P \bar{x}_j \Leftrightarrow \exists \bar{x}_k, \bar{x}_l$ t.q. $\bar{x}_i R \bar{x}_l, \bar{x}_l P^0 \bar{x}_k, \bar{x}_k R \bar{x}_j$).

R relación preferencia revelada (clausura transitiva de R^0).

$\Upsilon(\bar{x}_i)$ conjunto $\{\bar{x}_j : \bar{x}_j R \bar{x}_i \wedge \bar{x}_i P^0 \bar{x}_j\}$.

GARP Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada.

SARP Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada.

WARP Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

$RP(\bar{x}_0)$ conjunto $\{\bar{x} : \forall \bar{p} \in S(\bar{x}), \bar{x} P \bar{x}_0\}$.

$S(\bar{x}_0)$ conjunto $\{\bar{p}_0 : \{(\bar{p}_i, \bar{x}_i)\}_{i=0}^n \text{ satisface GARP}\}$.

$RW(\bar{x}_0)$ conjunto $\{\bar{x} : \forall \bar{p}_0 \in S(\bar{x}_0), \bar{x}_0 P \bar{x}\}$.

C_n n-cubo estándar unidad; conjunto
 $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^l : 0 \leq x_i \leq 1, \forall i\}$.

$\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ vector-índice en C_n .

$R^0(\bar{e})$ relación de preferencia revelada relajada directa
($\bar{x}_i R^0(\bar{e}) \bar{x}_j \Leftrightarrow e_i \bar{p}_i \bar{x}_i \geq \bar{p}_i \bar{x}_j$).

$P^0(\bar{e})$ relación de preferencia revelada relajada directa
($\bar{x}_i P^0(\bar{e}) \bar{x}_j \Leftrightarrow e_i \bar{p}_i \bar{x}_i > \bar{p}_i \bar{x}_j$).

$R(\bar{e})$ clausura transitiva de $R^0(\bar{e})$.

- $C \equiv (c_{ij})$ matriz de gasto para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$
 $(c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j \ \forall i, j \in \{1, \dots, n\})$.
- $C_e \equiv (c_{ij}^e)$ matriz de gasto perturbada por \bar{e}
 $(c_{ij}^e = c_{ij}; \ c_{ii}^e = e_i \bar{p}_i \bar{x}_i \ \forall i, j \in \{1, \dots, n\})$.
- e^* índice crítico de coste de eficiencia de Afriat.
- $\bar{e}^* = (e^*, \dots, e^*)$ vector-índice de Afriat.
- w^* índice crítico de coste de eficiencia de Afriat.
- $(i_t)_{t=1}^n$ conjunto de niveles de eficiencia de Varian.
- $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$ vector-índice de Varian.
- $G = (V, E, \omega)$ grafo dirigido que representa R^0 para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$.
- w_i coste de ineficiencia para la observación i .
- \mathcal{D} serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$.
- $\Sigma_{\mathcal{D}}$ familia formada por todos los ciclos incoherentes con GARP en R^0 para \mathcal{D} .
- $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{e}}$ familia formada por todos los ciclos incoherentes con GARP en $R^0(\bar{e})$ para \mathcal{D} .
- $\phi_1, \dots, \phi_n; \ \lambda_1, \dots, \lambda_n$. números de Afriat
- $u(\cdot)$ función de utilidad.
- $u_e(\cdot)$ función de utilidad aproximada.
- VS conjunto formado por las observaciones fuertemente inconsistentes con GARP.
- \mathcal{VS} conjunto formado por las observaciones inconsistentes con GARP.
- $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}), +, \odot, \cdot, {}^t, {}^c, O_n, I_n \rangle$ álgebra de las matrices booleanas.
- $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}) \rangle$ conjunto de matrices cuadradas de orden n sobre $\{0, 1\}$.
- $\langle \{0, 1\}, +, \cdot, {}^c \rangle$ álgebra de Boole.
- Φ familia de subconjuntos inconsistentes con GARP.
- Ψ familia de subconjuntos fuertemente inconsistentes con GARP.
- \mathfrak{S} familia de subconjuntos minimales de Φ .
- \mathfrak{R} familia de subconjuntos minimales de Ψ .
- $\mathcal{O}(\cdot)$ complejidad asintótica de un algoritmo (cota superior).

Índice general

1. Introducción	31
1.1. Introducción histórica	34
Referencias Bibliográficas	43
1.2. Definiciones y resultados preliminares	49
Referencias Bibliográficas	63
1.3. Versión reducida de la teoría de la preferencia revelada	67
Referencias Bibliográficas	91
1.4. Sobre el teorema de Afriat y la teoría de grafos	95
Referencias Bibliográficas	113
2. Bondad del ajuste	115
2.1. Antecedentes históricos	121
Referencias Bibliográficas	128
2.2. Sobre los subconjuntos maximales consistentes con GARP	131
Referencias Bibliográficas	154
2.3. Sobre la aproximación no paramétrica de Afriat y Varian	157
Referencias Bibliográficas	214
2.4. Sobre la aproximación a la eficiencia de Varian y Gross	223
Referencias Bibliográficas	265

2.5. Consideraciones estocásticas en la teoría de la demanda	267
Referencias Bibliográficas	290
3. Análisis Empírico de la Teoría Pura del Consumidor	303
3.1. Antecedentes históricos	306
Referencias Bibliográficas	315
3.2. Operatividad de la teoría de la preferencia revelada	321
Referencias Bibliográficas	345
3.3. La fiabilidad de los test no paramétricos GARP	351
Referencias Bibliográficas	365
3.4. La Economía Experimental en la teoría pura del consumidor	369
Referencias Bibliográficas	375
3.5. Análisis Experimental	379
Referencias Bibliográficas	394
4. Glosario Terminológico	401

Índice de figuras

1.1. Preferencias homotéticas.	62
1.2. Casuística del Axioma Débil de la Preferencia Revelada.	72
1.3. Datos violando GARP.	78
1.4. Multivaluación de la función de demanda.	82
1.5. Un conjunto de datos violando la invertibilidad.	87
1.6. Relaciones de preferencia revelada R^0 , P^0 y S	108
2.1. Bondad del ajuste.	123
2.2. Número de violaciones GARP.	132
2.3. Datos inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP.	138
2.4. Conjuntos óptimos inconsistentes con GARP.	143
2.5. Optimalidad y minimalidad GARP.	144
2.6. Representación gráfica de un problema de “subracionalización”.	147
2.7. Un conjunto de datos de demanda violando GARP.	163
2.8. Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.	164
2.9. Cálculo del índice de Afriat e^*	170
2.10. Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.	175
2.11. Índice de Afriat generalizado.	176
2.12. $RP(\bar{x}_0)$ y $RW(\bar{x}_0)$: un caso simple.	179

2.13. Niveles de eficiencia de Varian.	183
2.14. Niveles de eficiencia de Varian vs. “perturbación mínima”.	189
2.15. Comportamiento casi-optimizador de un consumidor.	194
2.16. Estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$	197
2.17. Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.	206
2.18. Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.	206
2.19. Índices de Afriat y Varian.	211
2.20. Índice de eficiencia AMP.	217
2.21. Estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \boldsymbol{\vartheta})$	218
2.22. Una pequeña violación GARP.	224
2.23. Un subconjunto de datos de demanda violando GARP.	228
2.24. Relación de la Preferencia Revelada restringida a una familia de subconjuntos.	231
2.25. Generalización de la aproximación de Varian.	247
2.26. Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.	255
2.27. Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.	256
2.28. Variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\boldsymbol{\varepsilon}])$	261
2.29. Variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$	262
2.30. Variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\boldsymbol{\zeta}])$	263
2.31. Índice generalizado AMP.	264
2.32. Test no paramétrico.	271
3.1. Datos violando GARP.	308
3.2. Estructura de un conjunto finito de datos de demanda.	324
3.3. Camino simple en un grafo dirigido.	326
3.4. Clausura transitiva de la preferencia revelada.	327
3.5. Relación $R^0(\bar{e})$ y matriz de gasto $C^*(\bar{e})$	332
3.6. Índices de eficiencia vs. grafos dirigidos.	334
3.7. Fiabilidad de los test de preferencia revelada.	354

3.8. Potencia de los test de preferencia revelada.	355
3.9. Poder predictivo del test de Bronars.	357
3.10. Aplicación informática utilizada en los experimentos.	381
4.1. Ilusión óptica de Müller-Lyer.	423
4.2. Proceso de elección de un consumidor.	426

Índice de Cuadros y Tablas

2.1. Resultados del experimento de Monte Carlo.	286
2.2. Significatividad estadística de las violaciones GARP.	293
2.3. Significatividad estadística de las violaciones GARP.	294
3.1. Modelos de comportamiento aleatorio.	361
3.2. Nuevos modelos de comportamiento aleatorio de un consumidor.	363
3.3. Número de participantes violando GARP(e^*) en Exp1.	386
3.4. Eficiencia en el consumo en Exp1.	387
3.5. Promedio de violaciones SARP(e^*)/ WARP(e^*)/GARP(e^*) en Exp1.	388
3.6. Participantes violando GARP(e^*) en Exp2.	389
3.7. Eficiencia en el consumo en Exp2.	390
3.8. Promedio de violaciones SARP(e^*)/GARP(e^*)/WARP(e^*) en Exp2.	390
3.9. Análisis de la sensibilidad en Exp1 y Exp2	391
4.1. Fenómenos cognitivos.	412

Capítulo 1

Introducción

La teoría pura de la conducta del consumidor tiene por objeto estudiar la estructura de las elecciones de combinaciones de bienes realizadas por un consumidor racional cuando éste se enfrenta con diversos precios y rentas. Esta teoría postula que las elecciones efectuadas por un consumidor (*homo economicus*) se pueden describir como derivado de un problema de la maximización de la utilidad sujeto a una restricción presupuestaria. Esto, naturalmente, lleva a preguntarse lo que implica este modelo sobre el comportamiento observado. Esta cuestión ha sido abordada desde dos perspectivas distintas.

La primera aproximación a la teoría del comportamiento del consumidor, la preferencia ordinal, originaría en los trabajos de Slutsky (1915) y Antonelli (1886), se dedica a analizar los contenidos que pueden darse a la racionalidad de la conducta del consumidor. De acuerdo con las contribuciones de Pareto (1927), Slutsky (1915) y Hicks (1946), entre otros, se acepta generalmente que la racionalidad de la conducta de un consumidor puede describirse postulando que el consumidor tiene un sistema definido de preferencias sobre todos los lotes de bienes concebibles y que elige aquellos lotes que resultan ser óptimos con respecto a su sistema de preferencias. Una gran parte de esta teoría se dedica a analizar los contenidos que pueden darse a la racionalidad de la conducta del consumidor [v. Hicks (1946) y Samuelson (1950) entre otros].

La segunda aproximación, la teoría de la preferencia revelada, originaría en los trabajos de Samuelson (1938, 1947, 1948), “deriva” las condiciones algebraicas sobre las funciones de demanda implicadas en el comportamiento del consumidor. El enfoque de la “preferencia revelada” de Samuelson (1938), Houthakker (1950), Afriat (1967) y Varian (1982), entre otros, gira en torno a ciertas hipótesis o reglas de conducta que, con independencia del contexto de la teoría de la demanda, se presentan como condiciones de consistencia razonables en relación con el comportamiento electivo de un sujeto. Esta teoría postula la racionalidad de la conducta

del consumidor directamente en términos de ciertas condiciones algebraicas de racionalidad, derivadas de la función de demanda. Uno de los objetivos expresamente perseguidos por la teoría de la preferencia revelada fue obtener la equivalencia lógica¹ entre esta teoría y la teoría convencional² de la conducta del consumidor de Pareto-Slutsky-Hicks-Arrow centrada en la preferencia ordinal; esto es, proporcionar una visión unificada de la conducta del consumidor sobre la base de unas hipótesis tan sencillas como razonables (el axioma débil, el axioma fuerte o el axioma generalizado) que resulten operativas en el estudio empírico del comportamiento de la conducta de un consumidor. En su versión reducida, esta teoría, que tiene por objeto estudiar la estructura de las elecciones de consumo realizadas por un consumidor racional cuando éste se enfrenta con diversos precios y rentas monetarias, se limita a un conjunto de datos observables de precios y cantidades demandadas en un contexto competitivo, intentando descubrir todas las implicaciones empíricas de la hipótesis de consistencia del individuo.

La teoría de la preferencia revelada ofrece (en su versión reducida) un procedimiento inmediato para derivar muchas de las desigualdades finitas de carácter fundamental (del tipo de números índices), cuya infracción supondría una refutación definitiva de la hipótesis de consistencia. En este sentido, es innegable que en su versión reducida³ la preferencia revelada ofrece, y sobre todo ofrecía en los tiempos de su introducción, cierto atractivo fundado en características bien definidas. Si un conjunto finito de datos de demanda es coherente con ciertas condiciones de racionalidad es posible construir explícitamente (a partir de los datos observados) una función de utilidad clásica que racionaliza la conducta observada; es decir, es posible construir explícitamente una función de utilidad que podría haber generado esa conducta. En consecuencia, estas condiciones de consistencia agotan la lista de restricciones impuestas por el modelo de maximización de la utilidad.

Comenzaremos el capítulo con una revisión histórica de la teoría de la preferencia revelada. A continuación, realizamos una revisión de los principales conceptos de revelación y las principales condiciones algebraicas de preferencia revelada que se presentan como condiciones de racionalidad plausibles sobre la conducta de un individuo (no necesariamente homo economicus), prestando especial atención a la versión reducida de la teoría de la preferencia revelada (número finito de observaciones demanda-precio). En la sección 1.4 presentamos dos nuevas demostraciones del clásico Teorema de Afriat, el cual establece que la propiedad de la “consistencia cíclica” no es solamente una consecuencia observable de la maximización de la utilidad sino que, además, agota la lista de restricciones impuestas por el modelo de optimización de un consumidor. En primer lugar, utilizaremos el Teorema de la Alternativa para demostrar la existencia de una relación de preferencia que racionaliza una serie finita de datos de demanda

¹Ha quedado establecida en esencia la completa equivalencia lógica de este enfoque con aquel otro de Pareto-Slutsky-Hicks-Arrow en base a la preferencia ordinal. Véase, por ejemplo, Hicks (1934), Little (1949), Samuelson (1948,1950) y Houthakker (1950).

²Véase, por ejemplo, Hicks (1934), Little (1949), Samuelson (1948,1950) y Houthakker (1950).

³En su versión reducida la teoría de la preferencia revelada se limita a un conjunto de datos observables de precios y cantidades demandadas en un contexto competitivo, intentando descubrir todas las implicaciones empíricas de la hipótesis de consistencia del individuo.

consistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada. Además, mostramos cómo el problema de encontrar una función de utilidad no saciada, continua, cóncava y monótona asociada a una serie finita de datos de demanda generada desde la optimización es equivalente a resolver un problema de distancias mínimas en un grafo dirigido. Finalmente, en la sección 1.5 mostramos la estrecha relación entre la teoría de la preferencia revelada (en su versión reducida) con la teoría clásica de grafos dirigidos.

1.1. Introducción histórica

Samuelson (1938) propone una aproximación alternativa a la teoría ordinal de la conducta del consumidor, la teoría de la preferencia revelada, en su intento de desarrollar la teoría de la conducta del consumidor libre de todo vestigio del concepto de utilidad. La esencia de la teoría de la preferencia revelada, como su nombre sugiere, es “revelar” las preferencias por elecciones las cuales son, al menos, en un principio, observables. El hilo conductor de esta teoría, equivalente al enfoque de Pareto-Slutsky-Hicks-Arrow centrado en la preferencia ordinal, ha sido la obtención de la equivalencia lógica entre los axiomas sobre preferencias y los axiomas de demanda. Samuelson (1938) presenta la primera formulación de la teoría de la preferencia revelada. En este trabajo introduce el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada*, y muestra cómo a partir de esta condición de consistencia de la conducta del consumidor individual pueden derivarse la mayoría de los teoremas clásicos del análisis de la demanda⁴. El axioma débil formaliza la intuición de que cuando un consumidor demanda una determinada cesta de bienes, “revela” que esta elección es preferida a cualquier otra cesta de bienes que podría haber adquirido en esta situación presupuestaria pero que no lo hizo. Así, para cualesquiera dos situaciones de precio y renta y las correspondientes cantidades de bienes demandados por un consumidor, el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* de Samuelson impone un cierto requerimiento de “racionalidad” o “consistencia” sobre estas preferencias reveladas o elecciones.

La teoría de la preferencia revelada gira en torno a una hipótesis o regla de conducta que, con independencia del contexto de la teoría de la demanda, se presenta como una condición de consistencia mínima y razonable en relación con el comportamiento electivo de un sujeto⁵. A partir de su axioma débil, Samuelson (1947, 1948, 1953) demuestra la mayoría de los teoremas del análisis de la demanda⁶. Sin embargo, esta versión inicial de la teoría planteaba un problema crucial con respecto a los objetivos que se le encomendaban: no garantizaba la existencia de una relación de preferencia a partir de la cual se derive la función de demanda del consumidor⁷.

Samuelson (1947, pág. 111) se plantea si su condición de consistencia es suficiente para que toda función de demanda satisfaciendo el axioma débil proceda de una conducta maximizadora

⁴Samuelson (1938) demuestra que casi todas las propiedades de las funciones de elección derivadas de preferencias son consecuencia del llamado *Axioma Débil de la Conducta del Consumidor*. Por medio de este axioma muestra, por ejemplo, que las funciones de demanda ofrecen valores únicos y son homogéneas de grado cero en precios y renta.

⁵El término central del que parte la teoría de la preferencia ordinal de la conducta del consumidor –la función de utilidad o la relación de preferencia– queda definido implícitamente mediante aquellas propiedades –especialmente las relativas a su monotonicidad, convexidad y continuidad– directamente requeridas para la derivación de los teoremas cuya obtención se persigue.

⁶Por medio del axioma débil mostró que las funciones de demanda ofrecen valores únicos y son homogéneas de grado cero en precios y renta y dedujo la relación de Slutsky con elegancia.

⁷El axioma débil no impone una ordenación completa del espacio de mercancías, ni garantiza la transitividad de la relación de preferencia revelada [Hicks (1956, cap. 11)], ni implica –excepción hecha del caso de dos bienes– la condición de integrabilidad o la simetría de la matriz de sustitución. Para el caso de dos bienes Samuelson (1950), Rose (1958) y Afriat (1965) demostraron que el axioma débil implica el axioma fuerte.

de la utilidad pues, en caso afirmativo, toda la teoría de la conducta del consumidor racional podría construirse sobre su axioma de la conducta del consumidor. Los trabajos de Samuelson (1938, 1947, 1948, 1950) dejaron sin respuesta la cuestión de si el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* implicaba la existencia de un sistema completo de preferencias que caracterizan la conducta optimizadora de un consumidor o, equivalentemente, si todos los resultados de la hipótesis de la maximización de la utilidad se derivan solamente desde el axioma débil. Este problema era en el fondo el mismo que se conocía como problema de la integrabilidad⁸ de la demanda; pero su solución había de ser distinta, ya que el recurso a las condiciones de simetría⁹ que constituía la solución convencional era ajeno, e incluso contrario, al espíritu de la nueva teoría. Dentro del estrecho marco de relaciones refutables por un número finito de observaciones de precios y cantidades, la caracterización ordinal de la integrabilidad precisaba disponer de una formulación equivalente en términos de la nueva teoría, la teoría de la preferencia revelada. Resultaba, pues, necesario preguntarse si era posible construir una ordenación completa usando la relación de preferencia revelada como relación básica.

Houthakker (1950), retomando el planteamiento que del problema de la integrabilidad había hecho Wold, resuelve (bajo ciertas restricciones) este problema en un artículo conciso y clásico, el cual Samuelson (1950, pág. 370) describe como “un modelo de elegancia lógica y compacidad”. En 16 páginas, Houthakker amplía –con el fin de recoger toda la información relativa a la estructura preferencial del consumidor contenida en las observaciones de demanda– la relación de preferencia revelada “*directa*” e introduce una extensión sencilla y natural del axioma débil, el *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada* (SARP) para, a continuación, mostrar que las funciones de demanda satisfacen este axioma pueden ser generadas por maximización de las preferencias¹⁰. Suponiendo la continuidad de la función de demanda con respecto a precios y rentas, la lipschitzianidad con respecto a la renta monetaria, la no saciedad y que su recorrido fuese el ortante positivo, Houthakker prueba que existe una relación de preferencia convexa y representable monótonamente por una función numérica (de utilidad) superiormente semi-continua que genera la función de demanda dada. Esto es, muestra que (bajo las condiciones anteriores) una condición necesaria y suficiente para que la función de demanda se derive de la relación de preferencia de un consumidor es que dicha función satisfaga el *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada*, conocido también como axioma fuerte de la conducta del consumidor.

Sin embargo, no estaba claro si los axiomas débil y fuerte eran equivalentes o si el axioma débil debería, en la presencia de las condiciones usuales de regularidad, ser suficiente para implicar el axioma fuerte. Samuelson (1950), tras analizar el trabajo de Little (1949), se plantea si el

⁸Tradicionalmente se admite que este estudio fue iniciado por los célebres Samuelson (1938), (1950) y Houthakker (1950), aunque puede remontarse al clásico “problema de integrabilidad” de Antonelli (1886).

⁹Una función de demanda ha sido generada por una preferencia si y solamente si la matriz de sustitución o sobrecompensación es simétrica y semidefinida negativa.

¹⁰El principal logro de Houthakker fue mostrar que, bajo ciertas condiciones, las funciones de demanda que satisfacen este axioma pueden ser generadas por maximización de las preferencias y que su axioma implica la maximización de la preferencia en el sentido de que para cualquier sistema de demanda satisfaciendo el axioma fuerte existe una preferencia que la genera.

Axioma Débil de la Preferencia Revelada es una condición suficiente para la existencia de una preferencia convexa, monótona, continua y no saciada que genere la función de demanda; esto es, se pregunta si su condición de consistencia implica la condición de integrabilidad. Este problema fue estudiado y analizado por numerosos autores de manera paralela en el tiempo, y en diferentes contextos. Algunas esperanzas para la equivalencia entre estos axiomas fueron establecidas por Hicks (1956), Rose (1958) y Afriat (1965) –en el espacio de consumo bidimensional– y por Arrow (1959), dentro del marco general de la teoría de la preferencia revelada. Hicks (1956) utiliza un argumento geométrico para demostrar que el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* excluye la posibilidad de la “circularidad” de cualesquiera tres términos de la relación de preferencia revelada. Rose (1958) proporciona una prueba algebraica de la equivalencia entre los axiomas fuerte y débil de la preferencia revelada en el marco bidimensional. En esencia, Rose (1958) prueba que el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* excluye la posibilidad (para el caso bidimensional) de la existencia de ciclos de cualquier longitud en la relación de preferencia revelada determinada por cualquier conjunto finito de datos de demanda. Arrow (1959) muestra que para aquellas funciones de demanda cuyo dominio de definición contiene todo conjunto que conste en un número finito de lotes de bienes, el axioma débil implica el axioma fuerte. Pero, como las funciones de demanda que aparecen en la teoría del consumo no vienen definidas para conjuntos finitos de lotes de bienes de consumo su resultado no permitió clarificar la cuestión. Años más tarde, Afriat (1965) ofrece una nueva prueba formal sobre la equivalencia en dos dimensiones de estos dos axiomas, proporcionando, además, una rigurosa prueba algebraica sobre la exposición gráfica de la prueba propuesta por Samuelson.

La cuestión sobre la equivalencia entre los axiomas débil y fuerte de la conducta del consumidor permaneció abierta hasta que, finalmente, Gale (1960, pág. 350) construye un ejemplo que prueba la no igualdad de estos axiomas¹¹. Poco tiempo después, Kamiya (1963) proporciona un nuevo ejemplo que prueba la no equivalencia, en general, de estos axiomas¹², empleando solamente una lista finita de precios y cantidades demandadas. Años más tarde, Shafer (1977) presenta un nuevo contraejemplo en el espacio de consumo tridimensional¹³. Sin embargo, tanto la construcción de Gale (1960) como la de Shafer (1977) sólo eran aplicables al caso de tres bienes y la cuestión quedó abierta para más de tres bienes. Kihlstrom, Mas-Colell y Sonnenschein

¹¹Gale (1960) define en el espacio de consumo tridimensional la forma cuadrática $u(x_1, x_2, x_3) = 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ que representa las preferencias de un consumidor individual. Un simple cálculo permite comprobar cómo $h(\bar{p}) = A\bar{p}/\bar{p}A\bar{p}$ es la función de demanda que ha sido generada por esta función de utilidad, donde $A \equiv (a_{ij})$ es la matriz dada por: $a_{11} = -3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = -3$, $a_{23} = 2$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = -3$. Gale (1960, pág. 351) define la matriz perturbada $A' \equiv (a'_{ij})$ definida por $a'_{11} = -3$, $a'_{12} = 4$, $a'_{13} = 0$, $a'_{21} = 0$, $a'_{22} = -3$, $a'_{23} = 4$, $a'_{31} = 4$, $a'_{32} = 0$, $a'_{33} = -3$. Para probar que $\text{WARP} \not\Rightarrow \text{SARP}$ esta afirmación considera las siguientes situaciones presupuestarias: $\bar{p}_1 = (1, 16/9, 12/9)$, $h'(\bar{p}_1) = (1, 0, 0)$, $\bar{p}_2 = \frac{1}{303}(340, 440, 330)$, $h'(\bar{p}_2) = (0.6, 0, 0.3)$, $\bar{p}_3 = \frac{1}{909}(1230, 1200, 9000)$, $h'(\bar{p}_3) = (0.3, 0, 0.6)$, $\bar{p}_4 = (16/9, 12/9, 1)$, $h'(\bar{p}_4) = (0, 0, 1)$.

¹²Véase el Ejemplo 1.3.1 de esta memoria para más detalles.

¹³Shafer (1977) considera para el espacio de consumo tridimensional, $l = 3$, la siguiente colección de subconjuntos compactos y convexos en \mathbb{R}_+^l , $\Sigma^l = \{B/B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l : \bar{p} \cdot \bar{x} \leq w\}\}$ para algún vector de precios \bar{p} y renta monetaria w y muestra cómo la función de demanda de Gale puede ser extendida a una función de demanda F generalizada sobre Σ^l verificando el Axioma Débil.

(1978) proporcionan un argumento teórico¹⁴ para mostrar que para más de tres bienes, el axioma débil no implica el axioma fuerte. Esto formaliza la intuición de Samuelson y Gale de que sería posible perturbar de manera continua una función de demanda generada por una función de utilidad de tal modo que verificase el axioma débil pero no el axioma fuerte. Finalmente, Peters y Wakker (1994) sumergen el contraejemplo no trivial de Gale en dimensión $n \geq 3$, y utilizan ciertas propiedades de las funciones de demanda definidas sobre conjuntos convexos no lineales, para mostrar de una manera constructiva la no equivalencia de estos axiomas.

Como hemos señalado con anterioridad, Houthakker (1950) prueba que, bajo ciertas condiciones, el *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada* permite derivar las restricciones¹⁵ que impone el modelo de la maximización de la utilidad a las funciones de demanda observadas. Sin embargo, su solución no fue del todo completa. Corlett y Newman (1952) indicaron ya este punto, aunque no parece que le atribuyeran gran importancia, ya que Newman incurre en el mismo error posteriormente¹⁶. No es éste el caso de Uzawa (1961), quien además de señalar los errores que incorpora el nuevo artículo de Newman también manifiesta sus dudas sobre el hecho de que el orden inducido por una función de demanda que satisfaga condiciones similares a las estipuladas por Houthakker haya de ser interiormente semicontinuo. Y estas dudas se vieron confirmadas por el análisis que de la cuestión hicieron Hurwicz y Richter (1971), quienes concluyen que las condiciones impuestas por Houthakker no son suficientes para garantizar la semicontinuidad inferior del orden inducido. Para obtener esta semicontinuidad inferior es preciso introducir una hipótesis adicional. A este efecto, Uzawa (1971) utiliza la biunivocidad de la función de demanda. Este autor muestra –bajo las mismas hipótesis– la unicidad de la relación de preferencia que genera la función de demanda y, además, demostró que la única relación de preferencia (estricta) derivada a partir de la función de demanda ha de coincidir con la relación de preferencia revelada indirecta mientras que Hurwicz y Richter (1971) muestran que la propiedad lipschitziana de la función de demanda con respecto a la renta, en conjunción con su continuidad con respecto a precios y rentas, no son suficientes para garantizar la existencia de una representación continua; y, al mismo tiempo, prueban que si el recorrido de la función de demanda satisface una condición de convexidad, existe entonces una relación de preferencia convexa y representable monótonamente por una función numérica (de utilidad) superiormente semicontinua que genera la función de demanda dada.

En una línea ligeramente distinta, y basada en la aplicación de un teorema sobre la existencia de una extensión completa para toda relación asimétrica y transitiva, Richter (1966) aborda el problema de la equivalencia buscada y desarrolla un planteamiento de una gran flexibilidad y muy clarificador sobre las relaciones entre las formulaciones de tipo convencional y las distintas ver-

¹⁴Estos autores no muestran cómo construir un contraejemplo de una función de demanda diferenciable con matriz de sustitución no simétrica dentro de un entorno abierto.

¹⁵Estas restricciones son, esencialmente, las restricciones de Slutsky que exigen que la matriz de los términos de sustitución sea simétrica y semidefinida negativa.

¹⁶El artículo de Newman (1962) es prácticamente una traducción de la contribución de Houthakker a términos de relaciones de preferencia explicitando de esta manera cuestiones y problemas que en aquélla quedaban implícitos.

siones de que puede ser objeto la preferencia revelada. Una característica del enfoque de Richter –que desde ciertas perspectivas puede incluso considerarse como su contribución fundamental– es que prescinde de las condiciones de diferenciabilidad o continuidad de la función de demanda que Houthakker y Uzawa se ven obligados a adoptar. Pero, aunque con ello quede recogida la línea central del desarrollo de la teoría, parecía pertinente, por diversas razones, incluir algunas contribuciones adicionales a ésta¹⁷. Hurwicz y Richter (1971) demuestran que si el recorrido de la función de demanda satisface una condición de convexidad, existe entonces una relación de preferencia convexa y representable monótonamente por una función numérica (de utilidad) superiormente semicontinua que genera la función de demanda dada. Estos autores prueban que la propiedad lipschitziana de la función de demanda con respecto a la renta, en conjunción con su continuidad con respecto a precios y rentas, no son suficientes para garantizar la existencia de una representación continua; y, al mismo tiempo, muestran que si el recorrido de la función de demanda satisface una condición de convexidad, existe entonces una relación de preferencia convexa y representable monótonamente por una función numérica (de utilidad) superiormente semicontinua que genera la función de demanda dada¹⁸. La condición de Lipschitz de la función de demanda –formulada, por vez primera, en el célebre artículo de Houthakker (1950)– en combinación con las propiedades de continuidad de la función de demanda permitirá llegar a la representación semicontinua [v. Fuchs-Seliger (1980)] y también la representación continua [v., p. ej., Stigum (1973) donde se demuestra una versión del clásico teorema de Houthakker]. Hurwicz y Richter (1971) y Sondermann (1982) utilizan argumentos propios de la teoría de la utilidad para resolver este problema de representación. El alcance del primer trabajo señalado se limita a funciones definidas para todos los presupuestos correspondientes a precios positivos e ingresos no negativos. La contribución de Sondermann (1982) se refiere a un marco más general, y permite resolver el problema para cualquier conjunto de consumo (fijo) y conjuntos arbitrarios de precios e ingresos. Alcantud y Rodríguez-Palmero (2002) proporcionan un enfoque alternativo (en el estudio del problema de representación del comportamiento de electivo de un individuo en el contexto de los consumidores competitivos) basado en los recientes avances¹⁹ de la teoría de la utilidad. En este trabajo, estos autores transforman el problema de la integrabilidad en un problema de representabilidad de la relación de preferencia revelada mediante utilidades débiles. La técnica que utilizan permite resolver eficientemente el problema en situaciones bastante generales, así como obtener condiciones alternativas suficientes y generalizar los resultados anteriores.

¹⁷A pesar de todas las implicaciones derivadas del Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada, las hipótesis planteadas por Houthakker (1950) y Uzawa (1960, 1971) no garantizan la existencia de una representación continua de la relación de preferencia. Hurwicz y Richter (1971) muestran que la propiedad lipschitziana de la función de demanda con respecto a la renta, en conjunción con su continuidad con respecto a precios y rentas no son suficientes para garantizar la existencia de una representación continua.

¹⁸Esto es, muestran que los supuestos de continuidad y la lipschitzianidad no son necesarios para garantizar la existencia de un orden de preferencia monótono, convexo superiormente semicontinuo y que genere la función de demanda dada; pero que no se puede prescindir de ellos si se trata de garantizar que dicho orden sea único o que la relación de preferencia sea aceptable como un orden total.

¹⁹Véase Alcantud y Rodríguez-Palmero (1999) para más detalles.

A partir de la aproximación tradicional a la teoría de la preferencia revelada (versión de dominio estándar) se desarrollan dos líneas de trabajo (versiones de dominio extendido y de dominio restringido) que han modificado la versión del dominio estándar, y sus diferencias permiten clarificar los supuestos subyacentes de la aproximación de la preferencia revelada. Las diferencias cruciales relacionan la clase de conjuntos factibles que son admisibles bajo diferentes versiones de la teoría de la preferencia revelada. La versión de dominio estándar, como la teoría de la integrabilidad, presupone que los economistas-observadores conocen las funciones de demanda (esto es, conocen las cestas demandadas en cada situación precio-gasto) y establece restricciones sobre las elecciones desde todos los conjuntos presupuestarios, pero no sobre las elecciones de cualquier otro tipo de conjunto factible. Así, la clase de todos los conjuntos factibles admisibles consta de todos los conjuntos presupuestarios. Aunque estos conjuntos parecen “naturales” a los economistas, aquellos que trabajan en otras disciplinas (como el marketing, la psicología y la ciencia política) podrían formular una teoría en la cual los individuos realizan elecciones desde otros conjuntos posibles de alternativas.

En la versión de dominio extendido la clase de conjuntos factibles admisibles está formada sólo por conjuntos finitos²⁰. En este contexto, Arrow (1959) muestra la redundancia del axioma fuerte dado que prueba la equivalencia entre los axiomas débil y fuerte de la preferencia revelada. Años más tarde, Sen (1971) elabora un argumento lacónico sobre la argumentación de Arrow argumentando que el dominio del axioma débil debería incluir tanto a los conjuntos finitos como a los conjuntos presupuestarios distinguiendo entre las dos interpretaciones del axioma débil. Si el axioma débil es realmente un axioma –un postulado a priori sobre el comportamiento– entonces está justificado por su plausibilidad. Todavía más, Sen argumenta que su plausibilidad no depende de la verificación o contraste y, por consiguiente, de si los economistas de hecho observan o pueden observar las elecciones tanto de los conjuntos finitos como desde los conjuntos presupuestarios. Así, incluso si las observaciones desde los conjuntos finitos fuesen en principio inobservables, la clase apropiada de conjuntos factibles debería incluir (sin embargo) todos los conjuntos finitos. El dominio extendido de Arrow-Sen interpreta los axiomas de la preferencia revelada como restricciones plausibles sobre un comportamiento imaginable o incluso como restricciones sobre el comportamiento que es, en principio, observable. La versión restringida se limita a un conjunto finito de observaciones demanda-precio e interpreta los axiomas de la preferencia revelada como restricciones sobre el comportamiento observado.

Afriat (1967) ofrece una aproximación absolutamente diferente a la teoría de la preferencia revelada al plantear la necesidad de encontrar un procedimiento que permita construir una función de utilidad consistente con las elecciones efectuadas por un consumidor. Como hemos señalado con anterioridad, las condiciones de integrabilidad (la matriz de los términos de sustitución de Slutsky sea simétrica y semidefinida negativa) caracterizan la consistencia de la función de demanda con la teoría clásica de la demanda. Sin embargo, ¿quién ha visto en la

²⁰De hecho, la aproximación a la teoría de la preferencia revelada puede ser interpretada por sí misma en términos de elecciones desde conjuntos de dos elementos con la afirmación “ \bar{x}_i se revela preferido a \bar{x}_j ” trasladada a “cuando el conjunto factible sólo contiene a los elementos \bar{x}_i y \bar{x}_j , el individuo elige \bar{x}_i ”.

realidad una función de demanda? Lo más que se puede tener en la práctica sobre la conducta de un consumidor es una lista de precios y cestas de consumo elegidas en diferentes situaciones presupuestarias. Entonces, ¿cómo se puede determinar si estos datos han sido generados por un consumidor maximizador de la utilidad? Si los datos han sido generados desde la optimización, ¿se puede construir explícitamente la función de utilidad que ha generado la conducta observada? Para poder responder a estas cuestiones en la versión del dominio restringido (número finito de observaciones demanda-precio) de la teoría de la preferencia revelada, Afriat (1967) introduce en la literatura económica tres condiciones algebraicas equivalentes, generalizaciones del *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada*, que caracterizan la existencia de una función de utilidad continua, cóncava, no saciada y monótona que racionaliza la conducta observada: la “consistencia cíclica”, la “consistencia en multiplicadores” y la “consistencia en multiplicadores y niveles” y muestra²¹ que si un conjunto finito de datos de demanda satisface la propiedad de la “consistencia cíclica”, entonces existe una función de utilidad no saciada, continua, cóncava y monótona que racionaliza la conducta observada, es decir, existe una función de utilidad que podría haber generado esa conducta. Así pues, cuando el conjunto de datos es finito, la propiedad de la “consistencia cíclica” es una condición necesaria y suficiente para que exista una función de utilidad no saciada, continua, cóncava y monótona que racionaliza la conducta del consumidor y que, por tanto, agota la lista de restricciones impuestas por el modelo de maximización. Además, Afriat (1967) construye explícitamente la función de utilidad que genera la conducta observada de un consumidor racional, siendo ésta su mayor contribución. Diewert (1973) presenta una exposición más clarificadora de los principales resultados de Afriat y construye (a partir de un conjunto finito de observaciones demanda-precio) los coeficientes de un problema de programación lineal que permite caracterizar la consistencia de este conjunto con la conducta optimizadora de un consumidor y proporciona –cuando este problema es factible– una solución de este problema que determina la función de utilidad generada por la función de demanda. Paralelamente en el tiempo, Koo (1963) analiza un aspecto, que hasta esa fecha, había sido notoriamente desatendido en su desarrollo: la aplicabilidad y operatividad de la teoría de la preferencia revelada en el análisis empírico del comportamiento de un consumidor. Es cierto que Houthakker (1950) había señalado este hecho, pero parece haber sido Koo el único autor en perseguir una elaboración sistemática de esa indicación.

Los trabajos de Afriat (1967), Diewert (1973) y Koo (1963, 1971) hicieron que durante los años posteriores, Varian trabajase en la reformulación de la propiedad de “consistencia cíclica” de Afriat para que la teoría de la preferencia revelada fuese más favorable al análisis computacional. Varian (1982) introduce en la literatura económica el *Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada* (GARP), equivalente a la propiedad de la “consistencia cíclica”, que agota la lista de restricciones impuestas por el modelo de maximización. En el mismo trabajo, desarrolla un algoritmo para contrastar las hipótesis del teorema de Afriat y presenta un procedimiento inductivo basado en la construcción de Diewert que permite computar la función de utilidad asociada a un conjunto finito de observaciones de demanda-precio consistentes con la conducta

²¹Véase Afriat (1967, págs. 73-76) para más detalles.

optimizadora de un consumidor. Más recientemente, Scarf, Fostel y Todd (2004) proporcionan dos nuevas demostraciones del teorema de Afriat. Estos autores utilizan un procedimiento inductivo menos complejo que los procedimientos planteados por Diewert (1973) y Varian (1982) para construir la función de utilidad generada por un conjunto de observaciones de consumo consistentes con el *Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada*.

A raíz de los trabajos de Afriat (1967), Diewert (1973), Diewert y Parkan (1978) y Varian (1982), han sido numerosos los trabajos donde se ha utilizado esta aproximación en diferentes áreas de la Microeconomía. En el ámbito de la teoría clásica de la demanda suele resultar interesante, dada la importancia²² de las preferencias diferenciables y homotéticas en las aplicaciones empíricas de la teoría de la demanda, contrastar si los datos de demanda son consistentes con algún índice de utilidad o han sido generados desde una función de utilidad que satisface ciertas restricciones. Afriat (1972, 1973, 1976, 1977, 1981, 1987), Diewert (1973), Diewert y Parkan (1978, 1985) y Varian (1983a) proporcionan tests para la consistencia de los datos de demanda con las funciones de utilidad aditivamente separable, débilmente separables y homotéticas. Yatchew (1985) extiende las condiciones para la consistencia al caso donde el conjunto de elección está formado por una unión finita de conjuntos convexos. Chiappori y Rochet (1987) desarrollan un test para la concavidad estricta y para la diferenciabilidad de clase de la función de utilidad²³. Estos autores²⁴ utilizan la tradicional técnica de convolución para mostrar que bajo ciertas condiciones es posible aproximar la función de utilidad continua obtenida a partir de la construcción de Afriat por una función de utilidad diferenciable, estrictamente cóncava, estrictamente monótona y no saciada que racionaliza los datos observados²⁵. Matzkin y Richter (1991) muestran que el *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada* asegura la existencia de una función de utilidad continua, estrictamente cóncava, estrictamente monótona y no saciada que genera una función de demanda no necesariamente diferenciable y que la diferenciabilidad de la función de utilidad es, simplemente, una propiedad genérica²⁶. En el contexto de las funciones de demanda, Lee y Wong (2005) extienden el resultado de Matzkin y Richter al mostrar que el *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada* garantiza (cuando el conjunto de datos es finito) la racionalización de un conjunto finito de datos observados por una función de utilidad continua, estrictamente cóncava y estrictamente monótona que genera una función de demanda infinitamente diferenciable. Liu y Wong (2000) muestran como el *Axioma de la Preferencia Revelada Homotética* es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una racionalización monótona, continua, estrictamente convexa y homotética. Recientemente, Alcantud y

²²Véase Diewert (1993, sección 6.4) y Mas-Colell et. al. (1995, pág. 45), entre otros.

²³Estos autores muestran que un conjunto finito de datos de demanda (\bar{p}_j, \bar{x}_j) ($j = 1, \dots, n$) han podido ser generados desde una función de demanda estrictamente cóncava y diferenciable si y solamente si para toda sucesión de observaciones $\{i, j, \dots, r, l\}$ en $\{1, \dots, n\}$ se cumple $[\bar{p}_j \bar{x}_i \leq \bar{m}_j, \bar{p}_k \bar{x}_j \leq \bar{m}_k, \dots, \bar{p}_l \bar{x}_r \leq \bar{m}_l] \implies [m_i < \bar{p}_i \bar{x}_i]$ y, además, $[\bar{x}_i = \bar{x}_j] \implies [\bar{p}_i = \alpha \bar{p}_j \text{ para algún } \alpha > 0]$.

²⁴Véase Chiappori y Rochet (1987, págs. 687-691) para más detalles.

²⁵El procedimiento de Afriat (1967) permite construir una función creciente, cóncava y lineal a trozos que racionaliza la conducta observada. Sin embargo, esta función de utilidad no es ni diferenciable ni estrictamente cóncava.

²⁶Véase Matzkin y Richter (1991, pág. 298) para más detalles

Rodríguez-Palmero (2010) muestran que el *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada* es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una racionalización monótona, continua, convexa y homotética. Este hecho dota de gran relevancia, desde el punto de vista empírico, al *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada* puesto que proporciona un importante criterio empírico para contrastar las hipótesis de la racionalización y de la racionalización homotética.

Merece la pena reseñar que a lo largo de la literatura económica se ha utilizado la teoría de la preferencia revelada para desarrollar diferentes tests no paramétricos para la hipótesis de la minimización del coste [v. Afriat (1972), Diewert y Parkan (1979), Hanoch y Rothschild (1978), Varian (1984)], y para establecer restricciones no paramétricas que caracterizan los datos generados por otros modelos diferentes al problema de optimización de un individuo. Así, por ejemplo, Hanoch y Rothschild (1978) muestran que un conjunto finito de observaciones $\{(\bar{y}_j, \bar{p}_j)\}_{j=1}^n$ es consistente con la maximización del beneficio si para todos i, j se cumple $\bar{p}_i \bar{y}_i \geq \bar{p}_i \bar{y}_j$. Chiappori (1988) desarrolla un test para la optimalidad de Pareto del conjunto de asignaciones de consumo en una economía doméstica utilizando datos sobre el consumo agregado y la oferta de trabajo de cada miembro de la unidad familiar. Brown y Matzkin (1996) desarrollan un test para el modelo de equilibrio general, usando datos de precios de mercado, dotaciones agregadas, riquezas reales y tasas de beneficio de los consumidores. Varian (1983b) diseña un test para analizar el comportamiento de un inversor, etc. Finalmente, cabe destacar que en los últimos años, numerosos autores han utilizado la teoría de la preferencia revelada para descubrir todas las implicaciones empíricas de la hipótesis de consistencia de un individuo y analizar empíricamente el comportamiento de un consumidor sobre diferentes tipos de datos. La confirmación de esta afirmación no resulta difícil, pues cabe destacar, entre otros, los trabajos de Koo (1963), Mossin (1972), Battalio (1973), Landsburg (1981), Swofford y Whitney (1992, 1994), Famulari (1995) y Sippel (1997). En segundo lugar, cabe destacar cómo en numerosos estudios empíricos se ha comprobado la inconsistencia de las decisiones de consumo de un consumidor con los diferentes axiomas de preferencia revelada. Al hablar de inconsistencia²⁷ nos referimos a que el comportamiento observado del consumidor viola alguno de los axiomas de preferencia revelada y, por consiguiente, sus elecciones de consumo no proceden del correspondiente comportamiento optimizador²⁸. En esta memoria realizaremos una aproximación al análisis de la eficiencia en el consumo y diseñaremos índices para determinar el nivel de coherencia de las decisiones de consumo realizadas por un consumidor en un contexto competitivo.

²⁷Esta eventual inconsistencia puede estar ocasionada por multitud de factores, entre los que cabe destacar la existencia de algún error de medida, que no todas las elecciones de consumo sean observables, que exista un racionamiento en las cantidades demandadas, que las preferencias del consumidor varíen en el tiempo o las restricciones presupuestarias no estén siendo consideradas en el modelo optimizador de la utilidad.

²⁸Véase Koo y Hasenkamp (1972), Mattei (1994) y Sippel (1997), entre otros.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1965) The Equivalence in Two Dimensions of the Strong and Weak Axioms of Revealed Preference. *Metroeconomica*, Vol. 27, págs. 24-29.
- [2] Afriat, S. (1967) The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 67-77.
- [3] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An Extension of the Classical Method. *International Economic Review*, Vol. 14(2), págs. 460-472.
- [4] Afriat, S. (1976) *Combinatorial Theory of Demand*. London: Input-Output Publishing Co.
- [5] Afriat, S. (1977) *The Price Index*. Cambridge: Cambridge University Press Book.
- [6] Afriat, S. (1981) On the Constructibility of Consistent Price Indices Between Several Periods Simultaneously. In *Essays in Theory and Measurement of Demand: 30 en honor of Sir Richard Stone, Angus Deaton (ed.)*. Cambridge: Cambridge University Press, págs. 133-61.
- [7] Afriat, S. (1987) *Logic of Choice and Economic Theory*. Oxford: Clarendon Press.
- [8] Alcantud, J.C.R. y C. Rodríguez-Palmero (1999) Characterization of the Existence of Semicontinuous Weak Utilities. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 32, págs. 503-509.
- [9] Alcantud, J.C.R. y C. Rodríguez-Palmero (2002) A Note on Representability of Consumer's Behavior. *Economic Theory*, Vol. 20, págs. 207-216.
- [10] Antonelli, G. (1886) *Sulla Teoria Matematica della Economia Politica*. Pisa: Nella tipografia del Folchetto. English translation: *On the Mathematical Theory of Political Economy. En Preferences, Utility and Demand*, J. Chipman, L. Hurwicz, and H. Sonnenschein (eds.). New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1971.
- [11] Arrow, K. (1959) Rational Choice and Orderings. *Economica*, Vol. 26, págs. 121-127.
- [12] Battalio, R. et al. (1973) A Test of Consumer Demand Theory Using Observations of Individual Consumer Purchases. *Western Economic Journal* Vol. 11, págs. 411-428.
- [13] Brown, D. y R. Matzkin (1996) Testable Restrictions on the Equilibrium Manifold. *Econometrica*, Vol. 64, págs. 1249-1262.
- [14] Chiappori, P. (1988) Rational Household Labor Supply. *Econometrica*, Vol. 56, págs. 63-89.

- [15] Chiappori, P. y J. Rochet (1987) Revealed Preferences and Differentiable Demand. *Econometrica*, Vol. 55, págs. 687-691.
- [16] Chiappori, P. y J. Rochet (1987) Revealed Preferences and Differentiable Demand. *Econometrica*, Vol. 55, págs. 687-691.
- [17] Corlett, W. y P. Newman (1952) A Note on Revealed Preference and the Transitivity Condition. *The Review of Economic Studies*, Vol. 20(2), págs. 156-158.
- [18] Diewert, E. (1973) Afriat and Revealed Preference Theory. *Review of Economic Studies*, Vol. 40, págs. 419-426.
- [19] Diewert, E. y C. Parkan (1978) Test for Consistency of Consumer Data and Nonparametric Index Numbers. Working Paper 78-27. University of British Columbia, Vancouver.
- [20] Diewert, E. y C. Parkan (1979) Linear Programming Tests of Regulatory Conditions for Production Functions. Working Paper 79-01, University of British Columbia.
- [21] Diewert, E. y C. Parkan (1985) Tests for the Consistency of Consumer Data. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 127-147.
- [22] Diewert, E. (1993) The Early History of Price Index Research. In: Diewert, W.E., Nakamura, A.O. Eds., *Essays in Index Number Theory*, Vol. 1. North-Holland, New York, págs. 33-66, Cap. 2. The Early History of Price Index Research. In: Diewert, W.E., Nakamura, A.O. Eds., *Essays in Index Number Theory*, Vol. 1. North-Holland, New York, págs. 33-66, Cap. 2.
- [23] Famulari, M. (1995) A Household-Based, Nonparametric Test of Demand Theory. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 77, págs. 372-382.
- [24] Fuchs-Seliger, S. (1980) On the Continuity of Utility Functions in the Theory of Revealed Preference. *International Economic Review*, Vol. 21(3), págs. 611-618.
- [25] Gale, D. (1960) A Note on Revealed Preference. *Economica*, Vol. 30, págs. 348-355.
- [26] Hanoch, G. y M. Rothschild (1978) Testing the Assumptions of Production Theory: A Nonparametric Approach. *Journal of Political Economy*, Vol. 80, págs. 256-275.
- [27] Hicks, J. (1956) *A Revision of Demand Theory*. London: Oxford University Press. Traducción española: Hicks, J. (1958) *Una Revisión de la Teoría de la Demanda*, Fondo de Cultura Económica, México DF.
- [28] Houthakker, H. (1950) Revealed Preference and the Utility Function. *Economica*, Vol. 17, págs. 159-174.

- [29] Hurwicz, L. y M. Richter (1971) Revealed Preference Without Demand Continuity Assumptions. In *Preferences, Utility and Demand*, Chipman, J., et al. (eds.) New York: Harcourt, Brace and Jovanovich. Traducción española: La preferencia revelada sin hipótesis de continuidad para la demanda. *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 359-381.
- [30] Hurwicz L. y H. Uzawa (1971) On the Integrability of Demand Functions. In *Preferences, Utility and Demand*, Cap. 6, J. Chipman, L. Hurwicz and, H. Sonnenschein (eds.). New York: Harcourt Brace, Jovanovich.
- [31] Kamiya, D. (1963) A Note on the Strong Axiom of Revealed Preference, Vol. 30, págs. 83-84.
- [32] Kihlstrom, R.; Mas-Colell, A. y H. Sonnenschein (1978) The Demand Theory of the Weak Axiom of Revealed Preference. *Econometrica*, Vol. 44(5), 971-978.
- [33] Koo, A. (1963) An Empirical Test of Revealed Preference Theory. *Econometrica*, Vol. 31, págs. 646-664.
- [34] Koo, A. (1971) Revealed Preference-A Structural Analysis. *Econometrica*, Vol. 39(1), págs. 89-97. Traducción española: Preferencia revelada: un análisis estructural. *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 381-398.
- [35] Koo, A. y G. Hasenkamp (1972) Structure of Revealed Preference: Some Preliminary Evidence. *Journal of Political Economy*, Vol. 80, págs. 724-744.
- [36] Landsburg, S. (1981) Taste Change in the United Kingdom, 1900-1955. *Journal of Political Economy*, Vol. 89, págs. 92-104.
- [37] Lee, P. y Wong, Kam-Chau (2000) Revealed Homothetic Preference and Technology. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 34, págs. 287-314.
- [38] Lee, P. y Wong, Kam-Chau (2005) Revealed Preference and Differentiable Demand. *Economic Theory*, Vol. 25, págs. 855-870.
- [39] Little, I. (1949) A Reformulation of the Theory of Consumer's Behaviour. *Oxford Economic Papers*, Vol. 1, págs. 90-99.
- [40] Liu, Pak-Wai y Kam-Chau Wong (2000) Revealed homothetic preference and technology. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 34, págs. 287-314.
- [41] Mas-Colell, A. (1978) On Revealed Preference Analysis. *Review of Economic Studies*, Vol. 45, págs. 121-131.
- [42] Mas-Colell, A.; Whinston, M. y J. Green (1995) *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. Oxford.

- [43] Mattei, A. (1994) La Coherence des Choix des Cosommateurs Suisses. *Revue Suisse d'Economie Politique et de Statistique*, Vol. 30, págs. 3-20.
- [44] Matzkin, R. (1991) Axioms of Revealed Preference for Nonlinear Choice Sets. *Econometrica*, Vol. 59, págs. 1779-1786.
- [45] Matzkin, R. y M. Richter (1991) Testing Strictly Concave Rationality. *Journal of Economic Theory*, Vol. 53, págs. 287-303.
- [46] Mossin, A. (1972) A Mean Demand Function and Individual Demand Functions Confronted with the Weak and Strong Axioms of Revealed Preference. *Econometrica*, Vol. 40, págs. 177-192.
- [47] Pareto, V. (1909) *Manuel D'Économie Politique*, Paris.
- [48] Peters, H. y P. Wakker (1994) WARP Does not Imply SARP for more than Two Commodities. *Journal of Economic Theory*, Vol. 62, págs. 152-160.
- [49] Richter, M. (1966) Revealed Preference Theory. *Econometrica*, Vol. 34(3), págs. 635-645. Traducción española: La teoría de la preferencia revelada. *Revista Española de Economía*, Vol. 4, págs. 343-358, 1974.
- [50] Richter, M. (1971) Rational Choice. In *Preferences, Utility and Demand*, Chipman, J., et al. (eds.) New York: Harcourt, Brace and Jovanovich.
- [51] Richter, M. (1979) Duality and Rationality. *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, págs. 131-181.
- [52] Richter, M. y Wong, Kam-Chau (2004) Concave Utility on Finite Sets. *Journal of Economic Theory*, Vol. 115, págs. 341-357.
- [53] Rose, H. (1958) Consistency of Preference: The Two-Commodity Case. *Review of Economic Studies*, Vol. 24, págs. 124-125. Traducción española: Consistencia de la preferencia: el caso de dos bienes *Revista Española de Economía*, Vol. 4, págs. 283-288.
- [54] Samuelson, P. (1938) A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior. *Economica*, Vol. 5, págs. 353-354.
- [55] Samuelson, P. (1947) *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- [56] Samuelson, P. (1948) Consumption Theory in Terms of Revealed Preference. *Economica*, Vol. 15, págs. 243-253.
- [57] Samuelson, P. (1950) The Problem of Integrability in Utility Theory. *Economica S.N.*, Vol. 17, págs. 355-385.

- [58] Samuelson, P. (1953) Consumption Theorems in Terms of Overcompensation Rather than Indifference Comparisons. *Economics*, Vol. 20(77), págs. 1-9. Traducción española: Teoremas del consumo en términos de sobrecompensación en lugar de comparaciones de indiferencia. *Revista Española de Economía*, Vol. 4, págs. 269-282.
- [59] Scarf, H.; Fostel, A. y M. Todd (2004) Two New Proofs of Afriat's Theorem. *Economic Theory*, Vol. 24, págs. 211-219.
- [60] Sen, A. (1971) Choice Functions and Revealed Preference. *Review of Economic Studies*, Vol. 38, págs. 307-317.
- [61] Shafer, W. (1977) Revealed Preference Cycles and the Slutsky Matrix. *Journal of Economic Theory*, Vol. 16, págs. 293-309.
- [62] Sippel, R. (1997) An Experiment on The Pure Theory of Consumer's Behaviour. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1431-44.
- [63] Slutsky, E. (1915) Sulla Teoria de Bilancio del Consumatore. *Giornale degli Economisti*, Vol. 51, págs. 1-26.
- [64] Sondermann, D. (1982) Revealed preference: An elementary treatment. *Econometrica*, Vol. 50, págs. 777-780.
- [65] Stigum, B. (1973) Revealed Preference: A Proof of Houthakker's Theorem. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, Vol. 41(3), págs. 411-423.
- [66] Swofford, J. y G. Withney (1992) The Changing Empirical Definition of Money: A comment. *The Journal of Political Economy*, Vol. 100, págs. 1078-1081.
- [67] Swofford, J. y G. Whitney (1994) A Revealed Preference Test for Weakly Separable Utility Maximization with Incomplete Adjustment. *Journal of Econometrics*, Vol. 60, págs. 235-249.
- [68] Uzawa, H. (1960) Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption. In *Mathematical Models in Social Science*, Cap. 9, K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes (eds.). Stanford University Press, California.
- [69] Uzawa, H. (1961) A Comment on Newman's "*Complete Ordering and Revealed Preference*". *The Review of Economic Studies*, Vol. 28(2), págs. 140-141. Traducción española: Uzawa, H. (1974) Un comentario sobre "*Ordenación completa y preferencia revelada de Newman*". *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 309-314.
- [70] Uzawa, H. (1971) Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption. In *Preferences, Utility and Demand*, Chipman, J., et al. (eds.) New York: Harcourt, Brace and Jovanovich. Traducción española: Uzawa, H. (1974) Preferencia y elección racional en la teoría del consumo *Revista Española de Economía*, Vol. 4, págs. 315-342.

- [71] Varian, H. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50, págs. 945-972.
- [72] Varian, H. (1983a) Nonparametric Tests of Consumer Behavior. *Review of Economic Studies*, Vol. 50, págs. 99-110.
- [73] Varian, H. (1983b) Nonparametric Tests of Models of Investor Behavior. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18(3), págs. 269-278.
- [74] Varian H. (1984) The Nonparametric Approach to Production Analysis. *Econometrica*, Vol. 52(3), págs. 579-597.
- [75] Yatchew, A. (1985) A Note on Nonparametric Tests of Consumer Behavior. *Economic Letters*, Vol. 18, págs. 45-48.

1.2. Definiciones y resultados preliminares

La teoría de la preferencia revelada gira en torno a unas hipótesis o reglas de conducta que, con independencia del contexto de la teoría de la demanda, se presentan como condiciones de consistencia mínimas y razonables en relación con el comportamiento electivo de un sujeto. Los postulados de la preferencia revelada utilizan un solo término extralógico primitivo, la correspondencia de elección (resp., la correspondencia de demanda), sobre cuya base se definen explícitamente, entre otros elementos, las relaciones de preferencia revelada. El punto esencial a destacar es que en la interpretación o aplicación de la teoría se supone que la correspondencia de demanda está dada, es decir, constituye el conjunto de datos de que se dispone sobre la conducta electiva del sujeto. Por el contrario, la interpretación o aplicación del término primitivo sobre el que está montada la teoría convencional, la relación de preferencia o la función de utilidad, requiere previamente dar por supuesta la validez de las hipótesis postuladas por la teoría.

Las “*nociones de preferencia revelada*” son válidas en cualquier contexto de elección. Así, los axiomas de preferencia revelada pueden expresarse en términos de una función de elección definida sobre un conjunto de objetos, y no solamente en el contexto restringido de los consumidores competitivos. Estos axiomas permiten caracterizar la racionalidad de las elecciones efectuadas por un individuo. Esto es, en determinar cuando una función de elección, que está definida por una regla que especifica un subconjunto desde cualquier conjunto de alternativas para ser elegidas, puede haber sido inducida por una relación de preferencia. Nótese que en el ámbito de la teoría clásica de la demanda las funciones (correspondencias) de demanda pueden ser consideradas como casos especiales de funciones de elección²⁹. En particular, en el contexto de la preferencia revelada de Samuelson-Houthakker, la función de elección es univaluada y su dominio incluye solamente la clase de poliedros convexos que representan los “*conjuntos presupuestarios*” en algún espacio de bienes. Esta restricción hace que su análisis sólo sea útil para una elección de un consumidor competitivo, y los resultados obtenidos en este contexto no son aplicables al análisis de la elección de otros agentes económicos como, por ejemplo, un consumidor en un mercado imperfecto o un gobierno burócrata³⁰.

La extensión natural de Arrow-Uzawa del contexto conceptual de la teoría de la preferencia revelada hace que esta teoría sea aplicable a una gran variedad de problemas definidos por una función de elección multivaluada sobre todos los posibles conjuntos no vacíos de un conjunto básico de alternativas. La cuestión de encontrar la propiedad de una función de elección que garantice la existencia de una preferencia que induzca las elecciones efectuadas por un individuo se la conoce como el problema de la racionalidad (transitiva) de una función de elección. En otras palabras, la racionalidad de una función de elección es el homólogo del problema de la integrabilidad en la teoría de la demanda. A continuación presentaremos los principales conceptos de revelación y caracterizaciones de consistencia de la teoría de la preferencia revelada.

²⁹Véase Uzawa (1960) y Arrow (1959) para más detalles.

³⁰Para una discusión más completa sobre este punto, véase el trabajo de Sen (1971).

Definición 1.2.1 Una relación binaria \succeq sobre un conjunto X se dice que es:

- asimétrica si, para todo $x, y \in X$, $x \succeq y$ implica que $y \succeq x$ es falso.
- antisimétrica si, para todo $x, y \in X$, $x \succeq y \succeq x$ implica que $y = x$.
- transitiva si $x, y, z \in X$ $x \succeq y \succ z$ implica que $x \succeq w$; semitransitiva si para todo $x, y, z, w \in X$, $x \succeq y \succ z \succ w$ o $x \succ y \succ z \succeq w$ implica que $x \succ w$.
- pseudotransitiva si y sólo si para todo $x, y, z, w \in X$, $x \succ y \succeq \bar{z} \succ w$ implica que $x \succ w$; donde \succ es la parte asimétrica de \succeq .
- acíclica si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x_1, \dots, x_n \in X$: $x_1 \succeq x_2 \succeq \dots \succeq x_n$ implica que $x_n \succeq x_1$ es falso.

La clausura transitiva de una relación binaria \succeq sobre X , denotada por \ggg está definida por la expresión $x \ggg y$ si y sólo si existe una (posible vacía) sucesión $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tal que $x \succ x_1 \succeq x_2 \succeq \dots \succeq x_n \succeq y$.

Una estructura de elección sobre X es un par (\mathcal{B}, h) donde \mathcal{B} es una colección de subconjuntos no vacíos de X y $h : \mathcal{B} \rightarrow X$ una correspondencia³¹ tal que $\emptyset \neq h(B) \subseteq B$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Se dice que la estructura de elección es univaluada si $h(B)$ es un conjunto unipuntual para todo $B \in \mathcal{B}$. En caso contrario, se dice que (\mathcal{B}, h) es multivaluada. Una estructura de elección (\mathcal{B}, h) sobre X se dice que es racionalizable por una relación de preferencia \succeq reflexiva y completa sobre X si para todo conjunto presupuestario $B \in \mathcal{B}$, el conjunto-elección $h(B)$ está formado por todos los elementos maximales con respecto a \succeq ; esto es, si $h(B) = \{x \in B / x \succeq y \forall y_{y \in B}\}$. En este caso se dice que h es racional. Intuitivamente, se dice que una función de elección (resp., una estructura de elección) es racional si el “comportamiento de elección” se establece como una especie de optimización de la preferencia. De manera análoga, se dice que (\mathcal{B}, h) es racionalizable por un preorden completo si existe una relación binaria \succeq reflexiva, transitiva y completa sobre X tal que $h(B) = \{x \in B / x \succeq y \forall y_{y \in B}\}$. Finalmente, se dice que (\mathcal{B}, h) es representable si existe una función $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que tal que $h(B)$ es el conjunto de los elementos maximales con respecto a u del conjunto B ; esto es, $h(B) = \{x \in B / u(x) \geq u(y) \forall y_{y \in B}\}$. En este caso, se dice que h es representable³² a través de u . El subconjunto $R(h) = \{h(B) / B \in \mathcal{B}\} \subseteq X$ es el rango de (\mathcal{B}, h) .

A lo largo de esta memoria consideraremos una economía competitiva con l bienes ($2 \leq l < +\infty$). Supondremos que el espacio de bienes, que representamos por Ω , es el ortante no-negativo del espacio euclídeo l -dimensional, siendo l finito ($2 \leq l < +\infty$). Esto es, $\Omega_l = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l / x_i \geq 0 \forall i\}$. Se supone que los precios $\bar{p} = (p_1, \dots, p_l)$ son unos parámetros dados (estrictamente positivos) no sometidos a la influencia de la actuación del individuo, donde la componente i -ésima p_i representa el precio del bien i . Así mismo, supondremos que el espacio de precios y rentas, $\mathbb{P} \times (0, +\infty)$, es un subconjunto del ortante

³¹Nótese que si (\mathcal{B}, h) es una estructura de elección sobre un conjunto X de alternativas posibles, para todo subconjunto S de X , un “conjunto de elección” $h(S)$ representa los elementos elegidos de S . Una “función de elección” es una relación funcional que especifica un conjunto de elección $h(S)$ para todo S en un particular dominio K de subconjuntos no-vacíos de X .

³²Es obvio que si h es representable h es racional. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

positivo del espacio euclídeo $(l + 1)$ -dimensional \mathbb{R}^{l+1} en el que aquéllos pueden tomar cualquier valor (positivo) finito, quedando representadas sus diversas combinaciones por variables vectoriales de la forma: (\bar{p}, m) , donde $p = (p_1, \dots, p_l)$. Denotaremos por \mathcal{B} a la familia de todos los conjuntos B (en adelante “presupuestos”) de la forma $B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l / \bar{p} \cdot \bar{x} \leq m\}$. Para cualquier vector precios-renta, los términos (\bar{p}, m) y $\partial(\bar{p}, m)$ quedarán definidos respectivamente como el conjunto presupuestario $B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l / \bar{p} \cdot \bar{x} \leq m\}$ y como el hiperplano $\{\bar{x} = (x_1, \dots, x_l) \in \Omega / \bar{p} \cdot \bar{x} = m\}$, siendo m la renta monetaria disponible y $\bar{p} \gg \bar{0}$ un vector de precios en el espacio de precios³³, $\mathbb{P} = \mathbb{R}_{++}^l$, en la situación presupuestaria B . La función (correspondencia) de demanda $h : \mathcal{B} \rightarrow \Omega$ definida sobre la familia de poliedros convexos \mathcal{B} (que representan los “conjuntos presupuestarios” en el espacio de bienes) es una función (correspondencia) de elección (decisiva) que selecciona las cestas de bienes demandadas por el consumidor en la situación presupuestaria B . La interpretación usual es que $h(B)$ es aquel conjunto-elección de combinaciones de bienes que (pueden ser) son elegidos en el conjunto presupuestario B . El símbolo $h(\bar{p}, m)$ será usado en general como la función (correspondencia) de demanda. Así, el vector de demanda $\bar{x} \in h(\bar{p}, m)$ es un vector $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l)$ de l componentes cuya componente i -ésima especifica la cantidad del bien i que se ha demandado a los precios $\bar{p} = (p_1, \dots, p_l)$ y renta monetaria m . Por último, al no estipular que $h(B)$ sea unitario quedan permitidas las interpretaciones según las cuales los elementos de $h(B)$ son todos deseados en igual medida. De esta forma, $h(B)$ puede ser concebido como el conjunto de combinaciones de bienes más deseadas de todas las que pueden obtenerse en el presupuesto B . Un espacio presupuestario es un par (Ω, \mathcal{B}) donde Ω es el conjunto de consumo (conjunto de combinaciones de bienes) y \mathcal{B} la familia de conjuntos presupuestarios sobre Ω . Un consumidor en un espacio presupuestario (Ω, \mathcal{B}) es una función h que a cada $(\bar{p}, m) \in \mathcal{B}$ le asigna un subconjunto no-vacío $h(\bar{p}, m) \subseteq (\bar{p}, m)$. Es decir, en lo sucesivo identificaremos a un consumidor con una función (correspondencia) de demanda h que represente sus elecciones efectuadas.

La racionalidad de esta serie de observaciones se medirá por el grado de cumplimiento de ciertos postulados de racionalidad derivados a partir de los siguientes conceptos de revelación. La teoría de la preferencia revelada se desarrolla habitualmente a partir de una relación binaria definida en un espacio de bienes y un sistema de axiomas que rige esa relación o conducta de elección. La relación binaria V (preferencia directamente revelada) se define por la condición:

$$\forall \bar{x}_i, \bar{x}_j \in \Omega, \bar{x}_i V \bar{x}_j \Leftrightarrow \exists (\bar{p}, m)_{(\bar{p}, m) \in \mathcal{B}} \bar{x}_i \in h(\bar{p}, m) \wedge \bar{x}_j \in (\bar{p}, m)$$

Esto es, la relación de preferencia revelada sobre Ω se define [v. Richter (1966), Samuelson (1948, 1950), Suzumura (1976, 1977)] mediante:

$$\forall \bar{x}_i, \bar{x}_j \in \Omega, \bar{x}_i V \bar{x}_j \Leftrightarrow \exists (\bar{p}, m)_{(\bar{p}, m) \in \mathcal{B}} \bar{x}_i \in h(\bar{p}, m) \wedge \bar{p} \cdot \bar{x}_j \leq m$$

³³Para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^l$, “ $\bar{x} \gg \bar{y}$ ” significa que “ $x_i > y_i$ ” para todo i ”, y “ $\bar{x} \geq \bar{y}$ ” significa que “ $x_i \geq y_i$ ” para todo i ”. Denotamos por $\mathbb{R}_+^l = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^l / \bar{x} \geq \bar{0}\}$, y $\mathbb{R}_{++}^l = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^l / \bar{x} \gg \bar{0}\}$.

En términos intuitivos, si una combinación de bienes \bar{x}_i es comprada en una situación en la que podría haberse adquirido \bar{x}_j , este hecho nos revela que \bar{x}_i es preferida a \bar{x}_j . Esto es, se define la relación de preferencia revelada débil V por la condición $\bar{y}V\bar{x}$ si y sólo si existe algún $B \in \mathcal{B}$ tal que $\bar{y} \in h(B)$ y $\bar{x} \in B$. La relación así definida es reflexiva y depende de \mathcal{B} .

En el contexto de los consumidores competitivos, y bajo el supuesto de la no saciedad local de la función (correspondencia) de demanda h , el consumidor gasta siempre toda su renta: $\bar{p} \cdot \bar{x} = m$ para todo $(\bar{p}, m) \in \mathcal{B}$ y para todo $\bar{x} \in h(\bar{p}, m)$ y, por tanto, se cumple la ley de Walras [v. Mas-Colell et al. (1995)]. Pero, ¿cual es el significado de la relación de preferencia revelada directa? Si \bar{x} ha sido adquirido cuando no sólo \bar{y} podía haberlo sido, sino que esto podía haber ocurrido a un coste no mayor que el de \bar{x} , entonces se dice que \bar{x} se *revela directamente preferido* (en sentido restringido) a \bar{y} , y adoptaremos la notación $\bar{x}V\bar{y}$. Esto es, en el espacio de consumo Ω se define la relación preferencia revelada V de la forma siguiente:

$$\forall \bar{x}_i, \bar{x}_j \in \Omega, \bar{x}_iV\bar{x}_j \Leftrightarrow \exists (\bar{p}, m)_{(\bar{p}, m) \in \mathcal{B}} \bar{x}_i \in h(\bar{p}, m) \wedge \bar{p} \cdot \bar{x}_j \leq \bar{p} \cdot \bar{x}_i \quad (1.1)$$

En términos intuitivos, $\bar{x}V\bar{y}$ significa que \bar{x} se revela directamente preferido a \bar{y} para un observador de cantidades y precios. Si hay una sucesión finita (posiblemente vacía) de combinaciones pertenecientes a Ω , $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$, tal que $\bar{x}V\bar{x}_1V \dots V\bar{x}_kV\bar{y}$, se dice que \bar{x} se revela preferido (en el sentido amplio) a \bar{y} , y se escribe $\bar{x}W\bar{y}$. No resulta difícil probar que W es la relación transitiva en Ω más pequeña que incluye a V ; esto es, W es la clausura transitiva de V .

Hay un segundo concepto de revelación [v. Samuelson (1948, 1950)] que también tiene interés en el contexto competitivo. Se dice que \bar{x} se revela directamente preferido (en el sentido de Samuelson) a \bar{y} si $\bar{x}V\bar{y}$ y, además, $\bar{x} \neq \bar{y}$. En tal caso, se escribe $\bar{x}S\bar{y}$. Así, la relación de preferencia revelada directa S (en el sentido estricto) viene dada por:

$$\forall \bar{x}_i, \bar{x}_j \in \Omega, \bar{x}_iS\bar{x}_j \Leftrightarrow \exists (\bar{p}, m)_{(\bar{p}, m) \in \mathcal{B}} \bar{x}_i \in h(\bar{p}, m) \wedge \bar{p} \cdot \bar{x}_j \leq \bar{p} \cdot \bar{x}_i \wedge \bar{x}_i \neq \bar{x}_j \quad (1.2)$$

En lo sucesivo, designaremos por H a la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada directa S . Así, diremos que \bar{x} se revela preferido (en el sentido restringido) a \bar{y} , y escribimos $\bar{x}H\bar{y}$, si existe una sucesión (posiblemente vacía) de elementos distintos dos a dos $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ tales que $\bar{x}S\bar{x}_1S \dots S\bar{x}_kS\bar{y}$.

Hay un tercer concepto de revelación que también tiene interés en el contexto competitivo. Se dice que \bar{x} se revela estrictamente preferido a \bar{y} (en el sentido de Suzumura) si en una situación presupuestaria (\bar{p}, m) el lote de bienes \bar{x} ha sido adquirido cuando había podido ser adquirido \bar{y} y, al mismo tiempo, el consumidor no ha elegido \bar{y} en dicha situación presupuestaria. Se define la relación de preferencia revelada estricta V^* por la condición $\bar{x}V^*\bar{y}$ si y solamente si existe algún $B \in \mathcal{B}$ tal que $\bar{x} \in h(B)$ y $\bar{y} \in B \setminus h(B)$. Este concepto de revelación puede expresarse mediante:

$$\forall \bar{x}_i, \bar{x}_j \in \Omega, \bar{x}_iV^*\bar{x}_j \Leftrightarrow \exists (\bar{p}, m)_{(\bar{p}, m) \in \mathcal{B}} \bar{x}_i \in h(\bar{p}, m) \wedge \bar{x}_j \in (\bar{p}, m) \setminus h(\bar{p}, m)$$

Esto es:

$$\forall \bar{x}_i, \bar{x}_j \in \Omega, \bar{x}_i V^* \bar{x}_j \Leftrightarrow \exists (\bar{p}, m)_{(\bar{p}, m) \in \mathcal{B}} \bar{x}_i \in h(\bar{p}, m) \wedge \bar{p} \cdot \bar{x}_j \leq \bar{p} \cdot \bar{x}_i \wedge \bar{x}_j \notin h(\bar{p}, m) \quad (1.3)$$

Es decir, un consumidor revela que prefiere estrictamente \bar{x}_i a \bar{x}_j , y se designa $\bar{x}_i V^* \bar{x}_j$, cuando el individuo elige \bar{x}_i y rechaza \bar{x}_j (el individuo podría haber elegido \bar{x}_j). Si hay una sucesión finita (posiblemente vacía) de elementos demandados $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ tales que $\bar{x} V^* \bar{x}_1 V^* \dots V^* \bar{x}_k V^* \bar{y}$, se dice que \bar{x} se revela estrictamente preferido (en el sentido amplio) a \bar{y} , y escribimos $\bar{x} W^* \bar{y}$. No resulta difícil probar que W^* es la relación transitiva en Ω más pequeña que incluye a V^* ; esto es, W^* es la clausura transitiva de V^* .

La racionalidad débil está definida en términos de una relación de preferencia binaria (transitiva, semitransitiva, acíclica, cuasitransitiva, pseudotransitiva, etc.). En lo sucesivo, diremos que un “consumidor” h es racional si podemos racionalizar en conducta: esto es, si existe una relación binaria \succeq (“al menos tan bueno como”) en $\Omega \times \Omega$ que sea completa, reflexiva y transitiva en $\Omega \times \Omega$, y tal que para cualquier conjunto presupuestario $B \in \mathcal{B}$, el conjunto-elección se cumple que $h(B) = \{\bar{x} \in \Omega / \bar{x} \in B \wedge \forall \bar{y}_{\bar{y} \in B}\}$. A continuación, presentamos los principales axiomas de preferencia revelada que caracterizan varios tipos de racionalidad débil (racionalización transitiva, pseudotransitiva, acíclica, cuasitransitiva, etc.)

El *Axioma Débil de la Preferencia Revelada*³⁴ (WARP), que fue originalmente propuesto para funciones de demanda Marshallianas (Samuelson, 1947), juega un papel central en la verificación de la elección racional. Este axioma, requiere que si una alternativa \bar{x} ha sido elegida en un conjunto posible de alternativas mientras \bar{y} ha sido rechazada, entonces no puede ocurrir que \bar{y} sea elegida en cualquier otro conjunto de alternativas posibles bajo la presencia de \bar{x} . La siguiente condición algebraica caracteriza al *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* de Arrow:

$$\text{WARP: } \bar{x} V^* \bar{y} \text{ implica } \sim \bar{y} V \bar{x} \quad (1.4)$$

El *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* establece que para cualesquiera dos situaciones de elección (conjuntos posibles de alternativas para el individuo), el individuo se comportará siempre de manera consistente de tal modo que si elige \bar{x} en la primera situación y, al mismo tiempo, rechaza \bar{y} , no puede ocurrir que seleccione \bar{y} en el segundo conjunto posible de alternativas cuando podría haber seleccionado \bar{x} . El *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* (WARP) de Arrow³⁵ aparece también representado en la literatura económica bajo las rúbricas V-Axiom [v. Richter (1971)] y Axioma Débil de Congruencia (WCA). El V-Axiom de Richter está determinado por la siguiente condición:

$$\text{V-Axiom: } \forall \bar{y}_{\bar{y} \in B} \forall B_{B \in \mathcal{B}} [\bar{y} \in B \wedge \forall \bar{u}_{\bar{u} \in B} \bar{y} V \bar{u} \Rightarrow \bar{y} \in h(B)] \quad (1.5)$$

³⁴El Axioma Débil equivale a la identidad conjuntista $V^* = V^\alpha$, donde V^α designa la parte asimétrica de la relación de preferencia revelada directa V ; esto es, $\bar{x} V^\alpha \bar{y}$ si y solamente si $\bar{x} V \bar{y}$ y no $\bar{y} V \bar{x}$.

³⁵No resulta difícil probar que para toda estructura de elección (\mathcal{B}, h) , la función de elección h satisface WARP si y solamente si para todo par (B_1, B_2) en \mathcal{B} , $B_1 \cap h(B_2) = h(B_1) \cap B_2$ [v. Hansson (1968), Suzumura (1976)].

Esto es:

$$\forall B_{B \in \mathcal{B}} h(B) = \{\bar{x} / \bar{x} \in B \wedge \forall \bar{y}_{\bar{y} \in B} \bar{x} V \bar{y}\}$$

El *Axioma Débil de la Preferencia Revelada de Arrow* también es equivalente, desde el punto de vista lógico, al *Axioma Débil de Congruencia* (WCA), el cual está determinado por la siguiente condición:

$$\text{WCA: } \bar{x} \in h(B) \wedge \bar{y} \in B \wedge \bar{y} V \bar{x} \text{ implica } \bar{y} \in h(B) \quad (1.6)$$

Intuitivamente, el *Axioma Débil de Congruencia* [v. Sen (1971, pág. 309)] establece que si en un conjunto presupuestario $B \in \mathcal{B}$ el lote de bienes \bar{x} ha sido demandado pudiendo haber demandado el consumidor el lote de bienes \bar{y} , y el consumidor revela que prefiere \bar{y} a \bar{x} , entonces el consumidor necesariamente tiene también que haber demandado \bar{y} en ese conjunto presupuestario.

El *Axioma Débil de Congruencia* implica que la preferencia revelada V es un orden³⁶. Seguramente, el resultado más importante relacionado con el *Axioma Débil de Arrow* en la teoría de la elección racional es que este axioma caracteriza completamente la racionalización. El siguiente teorema muestra que el *V-Axiom*, el equivalente lógico del axioma débil, es una condición necesaria y suficiente para que una estructura de elección (\mathcal{B}, h) sea racionalizable por una relación binaria \succeq reflexiva y completa sobre Ω [v. Clark (1985), Kim (1987) y Richter (1971)].

Teorema 1.2.1 (Richter, 1971) *La estructura de elección (\mathcal{B}, h) es racional si y solamente si (\mathcal{B}, h) satisface el V-Axiom.* ■

La suficiencia de WARP para racionalizar h con una relación de preferencia completa y reflexiva fue demostrada previamente por Richter (1971), y, posteriormente por diferentes autores como Clark (1985), Kim y Richter (1986), entre otros. Así, el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada*, que ha sido articulado en una gran variedad de formas desde que fue originalmente propuesto para funciones de demanda Marshallianas (Samuelson, 1947) juega un papel central en la verificación de la elección racional.

En el contexto de un consumidor competitivo, la racionalidad, la racionabilidad total, la racionabilidad reflexiva y total por una relación de preferencia \succeq son todas “equivalentes”; y están caracterizadas por el V-Axiom³⁷. En la literatura económica aparecen representadas diversas caracterizaciones de racionalidad bajo la rúbrica WARP. La más antigua fue propuesta originalmente por Samuelson en el contexto de las funciones de demanda Marshallianas. El *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* (WARP) de Samuelson puede reformularse en términos de una función de elección como sigue³⁸:

$$\text{WARP: } \bar{y} S \bar{x} \text{ implica } \sim \bar{x} S \bar{y} \quad (1.7)$$

³⁶Una relación binaria \succeq es un orden si es irreflexiva (o asimétrica), transitiva y completa.

³⁷Veáse Richter (1979, teoremas 4,5 y 6) para más detalles.

³⁸Veáse Samuelson (1950, pág. 370), para más detalles.

La condición anterior equivale a afirmar que h satisface WARP (en el sentido de Samuelson) si y solamente si S es asimétrica (resp., V antisimétrica). Es claro que si una función de elección h satisface (1.7), entonces h verifica el V-Axiom. Por tanto, el Axioma Débil de Samuelson es una condición suficiente para que la función de elección $h(\cdot)$ (univaluada) sea racionalizable. Sin embargo, este axioma no es equivalente al *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* (WARP) de Samuelson. Richter muestra cómo el recíproco no es cierto, incluso si el espacio de consumo está formado por dos bienes³⁹. Así pues, el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada de Samuelson* es una condición suficiente para que una estructura de elección (\mathcal{B}, h) definida sobre Ω sea racionalizable por una relación binaria \succeq completa y reflexiva⁴⁰. Nótese así mismo que si una estructura de elección (\mathcal{B}, h) definida sobre Ω satisface el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* de Samuelson (WARP), entonces es claro que $h(\cdot)$ es univaluada. Nótese, además, que en el ámbito de la teoría clásica de la demanda cabe señalar cómo a partir del Axioma Débil de Samuelson pueden derivarse la mayoría de los teoremas del análisis de la demanda. Por medio del Axioma Débil las funciones de demanda ofrecen valores únicos y son homogéneas de grado cero en precios, y renta y la relación de Slutsky se deduce con elegancia⁴¹. No es difícil mostrar que el axioma débil de congruencia no implica el axioma débil de Samuelson y, por consiguiente, tampoco el fuerte⁴².

El Axioma Débil de Samuelson estipula que S es una relación asimétrica. Como es obvio, esto equivale a afirmar que V es antisimétrica. El axioma fuerte establece la asimetría de H (o la antisimetría de W). Se puede mostrar que el axioma de congruencia no implica el Axioma Débil (y por consiguiente tampoco el fuerte). Mediante sencillos ejemplos de curvas de indiferencia con porciones “planas” queda ilustrado el caso de consumidores que satisfacen el Axioma de Congruencia, pero no el axioma débil de Samuelson. El Axioma Débil de Samuelson implica el V-Axiom. Pero, incluso cuando $h(\cdot)$ es univaluada, el V-Axiom no implica el axioma débil⁴³. Kim y Richter (1986, págs. 336-337, teorema 7) muestran que para el caso especial de dos bienes el V-Axiom implica (bajo ciertas condiciones naturales de deseabilidad) el axioma débil y, por consiguiente, el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada. Por tanto, en este tipo de situaciones una condición tan débil de racionalidad como el V-Axiom es una condición necesaria y suficiente para una racionalización reflexiva, completa y transitiva.

Si la elección h sobre (\mathcal{B}, h) es racional (está racionalizada por una relación de preferencia reflexiva y completa), para algunos propósitos se podría requerir que la relación de preferencia \succeq que racionaliza h sea transitiva. Intuitivamente, si \bar{x} es al menos tan bueno como \bar{y} e \bar{y} es al menos tan bueno como \bar{z} , debiéramos esperar que \bar{x} fuese al menos tan bueno como \bar{z} . Entonces cabría plantearse la siguiente pregunta: ¿puede cada elección racional sobre (\mathcal{B}, h) ser racionalizada por alguna preferencia que sea transitiva sobre Ω ? La respuesta es, en general,

³⁹ Véase Richter (1971, pág. 37) para más detalles.

⁴⁰ Véase Clark (1985), Kim (1987) y Richter (1986).

⁴¹ Véase Samuelson (1953), para más detalles.

⁴² Mediante ejemplos sencillos de curvas de indiferencia con porciones planas queda ilustrado el caso de consumidores que satisfacen el axioma débil de congruencia, pero no el axioma débil de Samuelson.

⁴³ Véase Richter (1971, pág. 37, nota al pie 9).

negativa⁴⁴ lo que sugirió la necesidad de utilizar el siguiente axioma de racionalización:

$$W\text{-Axiom: } \forall \bar{y} \in B \forall B \in \mathcal{B} \quad [\bar{y} \in B \wedge \forall \bar{u} \in B \bar{y}W\bar{u} \Rightarrow \bar{y} \in h(B)] \quad (1.8)$$

El *W-Axiom* es el resultado de reemplazar la relación de preferencia revelada directa “V” por “W” en la ecuación (1.5) que representa al V-Axiom. Además, es fácil ver que la siguiente caracterización es equivalente al *W-Axiom*:

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad h(B) = \{\bar{x} / \bar{x} \in B \wedge \forall \bar{y} \in B \bar{x}W\bar{y}\}$$

Por otra parte, resulta inmediato comprobar que para una estructura de elección (\mathcal{B}, h) decisiva una forma alternativa del *W-Axiom* es el *Axioma Fuerte de Congruencia* [v. Richter (1966, 1971)] designada bajo la rúbrica SCA.

$$\text{SCA: } \forall B \in \mathcal{B} \forall \bar{x}, \bar{y} \in B [\bar{x} \in h(B) \wedge \bar{y}W\bar{x} \Rightarrow \bar{y} \in h(B)] \quad (1.9)$$

Se dice que un “consumidor” h es congruente si satisface el axioma de congruencia: para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_+^l$ y para todo $(\bar{p}, m) \in \mathcal{B}$

$$\bar{x} \in h(\bar{p}, m) \wedge \bar{y} \in (\bar{p}, m) \wedge \bar{y}W\bar{x} \Rightarrow \bar{y} \in h(\bar{p}, m) \quad (1.10)$$

Es decir, esta caracterización axiomática de racionalidad estipula que si \bar{x} pertenece a un conjunto-elección tal que \bar{y} pertenece al conjunto presupuestario correspondiente, y si \bar{y} se revela preferido a \bar{x} , entonces \bar{y} pertenecerá también al conjunto-elección. El *Axioma Fuerte de Congruencia*, que también se le conoce bajo la rúbrica *W-Axiom*⁴⁵, estipula que si bajo un presupuesto resulta elegido un lote de bienes habiendo podido ser elegido por otro, y éste último no se revela peor que el primero, entonces el segundo también ha de resultar elegido bajo este presupuesto. Es evidente (desde la definición de racionalidad) que, si la elección h es racionalizada por una relación de preferencia transitiva, entonces h debe verificar el *W-Axiom*. Richter (1971, pág. 35) muestra que el recíproco es cierto; esto es, muestra como el *Axioma Fuerte de Congruencia* caracteriza la racionalidad por preordenes completos.

Teorema 1.2.2 (Richter, 1971) *La estructura de elección (\mathcal{B}, h) es racionalizable por un preorden completo si y solamente si (\mathcal{B}, h) satisface el *W-Axiom*. ■*

El teorema anterior muestra que si h satisface el *Axioma Fuerte de Congruencia* (SCA) es racionalizable por un preorden completo.

En términos de una función de demanda h , el *Axioma Fuerte de Congruencia* (SCA) puede reescribirse en los siguientes términos. Para toda secuencia de elementos $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ en \mathcal{B} satisfa-

⁴⁴Richter (1971) presenta un ejemplo que muestra que, en general, esta respuesta es negativa.

⁴⁵Veáse Blackorby, Bossert y Donaldson (1995), Hurwicz y Richter (1971) y Richter (1966, 1971, 1979), para más detalles.

ciendo:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &\in h(\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, r\} \\ \bar{x}_{j+1} &\in (\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, \dots, r-1\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

y $\bar{x}_1 \in h(\bar{p}_r, m_r)$ se cumple $\bar{x}_1 \in h(\bar{p}_r, m_r)$. Nótese que este último axioma no puede debilitarse más para que h sea racionalizable por una relación (de preferencia débil) reflexiva, transitiva y total. De otra parte, toda h que satisface el axioma de congruencia satisface también el Axioma Fuerte si es unívoca, esto es, si todo conjunto de elección $h(B)$ es unitario. En el contexto de la teoría de la elección Suzumura (1977) introduce el H-Axiom para generalizar el clásico Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada

$$\text{H-Axiom: } \bar{x}W\bar{y} \text{ implica no } \bar{y}V^*\bar{x} \quad (1.12)$$

En el contexto de funciones de demanda univaluadas, el H-Axiom admite una reformulación natural en términos de una función de demanda univaluada. Para toda secuencia de elementos $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ en \mathcal{B} satisfaciendo:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &\in h(\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, r\} \\ \bar{x}_{j+1} &\in (\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, \dots, r-1\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

entonces se cumple: $\bar{x}_i \notin (\bar{p}_j, m_j) \vee \bar{x}_i \in h(\bar{p}_j, m_j)$. Una función de elección $h(\cdot)$ satisface el H-Axiom si y solamente si h puede ser racionalizada por una relación de preferencia reflexiva, completa y transitiva. Por supuesto, este resultado es esencialmente el clásico teorema de Richter (1966, pág. 639), quien utilizó solamente su Axioma de Congruencia (SCA) en vez del H-Axiom—su equivalente lógico— para demostrar el clásico teorema de racionalización.

El interés de la representabilidad reside en el hecho de que cuando se enfrentan los economistas con problemas difíciles de teoría económica suponen a menudo que pueden reemplazar las preferencias del consumidor por representaciones numéricas o funciones de utilidad. Pero el interrogante que surge ante esta manera de proceder es: ¿en qué medida limita esta suposición la teoría económica resultante? Podremos responder a esta cuestión en tanto podemos hallar condiciones para la aplicabilidad de la teoría de la utilidad a la teoría del consumo. Ya que un “consumidor representable” actúa como si estuviese maximizando una función numérica bajo restricciones presupuestarias, la representabilidad es una condición necesaria y suficiente para la aplicabilidad de la teoría de la utilidad a la teoría del consumidor. La representabilidad implica la racionalidad (dada una función de utilidad $u(\cdot)$ basta definir \succeq de la siguiente manera: $u(\bar{x}) \geq u(\bar{y}) \Leftrightarrow \bar{x} \succeq \bar{y}$). El Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP) constituye una condición necesaria y suficiente para la representabilidad.

$$\text{SARP: } \bar{x}H\bar{y} \text{ implica } \sim\bar{y}S\bar{x} \quad (1.14)$$

Nótese que como WARP es equivalente a la antisimetría de V para las funciones de elección univaluadas se deduce de manera inmediata que SARP es equivalente al H-Axiom en esta situación. Richter (1971) demuestra que si h es una función de demanda univaluada sobre una

estructura de elección (\mathcal{B}, h) , entonces h es racionalizable por un preorden completo si y sólo si h satisface el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP). Más recientemente, Kim (1987, teoremas 1 y 2, págs. 164-166) demostró que tanto la racionalización semitransitiva como la racionalización pseudotransitiva están caracterizadas por SARP supuesto que la función de elección es univaluada. En el contexto de funciones de demanda univaluadas, el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP) definido en (1.14) admite una reformulación natural en términos de una función de demanda univaluada. Para toda secuencia de elementos $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ en \mathcal{B} satisfaciendo:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= h(\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, r\} \\ \bar{x}_{j+1} &\in (\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, \dots, r-1\} \\ \bar{x}_{j+1} &\neq h(\bar{p}_j, m_j) && \text{para al menos un } j \in \{1, 2, \dots, r-1\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

el axioma de semitransitividad de Houthakker [v. Houthakker (1950, págs. 162-163)] requiere que $\bar{x}_1 \notin (\bar{p}_r, m_r)$. Merece la pena resaltar que el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP) definido en (1.14) es una reformulación natural de este requerimiento en términos de una función de elección. El axioma de la semitransitividad de Houthakker puede ser generalizado permitiendo la multivaluación de la función de demanda; esto es, sustituyendo la primera ecuación en (1.15) por

$$\bar{x}_j \in h(\bar{p}_j, m_j) \text{ para cada } j \in \{1, 2, \dots, r\} \quad (1.16)$$

en la condición de semitransitividad. Así, el axioma de la semitransitividad generalizado puede reescribirse mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &\in h(\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, r\} \\ \bar{x}_{j+1} &\in (\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, \dots, r-1\} \\ \bar{x}_{k+1} &\notin h(\bar{p}_k, m_k) && \text{para al menos un } k \in \{1, 2, \dots, r-1\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

implica que $\bar{x}_1 \notin (\bar{p}_r, m_r)$. No es difícil probar que es equivalente al *Axioma Fuerte de Congruencia*. Por otra parte, cabe señalar que lo que Samuelson (1950, págs. 370-371) denominó el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada es el mismo requerimiento que Houthakker sustituyendo la ecuación (1.15) por

$$\bar{x}_{j+1} \neq h(\bar{p}_j, m_j) \text{ para cada } j \in \{1, 2, \dots, r-1\} \quad (1.18)$$

Así SARP definido en (1.14) es una extensión natural del axioma de Samuelson en el contexto de una función de elección. Esta caracterización de racionalidad equivale, desde un punto de vista lógico, a la aciclicidad de la relación de preferencia revelada directa S [v. Alcantud y Rodríguez-Palmero (2002), Kim (1987), Matzkin (1991) y Richter (1986), entre otros], a la asimetría de H [v. Bossert (1993), Kim (1987) y Richter (1971, 1979), entre otros] o a la antisimetría de W [v. Afriat (1999a, 1999b), Varian (1982)].

Como el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* de Samuelson (WARP) implica que no hay más de un elemento en cada conjunto de elección $h(B)$, las correspondencias de demanda h

generadas por las clases de indiferencia con partes planas o gruesas quedan a fortiori excluidas del Axioma Fuerte de la conducta del consumidor. En el caso general de las correspondencias de demanda, en el que $h(B)$ puede contener más de un solo elemento, el Axioma Fuerte (así como el débil) de la Preferencia Revelada es demasiado restrictivo. La debilitación del Axioma Fuerte es el *W-Axiom* que constituye (en el ámbito de la teoría de la elección) una condición necesaria y suficiente para la racionalización por una relación de preferencia completa y transitiva. Sin embargo, el Axioma de Congruencia (SCA) no garantiza ni el Axioma Fuerte de Samuelson ni la representabilidad de la función de demanda⁴⁶. Richter (1966) mostró, por un lado, que las condiciones suficientes para la representabilidad son muy débiles (“casi” todo consumidor competitivo que sea racional es representable) y, por otro lado, derivó ciertos problemas de representabilidad al imponer condiciones adicionales al axioma de congruencia: $R(h)$ convexo, $h(B)$ convexo y cerrado (en la topología euclídea).

En la literatura económica se ha venido empleando la rúbrica SARP (Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada) para caracterizarla. Así por ejemplo, Clark (1985), Sen (1971) y Suzumura (1976, 1977), entre otros, establecen la siguiente condición de racionalización:

$$\text{SARP: } \bar{y}W^*\bar{x} \text{ implica } \sim \bar{x}V\bar{y} \quad (1.19)$$

donde W^* designa la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada estricta V^* definida sobre el espacio de consumo. En términos de funciones de demanda, el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada de Suzumura es el mismo requerimiento que el axioma de semitransitividad de Houthakker sustituyendo la ecuación (1.15) por:

$$\bar{x}_{j+1} \in (\bar{p}_j, m_j) - h(\bar{p}_j, m_j) \text{ para cada } j \in \{1, 2, \dots, r\} \quad (1.20)$$

Esto es, para toda secuencia $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ en \mathcal{B} se cumple:

$$[\bar{x}_2 \in (\bar{p}_1, m_1) - h(\bar{p}_1, m_1) \& \dots \& \bar{x}_r \in (\bar{p}_{r-1}, m_{r-1}) - h(\bar{p}_{r-1}, m_{r-1})] \implies \bar{x}_r \notin (\bar{p}_1, m_1)$$

Clark (1988, pág. 489) muestra que h satisface el Axioma Fuerte de Suzumura es una condición necesaria y suficiente para que h sea estrictamente racionalizada por una relación de preferencia cuasi-transitiva. Este tipo de propiedad ordinal fue considerada previamente en el tratamiento de Sen del teorema de imposibilidad de Arrow. Es importante señalar que el *Axioma Fuerte de Congruencia* (SCA) implica el Axioma Fuerte (SARP) de Suzumura. En efecto, para toda

⁴⁶Sea $\{(\bar{p}_j, m_j)\}_{j=1}^r$ una secuencia de conjuntos presupuestarios en \mathbb{R}_+^3 tal que $\{\partial(\bar{p}_j, m_j)\}_{j=1}^r$ es un haz de planos de arista r y $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ una secuencia de elementos demandados ($\bar{x}_j \in h(\bar{p}_j, m_j)$) distintos dos a dos en \mathbb{R}_+^3 tales que $\bar{x}_j \in r$ para cada $1 \leq j \leq r$. Es claro que $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ satisface SCA y, sin embargo, viola SARP (en el sentido de Samuelson). Un consumidor racional h con preferencias que ordenan lexicográficamente el cuadrante no negativo del plano cartesiano no tiene función de utilidad.

secuencia de elementos $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ en \mathcal{B} tal que:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &\in h(\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, 2, \dots, r\} \\ \bar{x}_{j+1} &\in (\bar{p}_j, m_j) - h(\bar{p}_j, m_j) && \text{para cada } j \in \{1, \dots, r-1\} \\ \bar{x}_1 &\in (\bar{p}_r, m_r), \end{aligned}$$

se cumple $\bar{x}_{j+1}W\bar{x}_j$ y $\bar{x}_{j+1} \in (\bar{p}_j, m_j) - h(\bar{p}_j, m_j)$ para todo $1 \leq j \leq r-1$, de donde se deduce que $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ viola SCA. En el caso de que la función de elección h sea univaluada, es claro que SARP es equivalente al *Axioma Fuerte de Congruencia* de Richter. Por otra parte, cabe señalar que Hansson (1968) introduce en la literatura económica el concepto de h-conexión para, a continuación, definir su Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada. Así, (\mathcal{B}, h) satisface SARP si para toda secuencia h-conexa⁴⁷ (B_1, B_2, \dots, B_n) en \mathcal{B} , $B_k \cap h(B_{k+1}) = h(B_k) \cap B_{k+1}$ para algún $k \in \{1, \dots, r-1\}$ [v. Hansson (1968), Suzumura (1976)]. Otros autores, también han empleado el concepto de h-conexión para definir su propio Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada. Para estos autores [v. Bossert, Sprumont y Suzumura (2001a, 2001b), Suzumura (1976)] la estructura de elección (\mathcal{B}, h) satisface SARP si para toda sucesión (B_1, B_2, \dots, B_n) h-conexa en \mathcal{B} , $B_k \cap h(B_{k+1}) = B_{k+1} \cap h(B_k)$ para algún $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Suzumura (1976) mostró que al *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada de Hansson* (HARP) es, a pesar de su aparente diferencia, equivalente al *Axioma Fuerte de Congruencia*. Nótese que si h satisface el *Axioma Fuerte de Congruencia* (SCA) entonces para toda secuencia de elementos $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ demandados desde una familia $\{(\bar{p}_j, m_j)\}_{j=1}^r$ h-conexa en \mathcal{B} se cumple:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i+1} &\in h(\bar{p}_i, m_i) && \text{para cada } \bar{x}_{j+1} \in h(\bar{p}_{j+1}, m_{j+1}) && \text{con } i \in \{1, \dots, r-1\} \\ \bar{x}_j &\in h(\bar{p}_{j+1}, m_{j+1}) && \text{para cada } \bar{x}_j \in h(\bar{p}_j, m_j) && \text{con } i \in \{1, \dots, r-1\} \end{aligned} \quad (1.21)$$

En efecto, para todo par \bar{x}_i, \bar{x}_j en $\{(\bar{p}_j, m_j)\}_{j=1}^r$ tales que $\bar{x}_{i+1}W\bar{x}_i$ y $\bar{x}_iV\bar{x}_{i+1}$, se tiene que $\bar{x}_{i+1} \in h(\bar{p}_i, m_i)$. En consecuencia, $(\bar{p}_i, m_i) \cap h(\bar{p}_{i+1}, m_{i+1}) \subseteq h(\bar{p}_i, m_i) \cap (\bar{p}_{i+1}, m_{i+1})$. Nótese, además, que si $\bar{x}_i \in h(\bar{p}_i, m_i) \cap (\bar{p}_{i+1}, m_{i+1})$ y $\bar{x}_i \in (\bar{p}_{i+1}, m_{i+1}) - h(\bar{p}_{i+1}, m_{i+1})$, entonces $\bar{x}_iV\bar{x}_{i+1}$ y $\bar{x}_{i+1}V^*\bar{x}_i$, lo cual sería un absurdo. Por tanto, se cumple (1.21). El *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada de Hansson* (HARP) es una condición suficiente para que una función de demanda h verifique el *Axioma Fuerte de Congruencia*. En efecto, para para toda secuencia de elementos $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ en \mathcal{B} , si existen \bar{x}_i, \bar{x}_j en \mathcal{B} tales que $\bar{x}_iW\bar{x}_j$ y $\bar{x}_jV\bar{x}_i$, entonces existe una sucesión h-conexa $\{(\bar{p}_j, m_j)\}_{j=1}^r$ en \mathcal{B} tal que $\bar{x}_j \in h(\bar{p}_j, m_j)$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$, $\bar{x}_{j+1} \in (\bar{p}_j, m_j)$ para cada $j \in \{1, \dots, r-1\}$ y, además, $\bar{x}_1 \in (\bar{p}_r, m_r)$. Como (\mathcal{B}, h) satisface HARP se tiene $(\bar{p}_i, m_i) \cap h(\bar{p}_{i+1}, m_{i+1}) = (\bar{p}_{i+1}, m_{i+1}) \cap h(\bar{p}_i, m_i)$, para todo $1 \leq i \leq r-1$ y, además, $(\bar{p}_r, m_r) \cap h(\bar{p}_1, m_1) = (\bar{p}_1, m_1) \cap h(\bar{p}_r, m_r)$, luego $\bar{x}_1 \in h(\bar{p}_r, m_r)$, lo que completa la afirmación. De lo anterior se desprende que los Axiomas de Congruencia de Richter –SCA y *W-Axiom*–, el *Axioma de Congruencia de Suzumura* (H-Axiom) y el *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada de Hansson* (HARP) son una clara reformulación de la semitransitividad de

⁴⁷Una sucesión de conjuntos (B_1, \dots, B_n) en \mathcal{B} se dice que es h-conexa si $B_n \cap h(B_1) \neq \emptyset$ y $B_i \cap h(B_{i+1}) \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq r-1$.

Houthakker en el contexto de funciones de elección y, por tanto, caracterizan la racionalidad de una estructura de elección (\mathcal{B}, h) por un preorden completo.

En el ámbito de la teoría clásica de la demanda, además de las racionalizaciones transitivas, pseudotransitivas, cuasitransitivas, etc. tienen cierto interés otro tipo de racionalizaciones como las las racionalizaciones por una preferencia estrictamente diferenciable o las racionalizaciones homotéticas. En el primer caso porque, generalmente, se supone que las preferencias de un consumidor están representadas por una función no saciada, estrictamente cóncava, estrictamente monótona y diferenciable. En el segundo caso porque las preferencias homotéticas se utilizan con mucha frecuencia en numerosos trabajos de econometría empírica⁴⁸. Por otro lado, en la teoría de la producción los conceptos de homogeneidad y homoteticidad son también especialmente relevantes puesto que las tecnologías homotéticas imponen restricciones específicas a la manera en que varía la relación técnica de sustitución cuando cambia⁴⁹ la escala de producción.

Para formalizar y caracterizar de manera conveniente la racionalización homotética se hace necesario introducir el concepto de “revelación homotética”. Consideremos dos lotes de bienes \bar{x} e \bar{y} . Supongamos que para algún escalar $\lambda > 0$, la cesta de bienes $\lambda\bar{x}$ se revela directamente preferida a $\lambda\bar{y}$. Entonces, si el consumidor tiene unas preferencias homotéticas también debe preferir \bar{x} a \bar{y} . Como esta afirmación es cierta para cualquier racionalización homotética, es natural decir que, bajo esta situación, \bar{x} se revela homotéticamente preferido a \bar{y} , y escribimos $\bar{x}\tilde{H}\bar{y}$. Formalmente, definimos la relación binaria \tilde{H} sobre \mathbb{R}_+^l por:

$$\bar{x}\tilde{H}\bar{y} \Leftrightarrow (\exists \lambda_{\lambda>0}) [\lambda\bar{x}S\lambda\bar{y}] \quad (1.22)$$

La relación binaria \tilde{H} así definida es la clausura homotética de S . Se dice que un consumidor revela que prefiere homotéticamente \bar{x} a \bar{y} , y escribimos $\bar{x}\tilde{H}^*\bar{y}$, si o bien $\bar{x}\tilde{H}\bar{y}$ o bien existe una secuencia $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ de elementos demandados tal que $\bar{x}\tilde{H}\bar{x}_1\tilde{H}\dots\tilde{H}\bar{x}_n\tilde{H}\bar{y}$. Así pues, \tilde{H}^* es la clausura transitiva de \tilde{H} .

⁴⁸Los supuestos de la homoteticidad de las preferencias homotéticas de un consumidor están justificados en numerosos e importantes trabajos de la teoría del comercio internacional [Chipman (1965,1974)]; también proporcionan restricciones útiles en el análisis de la demanda de un consumidor [Chipman (1974)]; y numerosos tipos especiales de preferencias homotéticas han sido profusamente utilizadas en las teorías de índices de precios y de cantidades [Diewert (1993)].

⁴⁹En concreto, en cualquiera de estas dos funciones, la relación técnica de sustitución es independiente de la escala de producción.

El Axioma Fuerte de la Revelación Homotética (SHA) caracteriza completamente el comportamiento de un individuo cuya función de demanda ha sido generada por una preferencia homotética. Se dice que h satisface el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada homotética (SHA) si \tilde{H} es acíclica o, equivalentemente, si

$$\text{SHA: } \bar{x}\tilde{H}^*\bar{y} \Rightarrow \sim (\bar{y}S\bar{x}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}_+^l, \quad (1.23)$$

donde \tilde{H}^* es la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada homotética \tilde{H} definida en (1.22). Es claro que (por definición de \tilde{H}) la relación de preferencia revelada homotética \tilde{H} es una extensión de S y, por tanto, el Axioma Fuerte de la Preferencia

Revelada homotética (SHA) implica el Axioma Fuerte de Houthakker. En general⁵⁰, la relación \tilde{H} no coincide con S , así que la aciclicidad de S no garantiza la aciclicidad de \tilde{H} . El Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada Homotética (SHA) es una condición necesaria y suficiente para que toda función de demanda h haya sido generada por alguna preferencia homotética, estrictamente monótona y estrictamente convexa definida sobre \mathbb{R}_+^l . Sin embargo, esta racionalización homotética no garantiza que los datos hayan sido generados desde una función de utilidad $u(\cdot)$ continua, dado que no se requiere la continuidad de la función de demanda h . Para obtener racionalizaciones homotéticas continuas es necesario imponer restricciones adicionales sobre el dominio de h . Como en Varian (1983), la aproximación de Liu y Wong (2000) precisa de que $R(h)$ sea finito. Sin embargo, y desde el punto de vista estrictamente empírico, esto no es en absoluto problemático. De hecho, si $R(h)$ es finito SHA es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una racionalización monótona, continua, estrictamente convexa y homotética.

Finalmente, cabe reseñar que en la teoría de la conducta del consumidor las preferencias son el concepto primitivo sobre el que se basa dicha teoría. En esta teoría se parte del supuesto de que una función de utilidad, generalmente diferenciable, representa las preferencias de un consumidor; preferencias que permiten derivar las restricciones que impone el modelo de la maximización de la utilidad a las funciones de demanda observadas. Estas restricciones son observables, pero en la práctica dejan un poco que desear; pues, al fin y al cabo, ¿quién ha visto en realidad una función de demanda? Lo más que podemos esperar en la práctica es una lista de las decisiones tomadas en diferentes circunstancias. A lo largo de esta memoria, en lugar de suponer que la función de utilidad describe la conducta de un consumidor, supondremos que tenemos solamente un número finito de observaciones; puesto que en la realidad nadie dispone de una cantidad infinita de datos. Esta situación constituye, sin ningún género de duda, un marco

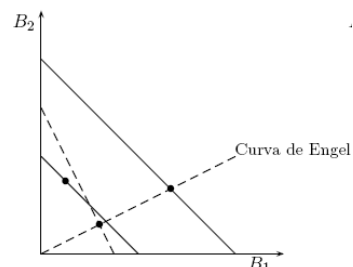


Figura 1.1: Preferencias homotéticas.

⁵⁰Liu y Wong (2000, pág. 292, nota al pie número 14) muestran que si $h : V \rightarrow \mathbb{R}_+^l$ es lineal y homogénea respecto de la riqueza, w , entonces las relaciones S y \tilde{H} son equivalentes y, en este caso, se tiene asegurada la equivalencia entre el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada homotética (SHA) y el axioma fuerte de la conducta del consumidor (SARP).

mucho más realista para el análisis empírico tradicional de la teoría pura del comportamiento del consumidor.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1999a) Revealed Preference Revealed. Quaderni. Università degli Studi di Siena. Dipartimento di Economia Politica, Vol. 265. Working paper.
- [2] Afriat, S. (1999b) The Connection Between Demand and Utility. Quaderni. Università degli Studi di Siena. Dipartimento di Economia Politica, Vol. 275. Working paper.
- [3] Alcantud, J.C.R. y C. Rodríguez-Palmero (2002) A Note on Representability of Consumer's Behavior. *Economic Theory*, Vol. 20, págs. 207-216.
- [4] Arrow, K. (1959) Rational Choice and Orderings. *Economica*, Vol. 26, págs. 121-127.
- [5] Bossert, W. (1993) Continuous Choice Functions and the Strong Axiom of Revealed Preference. *Economic Theory*, Vol. 3, 379-385.
- [6] Bossert, W., Sprumont, Y. y K. Suzumura (2001a) Rationalizability of Choice Functions on General Domains without Full Transitivity. Working Paper. University of Montréal.
- [7] Bossert, W., Sprumont, Y. y K. Suzumura (2001b) Maximal-Element Rationalizability. Working Paper. University of Montréal.
- [8] Blackorby, C., Bossert, W. y D. Donaldson (1995) Multi-Valued Demand and Rational Choice in Two-Commodity Case. *Economics Letters*, Vol. 47, págs. 5-10.
- [9] Chipman, J. (1965) A Survey of the Theory of International Trade: Part 2. The Neo-Classical Theory. *Econometrica*, Vol. 33, págs. 685-760.
- [10] Chipman, J. (1974) Homothetic Preferences and Aggregation. *Journal of Economic Theory*, Vol. 8, págs. 26-38.
- [11] Clark, S. (1985) A Complementary Approach to the Strong and Weak Axioms of Revealed Preference. *Econometrica*, Vol. 53, págs. 1459-1463.
- [12] Clark, S. (1988) An Extension Theorem for Rational Choice Functions. *Review of Economic Studies*, Vol. 55, págs. 485-492.
- [13] Diewert, E. (1993) The Early History of Price Index Research. In: Diewert, W.E., Nakamura, A.O. Eds., *Essays in Index Number Theory*, Vol. 1. North-Holland, New York, págs. 33-66, Cap. 2.
- [14] Hansson, B. (1968) Choice Structures and Preference Relations. *Synthese*, Vol. 18, págs. 443-458.

- [15] Houthakker, H. (1950) Revealed Preference and the Utility Function. *Economica*, Vol. 17, págs. 159-174.
- [16] Hurwicz, L. y M. Richter (1971) Revealed Preference Without Demand Continuity Assumptions. Chipman, J., et al. (eds.) *Preferences, utility and demand*. New York: Harcourt, Brace and Jovanovich, págs. 59-75. [Spanish Translation: La preferencia revelada sin hipótesis de continuidad para la demanda. *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 359-381.]
- [17] Kim, T. y Richter, M. (1986) Nontransitive-Nontotal Consumer Theory. *Journal of Economic Theory*, Vol. 38, págs. 324-363.
- [18] Kim, T. (1987) Intransitive Indifference and Revealed Preference. *Econometrica*, Vol. 55, págs. 163-167.
- [19] Liu, Pak-Wai y Kam-Chau Wong (2000) Revealed Homothetic Preference and Technology. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 34, págs. 287-314.
- [20] Lee, P. y Kam-Chau Wong (2005) Revealed Preference and Differentiable Demand. *Economic Theory*, Vol. 25, págs. 855-870.
- [21] Mas-Colell, A.; Whinston, M. y J. Green (1995) *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. Oxford.
- [22] Matzkin, R. (1991) Testing Strictly Concave Rationality. *Journal of Economic Theory*, Vol. 53, págs. 287-303.
- [23] Richter, M. (1966) Revealed Preference Theory. *Econometrica*, Vol. 34(3), págs. 635-645. Traducción española: La teoría de la preferencia revelada. *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 343-358, 1974.
- [24] Richter, M. (1971) Rational Choice. In *Preferences, Utility and Demand*, Chipman, J., et al. (eds.) New York: Harcourt, Brace and Jovanovich.
- [25] Richter, M. (1979) Duality and Rationality. *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, págs. 131-181.
- [26] Samuelson, P. (1938) A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior. *Economica*, Vol. 5, págs. 353-354.
- [27] Samuelson, P. (1947) *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- [28] Samuelson, P. (1948) Consumption Theory in Terms of Revealed Preference. *Economica*, Vol. 15, págs. 243-253.

-
- [29] Samuelson, P. (1950) The Problem of Integrability in Utility Theory. *Economica S.N.*, Vol. 17, págs. 355-385.
- [30] Samuelson, P. (1953) Consumption Theorems in Terms of Overcompensation Rather than Indifference Comparisons. *Economics*, Vol. 20(77), págs. 1-9. Traducción española: Teoremas del consumo en términos de sobrecompensación en lugar de comparaciones de indiferencia. *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 269-282.
- [31] Sen, A. (1971) Choice Functions and Revealed Preference. *Review of Economic Studies*, Vol. 38, págs. 307-317.
- [32] Suzumura, K. (1976) Rational Choice and Revealed Preference. *Review of Economic Studies*, Vol. 43, págs. 149-158.
- [33] Suzumura, K. (1977) Houthakker's Axiom in the Theory of Rational Choice. *Journal of Economic Theory*, Vol. 14, págs. 284-290.
- [34] Uzawa, H. (1960) Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption. In *Mathematical Models in Social Science*, Cap. 9, K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes (eds.). Stanford University Press, California.
- [35] Varian, H. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50, págs. 945-972.
- [36] Varian, H. (1983) Nonparametric Tests of Consumer Behavior. *Review of Economic Studies*, Vol. 50, págs. 99-110.

1.3. Versión reducida de la teoría de la preferencia revelada

En el problema básico de la maximización de las preferencias partimos de la hipótesis básica de que un consumidor racional siempre elige del conjunto de opciones asequibles la cesta por la que muestra una mayor preferencia. Las relaciones de preferencia, en términos de las cuales se postula la racionalidad de la conducta del consumidor, quedan definidas como relaciones binarias \succeq definidas sobre el conjunto de todos los lotes de bienes concebibles⁵¹. Cuando escribimos $\bar{x} \succeq \bar{y}$, queremos decir que “el consumidor piensa que la cesta \bar{x} es, al menos, tan buena como la \bar{y} ”. Necesitamos suponer que \succeq es una relación de preferencia⁵² para que las preferencias ordenen el conjunto de las cestas de bienes económicos. En el análisis económico suele resultar útil resumir la conducta de un consumidor por medio de una función de utilidad; es decir, una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(\bar{x}) > u(\bar{y})$ si y sólo si $\bar{x} \succ \bar{y}$. Así pues, las funciones de utilidad son de gran utilidad para describir las preferencias de un consumidor.

En esta sección realizaremos una revisión de las principales consecuencias de la conducta maximizadora de la utilidad que se derivan directamente de la propia maximización de la utilidad, a partir de un conjunto finito de observaciones de vectores de precios y cestas de consumo que han sido generadas por un consumidor no necesariamente maximizador de la utilidad. Es decir, en lugar de suponer que la función de utilidad describe la conducta de un consumidor supondremos que tenemos solamente un número finito de observaciones. En este contexto, la teoría de la preferencia revelada se limita, como hemos señalado con anterioridad, a una lista finita de datos observables de precios y cantidades demandadas en un contexto competitivo, intentando descubrir todas las implicaciones empíricas de la hipótesis de racionalidad de un individuo. Esta situación constituye, como hemos señalado con anterioridad, un contexto mucho más realista para el análisis empírico de la teoría clásica de la demanda.

En lo sucesivo supondremos que el conjunto de consumo está formado por l bienes ($2 \leq l < +\infty$) y que el espacio de consumo (de bienes), que representamos por Ω , es el ortante no-negativo del espacio euclídeo l -dimensional; esto es, $\Omega = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l / x_i \geq 0 \forall i\}$. El conjunto presupuestario del consumidor, formado por todas las cestas asequibles, viene dado por $(\bar{p}, m) = \{\bar{x} \in \Omega : \bar{p}\bar{x} \leq m\}$, donde m designa la cantidad fija de dinero que el consumidor dispone y $\bar{p} = (p_1, \dots, p_l)$ el vector de los precios de los bienes, $1, \dots, l$. Supondremos, además, que tenemos una lista de vectores de precios observados $\bar{p} = (p_1, \dots, p_l)$ y cestas de bienes demandadas $\bar{x} = (x_1, \dots, x_l)$ a los precios $\bar{p} = (p_1, \dots, p_l)$ donde la componente i -ésima, x_i , especifica la cantidad del bien i que se ha demandado. Todo lo que se expresará a continuación

⁵¹Un consumidor racional siempre elige del conjunto de opciones asequibles la cesta por la que muestra una mayor preferencia. El conjunto de opciones asequibles es simplemente el conjunto de todas las cestas de bienes económicos que satisfacen la restricción presupuestaria del consumidor.

⁵²Dada una ordenación que describa una preferencia débil, podemos definir una ordenación \succ que describa una preferencia estricta diciendo simplemente que $\bar{x} \succ \bar{y}$ significa que no se cumple que $\bar{y} \succeq \bar{x}$. Para todo par \bar{x}, \bar{y} de cestas demandadas $\bar{x} \succ \bar{y}$ quiere decir que “ \bar{x} se prefiere estrictamente a \bar{y} ”. De la misma manera se puede definir el concepto de indiferencia que representamos mediante el símbolo \approx diciendo que $\bar{x} \approx \bar{y}$ si y sólo si $\bar{x} \succeq \bar{y}$ e $\bar{y} \succeq \bar{x}$.

se refiere, a un individuo idealizado (que, sin embargo, no será necesariamente el consumidor racional u homo economicus). A lo largo de toda la memoria trabajaremos bajo los siguientes supuestos:

Supuesto 1: Suponemos conocidas las cantidades de l bienes económicos (x_1, \dots, x_l) que son adquiridos en cada situación presupuestaria (\bar{p}, m) por un individuo que se enfrenta con los precios (p_1, \dots, p_l) de esos bienes y con una renta monetaria de m unidades monetarias. La componente i -ésima del vector de demanda $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l)$ especifica la cantidad del bien i que se ha demandado a los precios $\bar{p} = (p_1, \dots, p_l)$ y renta monetaria m .

Supuesto 2: Los precios de los bienes $\bar{p} = (p_1, \dots, p_l)$ son unos parámetros dados (estrictamente positivos) no sometidos a la influencia de la actuación del individuo, donde la componente i -ésima p_i representa el precio del bien i

Supuesto 3: Suponemos, además, que el espacio de precios y rentas, $\mathbb{P} \times (0, +\infty)$, es un subconjunto del ortante positivo del espacio euclídeo $(l + 1)$ -dimensional \mathbb{R}^{l+1} en el que aquéllos pueden tomar cualquier valor (positivo) finito, quedando representadas sus diversas combinaciones por variables vectoriales de la forma: (\bar{p}, m) , donde $p = (p_1, \dots, p_l)$

Supuesto 4: El consumidor muestra unas preferencias, \succ , localmente no saciadas⁵³. En cada situación presupuestaria (\bar{p}, m) el individuo, enfrentado con un conjunto de precios dado y una renta monetaria dada, empleará toda su renta monetaria disponible en la adquisición de los l bienes económicos que componen el conjunto de consumo.

Supuesto 5: La conducta del consumidor no es independiente de las unidades en la que se expresan los precios. Es decir, si multiplicamos todos los precios y la renta monetaria por una misma cantidad positiva, las cantidades adquiridas no tienen por qué ser las mismas.

Nuestro punto de partida será, por tanto, la observación de un número finito (\bar{p}_t, \bar{x}_t) ($t = 1 \dots, n$) de observaciones de vectores de precios y cestas de consumo que han sido generadas (en un contexto competitivo) por un consumidor no necesariamente maximizador de la utilidad cuyas preferencias satisfacen el supuesto de la insaciabilidad local, donde cada par $(\bar{p}_t, \bar{x}_t) \in \mathbb{R}_{++}^l \times \mathbb{R}_+^l$ expresa la cesta o lote de bienes económicos $\bar{x}_t = (x_{t1}, \dots, x_{tl})$ adquiridos por un consumidor a los precios $\bar{p}_t = (p_{t1}, \dots, p_{tl})$. En lo sucesivo, emplearemos la terminología de serie finita de datos de demanda o conjunto finito de observaciones demanda-precio para designar al número finito de observaciones de vectores de precios y cestas de consumo. Lo primero que cabe preguntarse es cómo se pueden definir los principales conceptos de revelación desde el conjunto de datos observados. Para toda serie finita de observaciones demanda-precio, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, es perfectamente posible construir las nociones de revelación desde el conjunto de datos. La relación

⁵³Dada una cesta \bar{x} cualquiera perteneciente al conjunto de consumo A y un ϵ cualquiera tal que $\epsilon > 0$, existe una cesta \bar{y} perteneciente a Ω tal que si $\|\bar{x} - \bar{y}\| < \epsilon$ entonces $\bar{y} \succ \bar{x}$, donde $\|\bar{x} - \bar{y}\|$ designa a la distancia euclídea que media entre \bar{x} e \bar{y} . El supuesto de la insaciabilidad local quiere decir que siempre es posible mejorar, incluso aunque sólo se produzcan pequeñas variaciones en la cesta de consumo. La "insaciabilidad local" excluye la posibilidad de que las curvas de indiferencia sean "de trazo grueso".

de preferencia revelada directa es fácil de construir porque para todo \bar{x}_i perteneciente al conjunto de datos existe un conjunto presupuestario $(\bar{p}_i, m_i) \in \mathcal{B}$ tal que $\bar{x}_i \in h(\bar{p}_i, m_i)$. Esta es la razón por la cual la relación de preferencia revelada directa está generalmente definida en la mayoría de los trabajos relacionados directamente con los test no-paramétricos de optimización por:

$$\forall \bar{x}_i, \bar{x}_j \quad \bar{x}_i R^0 \bar{x}_j \Leftrightarrow \bar{p}_i \cdot \bar{x}_j \leq \bar{p}_i \cdot \bar{x}_i$$

y, si los elementos demandados son distintos, se dice que el lote de bienes demandado \bar{x}_i se revela preferido (en el sentido restringido) a \bar{x}_j , y se designará por $\bar{x}_i S \bar{x}_j$. Es decir, en el espacio de consumo 1-dimensional, \mathbb{R}_+^l , con $(2 \leq l < +\infty)$ si la cesta de bienes $\bar{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{il})$ ha sido adquirida a precios $\bar{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{il})$, ésta se “*revela preferida*” a todas las cestas de consumo $\bar{x} = (x_1, \dots, x_l)$ tales que $\bar{p}_i \cdot \bar{x} \leq \bar{p}_i \cdot \bar{x}_i$, donde $\bar{p}_i \cdot \bar{x}$ denota el sumatorio $\sum_{k=1}^l p_{ki} x_k$. La relación de preferencia revelada estricta, P^0 , estará definida por:

$$\forall \bar{x}_i, \bar{x}_j \quad \bar{x}_i P^0 \bar{x}_j \Leftrightarrow \bar{p}_i \cdot \bar{x}_j < \bar{p}_i \cdot \bar{x}_i$$

A partir de los anteriores conceptos de revelación es posible definir las relaciones de preferencia revelada R , H y P que designan a las clausuras transitivas de R^0 , S y P^0 , respectivamente. Nótese que si tenemos una secuencia, $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$, de elementos de \mathbb{R}_+^l tales que $\bar{x}_1 R^0 \bar{x}_2 R^0 \dots \bar{x}_{r-1} R^0 \bar{x}_r$, diremos que el consumidor revela⁵⁴ que prefiere \bar{x}_1 a \bar{x}_r y lo expresamos de la siguiente manera: $\bar{x}_1 R \bar{x}_r$. Nótese que R es la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada directa R^0 construida desde el conjunto finito de datos observados. Si los elementos demandados de la secuencia anterior son distintos dos a dos ($\bar{x}_i \neq \bar{x}_j \forall i, j$) se dirá que \bar{x}_1 se revela preferido (en el sentido restringido) a \bar{x}_r y se denotará por $\bar{x}_1 H \bar{x}_r$. La siguiente definición resume los anteriores conceptos de revelación.

Definición 1.3.1 Sean \bar{x}_i y \bar{x}_j observaciones de consumo demandadas a precios (normalizados) \bar{p}_i y \bar{p}_j respectivamente. Se dice que el consumidor:

- a) revela directamente que prefiere \bar{x}_i a \bar{x}_j , y se denota por $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$, si $\bar{p}_i \bar{x}_i \geq \bar{p}_i \bar{x}_j$. Además, si $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$ escribimos $\bar{x}_i H \bar{x}_j$
- b) revela directamente que prefiere estrictamente \bar{x}_i a \bar{x}_j , y se denota por $\bar{x}_i P^0 \bar{x}_j$, si $\bar{p}_i \bar{x}_i > \bar{p}_i \bar{x}_j$.
- c) revela que prefiere \bar{x}_i a \bar{x}_j , y se denota por $\bar{x}_i R \bar{x}_j$, si existen $\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_k}$ satisfaciendo $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_{i_1} R^0 \bar{x}_{i_2} \dots \bar{x}_{i_k} R^0 \bar{x}_j$.
- d) revela que prefiere estrictamente \bar{x}_i a \bar{x}_j , y se denota por $\bar{x}_i P \bar{x}_j$, si existen \bar{x}_l, \bar{x}_k tales que $\bar{x}_i R \bar{x}_l$, $\bar{x}_l P^0 \bar{x}_k$ y $\bar{x}_k R \bar{x}_j$.

⁵⁴Nótese que, por definición, la preferencia revelada R —la clausura transitiva de la relación R^0 — es una relación transitiva.

Supongamos que es posible observar un conjunto finito de observaciones demanda-precio, ¿cómo podemos saber si esos datos han sido generados por un consumidor maximizador de la utilidad?, ¿qué restricciones observables deberían satisfacer las elecciones observadas? Si no se postula ningún supuesto sobre $u(\bar{x})$, esta pregunta tiene una respuesta trivial, a saber, ninguna, pues supongamos que $u(\bar{x})$ fuera una función constante, de manera que el consumidor se mostrara indiferente entre todas las cestas de consumo observadas. En este caso, las pautas de elecciones observadas no estarían sujetas a restricción alguna: todo es posible. Para que el problema sea más interesante hemos excluido este caso trivial al suponer que la función de utilidad subyacente cumple el supuesto de la insaciabilidad local.

Si un consumidor está maximizando la utilidad, la elección de las cantidades demandadas correspondiente a un precio dado debe generar un nivel de utilidad al menos tan grande como el que le reportaría cualquier otra cesta de bienes que pudiera elegir. Esto es, si un consumidor elige \bar{x}_t cuando podría haber elegido \bar{x} , la cesta de bienes \bar{x}_t le debería reportar, al menos, la misma utilidad que \bar{x} . En otras palabras, si $\bar{p}_t \bar{x}_t \geq \bar{p}_t \bar{x}$, entonces debe cumplirse que $u(\bar{x}_t) \geq u(\bar{x})$ para cualquiera que sea \bar{x} tal que $\bar{p}_t \bar{x}_t \geq \bar{p}_t \bar{x}$, donde $u(\cdot)$ designa la función de utilidad que genera la conducta observada.

Definición 1.3.2 Decimos que una función de utilidad $u(\cdot)$ racionaliza la conducta observada (\bar{p}_t, \bar{x}_t) ($t = 1 \dots, n$) si $u(\bar{x}_t) \geq u(\bar{x})$ cualquiera que sea $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l$ tal que $\bar{p}_t \bar{x}_t \geq \bar{p}_t \bar{x}$.

Como consecuencia de esta definición y del supuesto de que los datos han sido generados por la maximización de la utilidad, podemos llegar a la conclusión de que $\bar{x}_t R^0 \bar{x}$ implica que $u(\bar{x}_t) \geq u(\bar{x})$. Supongamos ahora que $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}$, ¿quiere esto decir que $u(\bar{x}_t) > u(\bar{x})$? No es difícil demostrar que el supuesto de la insaciabilidad local implica esta conclusión. Si $u(\bar{x}_t) = u(\bar{x})$, entonces existe un \bar{x}' suficientemente cercano a \bar{x} tal que $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}'$ y $u(\bar{x}') > u(\bar{x}) = u(\bar{x}_t)$, lo que contradice la hipótesis de la maximización de la utilidad. Por otra parte, si se supone que los datos han sido generados desde un proceso maximizador de la utilidad y que $\bar{x}_t R \bar{x}$, entonces $u(\bar{x}_t) \geq u(\bar{x})$. La pregunta que surge a continuación es determinar qué restricciones debe cumplir una serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, para que haya sido generada por una función de utilidad $u(\cdot)$ que racionalice⁵⁵ la conducta observada.

La teoría de la preferencia revelada (en su versión reducida) permite responder a esta pregunta. Los distintos axiomas de la preferencia revelada permitirán estudiar la estructura de las decisiones de consumo realizadas por un consumidor racional cuando éste se enfrenta con diversos precios y rentas monetarias y, además, caracterizar (a partir de los datos observados) cuando los datos han sido generados desde un proceso maximizador de la utilidad. El elemento central, y más característico, en esta formulación es el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* (WARP) de Samuelson, también conocido como axioma débil de la conducta del consumidor⁵⁶. En el contexto en que nos hallamos este postulado se traduce en lo siguiente:

⁵⁵Una función de utilidad $u(\cdot)$ se dice que racionaliza un conjunto de observaciones de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ si $u(\bar{x}_t) \geq u(\bar{x})$ para todo \bar{x} tal que $\bar{p}_t \bar{x}_t \geq \bar{p}_t \bar{x}$.

⁵⁶Este axioma fue introducido en la literatura económica por Samuelson (1938, 1948)

Definición 1.3.3 (Axioma Débil de la Preferencia Revelada) *La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada (WARP) si para todo par de observaciones i, j se cumple: $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$, y además, $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$, entonces $\bar{p}_j \bar{x}_j < \bar{p}_j \bar{x}_i$.*

En el espacio de consumo l -dimensional, \mathbb{R}_+^l , con $(2 \leq l < +\infty)$ si $\bar{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{il})$ se revela preferido a $\bar{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jl})$; entonces el Axioma Débil de la Preferencia Revelada establece que no puede ocurrir que \bar{x}_j se revele preferido a \bar{x}_i ; esto es, en la situación de precios \bar{p}_j , cuando el consumidor compró \bar{x}_j , no podría haber adquirido \bar{x}_i . Matemáticamente, si $\sum_{k=1}^l p_{ki} x_{kj} \leq \sum_{k=1}^l p_{ki} x_{ki}$, entonces $\sum_{k=1}^l p_{kj} x_{kj} < \sum_{k=1}^l p_{kj} x_{ki}$.

El Axioma Débil de la Preferencia Revelada (WARP) es una condición de consistencia sobre la conducta electiva del sujeto (condición de coherencia de la conducta de un consumidor) muy sencilla e intuitivamente muy plausible. Establece que para cualesquiera dos situaciones presupuestarias (de precio y renta) y las correspondientes cantidades demandadas por el consumidor, el individuo se comportará siempre de manera coherente en su conducta de tal modo que si el individuo elige el conjunto de bienes de la primera situación presupuestaria cuando habría podido elegir el segundo conjunto de bienes, no elige al mismo tiempo el segundo conjunto de bienes (en la segunda situación de renta y precio) frente al primero.

La restricción sobre el comportamiento de la demanda impuesta por el axioma débil está ilustrada en la Figura 1.2. Cada subfigura muestra dos conjuntos presupuestarios y sus correspondientes elecciones. Este axioma establece que no puede ocurrir simultáneamente que el consumidor revele que prefiere directamente $h(\bar{p}_1, m_1)$ frente a $h(\bar{p}_2, m_2)$ y viceversa, si $h(\bar{p}_1, m_1)$ y $h(\bar{p}_2, m_2)$ son distintos. Las subfiguras (a), (b), (c), (f), (g) e (i) describen estas situaciones de coherencia en la conducta de elección, mientras que en (d), (e) y (h) se puede apreciar claramente una violación del axioma débil de la consistencia del consumidor.

El Axioma Débil satisface propiedades muy deseables pero no agota todas las consecuencias de la conducta maximizadora de la utilidad puesto que, en general, si un conjunto finito de datos de demanda observados $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el Axioma Débil no es posible construir (a partir del conjunto de datos observados) unas preferencias convexas, continuas, no saciadas y monótonas que generen la conducta observada como conducta maximizadora de la utilidad. El Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP), introducido en la literatura económica por Houthakker (1950) en el ámbito de la teoría clásica de la demanda, se presenta como una condición necesaria y suficiente para que la función de demanda se derive de una relación de preferencia. En el contexto en el que nos hallamos, este axioma de racionalización puede reescribirse como sigue:

Definición 1.3.4 (Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada) *La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP) si para todo par de observaciones i, j se cumple: $\bar{x}_i R \bar{x}_j$, y además, $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$, entonces $\bar{p}_j \bar{x}_j < \bar{p}_j \bar{x}_i$.*

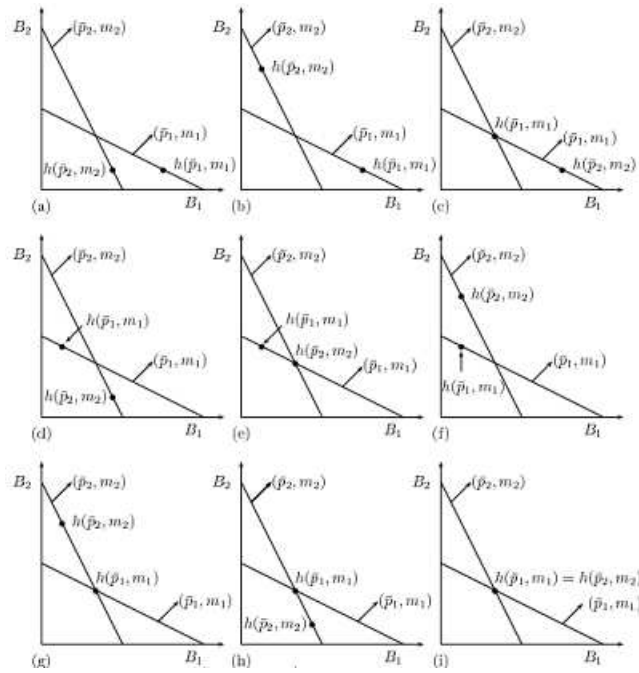


Figura 1.2: Casuística del Axioma Débil de la Preferencia Revelada.

Como se ha señalado con anterioridad, numerosos autores trataron de probar la equivalencia entre los axiomas débil y fuerte pues, si dicha equivalencia, pues si esta hubiera sido posible toda la teoría de la conducta del consumidor giraría⁵⁷ en torno al axioma débil de Samuelson. En el marco de la teoría clásica de la demanda, Hicks (1956), Rose (1958) y Afriat (1965) proporcionaron pruebas sobre la equivalencia entre los axiomas fuerte y débil en el marco bidimensional. Rose (1958) probó⁵⁸ que la asimetría de la relación de preferencia revelada directa era suficiente (en el espacio de consumo bidimensional) para garantizar la aciclicidad de dicha relación. Un simple razonamiento de inducción matemática sobre el número de lotes de bienes r le permitió a Rose (1958) probar el resultado. Como para $r = 2$ el resultado es cierto, bastará mostrar que el resultado sigue siendo válido para sucesiones de longitud $r + 1$ cuando se supone cierto para sucesiones de longitud $r \geq 2$. Es decir, si $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ ($r \geq 2$) es una sucesión de lotes de bienes tales que $\bar{p}_i(\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1}) \geq 0$ y $\bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) > 0$ ($i = 1, \dots, r - 1$, $j = 2, \dots, r$, $i < j$) y si \bar{x}_{r+1} es un lote tal que $\bar{p}_r(\bar{x}_r - \bar{x}_{r+1}) \geq 0$ y $\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_j - \bar{x}_{r+1}) > 0$

⁵⁷ Arrow (1959) investigó este problema en el marco de una teoría general de la demanda, llegando a concluir que para que las funciones de demanda cuyo dominio de definición contiene todo conjunto formado por un número finito de lotes de bienes, el axioma débil implica el axioma fuerte; pero las funciones de demanda que aparecen en la teoría del consumo no vienen definidas para conjuntos de un número finito de lotes de bienes.

⁵⁸ Es decir, mostró que si el conjunto de datos observados $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface WARP entonces para cualquier secuencia de lotes de bienes $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ($2 \leq r \leq n$) es tales que $\bar{p}_i(\bar{x}_i - \bar{x}_{i+1}) \geq 0$ y $\bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) > 0$ ($i = 1, \dots, r - 1$, $j = 2, \dots, r$, $i < j$) y si \bar{x}_{r+1} es un lote tal que $\bar{p}_r(\bar{x}_r - \bar{x}_{r+1}) \geq 0$ y $\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_j - \bar{x}_{r+1}) > 0$ ($j = 2, \dots, r$); entonces $\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_i - \bar{x}_{r+1}) > 0$.

($j = 2, \dots, r$); entonces $\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_i - \bar{x}_{r+1}) > 0$. Para la prueba, Rose (1958) propuso considerar la magnitud relativa de las razones de precios a las que son elegidos los diversos lotes de bienes⁵⁹. Afortunadamente, sólo caben tres posibilidades. Nótese que si \bar{p}_{r+1} es la razón de precios mayor (o menor) de la sucesión, o bien (a) \bar{p}_1 se halla entre \bar{p}_r y \bar{p}_{r+1} o bien (b) \bar{p}_r se halla entre \bar{p}_1 y \bar{p}_{r+1} . Si \bar{p}_{r+1} no es la mayor ni la menor razón de precios, entonces (c) ha de encontrarse entre las razones de precios de dos lotes consecutivos de la sucesión; sean éstos \bar{x}_k y \bar{x}_{k+1} ($k < r$). Analicemos estas posibilidades en el mismo orden expuesto:

(a) En este caso, $\bar{p}_{r+1} = \alpha\bar{p}_r + (1 - \alpha)\bar{p}_{r+1}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$). Consecuentemente, \bar{x}_1 se ha de revelar preferido a \bar{x}_{r+1} , esto es, $\bar{p}_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) > 0$. Esto se debe a que

$$\begin{aligned} \bar{p}_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) &= \bar{p}_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \bar{p}_1(\bar{x}_2 - \bar{x}_{r+1}) \\ &= \bar{p}_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \alpha\bar{p}_r(\bar{x}_2 - \bar{x}_{r+1}) + (1 - \alpha)\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_{r+1}) \\ &= \bar{p}_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \alpha\bar{p}_r(\bar{x}_2 - \bar{x}_r) + \alpha\bar{p}_r(\bar{x}_r - \bar{x}_{r+1}) \\ &\quad + (1 - \alpha)\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_{r+1}) \geq 0 \end{aligned}$$

lo que se deriva de que por hipótesis cada uno de los términos es no negativo. Por tanto, \bar{x}_1 y \bar{x}_{r+1} forman una sucesión de longitud 2 para la que el teorema es verdadero, luego $\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) > 0$.

(b) En este caso, $\bar{p}_r = \alpha\bar{p}_1 + (1 - \alpha)\bar{p}_{r+1}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$). También $\bar{p}_r(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) = \bar{p}_r(\bar{x}_1 - \bar{x}_r) + \bar{p}_r(\bar{x}_r - \bar{x}_{r+1})$. Pero, $\bar{p}_r(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) = \alpha\bar{p}_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_r) + (1 - \alpha)\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1})$. Por tanto, $\alpha\bar{p}_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_r) + (1 - \alpha)\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) > 0$. De ello se sigue que o bien $\bar{p}_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) < 0$ y $\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) > 0$ o bien $\bar{p}_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) \geq 0$, en cuyo caso, como en (a), $\bar{p}_{r+1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) > 0$.

(c) Si finalmente, $\bar{p}_{r+1} = \alpha\bar{p}_k + (1 - \alpha)\bar{p}_{k+1}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{r+1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{r+1}) &= \bar{p}_{r+1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{k+1}) + \bar{p}_{r+1}(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_{r+1}) \\ &= \bar{p}_{r+1}(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_{r+1}) + \alpha\bar{p}_k(\bar{x}_1 - \bar{x}_{k+1}) + (1 - \alpha)\bar{p}_{k+1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{k+1}) \\ &= \bar{p}_{r+1}(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_{r+1}) + \alpha\bar{p}_k(\bar{x}_1 - \bar{x}_k) + \alpha\bar{p}_k(\bar{x}_k - \bar{x}_{k+1}) \\ &\quad + (1 - \alpha)\bar{p}_{k+1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{k+1}) > 0, \end{aligned}$$

lo que completaría la prueba proporcionada por Rose (1958). En consecuencia, en el espacio de consumo bidimensional, el Axioma Débil de Samuelson se postula como una condición necesaria y suficiente para construir una función de utilidad que genere la función de demanda del consumidor.

Sin embargo, esta afirmación no puede generalizarse a espacios de consumo con un mayor número de bienes⁶⁰. Como se ha señalado con anterioridad, Gale (1960, pág. 350) mostró cómo

⁵⁹Se suponen los precios normalizados de tal modo que la segunda componente de cada vector de precios es la unidad. Véase Rose (1958, pág. 124) para más detalles.

⁶⁰En una importante contribución, Uzawa (1960, 1971) muestra cómo el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* junto con una condición de regularidad implica el axioma fuerte. Se ha venido especulando dentro de la comunidad científica que “[...] Las condiciones de regularidad de Uzawa son seguramente condiciones de

en el ámbito de la teoría clásica de la demanda el Axioma Débil no implica, en general, el Axioma Fuerte. En el marco en el que nos encontramos, un número finito de observaciones de demanda, Kamiya (1963, pág. 83) se planteó si en el espacio tridimensional la asimetría y la 3-aciclicidad de la relación de preferencia revelada garantiza la aciclicidad de esta relación. El siguiente ejemplo propuesto por Kamiya (1963) muestra no solamente la no equivalencia entre los axiomas débil y fuerte de la conducta del consumidor sino que además ilustra cómo en el espacio de consumo l -dimensional ($3 \leq l < +\infty$) la ausencia de ciclos de tamaño menor o igual que l en la relación de preferencia revelada no es suficiente para garantizar la aciclicidad de la relación de preferencia revelada asociada a cualquier conjunto finito de datos de demanda de tamaño superior a l .

Ejemplo 1.3.1 (WARP no implica SARP) Kamiya (1963, pág. 83) considera cuatro situaciones presupuestarias distintas en las que un consumidor dispone de una renta de $m_1 = 13$, $m_2 = 16$, $m_3 = 13$ y $m_4 = 26$ de unidades monetarias y se enfrenta a los precios (que suponemos están fijados por el mercado) $\bar{p}_1 = (1, 1, 1/2)$, $\bar{p}_2 = (1, 1, 1)$, $\bar{p}_3 = (1, 1/2, 1)$ y $\bar{p}_4 = (1, 2, 2)$. En estas situaciones presupuestarias el consumidor demanda las siguientes cestas de bienes $\bar{x}_1 = (8, 1, 8)$, $\bar{x}_2 = (5, 5, 6)$, $\bar{x}_3 = (5, 6, 5)$ y $\bar{x}_4 = (8, 8, 1)$, respectivamente. Esto es, se suponen observados los siguientes datos de demanda con matriz de precios, de cantidades demandadas y de coste dadas por:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.5 & 2.0 \\ 0.5 & 1.0 & 1.0 & 2.0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8.0 & 5.0 & 5.0 & 8.0 \\ 1.0 & 5.0 & 6.0 & 8.0 \\ 8.0 & 6.0 & 5.0 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13.0 & 13.0 & 13.5 & 16.5 \\ 17.0 & 16.0 & 16.0 & 17.0 \\ 16.5 & 13.5 & 13.0 & 13.0 \\ 26.0 & 27.0 & 27.0 & 26.0 \end{pmatrix}$$

a) Matriz de precios P_{ij} b) Matriz de demanda X_{ij} c) Matriz de gasto C_{ij}

donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^l p_{ik} \cdot x_{kj}$ para cada par i, j . A partir de los siguientes datos se desprende que $\bar{x}_1 S \bar{x}_2$, $\bar{x}_2 S \bar{x}_3$, $\bar{x}_3 S \bar{x}_4$ y $\bar{x}_4 S \bar{x}_1$, de donde se deduce inmediatamente que la anterior lista finita de datos de demanda-precio verifica el Axioma Débil de la Preferencia Revelada (WARP) pero no el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP) y, en consecuencia, tampoco (en este contexto) los Axiomas Débil y Fuerte de la Preferencia Revelada son equivalentes.

Afriat (1967) ofreció una aproximación bastante diferente a la teoría de la preferencia revelada. El objetivo de este autor fue la construcción explícita (a partir de los datos observados) de una función de utilidad no saciada que represente las preferencias de un consumidor consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Para ello, introdujo tres nuevas caracterizaciones de la maximización de la utilidad: la propiedad de la consistencia cíclica, la propiedad de la consistencia en multiplicadores y la propiedad de consistencia en niveles, las cuales se presentan

integrabilidad disfrazadas [...]. De hecho, Bossert (1993) demuestra que bajo ciertas condiciones de continuidad (la función de demanda es continua en precios y renta) la condición de regularidad es una condición suficiente para que la demanda verifique SARP.

como condiciones necesarias y suficientes para la maximización de la utilidad. Estas propiedades de consistencia, más débiles que el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada, pueden formularse de la manera siguiente:

Definición 1.3.5 (Afriat, 1967) *La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ se dice que satisface:*

i) *la propiedad de la consistencia cíclica, si para cada subconjunto ordenado de observaciones $\{i, j, k, \dots, r\} \subset \mathbb{N}$ se cumple:*

$$[\bar{p}_i \bar{x}_j \leq \bar{p}_i \bar{x}_i, \bar{p}_j \bar{x}_k \leq \bar{p}_j \bar{x}_j \dots, \bar{p}_r \bar{x}_i \leq \bar{p}_r \bar{x}_i] \Rightarrow [\bar{p}_i \bar{x}_j = \bar{p}_i \bar{x}_i, \dots, \bar{p}_r \bar{x}_i = \bar{p}_r \bar{x}_i] \quad (1.24)$$

ii) *la propiedad de la consistencia en multiplicadores y niveles, si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ y ϕ_1, \dots, ϕ_n tales que*

$$\phi_j \leq \phi_i + \lambda_i \bar{p}_i (\bar{x}_j - \bar{x}_i) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.25)$$

iii) *la propiedad de la consistencia de los multiplicadores, si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tales que para todo subconjunto de observaciones $\{i, j, k, \dots, r\} \subset \mathbb{N}$ es cierto que*

$$\lambda_i \bar{p}_i (\bar{x}_j - \bar{x}_i) + \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_k - \bar{x}_j) + \dots + \lambda_r \bar{p}_r (\bar{x}_i - \bar{x}_r) \geq 0 \quad (1.26)$$

En lo sucesivo, para todo par de observaciones i, j designaremos por $a_{ij} = \bar{p}_i (\bar{x}_j - \bar{x}_i)$. El siguiente teorema muestra uno de los famosos resultados de Afriat, la equivalencia entre la consistencia cíclica, la consistencia de los multiplicadores y la consistencia en multiplicadores y niveles.

Teorema 1.3.1 (Afriat, 1967) *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda. Entonces, son equivalentes:*

(i) *Los datos satisfacen la propiedad de consistencia cíclica.*

(ii) *Los datos satisfacen la propiedad de la consistencia de los multiplicadores.*

(iii) *Los datos verifican la propiedad de la consistencia en multiplicadores y niveles.*

Demostración: La prueba de este resultado puede verse en Afriat (1967, págs. 71-74). ■

La propiedad de la consistencia cíclica, que es una consecuencia observable de la hipótesis de la maximización de la utilidad, establece que las preferencias de un consumidor pueden representarse por medio de una función real $u(\cdot)$ definida sobre el ortante no-negativo del espacio euclídeo l -dimensional, \mathbb{R}_+^l , satisfaciendo las siguientes condiciones:

- i) $u(\cdot)$ es una función semicontinua superior; es decir, para cada número real r , el “conjunto nivel” $L(r) \equiv \{\bar{x} : u(\bar{x}) \geq r\}$ es cerrado⁶¹.
- ii) es localmente no saciada; es decir, para cada $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}_+^l$ y para cada $\delta > 0$, existe un vector $\bar{x}_\delta \geq \bar{x}_0$ tal que $(\bar{x}_\delta - \bar{x}_0)'(\bar{x}_\delta - \bar{x}_0) \leq \delta$ y $u(\bar{x}_\delta) \geq u(\bar{x}_0)$.
- iii) $u(\bar{x}_t) = \max\{u(\bar{x}) / \bar{p}'_t \cdot \bar{x} \leq 1\}$ para cada $1 \leq t \leq n$.

En lo sucesivo, para toda cesta demandada \bar{x}_j designamos por ϕ_j al valor de la función de utilidad $u(\cdot)$ en \bar{x}_j ; es decir, $\phi_j = u(\bar{x}_j)$. Nótese que si $\bar{p}_j > \bar{0}$ entonces $\{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l : \bar{p}'_j \bar{x} \leq 1\}$ es un conjunto cerrado y acotado y, por tanto, el siguiente problema de optimización

$$\max_{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l} \{u(\bar{x}) : \bar{p}_j \bar{x} \leq 1\} \quad (1.27)$$

tiene al menos una solución⁶² que se denotará por \bar{x}_j . El siguiente lema muestra que si $u(\cdot)$ es una función de utilidad localmente no saciada y semicontinua superior que racionaliza la conducta observada, entonces los datos satisfacen la propiedad de la consistencia cíclica.

Lema 1.3.1 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y sea $u(\cdot)$ la función de utilidad que racionaliza la conducta observada. Entonces, para todo subconjunto ordenado $C = \{i, j, k, \dots, r\}$ en \mathbb{N} se cumple: $\bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \leq 0$, $\bar{p}_j(\bar{x}_k - \bar{x}_j) \leq 0$, \dots , $\bar{p}_r(\bar{x}_r - \bar{x}_i) \leq 0$, entonces $\phi_i = \dots = \phi_r$ y, además, $\bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i) = 0$, $\bar{p}_j(\bar{x}_k - \bar{x}_j) = 0$, \dots , $\bar{p}_r(\bar{x}_r - \bar{x}_i) = 0$.*

Demostación: Sea $u(\cdot)$ una función de utilidad no saciada localmente que racionaliza la conducta observada. Entonces, para todo par de observaciones r, s si el consumidor revela que prefiere directamente la observación de consumo \bar{x}_r a la observación de consumo \bar{x}_s se tiene,

$$u(\bar{x}_r) = \max_{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l} \{u(\bar{x}) : \bar{p}_t \bar{x} \leq \bar{p}_r \bar{x}_r\} \geq \phi_s = \max_{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l} \{u(\bar{x}) : \bar{p}_s \bar{x} \leq \bar{p}_s \bar{x}_s\},$$

luego $u(\bar{x}_1) \geq \dots \geq u(\bar{x}_r) \geq u(\bar{x}_1)$, y, por tanto, $\phi_1 = \dots = \phi_r$. De otra parte, razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que existen \bar{x}_r y \bar{x}_s en C tales que $\bar{p}_r \bar{x}_s < \bar{p}_r \bar{x}_r$ y $\phi_r = \phi_s$. Entonces, por ser $u(\cdot)$ una función localmente no saciada, para cada $\delta > 0$, existe un $\bar{x}_\delta \in B_\delta(\bar{x}_s)$ tal que $u(\bar{x}_\delta) > \phi_s = \phi_r$, luego si se elige δ lo suficientemente pequeño se tiene $\bar{p}_r \bar{x}_\delta \leq \bar{p}_r \bar{x}_r$, lo que implica una contradicción ya que $\phi_r \geq \phi_\delta$. ■

Del Lema 1.3.1 se desprende que si los datos $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ han sido generados por un consumidor maximizador de la utilidad cuyas preferencias cumplen el supuesto de la insaciabilidad, los datos deben satisfacer la propiedad de la consistencia cíclica ya que, en caso contrario, si existiese un par de observaciones de demanda \bar{x}_i, \bar{x}_j tales que $\bar{x}_i R \bar{x}_j$ y $\bar{x}_j P^0 \bar{x}_i$, por definición de la relación de preferencia revelada indirecta se tendría garantizada la existencia de un subconjunto de cestas

⁶¹Para una exposición detallada sobre las funciones semicontinuas véase Berge (1963, págs. 74-76).

⁶²Para más detalles véase Berge (1963, pág. 76).

demandadas $\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_k}$ satisfaciendo $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_{i_1} R^0 \dots R^0 \bar{x}_j$. Entonces, $u(\bar{x}_i) \geq u(\bar{x}_{i_1}) \geq \dots \geq u(\bar{x}_j)$. Por otra parte, puesto que $u(\cdot)$ es una función de utilidad no saciada y que racionaliza los datos, si $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_i \bar{x}_i$ se tiene $u(\bar{x}_j) > u(\bar{x}_i)$, lo cual sería un absurdo. En consecuencia, la propiedad de la consistencia cíclica es una consecuencia observable de la maximización de la utilidad. Pero, ¿expresa todas las implicaciones de ese modelo? Es decir, si algunos datos satisfacen este axioma, ¿es necesariamente cierto que deben de haber sido generados por la maximización de la utilidad o cabe pensar, al menos, que haya podido ser así?, ¿es la propiedad de la consistencia cíclica de Afriat una condición suficiente para la maximización de la utilidad? El teorema de Afriat establece que la propiedad de la “consistencia cíclica” es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una función de utilidad $u(\cdot)$ no saciada, continua, monótona y convexa que racionaliza los datos de demanda.

Teorema 1.3.2 (Teorema de Afriat) *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda. Entonces, son equivalentes:*

(i) *Existe una función de utilidad que racionaliza los datos.*

(ii) *El conjunto de datos $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface la “consistencia cíclica”; esto es,*

$$\bar{p}_r \bar{x}_r \geq \bar{p}_r \bar{x}_s, \bar{p}_s \bar{x}_s \geq \bar{p}_s \bar{x}_t, \dots, \bar{p}_q \bar{x}_q \geq \bar{p}_q \bar{x}_r$$

implica que

$$\bar{p}_r \bar{x}_r = \bar{p}_r \bar{x}_s, \bar{p}_s \bar{x}_s = \bar{p}_s \bar{x}_t, \dots, \bar{p}_q \bar{x}_q = \bar{p}_q \bar{x}_r.$$

(iii) *Existen unos números $\phi_i, \lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ tales que*

$$\phi_i \leq \phi_j + \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j) \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

(iv) *Existe una función de utilidad $u(\cdot)$ no saciada, continua, cóncava y monótona que racionaliza los datos.*

Demostración: Demostraciones de este resultado pueden encontrarse en Afriat (1967), Diewert (1973), Varian (1982a) y Scarf, Fostel y Todd (2004). ■

El teorema de Afriat establece que los datos han podido haber sido generados desde el proceso de maximización de una función de utilidad no saciada, condición (i), si y solamente si los datos satisfacen el conjunto de condiciones algebraicas establecidas en la condición (ii). La Figura 1.3 ilustra dos observaciones que no satisfacen la *Consistencia Cíclica*. En estas observaciones, $\bar{p}_1 \bar{x}_2 < \bar{p}_1 \bar{x}_1$ y $\bar{p}_2 \bar{x}_1 < \bar{p}_2 \bar{x}_2$. Este teorema también establece que una condición equivalente a la *Consistencia Cíclica* es que se puedan encontrar $2n$ números $\lambda_i > 0$ y u_i ($i = 1, \dots, n$) satisfaciendo las desigualdades descritas en (iii), desigualdades conocidas como la *Consistencia en Multiplicadores y Niveles*. Por ejemplo, es imposible encontrar $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y u_1, u_2 satisfaciendo (iii) para las observaciones de la Figura 1.3. Como $\bar{p}_1(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) < 0$ y $\bar{p}_1(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) < 0$,

si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ entonces por (iii) se tiene $u_1 - u_2 < 0$ y $u_2 - u_1 < 0$. Finalmente, la equivalencia entre las condiciones (i) y (iv) implica que si uno puede encontrar una función de utilidad que racionaliza los datos, entonces es también posible encontrar una función de utilidad monótona, continua, no saciada y cóncava que los racionaliza.

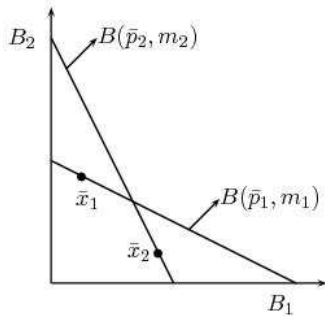


Figura 1.3: Datos violando GARP.

El teorema de Afriat puede utilizarse para contrastar la consistencia de un conjunto de datos de demanda con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Nótese que el Teorema 1.3.2 permite construir explícitamente una función de utilidad continua, cóncava y monótona que racionaliza la conducta observada por un consumidor maximizador de la utilidad. Esto es, si los datos satisfacen los asertos (ii) o (iii) del teorema de Afriat, entonces es posible construir la función poliédrica (1.28) que genera esos datos. La importancia de la función poliédrica (1.28) en los problemas de construcción de la utilidad es que $u(\bar{x})$ es compatible con los datos de demanda en el sentido de Afriat (1987, pág. 114-117) y Afriat (1999a, 1999b). Además, como la función (1.28) es solución del problema de construcción de la utilidad si y solamente si ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ satisfacen la condición (1.25), la existencia de una solución dada para cualquier función de utilidad estrictamente compatible con la hipótesis de la maximización de la utilidad es equivalente a la existencia de una solución del sistema (1.25), o la consistencia del sistema (1.26), el cual es equivalente a que los datos verifiquen el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada.

Es importante señalar que para construir –a partir de los datos observados– una función de utilidad $u(\cdot)$ que racionaliza los datos y que además posea todas las propiedades de monotonía y convexidad que generalmente se le atribuyen a las funciones de utilidad basta con hallar $2n$ números ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ verificando (1.25). En efecto, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ y ϕ_1, \dots, ϕ_n son solución del sistema de inecuaciones lineales (1.25), entonces, para cada observación j , el multiplicador λ_j y el vector de precios \bar{p}_j determinan un vector gradiente $g_j = \bar{p}_j \lambda_j$ que junto con el nivel de utilidad ϕ_j permite definir una función lineal

$$u_j(\bar{x}) = \phi_j + g'_j(\bar{x} - \bar{x}_j) = \phi_j + \bar{p}_j \lambda_j (\bar{x} - \bar{x}_j)$$

con gradiente g_j , y tal que $u_j(\bar{x}_j) = \phi_j$ en cualquier cesta demandada \bar{x}_j . Resulta fácil probar que cuando los precios son \bar{p}_j , esta función alcanza su máximo restringido en \bar{x}_j ; puesto que, en caso contrario, se tendría que $u_j(\bar{x}_j) = \phi_j + \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j) < \phi_i$, violando así las desigualdades de Afriat. Además, como $\phi_i \leq \phi_j + \lambda_i \bar{p}_i (\bar{x}_j - \bar{x}_i)$ para todo par de observaciones i, j , se sigue que la función poliédrica

$$u(\bar{x}) = \min \{ \phi_1 + \lambda_1 \bar{p}_1 (\bar{x} - \bar{x}_1), \dots, \phi_n + \lambda_n \bar{p}_n (\bar{x} - \bar{x}_n) \} \quad (1.28)$$

así definida es continua, cóncava y monótona por ser las funciones $u_j(\bar{x})$ lineales (y, por consiguiente, cóncavas) y sus gradientes g_j positivos (son funciones monótonas). Además, $u(\cdot)$ racionaliza la conducta observada⁶³.

Resulta interesante proporcionar un argumento más heurístico para el teorema de Afriat, el cual permita exhibir más directamente el significado económico de las desigualdades de Afriat. Supongamos que $\phi(\bar{x})$ es una función de utilidad diferenciable y cóncava que racionaliza las elecciones observadas $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Entonces el hecho de que $\phi(\cdot)$ sea cóncava [v. Karlin (1959, pág. 405)] implica que debe satisfacer las condiciones de concavidad, a saber,

$$\phi(\bar{x}_i) \leq \phi(\bar{x}) + D\phi(\bar{x}_i)(\bar{x} - \bar{x}_i) \quad (1.29)$$

Por otra parte, como $\phi(\cdot)$ es diferenciable las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema de optimización se reducen a la existencia de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$D\phi(\bar{x}_i) = \lambda_i \bar{p}_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.30)$$

Introduciendo (1.29) en (1.30), se tiene que

$$\phi(\bar{x}_i) \leq \phi(\bar{x}) + \lambda_i \bar{p}_i(\bar{x} - \bar{x}_i). \quad (1.31)$$

Ahora, si para toda observación i definimos $\phi_i \equiv \phi(\bar{x}_i)$ y reemplazamos \bar{x} en (1.30) por \bar{x}_j , para todo $j = 1, \dots, n$, las desigualdades (1.31) se pueden reescribir de la manera siguiente:

$$\phi_i \leq \phi_j + \lambda_j \bar{p}_j(\bar{x}_j - \bar{x}_i), \quad \text{para todos } i, j \text{ con } 1 \leq i, j \leq n; \quad (1.32)$$

de donde se sigue que los números de Afriat ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ son una condición necesaria para la maximización de la utilidad en un contexto diferenciable. La misma técnica de demostración puede ser modificada ligeramente para probar este resultado sin suponer que $u(\cdot)$ es diferenciable⁶⁴. Para motivar la suficiencia nótese que para todo conjunto de multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ y niveles ϕ_1, \dots, ϕ_n satisfaciendo (1.25), la función poliédrica

$$u(\bar{x}) = \min \{ \phi_1 + \lambda_1 \bar{p}_1(\bar{x} - \bar{x}_1), \dots, \phi_n + \lambda_n \bar{p}_n(\bar{x} - \bar{x}_n) \}$$

y la función polítopa

$$u^*(\bar{x}) = \max \left[\sum \phi_j t_j : \sum \bar{x}_j t_j \leq \bar{x}; \sum t_j = 1; t_j \geq 0 \right]$$

son compatibles con los datos de demanda y presentan las propiedades clásicas de monotonía y convexidad requeridas a las funciones de utilidad clásica. Es importante señalar que estas

⁶³Nótese que cuando los precios son \bar{p}_j esta función alcanza su máximo restringido en \bar{x}_j . Además, si $\bar{p}_j \bar{x}_j \geq \bar{p}_j \bar{x}_i$, se tiene $u(\bar{x}_i) \leq u_j(\bar{x}_i) = \phi_j + \lambda_j \bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \leq \phi_j = u(\bar{x}_j)$, lo que demuestra que $u(\bar{x}_j) \geq u(\bar{x}_i)$ cualquiera que sea \bar{x}_i tal que $\bar{p}_j \bar{x}_i \leq \bar{p}_j \bar{x}_j$.

⁶⁴Véase Diewert y Parkan (1985, pág. 146) para más detalles.

funciones nos permitirán caracterizar a todas las funciones de utilidad compatibles con los datos de demanda. Nótese que si para toda observación j y para cada multiplicador λ_j , $g_j = \lambda_j \bar{p}_j$ es un elemento del conjunto gradiente $G(\bar{x}_j)$ y, además,

$$\begin{aligned} g_j &\in G(\bar{x}_j), & g_j &\in G^*(\bar{x}_j) \\ \phi_j &= u(\bar{x}_j), & \phi_j &= u^*(\bar{x}_j) \end{aligned}$$

Entonces para cada función de utilidad $\phi(\bar{x})$ tal que $u^*(\bar{x}) \leq \phi(\bar{x}) \leq u(\bar{x})$ para todo \bar{x} se verifica que $\phi(\bar{x})$ es una función de utilidad que racionaliza la conducta observada; esto es, es compatible con los datos de demanda. Además, toda función de utilidad $\phi(\bar{x})$ compatible con la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ debe cumplir: (i) $u(\bar{x}) \leq \phi(\bar{x}) \leq u^*(\bar{x})$ para todo \bar{x} y (ii) $\phi(\bar{x}_j) = \phi_j$ para toda cesta demandada \bar{x}_j . Para más detalles, véase Afriat (1981, Cap. 2) y Afriat (1999a, 1999b).

Por otra parte, merece la pena destacar que para toda función de utilidad $\phi(\bar{x})$ con conjunto gradiente soporte $G(\bar{x})$ para todo \bar{x} , una condición necesaria y suficiente para que sea compatible con la correspondencia de demanda es que para todo par de observaciones i, j se cumpla:

$$\phi_i \leq \phi_j + \lambda_i \bar{p}_i (\bar{x}_j - \bar{x}_i)$$

donde $\phi_j = \phi(\bar{x}_j)$ y $\lambda_j \bar{p}_j \in G(\bar{x}_j)$ para todo j . Por otra parte, nótese que si $\phi(\bar{x})$ es cualquier función de utilidad creciente y cóncava que genera la conducta observada, la función

$$u_j(m) = \max [\phi(\bar{x}) : \bar{p}_j \bar{x} \leq m]$$

es también creciente y cóncava y, por el teorema soporte de las funciones cóncavas, existe un $l_j > 0$ tal que

$$u_j(m) - u_j(m_j) \leq l_j(m - m_j) \quad \text{para todo } m$$

que representa el “multiplicador de Lagrange” en las condiciones de optimalidad del teorema de Slater, o del teorema de Kuhn-Tucker en el caso donde $\phi(\bar{x})$ sea diferenciable⁶⁵. Si los precios no están normalizados, entonces $\lambda_j = m_j l_j$ reemplaza a l_j como multiplicador de Lagrange. Nótese cómo para toda función de utilidad $\phi(\bar{x})$ (con gradiente $g(\bar{x})$) compatible con la hipótesis de la maximización de la utilidad se cumple

$$u_j(m) - u_j(m_j) \leq \lambda_j(m/m_j - 1),$$

donde en el caso diferenciable λ_j es único y

$$m_j \partial u_j(m) / \partial m |_{m=m_j} = \lambda_j,$$

luego tiene cierto sentido considerar a los ϕ'_i s y a los λ'_i s como niveles de utilidad y utilidades marginales de la riqueza, respectivamente de cualquier función de utilidad que racionalice la

⁶⁵Véase Afriat (1987, Cap. 5), para más detalles.

conducta observada de un consumidor maximizador de la utilidad. La interpretación de los ϕ'_i s como niveles de utilidad y de los λ'_i s como utilidades marginales de la riqueza fue sugerida por primera vez por Afriat (1967) y posteriormente dilucidada por Diewert y Parkan (1978) y Varian (1982a, 1982b, 1983, 2006).

A lo largo de los años diversos autores han proporcionado diferentes caracterizaciones de la *propiedad de la consistencia cíclica* de Afriat. Diewert (1973, págs. 422-423) propone contrastar la factibilidad de un problema de programación lineal con $2n$ incógnitas y n^2 restricciones (la mitad de ellas no lineales) para analizar la racionalidad de un consumidor en un contexto competitivo. Diewert y Parkan (1978) presentan una nueva caracterización de la hipótesis de la maximización de la utilidad. Estos autores “afirman” que las desigualdades de Afriat pueden ser expresadas en diferentes conjuntos de condiciones sobre la subyacente función de utilidad que racionaliza los datos. Así, una condición necesaria y suficiente para la existencia de los números de Afriat ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ es que el valor objetivo del siguiente problema de programación lineal sea cero:

$$\min \sum_{t=1}^n \sum_{r=1}^n s_{rt} \quad (1.33)$$

sujeto a

$$s_{rt} = \phi_t - \phi_r - \lambda_r p_r (\bar{x}_t - \bar{x}_r) + S_{rt}, \quad r, t = 1, \dots, n \quad (1.34)$$

$$\lambda_r \geq 1, \quad r = 1, \dots, n \quad (1.35)$$

$$s_{rt} \geq 0, \quad S_{rt} \geq 0, \quad r, t = 1, \dots, n \quad (1.36)$$

donde ϕ_r y λ_r son variables y s_{rt} , S_{rt} son variables holgura no-negativas que se utilizan para convertir las desigualdades en igualdades. Si la función objetivo está acotada inferiormente por cero, entonces todos los óptimos verifican $s_{rt} = 0$, y es obvio que (1.34) y las restricciones de no-negatividad $S_{rt} \geq 0$ implican (1.25), y viceversa. Nótese que si las desigualdades (1.34)–(1.35) se satisfacen con $\lambda_r > 0$ para todo r , entonces es obvio que todos los λ 's y ϕ 's pueden reescalarsen de tal modo que las mismas desigualdades (1.25) se verifiquen con $\lambda_r \geq 1$ para $r = 1, \dots, n$. Por lo tanto, el problema de programación lineal (1.34)–(1.36) también alcanzará su cota inferior de cero en este caso. Otra condición necesaria y suficiente es que la función objetivo del siguiente problema de minimización alcance su cota inferior de cero:

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^n \sum_{r=1}^n [s_{rt}]^2 \right\} \quad (1.37)$$

donde las n^2 variables holgura s_{rt} están definidas por

$$s_{rt} \equiv u_t - u_r - (\alpha_r^2 + 1)p_r(\bar{x}_t - \bar{x}_r) + \sigma_{rt}^2, \quad r, t = 1, \dots, n \quad (1.38)$$

Si definimos $\lambda_r \equiv \alpha_r^2 + 1 \geq 1$ y $S_{rt} \equiv \sigma_{rt}^2 \geq 0$, puede verse fácilmente que la ecuación (1.35) se corresponde con la ecuación (1.34). Por su parte, Varian (1982a) introduce en la literatura económica el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada (GARP), el cual es equivalente a la *propiedad de la consistencia cíclica* de Afriat, y fácilmente computable.

Definición 1.3.6 (Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada) *La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP si para todo par de observaciones i, j se cumple: $\bar{x}_i R \bar{x}_j$ implica $\sim \bar{x}_j P^0 \bar{x}_i$.*

Es inmediato comprobar que GARP y la propiedad de la *consistencia cíclica* de Afriat son equivalentes⁶⁶. Así pues, GARP se postula como una condición necesaria y suficiente para determinar si un conjunto finito de datos de demanda pueden ser racionalizados por una función de utilidad cóncava, continua, monótona y no saciada. Por otra parte, se puede mostrar con facilidad que SARP implica GARP, pero que el recíproco no es cierto⁶⁷. Básicamente SARP requiere funciones de demanda univaluadas mientras que GARP es compatible con las funciones de demanda multivaluadas⁶⁸. Por ejemplo, los datos de la Figura 1.4 violan SARP pero verifican GARP.

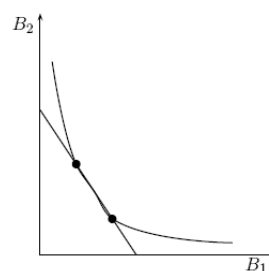


Figura 1.4: Multivaluación de la función de demanda.

Varian (1982a, pág. 948) afirma que aunque GARP y la consistencia cíclica son algebraicamente equivalentes, la potencialidad⁶⁹ de GARP es bastante mayor desde una perspectiva computacional, ya que para contrastar si un conjunto de observaciones de demanda es consistente con la teoría neoclásica de la demanda sólo es necesario calcular la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada directa. Nótese que el axioma GARP puede ser reformulado como sigue: si $\bar{x}_i R \bar{x}_j$ entonces $\bar{p}_j \bar{x}_j \leq \bar{p}_j \bar{x}_i$ para $i, j = 1, \dots, n$. Por consiguiente, verificar que algunos datos verifican GARP es una cuestión trivial una vez que se conoce la clausura transitiva de la relación de la preferencia revelada directa R^0 . En la literatura económica se suele utilizar el algoritmo de Warshall (1962) de complejidad computacional $\mathcal{O}(n^3)$ para calcular la clausura transitiva de una relación de preferencia, si bien existen (como

⁶⁶Véase Varian (1982a, pág. 948), para más detalles.

⁶⁷Nótese que si $\{(\bar{p}_j, m_j)\}_{j=1}^r$ es una secuencia finita de conjuntos presupuestarios en \mathbb{R}_+^3 con la propiedad: $\{(\bar{p}_j, m_j)\}_{j=1}^r$ es un haz de planos de arista la recta s , y $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ una secuencia finita de elementos demandados del espacio de consumo 3-dimensional \mathbb{R}_+^3 tal que para cada $1 \leq j \leq r$ se cumple $\bar{x}_j \in s$ es claro que para todo par de observaciones i, j se cumple $\bar{x}_i S \bar{x}_j$, $\bar{x}_j S \bar{x}_i$ y, además, no ocurre que $\bar{x}_j P^0 \bar{x}_i$.

⁶⁸Como el Axioma Débil de la Preferencia Revelada implica que la función de demanda es univaluada, las correspondencias de demanda generadas por las clases de indiferencia con partes planas quedan a fortiori excluidas del Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada.

⁶⁹The equivalency of GARP and cyclical consistency is trivial from the mathematical point of view, but is quite important from the computational point of view, since GARP is quite simple to check in practice, as we discuss below (Varian; 1982a, pág. 948).

mostraremos al final de este capítulo) otros algoritmos de menor complejidad computacional y, por tanto más eficientes, que permiten resolver este problema.

Algorithm 1. Pseudo-code for check GARP

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

```

1. begin
2. for  $i, j := 1$  to  $n$  do  $R^0[i, j] \leftarrow 0$ ;  $P^0(i, j) \leftarrow 0$ ;  $B[i, j] \leftarrow 0$ 
3. for  $i, j := 1$  to  $n$  do if  $C[i, i] \geq C[i, j]$  then  $R^0[i, j] \leftarrow 1$ 
4. for  $i, j := 1$  to  $n$  do if  $C[i, i] > C[i, j]$  then  $P^0[i, j] \leftarrow 1$ 
5. for  $i, j := 1$  to  $n$  do  $R[i, j] \leftarrow R^0[i, j]$ 
6. for  $k := 1$  to  $n$  do
7.   for  $i := 1$  to  $n$  do
8.     if  $i \neq k$  and  $R[i, k] = \text{true}$  then
9.       for  $j := 1$  to  $n$  do
10.         $R[i, j] \leftarrow R[i, j] \vee R[k, j]$ 
11. for  $i, j := 1$  to  $n$  do  $B[i, j] = R[j, i] \cdot P^0[i, j]$ 
12. if  $\maxval B(1:n, 1:n) = 1$  then print(*) the data doesn't verify GARP
13. else print(*) the data verifies GARP
14. return

```

Output: Are the observed demand data consistent with GARP? (Y/N).

Del mismo modo que SARP es la generalización de WARP, el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada (GARP) se puede debilitar para obtener la siguiente condición de racionalización: para todo par de lotes de bienes demandados \bar{x}_i, \bar{x}_j en las situaciones presupuestarias i, j respectivamente, si \bar{x}_i se revela estrictamente preferido a \bar{x}_j no puede ocurrir simultáneamente que \bar{x}_j se revele directamente preferido a \bar{x}_i ; esto es, $\bar{x}_i P^0 \bar{x}_j \Rightarrow \sim \bar{x}_j R^0 \bar{x}_i$. Es claro que esta condición de racionalidad, que denominaremos **Axioma Débil de Varian**, es una condición necesaria pero no suficiente (excepción hecha del caso de 2 bienes) para que un conjunto de datos sea consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad. En el caso bidimensional, resulta fácil probar que esta condición de consistencia (que equivale a la “2-aciclicidad débil”) implica GARP. Es inmediato comprobar que el Axioma Débil de Samuelson implica el Axioma Débil de Varian⁷⁰. Sin embargo, salvo en ciertas condiciones especiales, ambas caracterizaciones de racionalidad no son equivalentes. Los lotes de bienes \bar{x}_1 y \bar{x}_2 demandados

⁷⁰Sea $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ una secuencia de elementos demandados en \mathbb{R}_+^2 ($r \geq 2$) satisfaciendo el Axioma Débil de Varian, entonces resulta fácil probar que o bien la relación de preferencia revelada directa S es asimétrica o bien

en los presupuestos ilustrados en la Figura 1.4 muestran que el Axioma Débil de Varian no implica WARP, incluso en el espacio de consumo bidimensional. El Teorema 1.3.3 muestra la equivalencia entre WARP y el Axioma Débil de Varian en el espacio de consumo bidimensional. En esta prueba utilizaremos los siguientes resultados geométricos que estableció Afriat (1965) en la prueba de la equivalencia entre los axiomas débil y fuerte de la preferencia revelada en el espacio de consumo bidimensional. Afriat (1965) prueba que si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \subset \mathbb{R}_{++}^2 \times \mathbb{R}_+^2$ es un conjunto finito de observaciones demanda-precio y $\{(\bar{p}_t, m_t)\}_{t=1}^n$ el conjunto de hiperplanos presupuestarios asociado, entonces para toda terna de elementos demandados $\{\bar{x}_j\}_{j=i}^{i+2}$ en $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con $\bar{p}_i \bar{x}_i \geq \bar{p}_i \bar{x}_{i+1}$, $\bar{p}_{i+1} \bar{x}_{i+1} \geq \bar{p}_{i+1} \bar{x}_{i+2}$, $\bar{p}_i \bar{x}_i < \bar{p}_i \bar{x}_{i+2}$ y $\bar{p}_j \bar{x}_j < \bar{p}_j \bar{x}_i$ se cumple que los hiperplanos presupuestarios (rectas de balance) asociados no son paralelos dos a dos; esto es, $\partial B_k \not\parallel \partial B_{k'} \forall i \leq k, k' \leq i+2$, donde $B_k = (\bar{p}_k, m_k)$ para todo k . Además, ∂B_{i+1} separa a ∂B_i y ∂B_{i+2} en el sentido siguiente:

Definición 1.3.7 Sean (\bar{p}_1, m_1) , (\bar{p}_2, m_2) , y (\bar{p}_3, m_3) tres situaciones presupuestarias en \mathbb{R}_{++}^2 y ∂B_1 , ∂B_2 y ∂B_3 sus rectas de balance asociadas. Se dice que ∂B_2 separa a ∂B_1 y ∂B_3 , y lo denotamos por $\langle \partial B_1 | \partial B_2 | \partial B_3 \rangle$, si $A_2 \in (A_1, A_3)$ y $C_2 \in (C_1, C_3)$, donde $A_j = (\frac{m_j}{\bar{p}_1}, 0)$ y $C_j = (0, \frac{m_j}{\bar{p}_2})$ para todo $j = 1, 2, 3$.

Esta propiedad “separadora” posee una característica interesante que se puede deducir fácilmente mediante la hipótesis de inducción matemática:

$$[\langle \partial B_1 | \partial B_2 | \partial B_3 \rangle \cdots \& \langle \partial B_{r-2} | \partial B_{r-1} | \partial B_r \rangle] \implies [\langle \partial B_1 | \partial B_2 | \dots | \partial B_{r-1} | \partial B_r \rangle] \quad (1.39)$$

A partir de la propiedad anterior se puede inferir que si la relación de preferencia revelada asociada a una secuencia de elementos demandados $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ (distintos dos a dos) es 2-acíclica entonces no pueden existir ciclos irreducibles formados por más de dos elementos, pues, si esto sucediese⁷¹, entonces $\langle \partial B_1 | \partial B_2 \cdots \partial B_r | \partial B_1 \rangle$ y, además, $\partial B_1 \parallel \partial B_2 \parallel \cdots \parallel \partial B_r$ lo que implica que $\partial B_i = \partial B_j$, $\forall 1 \leq i, j \leq r$, en contra de lo supuesto.

Estos resultados geométricos permiten demostrar con relativa facilidad que el llamado Axioma Débil de Varian implica GARP en el espacio de consumo bidimensional.

Teorema 1.3.3 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \subset \mathbb{R}_{++}^2 \times \mathbb{R}_+^2$ un conjunto de datos de demanda consistentes con el Axioma Débil de Varian, y sea $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ un subconjunto de cestas de bienes demandadas tales que

$$\bar{p}_1 \bar{x}_1 \geq \bar{p}_1 \bar{x}_2, \bar{p}_2 \bar{x}_2 \geq \bar{p}_2 \bar{x}_3, \dots, \bar{p}_{r-1} \bar{x}_{r-1} \geq \bar{p}_{r-1} \bar{x}_r, \bar{p}_r \bar{x}_r \geq \bar{p}_r \bar{x}_1$$

Entonces se cumple que $(\bar{p}_1, m_1) \equiv \cdots \equiv (\bar{p}_r, m_r)$ y, además, $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r \in h(\bar{p}_1, m_1)$.

si para todo par de observaciones i, j se cumple que $\bar{x}_i S \bar{x}_j$ y $\bar{x}_j S \bar{x}_i$, entonces $(\bar{p}_i, m_i) \equiv (\bar{p}_j, m_j)$ y, por tanto, $\bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i) = \bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) = 0$.

⁷¹Esto es, si la secuencia de elementos demandados $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ de elementos demandados ($r \geq 3$) es tal que $\bar{p}_i \bar{x}_i \geq \bar{p}_i \bar{x}_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq r-1$, $\bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq r-1$ con $i < j$ y $\bar{p}_r(\bar{x}_i - \bar{x}_r) > 0$ para todo $2 \leq i \leq r-1$.

Demostración: Razonemos por inducción sobre el número r de datos de demanda. Para ello, supongamos que para la terna de datos de demanda $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ se cumple que $\bar{p}_1\bar{x}_1 \geq \bar{p}_1\bar{x}_2$, $\bar{p}_2\bar{x}_2 \geq \bar{p}_2\bar{x}_3$ y $\bar{p}_3\bar{x}_3 \geq \bar{p}_3\bar{x}_1$. Entonces, necesariamente, tiene que darse alguna de las dos situaciones siguientes: (i) que \bar{x}_3 se revele directamente preferida a \bar{x}_2 ; o bien, (ii) que \bar{x}_2 se revele directamente a \bar{x}_1 . En el primer caso, $\bar{p}_2\bar{x}_2 \geq \bar{p}_2\bar{x}_3$ y $\bar{p}_3\bar{x}_3 \geq \bar{p}_3\bar{x}_2$ con $\bar{x}_2 \neq \bar{x}_3$. Por otro lado, como $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ es consistente con el Axioma Débil de Varian, se tiene que $(\bar{p}_2, m_2) \equiv (\bar{p}_3, m_3)$, y por tanto, $\bar{x}_2, \bar{x}_3 \in h(\bar{p}_2, m_2)$. Entonces $\bar{p}_2\bar{x}_2 \geq \bar{p}_2\bar{x}_1$, y $\bar{x}_1 \in h(\bar{p}_2, m_2)$; puesto que en caso contrario las datos de demanda \bar{x}_1 y \bar{x}_2 violarían el Axioma Débil de Varian. En el segundo caso, $(\bar{p}_1, m_1) \equiv (\bar{p}_2, m_2)$, y por tanto, $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in h(\bar{p}_1, m_1)$. Entonces, $\bar{p}_1\bar{x}_1 \geq \bar{p}_1\bar{x}_3$ y $\bar{x}_3 \in h(\bar{p}_1, m_1)$, ya que en caso contrario \bar{x}_1 y \bar{x}_3 violarían el Axioma Débil de Varian. Suponemos, a continuación, el resultado cierto para $r - 1$ y veamos que se cumple para r . Sea $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^r$ un subconjunto de elementos demandados tales que $\bar{p}_1\bar{x}_1 \geq \bar{p}_1\bar{x}_2, \bar{p}_2\bar{x}_2 \geq \bar{p}_2\bar{x}_3, \dots, \bar{p}_{r-1}\bar{x}_{r-1} \geq \bar{p}_{r-1}\bar{x}_r$ y $\bar{p}_r\bar{x}_r \geq \bar{p}_r\bar{x}_1$. Entonces, necesariamente, tiene que darse alguna de las dos situaciones siguientes:

- (i) Existen i, j con $1 \leq i, j \leq r - 1$ tal que $i < j$ y $\bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \leq 0$;
- (ii) Existe un i con $2 \leq i \leq r - 1$ tal que $\bar{p}_r(\bar{x}_i - \bar{x}_r) \leq 0$;

En el primer caso, como la secuencia de elementos demandados $\{\bar{x}_k\}_{k=i}^j$ es de tamaño $j - i + 1 < r$ se cumple (por la hipótesis de inducción matemática) que $(\bar{p}_i, m_i) \equiv (\bar{p}_{i+1}, m_{i+1}) \equiv \dots \equiv (\bar{p}_j, m_j)$ y además, $\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_j \in h(\bar{p}_i, m_i)$, luego $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r \in h(\bar{p}_i, m_i)$. En el caso (ii), se tiene $(\bar{p}_i, m_i) \equiv \dots \equiv (\bar{p}_r, m_r)$ y $\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_r \in h(\bar{p}_r, m_r)$, de donde se deduce que $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r \in h(\bar{p}_r, m_r)$, lo que completa la demostración. ■

Sin embargo, los resultados anteriores no son ciertos si consideramos conjuntos de consumo formados por más de dos bienes. El siguiente ejemplo garantiza la validez de esta afirmación.

Ejemplo 1.3.2 (WARP no implica GARP) Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ un conjunto finito de observaciones demanda-precio efectuadas por un consumidor en un contexto competitivo en el espacio de bienes $\Omega = \mathbb{R}_+^3$ y en el espacio de precios $\mathbb{P} = \mathbb{R}_{++}^3$. Supongamos que en cuatro situaciones presupuestarias distintas el individuo dispone de una renta de $m_1 = 13$, $m_2 = 21$, $m_3 = 12.4$ y $m_4 = 26$ de unidades monetarias y se enfrenta a los precios (que suponemos están fijados por el mercado) $\bar{p}_1 = (1, 1, 1/2)$, $\bar{p}_2 = (1, 1, 1)$, $\bar{p}_3 = (1, 2/5, 1)$ y $\bar{p}_4 = (1, 2, 2)$. Supongamos que en el conjunto presupuestario (\bar{p}_1, m_1) el individuo demanda $\bar{x}_1 = (8, 1, 8)$, en (\bar{p}_2, m_2) elige $\bar{x}_2 = (5, 5, 6)$, en (\bar{p}_3, m_3) selecciona $\bar{x}_3 = (5, 6, 5)$ y, finalmente, en el hiperplano presupuestario (\bar{p}_4, m_4) el individuo consume $\bar{x}_4 = (8, 8, 1)$. Esto es, disponemos de una serie finita de datos de demanda observados $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de precios, de cantidades demandadas y de coste:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.4 & 2.0 \\ 0.5 & 1.0 & 1.0 & 2.0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8.0 & 5.0 & 5.0 & 8.0 \\ 1.0 & 5.0 & 6.0 & 8.0 \\ 8.0 & 6.0 & 5.0 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13.0 & 13.0 & 13.5 & 16.5 \\ 17.0 & 16.0 & 16.0 & 17.0 \\ 16.4 & 13.0 & 12.4 & 12.2 \\ 26.0 & 27.0 & 27.0 & 26.0 \end{pmatrix}$$

a) Matriz de precios P_{ij} b) Matriz de demanda X_{ij} c) Matriz de gasto C_{ij}

A partir de los datos anteriores resulta muy sencillo probar que la anterior serie finita de datos de demanda satisface SARP, WARP y el Axioma Débil de Varian. Sin embargo, los datos no verifican GARP. Así pues, GARP no es una condición necesaria para que un conjunto cualquiera de datos observados sea consistente con WARP o con SARP. Por otra parte, merece la pena destacar que si en el espacio de consumo bidimensional las rectas de balance (asociadas a un conjunto finito de datos de demanda observados) son distintas dos a dos el axioma débil de Varian implica el Axioma Débil de Samuelson y, en este caso, GARP y SARP son equivalentes.

Para finalizar esta sección introductoria merece la pena resaltar algunas cuestiones de racionalidad relacionadas directamente con la forma funcional de la función de utilidad. Dada la importancia de las preferencias diferenciables y homotéticas en las aplicaciones empíricas de la teoría de la demanda resulta de interés conocer qué caracterizaciones son necesarias para (a partir de un conjunto finito de datos observados) determinar si las elecciones efectuadas por un individuo han sido generadas por preferencias diferenciables u homotéticas. Las preferencias homotéticas son de vital importancia tanto en la teoría económica como en sus aplicaciones⁷², como, por ejemplo, en el comercio internacional.

En los estudios empíricos del comportamiento de un consumidor se supone con frecuencia que un consumidor tiene una función de demanda diferenciable (o incluso infinitamente diferenciable). Pero, ¿qué restricciones impone este supuesto sobre un conjunto finito de datos de consumo? El procedimiento de Afriat permite construir (desde cualquier conjunto finito de datos de demanda) consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad, una función creciente, cóncava y lineal a trozos que racionaliza la conducta observada. Sin embargo, esta función de utilidad no tiene por qué ser ni diferenciable ni estrictamente cóncava.

⁷²Véanse los trabajos de Diewert (1993, sección 6.4) y Mas-Colell et. al. (1995, pág. 45) entre otros.

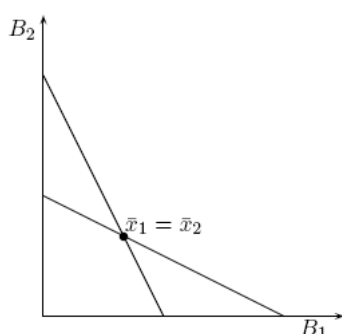


Figura 1.5: Un conjunto de datos violando la invertibilidad.

Chiappori y Rochet (1987, págs. 687-691) mostraron que bajo ciertas condiciones es posible aproximar⁷³ la función de utilidad continua obtenida a partir de la construcción de Afriat por una función de utilidad diferenciable, estrictamente cóncava, estrictamente monótona y no saciada que racionaliza los datos observados. Estos autores esencialmente probaron⁷⁴ que si un conjunto finito de datos de demanda, D , satisface SSARP, es posible encontrar una función de utilidad infinitamente diferenciable y estrictamente cóncava que racionaliza los datos. Un conjunto finito de observaciones demanda-precio D satisface SSARP si D satisface SARP y el siguiente supuesto de invertibilidad: $\forall \lambda \in \mathbb{R}_{++} \quad [\bar{p}_i \neq \lambda \bar{p}_j] \Rightarrow \bar{x}_i \neq \bar{x}_j$. Esta

condición de invertibilidad descarta la posibilidad de que en dos situaciones presupuestarias distintas el consumidor pueda demandar la misma cesta de bienes.

Desde un punto de vista intuitivo, SSARP establece que una misma cesta de bienes no puede ser elegida por el consumidor en dos situaciones presupuestarias distintas. Es claro que las curvas de indiferencia de una función de utilidad que racionaliza los datos en la Figura 1.5 no debería ser diferenciable en ningún punto. Para obtener racionalizaciones diferenciables por funciones de utilidad estrictamente monótonas y estrictamente cóncavas es necesario excluir situaciones como las descritas en la Figura 1.3. Matzkin y Richter (1991) muestran que SARP asegura la existencia de una función de utilidad $u(\cdot)$ continua, estrictamente cóncava, estrictamente monótona⁷⁵ y no saciada que genera una función de demanda no necesariamente diferenciable y que la diferenciable de la función de utilidad $u(\cdot)$ es, simplemente, una propiedad genérica⁷⁶.

⁷³Estos autores emplean la tradicional técnica de convolución (por la cual es posible aproximar aplicaciones de clase r por aplicaciones de clase s , $s > r \geq 1$) para aproximar la función de utilidad continua obtenida a partir de la construcción de Afriat por una función de utilidad diferenciable, estrictamente cóncava, estrictamente monótona y no saciada que racionaliza los datos observados. Chiappori y Rochet (1987, págs. 687-691) consideran la “función polo” tradicional como núcleo de convolución para obtener (a partir de la función utilidad obtenida desde la construcción de Afriat) una función de utilidad $u(\cdot)$ infinitamente diferenciable, estrictamente cóncava, estrictamente creciente y no saciada que racionaliza la conducta observada y tal que $Du(\bar{x}_j) = \lambda_j$ y $u(\bar{x}_j) = \phi_j$ para cada observación j . Para encontrar las propiedades y resultados relativos a la teoría de la convolución, puede recurrirse a los trabajos de Dieudonne (1972) y Margalef y Outerelo (1988).

⁷⁴La demostración de este resultado se encuentra en Chiappori y Rochet (1987, págs. 688-691).

⁷⁵Una función $u(\bar{x})$ se dice que es estrictamente monótona si $\bar{x} \geq \bar{y}$ implica $u(\bar{x}) \geq u(\bar{y})$, y $\bar{x} \not\geq \bar{y}$ implica $u(\bar{x}) > u(\bar{y})$. Una función $u(\bar{x})$ se dice que es monótona si $\bar{x} \geq \bar{y}$ implica $u(\bar{x}) \geq u(\bar{y})$, y $\bar{x} \gg \bar{y}$ implica $u(\bar{x}) > u(\bar{y})$.

⁷⁶Véase Matzkin y Richter (1991, pág. 298), para más detalles.

En los últimos años, Lee y Wong (2005) se plantearon el problema de caracterizar las observaciones de demanda desde una función de demanda infinitamente diferenciable⁷⁷. Estos autores extienden el resultado de Matzkin y Richter al mostrar que el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP) garantiza (cuando el conjunto de datos es finito) la racionalización de un conjunto finito de datos observados por una función de utilidad continua, estrictamente cóncava y estrictamente monótona que genera una función de demanda infinitamente diferenciable⁷⁸. En este caso SARP garantiza la representabilidad puesto que es cierto que h satisface SARP si y solamente si h ha sido generada por una preferencia⁷⁹. Sin embargo, SARP impuesto sobre h no garantiza que h sea diferenciable o incluso continua⁸⁰.

Por otra parte, en las aplicaciones relacionadas con las funciones de utilidad en economía sabemos que el comportamiento de un consumidor es invariante respecto a transformaciones monótonas de la función de utilidad así que cabría preguntarse qué sucedería si restringimos nuestro estudio únicamente a las funciones de utilidad homogéneas⁸¹. Si el comportamiento observado de un consumidor es consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad, entonces –por el teorema de Afriat– sabemos que existen $2n$ números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y u_1, \dots, u_n satisfaciendo:

$$u_i \leq u_j + \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j),$$

A partir del conjunto de desigualdades anteriores es relativamente fácil de calcular una expresión para la utilidad marginal (respecto de la renta monetaria) en cualquier nivel de consumo observado ya que:

$$u(x(\bar{p}_i, w)) = u(x(\bar{p}_i, w_i)w) = yu(x(\bar{p}_i, w_i)) = mu_i$$

Por consiguiente,

$$\lambda_i = \frac{du(x(\bar{p}_i, w))}{dm} = u_i$$

Por otra parte, como de (1.25) se deduce que

$$u_i \leq u_j + u_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j),$$

y como $1 = \bar{p}_j \bar{x}_j$ para cada $j \leq n$ se tiene

$$u_i \leq u_j + u_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j)$$

⁷⁷Como señalan Lee y Wong (2005, pág. 857), incluso si h es de clase C^∞ , la función de utilidad u que genera h no necesariamente tiene por qué ser diferenciable. Basta considerar la función de utilidad u que genera una preferencia de tipo Leontief.

⁷⁸Véase Lee y Wong (2005, teorema 1, pág. 857) para más detalles.

⁷⁹Véase Richter (1966).

⁸⁰Véase Richter (1971, pág. 47) para más detalles.

⁸¹Afriat (1972) fue el primer autor que se propuso utilizar la aproximación no paramétrica que ofrece la teoría de la preferencia revelada para caracterizar (a partir de los datos observados) el comportamiento homotético de un consumidor, las tecnologías de producción homotéticas y la separabilidad de las preferencias.

Estas desigualdades de homogeneidad fueron derivadas por Afriat (1972) y Diewert (1973). Varian (1983, págs. 103-104) muestra la equivalencia entre la condición anterior y otra nueva condición algebraica, el Axioma Homotético de la Preferencia Revelada (HARP). Dado cualquier conjunto finito de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, los datos satisfacen HARP si para todas las elecciones distintas de índices (i, j, \dots, m) se cumple:

$$(\bar{p}_i \bar{x}_j)(\bar{p}_j \bar{x}_k) \cdots (\bar{p}_m \bar{x}_i) \geq (m_1)(m_2) \cdots (m_n). \quad (1.40)$$

El siguiente resultado muestra como el Axioma Homotético de la Preferencia revelada (HARP) es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una preferencia monótona, continua, convexa y homotética que racionaliza la conducta observada.

Teorema 1.3.4 (Varian, 1983) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *Existe una función de utilidad $u(\cdot)$ homotética y no saciada que racionaliza los datos;*
- (ii) *Los datos satisfacen el Axioma Homotético de la Preferencia Revelada (HARP): para todas las elecciones distintas de índices (i, j, \dots, m) se tiene que $(\bar{p}_i \bar{x}_j)(\bar{p}_j \bar{x}_k) \cdots (\bar{p}_m \bar{x}_i) \geq 1$;*
- (iii) *Existen números $\phi_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ tales que $\phi_i \leq \phi_j \bar{p}_j \bar{x}_i$, $i, j = 1, \dots, n$;*
- (iv) *Existe una función de utilidad $u(\cdot)$ homotética, no saciada, continua, monótona y cóncava que racionaliza los datos.*

Demostración: Véase Varian (1983, págs. 103-104). ■

El Teorema 1.3.4 muestra cómo el Axioma Homotético de la Preferencia Revelada es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una preferencia monótona, continua, convexa y homotética que genera los datos de demanda. Existen varias reseñas bibliográficas que abordan de manera directa o indirecta este resultado. Varian (1983, pág. 104) señala su agradecimiento a uno de los editores del *Review of Economic Studies* por comentarle que el procedimiento utilizado en su demostración de (i) implica (ii) era muy similar al procedimiento utilizado por Shafer (1977, pág. 1176) y que el hecho de que la condición (iii) sea necesaria y suficiente para la homogeneidad fue puesto anteriormente de manifiesto por Afriat (1972) y Diewert (1973). Posteriormente, Afriat (1977) mostró que $(\bar{p}_1 \bar{x}_2)(\bar{p}_2 \bar{x}_1) \geq 1$ es una condición necesaria y suficiente para la homogeneidad cuando $n = 2$ y en 1981 generalizó este resultado a un número arbitrario de observaciones⁸². Su demostración está basada en un trabajo matemático que Afriat había realizado años antes relacionado con las soluciones de ciertos sistemas de desigualdades lineales. La afirmación resultante sobre las condiciones necesarias y suficientes para la homogeneidad es prácticamente idéntica al teorema anterior, pero su demostración, como señala Varian (1983, pág. 104), es en cierto modo diferente. Es interesante reseñar que para todo conjunto finito de datos de demanda, el Axioma Homotético de la Preferencia Revelada (HARP) establece una

⁸²Véase Afriat (1981), para más detalles

condición necesaria y suficiente para la racionalización por una preferencia homotética. Consideremos, a continuación, cómo podríamos contrastar HARP en la práctica. Por cuestiones de estabilidad numérica, es más conveniente expresar HARP en la forma:

$$\log(\bar{p}_i \bar{x}_j) + \log(\bar{p}_j \bar{x}_k) + \cdots + \log(\bar{p}_m \bar{x}_i) \geq 0 \quad (1.41)$$

puesto que si consideramos el grafo dirigido con n vértices y una matriz de gasto de tamaño $n \times n$ definida por $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ que representa a la “revelación homotética”, donde $c_{ij} = \log \bar{p}_i \bar{x}_j$ designa (en términos económicos y/o intuitivos) el coste de ir desde el vértice i al vértice j en este grafo, es posible contrastar de manera eficiente si cualquier conjunto finito de datos de demanda observados es consistente con HARP. Obsérvese que los datos observados satisfacen HARP si y solamente si no existen ciclos⁸³ de longitud negativa en el grafo dirigido que representa a la “revelación homotética”. El Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada Homotética proporciona condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una preferencia homotética y lineal a trozos que racionaliza los datos observados.

En el contexto de las funciones de demanda, Liu y Wong (2005) muestran como el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada Homotética es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una racionalización monótona, continua, convexa y homotética. Sin embargo, cabe resaltar que si $R(h)$ no es finito este axioma no es una condición suficiente⁸⁴ para garantizar la existencia de racionalizaciones, incluso cuando éstas no sean homotéticas. Para ello se requiere que la relación de preferencia revelada homotética sea acíclica; esto es, que h sea consistente con el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada Homotética (SHA). Este hecho dota de gran relevancia, desde el punto de vista empírico, a la relación \tilde{H} definida en (1.22). Si no existen ciclos para \tilde{H} , entonces h admite una racionalización homotética, y viceversa⁸⁵. Así pues, el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada Homotética (SHA) proporciona un importante criterio empírico para contrastar la hipótesis de la racionalización homotética. De hecho, es posible diseñar algoritmos para contrastar si se verifica el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada Homotética para cualquier conjunto finito de datos de demanda observados. Recientemente, Alcantud y Rodríguez-Palmero (2010) ofrecen una solución completa al problema de la integrabilidad para las funciones de demanda homotéticas. Estos autores muestran que si la demanda es homotética y continua, el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP) caracteriza la existencia de una función de utilidad continua y homogénea de grado uno representando a la demanda. Este resultado permite abordar el problema de la integrabilidad de las funciones

⁸³Véase Glosario Terminológico para más detalles.

⁸⁴En la nota al pie número 27, Liu y Wong (2000, pág. 295) afirman que resulta bastante sencillo encontrar dos cestas de bienes distintas $\bar{x}, \bar{x}' \in \mathbb{R}_{++}^3$ y dos situaciones presupuestarias distintas $(\bar{p}, m), (\bar{p}', m') \in \mathbb{R}_+^3 \times (0, \infty)$ con $\bar{p}\bar{x} = \bar{p}'\bar{x}' = m$ y $\bar{p}'\bar{x} = \bar{p}\bar{x}' = m'$. Entonces, la función h definida por $h(\bar{p}, m) = \bar{x}$ y $h(\bar{p}', m') = \bar{x}'$ tiene una relación de preferencia revelada S simétrica ($\bar{x}S\bar{x}'S\bar{x}$) y, en consecuencia, h no admite una racionalización. Pero, es claro que h satisface el WEA.

⁸⁵Cabe señalar que la noción de “revelación homotética” \tilde{H} y \tilde{H}^* , junto con SHA, proporciona una base unificada para los principales teoremas clásicos de la teoría del consumidor que se pueden generalizar inmediatamente para la teoría de la producción.

homotéticas desde una perspectiva⁸⁶ completamente diferente a la principal tendencia en el campo y, en particular, a las especificaciones previas que del problema de la integrabilidad de las funciones de demanda homotéticas habían realizado otros autores como Liu y Wong (2005).

Para finalizar esta sección es importante reseñar que mostrar que un conjunto finito de datos de demanda satisface GARP, SARP, SSARP, SHA, etc. equivale a probar la factibilidad de un cierto sistema de desigualdades⁸⁷ lineales. Este problema, tal y como mostraremos más adelante, equivale a probar la “aciclicidad” o la “aciclicidad débil” de la relación binaria asociada a cada uno de los conceptos de revelación. En consecuencia, en el marco que nos encontramos probar si los datos son consistentes con los axiomas de revelación GARP, SARP, SSARP, SHA, etc. equivale a probar la factibilidad del sistema finito de desigualdades lineales –lo cual puede hacerse mediante el Teorema de la Alternativa–, y encontrar la función de utilidad que genera la conducta observada equivale a resolver un problema de distancias mínimas en un grafo dirigido.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1965) The Equivalence in Two Dimensions of the Strong and Weak Axioms of Revealed Preference. *Metroeconomica*, Vol. 27, págs. 24-29.
- [2] Afriat, S. (1967) The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 67-77.
- [3] Afriat, S. (1972) Efficiency Estimates of Production Functions. *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 568-598.
- [4] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An Extension of the Classical Method. *International Economic Review*, Vol. 14, págs. 460-472.
- [5] Afriat, S. (1977) *The Price Index*, Cambridge: Cambridge University Press Book.
- [6] Afriat, S. (1981) On the Constructibility of Consistent Price Indices Between Several Periods Simultaneously, en *Essays in Theory and Measurement of Demand: 30 en honor of Sir Richard Stone, Angus Deaton (ed.)*. Cambridge: Cambridge University Press, págs. 133-61.
- [7] Afriat, S. (1987) *Logic of Choice and Economic Theory*. Oxford: Clarendon Press.
- [8] Afriat, S. (1999a) *Revealed Preference Revealed*. Quaderni. Università degli Studi di Siena. Dipartimento di Economia Politica, Vol. 265.

⁸⁶Este punto de vista del problema del problema sólo había proporcionado condiciones suficientes para la representaciones semicontinuas. Véanse los trabajos de Alcantud y Rodríguez-Palmero (2002), Sondermann (1982) para más detalles sobre esta cuestión.

⁸⁷Véase Matzkin y Richter (1991, obs. 2) para encontrar las referencias de algoritmos que permiten contrastar de manera eficiente la factibilidad de este tipo de sistemas finitos compuestos por desigualdades lineales.

- [9] Afriat, S. (1999b) The Connection Between Demand and Utility. Quaderni. Università degli Studi di Siena. Dipartimento di Economia Politica, Vol. 275.
- [10] Alcantud, J.C.R. y C. Rodríguez-Palmero (2002) A Note on Representability of Consumer's Behavior. *Economic Theory*, Vol. 20, págs. 207-216.
- [11] Alcantud, J.C.R. y C. Rodríguez-Palmero (2010) A complete solution of the integrability problem for homothetic demand functions. *International Journal of Economic Theory*, Vol. 6, págs. 263-271.
- [12] Arrow, K. (1959) Rational Choice and Orderings. *Economica*, Vol. 26), págs. 121-127.
- [13] Berge, C. (1963) *Topological Spaces*. New York: Macmillan.
- [14] Bossert, W. (1993) Continuous Choice Functions and the Strong Axiom of Revealed Preference. *Economic Theory*, Vol. 3, 379-385.
- [15] Chiappori, P. y J. Rochet (1987) Revealed Preferences and Differentiable Demand. *Econometrica*, Vol. 55, págs. 687-691.
- [16] Diewert, E. (1973) Afriat and Revealed Preference Theory. *Review of Economic Studies*, Vol. 40, págs. 419-426.
- [17] Diewert, E. y C. Parkan (1978) Test for Consistency of Consumer Data and Nonparametric Index Numbers. Working Paper 78-27. University of British Columbia, Vancouver.
- [18] Diewert, E. y C. Parkan (1985) Tests for the Consistency of Consumer Data. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 127-147.
- [19] Dieudonne, J. (1972) *Fundamentos de Análisis Moderno*, Reverté.
- [20] Gale, D. (1960) A Note on Revealed Preference. *Economica*, Vol. 30, págs. 348-355.
- [21] Hicks, J. (1956) *A Revision of Demand Theory*. Oxford: Oxford University Press.
- [22] Houthakker, H. (1950) Revealed Preference and the Utility Function. *Economica*, Vol. 17, págs. 159-174.
- [23] Kamiya, D. (1963) A Note on the Strong Axiom of Revealed Preference, Vol. 30(117), págs. 83-84.
- [24] Karlin, S. (1959) *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, Vol. I, Palo Alto, CA: Addison Wesley.
- [25] Liu, Pak-Wai y Kam-Chau Wong (2000) Revealed Homothetic Preference and Technology. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 34, págs. 287-314.

- [26] Lee, P. y Wong, Kam-Chau (2005) Revealed Preference and Differentiable Demand. *Economic Theory*, Vol. 25, págs. 855-870.
- [27] Margalef-Roig, J. et. al. (1988) *Topología: obra completa (5 Vols)*. Pearson Alhambra.
- [28] Matzkin, R. y Richter, M. (1991) Testing Strictly Concave Rationality. *Journal of Economic Theory*, Vol. 53, págs. 287-303.
- [29] Mas-Colell, A.; Whinston, M. y J. Green (1995) *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. Oxford.
- [30] Richter, M. (1966) Revealed Preference Theory. *Econometrica*, Vol. 34(3), págs. 635-645. Traducción española: La teoría de la preferencia revelada. *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 343-358, 1974.
- [31] Richter, M. (1971) Rational Choice, en *Preferences, Utility and Demand*, Chipman, J., et al. (eds.) New York: Harcourt, Brace and Jovanovich.
- [32] Rose, H. (1958) Consistency of Preference: The Two-Commodity Case. *Review of Economic Studies*, Vol. 24, págs. 124-125.
- [33] Samuelson, P. (1938) A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior. *Economica*, Vol. 5, págs. 353-354.
- [34] Samuelson, P. (1948) Consumption Theory in Terms of Revealed Preference. *Economica*, Vol. 15, págs. 243-253.
- [35] Scarf, H.; Fostel, A. y M. Todd (2004) Two New Proofs of Afriat's Theorem. *Economic Theory*, Vol. 24(1), págs. 211-219.
- [36] Shafer, W. (1977) Preference Relations for Rational Demand. *Journal of Economic Theory*, Vol. 11, págs. 444-455.
- [37] Uzawa, H. (1960) Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption. In *Mathematical Models in Social Science*, Cap. 9, K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes (eds.) Stanford University Press, California.
- [38] Uzawa, H. (1971) Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption. In *Preferences, Utility and Demand*, Chipman, J., et al. (eds.) New York: Harcourt, Brace and Jovanovich. Traducción española: Uzawa, H. (1974) Preferencia y elección racional en la teoría del consumo *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 315-342.
- [39] Varian, H. (1982a) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50(4), págs. 945-972.
- [40] Varian, H. (1982b) *Non-Parametric Methods in Demand Analysis*.

- [41] Varian, H. (1983) Nonparametric Tests of Consumer Behavior. *Review of Economic Studies*, Vol. 50, págs. 99-110.
- [42] Varian, H. (2006) Revealed preferences. In *Samuelsonian Economics and the 21st Century*, Michael Szenberg (ed.). Oxford University Press, págs. 99-115.
- [43] Warshall, S. (1962) A Theorem on Boolean Matrices. *Journal of the American Association of Computing Machinery*, Vol. 9, págs. 11-12.

1.4. Sobre el teorema de Afriat y la teoría de grafos

En esta sección mostramos cómo el problema de encontrar una función de utilidad no saciada, continua, cóncava y monótona que racionaliza la conducta observada de un consumidor maximizador de la utilidad equivale a resolver un problema de distancias mínimas en un grafo dirigido. Además, presentamos dos nuevas demostraciones del teorema de Afriat. En la primera prueba proporcionamos una demostración constructiva de este teorema más eficiente que los procedimientos constructivos empleados por Diewert (1973), Varian (1982) y Scarf, Fostel y Todd (2004), entre otros. En la segunda, utilizamos el Teorema de la Alternativa para demostrar la existencia de una relación de preferencia que racionaliza un conjunto finito de datos de demanda consistentes con el axioma generalizado de la preferencia revelada.

Afriat (1967) establece diferentes condiciones algebraicas de consistencia con la hipótesis de la maximización de la utilidad y proporciona un método inductivo para construir (a partir de una serie finita de datos de demanda consistente con la propiedad de la consistencia cíclica) una función de utilidad que racionaliza los datos y que, además, posee todas las propiedades de monotonía y convexidad que generalmente se le atribuyen a las funciones de utilidad. De esta manera, Afriat ofrece una aproximación bastante diferente al problema clásico de la integrabilidad⁸⁸ y establece un paralelismo entre este problema y el problema de encontrar una función de utilidad $u(\cdot)$ continua, cóncava, no saciada y monótona que racionaliza los datos de demanda, además de proporcionar una demostración constructiva de la función de utilidad que racionaliza la conducta observada de un consumidor racional en un contexto competitivo⁸⁹.

Afriat (1967, pág. 71-72) muestra que si existe un conjunto de multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ verificando (1.26) es posible encontrar un conjunto de niveles de utilidad ϕ_1, \dots, ϕ_n satisfaciendo (1.25). Afriat (1967, págs. 72-73) relaciona el problema de encontrar un conjunto de multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ y niveles ϕ_1, \dots, ϕ_n solución de (1.25) con el clásico problema del coste mínimo. Resulta bastante sencillo probar que la consistencia cíclica es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una matriz $B \equiv (b_{ij})$ en $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de “mínimo coste” satisfaciendo la desigualdad triangular, donde $\tilde{a}_{ij} = \lambda_i a_{ij}$, $\tilde{a}_{irlm\dots j} = \tilde{a}_{ir} + \tilde{a}_{rl} + \dots + \tilde{a}_{mj}$ y $b_{ij} = \min_{i,r,\dots,j} \tilde{a}_{irl\dots mj}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i, j \leq n$. Este autor muestra cómo probar la existencia de este conjunto de multiplicadores y niveles equivale a demostrar que el siguiente sistema de desigualdades lineales

$$\phi_j \leq \phi_i + \tilde{a}_{ij} \quad \text{para todos } i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i, j \leq n \quad (1.42)$$

⁸⁸Este problema, uno de los más importantes en la teoría neoclásica de la demanda ha sido abordado y estudiado en numerosos trabajos, entre los que cabe destacar Uzawa (1960), Samuelson (1948, 1950), Houthakker (1950), Richter (1966) y Alcantud y Rodríguez-Palmero (2002), entre otros.

⁸⁹La aproximación de Afriat (1967) al problema de la integrabilidad fue realmente tan novedosa que la gran mayoría de los investigadores de la época no reconocieron, como señala Varian (2006), su verdadero valor.

es factible o, equivalentemente, que lo es el siguiente sistema de inecuaciones lineales

$$\phi_j \leq \phi_i + b_{ij} \quad \text{para todos } i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i, j \leq n \quad (1.43)$$

dado que toda solución de (1.42) es solución de (1.43), y viceversa. En su demostración, Afriat (1967, pág. 73) utiliza la sutil cuestión de que si un sistema de inecuaciones lineales cumple la desigualdad triangular, entonces satisface la propiedad de la extensión de escala⁹⁰. Esta propiedad de extensión posibilita que se pueda utilizar un procedimiento inductivo para calcular ϕ_m conocidos $\phi_1, \dots, \phi_{m-1}$, la matriz de gasto mínimo $B \equiv (b_{ij})$ y el conjunto de multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, donde los números ϕ_1, \dots, ϕ_n definen⁹¹ una “escala” para el sistema (1.43) con matriz de gasto B . Su aproximación fue realmente constructiva, ofreciendo incluso un procedimiento inductivo válido para calcular la función de utilidad que genera la conducta observada de un consumidor cuyas demandas satisfacen el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada.

Sin embargo, su prueba no era del todo correcta en el caso general, en el cual se permiten elementos no diagonales iguales a cero en la matriz de gasto. Diewert (1973) proporciona la primera demostración correcta del teorema de Afriat en el caso general. Este autor⁹² maneja la sutil cuestión de utilizar las clases de indiferencia de la relación de preferencia revelada (determinada por la correspondencia finita de datos de demanda) para construir los coeficientes del siguiente problema de programación lineal que permite caracterizar la consistencia de cualquier conjunto finito de datos de demanda con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}^- \\ & \text{s.t.} \\ & \lambda_i a_{ij} = \phi_j - \phi_i + s_{ij}^+ - s_{ij}^- \phi_i \geq 0, \quad \text{para todos } i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i, j \leq n \\ & s_{ij}^+ \geq 0, \quad s_{ij}^- \geq 0, \quad \text{para todos } i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i, j \leq n \\ & \lambda_i \leq 1, \quad \phi_i \leq 0, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (1.44)$$

Si este problema de programación lineal con $2n$ variables y n^2 restricciones tiene una solución positiva, entonces los datos observados no satisfacen la consistencia cíclica. En caso contrario; es decir, si la función objetivo del problema de programación lineal toma el valor cero en la solución óptima, los datos han sido generados por un consumidor maximizador de la utilidad. Diewert (1973, págs. 421-423) muestra la equivalencia entre el problema de programación lineal (1.44) y el problema de encontrar $2n$ números ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ satisfaciendo (1.25). En consecuencia, a partir de cualquier solución de (1.44) es posible construir la función de utilidad $u(\cdot)$ no saciada, continua, cóncava y monótona que representa las preferencias de un consumidor consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Años más tarde, Varian (1982, págs. 969-970) presenta una nueva prueba de este importante resultado. El procedimiento que este autor emplea (para construir de manera explícita los números de Afriat) está basado en

⁹⁰Véase Afriat (1967, pág. 73) y Afriat (1987, pág. 455), para más detalles.

⁹¹Para resultados, caracterizaciones y propiedades relacionadas con el concepto de escala –introducido en la literatura económica por Afriat– véanse los trabajos de Afriat (1962, 1987) para más detalles sobre esta cuestión.

⁹²Véase Diewert (1973, págs. 422-423) para más detalles.

la construcción de Afriat (1967) y es, esencialmente, el procedimiento empleado por Diewert (1973); pero algo más constructivo. El Algoritmo 2 muestra el proceso de construcción de los números de Afriat (sugerido por Varian) que permite obtener explícitamente los números de Afriat⁹³.

Algorithm 2. Pseudo-code for computing Afriat's number [v. Varian (1982, pág. 968)]

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. **begin**
2. $I = \{1, \dots, n\}$; $B = \emptyset$; $n = \max(I)$
3. $E = \{i \in I : \bar{x}_i W \bar{x}_m\}$
4. **If** $B = \emptyset$ **then do** $\phi_m = \lambda_m = 1$ **go to 6.** **Else go to 4**
5. $\phi_m = \min_{i \in E} \min_{j \in B} \min \{\phi_j + \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j), \phi_j\}$.
6. $\lambda_m = \max_{i \in E} \max_{j \in B} \max \left\{ \left(\frac{\phi_j - \phi_m}{\bar{p}_i (\bar{x}_j - \bar{x}_i)} \right), 1 \right\}$
7. **for** $i = 1 \in E$ **do** $\phi_i = \phi_m$; $\lambda_i = \lambda_m$
8. $I = I \setminus E$; $B = B \cup E$
9. **If** $I = \emptyset$, **return.** **Otherwise,** **go to paso 2**

Output: Afriat's number ϕ_1, \dots, ϕ_n and $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Este argumento inductivo (que maneja la sutil cuestión de trabajar con las clases de indiferencia) es bastante complejo y requiere introducir, en ocasiones, más de una observación cantidad-precio en cada paso. Scarf, Fostel y Todd (2004) utilizan un nuevo procedimiento –menos complejo que los procedimientos planteados por Diewert (1973) y Varian (1982)– para construir la función de utilidad generada por un conjunto de observaciones de demanda consistentes con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada. El argumento que emplean es inductivo, pero como en el caso simple, en cada paso se introduce una única observación. La clave es aplicar este procedimiento inductivo a una matriz diferente A' de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ definida como sigue:

$$a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & \text{si } a_{nj} > 0 \\ \min\{a_{ij}, a_{in}\} & \text{si } a_{nj} = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

Estos autores muestran que basta aplicar el procedimiento inductivo a A' para garantizar la existencia de ϕ_i, λ_i para $i \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots, n-1\}$; así que

$$\phi_j \leq \phi_i + \lambda_i a'_{ij} \quad (1.46)$$

⁹³Véase Varian (1982, págs. 95-97), para más detalles.

Ahora bien, como $a'_{ij} \leq a_{ij}$, esto garantiza que para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$ se tiene la desigualdad de Afriat garantizada para A . Scarf, Fostel y Todd (2004) aplican la hipótesis inductiva a A' para garantizar la existencia de ϕ_i y λ_i positivos para $i \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots, n-1\}$ tal que

$$\phi_n = \min_{i \in \mathbb{N}} \{\phi_i + \lambda_i a_{in}\}$$

Nótese que estos autores eligen la igualdad para alcanzar las desigualdades para $i < j, j = n$. Finalmente, sea

$$\lambda_n = \max\{1, \max_{j \in \mathbb{N}, a_{nj} > 0} [(\phi_j - \phi_n)/a_{nj}]\}.$$

Como en el caso simple, esta elección garantiza que se verifiquen las desigualdades de Afriat para $i = n$ y $j < n$ en el caso en que $a_{nj} > 0$. Para completar la demostración, supongamos que $a_{nj} = 0$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \phi_j &\leq \min_{i \in \mathbb{N}_-} \{\phi_i + \lambda_i a'_{ij}\} && \text{(por (1.46))} \\ &\leq \min_{i \in \mathbb{N}_-} \{\phi_i + \lambda_i a_{ij}\} && \text{(por (1.45))} \\ &= \phi_n && \text{por definición de } \phi_n \\ &= \phi_n + \lambda_n a_{nj} && \text{ya que } a_{nj} = 0 \end{aligned}$$

Claramente las desigualdades se cumplen para $i = j = n$, así que el paso inductivo está completo, lo que finaliza la prueba⁹⁴.

A continuación, presentamos una nueva demostración del teorema de Afriat, más eficiente que los procedimientos empleados por Diewert (1973), Varian (1982) y Scarf, Fostel y Todd (2004). En esta prueba, que precisa de dos proposiciones auxiliares, utilizamos las clases de indiferencia de la relación de preferencia revelada para construir una función de utilidad $u(\cdot)$ cóncava, continua, monótona y no saciada que racionalice las elecciones de consumo realizadas por un consumidor individual.

Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda consistente con GARP y $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ su conjunto de cestas demandadas asociado. Sobre el conjunto X se define una relación de equivalencia \approx por

$$\bar{x}_r \approx \bar{x}_s \iff (\bar{x}_r R \bar{x}_s \wedge \bar{x}_s R \bar{x}_r) \vee \bar{x}_r = \bar{x}_s$$

Denotamos por $\frac{X}{\approx}$ al conjunto cociente por \approx y a $[\bar{x}_t]$ a un elemento (clase de equivalencia) de $\frac{X}{\approx}$. Para todo par de observaciones r, s se dice que el consumidor revela indiferencia entre \bar{x}_r y \bar{x}_s si existe una clase de equivalencia $[\bar{x}_t]$ en $\frac{X}{\approx}$ tal que $\bar{x}_r, \bar{x}_s \in [\bar{x}_t]$; es decir, si $\bar{x}_r \approx \bar{x}_s$. Sobre el conjunto $\frac{X}{\approx}$ se define una relación asimétrica y transitiva W por: para cada $[\bar{x}_r], [\bar{x}_s]$ en $\frac{X}{\approx}$,

$$[\bar{x}_r]W[\bar{x}_s] \iff [\bar{x}_r] \neq [\bar{x}_s] \text{ y existen } \bar{x}_p \in [\bar{x}_r], \bar{x}_q \in [\bar{x}_s] \text{ tal que } \bar{x}_p R \bar{x}_q$$

Observemos que

$$[\bar{x}_r]W[\bar{x}_s] \iff \bar{x}_r R \bar{x}_s \text{ y no } \bar{x}_s R \bar{x}_r$$

⁹⁴Cabe resaltar que Scarf, Fostel y Todd (2004) proporcionan una segunda demostración del teorema de Afriat.

En este caso, se dice que el consumidor revela estrictamente que prefiere la observación de consumo \bar{x}_r a \bar{x}_s . Si W no es un orden total, se puede definir de manera natural una relación binaria T , extensión del orden parcial por:

$$[\bar{x}_r]T[\bar{x}_s] \iff \neg [\bar{x}_r]W[\bar{x}_s] \text{ para cada } [\bar{x}_r], [\bar{x}_s] \in \frac{X}{\approx};$$

entonces, para cada par $[\bar{x}_r]$ y $[\bar{x}_s]$ se cumple $[\bar{x}_r]T[\bar{x}_s]$ si y sólo si $r < s$.

Sea $\{[\bar{x}_1], \dots, [\bar{x}_k]\}$ el conjunto de clases de indiferencia asociado al conjunto X . Entonces, se puede realizar una ordenación en X de manera que $\phi_i \geq \phi_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. En este caso,

i) $\bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \geq 0$ para cada par de observaciones i, j con $j > i$. En efecto, razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existe un par de observaciones i, j tales que $\bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) < 0$. Entonces $\bar{x}_j P^0 \bar{x}_i$, y como ϕ es una función localmente no saciada se tiene $\phi_j > \phi_i$, en contra de la ordenación considerada.

ii) $\bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) > 0$ para cada par de observaciones de demanda $\bar{x}_i \in [\bar{x}_k]$, $\bar{x}_j \in [\bar{x}_{k'}]$ con $k' > k$. En efecto, supongamos que existen un par de observaciones de demanda $\bar{x}_i \in [\bar{x}_k]$, $\bar{x}_j \in [\bar{x}_{k'}]$, $k' > k$, tales que $\bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \leq 0$. Entonces $\bar{x}_j R^0 \bar{x}_i$ y, por tanto, $\phi_j \geq \phi_i$, lo cual es absurdo, ya que $\phi_i > \phi_j$.

iii) $\bar{p}_j(\bar{x}_i - \bar{x}_j) \geq 0$ y $\bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \geq 0$ para cada par de observaciones i, j con $\bar{x}_j \in [\bar{x}_i]$. Esta condición se deduce de manera inmediata, a partir de la consistencia cíclica.

Sea $\tilde{A} \equiv (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,\dots,k} \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ la matriz asociada al conjunto de las clases de indiferencia de la relación de preferencia revelada definida por:

$$\tilde{a}_{ij} = \min_{p \in [\bar{x}_i]} \min_{q \in [\bar{x}_j]} a_{pq} \quad \forall i, j = 1, \dots, k$$

Proposición 1.4.1 *Existe un índice $i \in \mathbb{N}$ con $\tilde{a}_{ij} > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que para cada fila de \tilde{A} existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{a}_{ij} \leq 0$. Entonces $[\bar{x}_i]W[\bar{x}_j]$. Consideremos ahora la fila j -ésima. En esta fila existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{a}_{jk} \leq 0$ y, por tanto, $[\bar{x}_j]W[\bar{x}_k]$. Repitiendo el proceso se puede generar una sucesión de índices i, j, k, \dots tal que $[\bar{x}_i]W[\bar{x}_j], [\bar{x}_j]W[\bar{x}_k], \dots$, de donde se deduce que existe un $k_0 \leq k$ tal que $[\bar{x}_i]W[\bar{x}_j], \dots, [\bar{x}_{k_0}]W[\bar{x}_i]$, lo cual es absurdo, ya que W es transitiva y asimétrica y, por tanto, acíclica. ■

Teorema 1.4.1 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda satisfaciendo GARP. Entonces existen $2n$ números $\phi_1, \dots, \phi_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tales que para todo par de observaciones i, j se tiene $\phi_i \leq \phi_j + \lambda_i a_{ij}$.*

Demostración: Será suficiente probar que si $\{[\bar{x}_1], \dots, [\bar{x}_k]\}$ es el conjunto de clases de indiferencia de la relación de preferencia revelada asociada a la serie finita de datos de demanda (\bar{p}_t, \bar{x}_t) , $t = 1, \dots, n$, existen $\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_k; \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k > 0$ tales que $\tilde{\phi}_i \leq \tilde{\phi}_j + \tilde{\lambda}_i \tilde{a}_{ij}$ para todo par de clases de indiferencia $[\bar{x}_i], [\bar{x}_j]$. En efecto, supongamos que hemos encontrado $\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_k; \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k > 0$ tales que $\tilde{\phi}_i \leq \tilde{\phi}_j + \tilde{\lambda}_i \tilde{a}_{ij}$ para todo par de clases de indiferencia $[\bar{x}_i], [\bar{x}_j]$. Entonces, para todo par de observaciones i, j si $\bar{x}_j \in [\bar{x}_i]$ definimos $\phi_j = \phi_i$. En este caso, $a_{ij} \geq 0$ y $a_{ji} \geq 0$, luego $\phi_i \leq \phi_j + \lambda_j a_{ji}$ y $\phi_j \leq \phi_i + \lambda_i a_{ij}$. De otra parte, para todo par de observaciones i, j si $\bar{x}_i \in [\bar{x}_{k_i}]$ y $\bar{x}_j \in [\bar{x}_{k_j}]$ con $k_j > k_i$ se tiene $\tilde{\phi}_{k_j} \leq \tilde{\phi}_{k_i} + \tilde{\lambda}_{k_i} \tilde{a}_{k_i k_j}$, luego $\phi_j \leq \phi_i + \lambda_i \tilde{a}_{k_i k_j}$. Entonces, dado que $\tilde{a}_{k_i k_j} \leq a_{ij}$, se tiene $\phi_j \leq \phi_i + \lambda_i a_{ij}$. Además, $\phi_i \leq \phi_j + \lambda_j \tilde{a}_{k_j k_i}$, y como $0 < \tilde{a}_{k_j k_i} \leq a_{ji}$ se tiene $\phi_i \leq \phi_j + \lambda_j a_{ji}$, de donde se deduce la existencia de un conjunto de potenciales $\phi_1 \geq \dots \geq \phi_n$ y un conjunto de multiplicadores $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ satisfaciendo (1.25). Razonaremos por recurrencia sobre el número k de clases de indiferencia. Para $k = 1$ el resultado es trivial, dado que podemos elegir $\tilde{\lambda}_1 = 1$ y $\tilde{\phi}_1$ arbitrario. En virtud de la proposición anterior, $\tilde{a}_{kj} > 0$ para todo $j = 1, \dots, k - 1$. Entonces, por la hipótesis de inducción, existen $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_{k-1}; \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{k-1} > 0$ satisfaciendo (1.25). Seleccionamos

$$\tilde{\lambda}_n = \max_{j=1, \dots, n-1} \left(\frac{\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}_n}{\tilde{a}_{nj}} \right) \quad \text{y} \quad \tilde{\phi}_n = \min_{i=1, \dots, n-1} \tilde{\phi}_i + \tilde{\lambda}_i \tilde{a}_{in} \quad (1.47)$$

Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq i \leq k - 1$ se tiene $\tilde{\lambda}_k \tilde{a}_{ki} \geq \tilde{\phi}_i - \tilde{\phi}_j \geq \tilde{\lambda}_i (-\tilde{a}_{ik})$, lo que prueba el resultado. ■

Observación 1.4.1 *El Teorema 1.4.1 y el Lema 1.3.1 permiten afirmar que una condición necesaria y suficiente para que una función de utilidad $u(\cdot)$ racionalice la conducta observada de un consumidor es que $u(\bar{x}_i) = u(\bar{x}_j)$ para cada par \bar{x}_i y \bar{x}_j pertenecientes a un mismo ciclo de la relación de la preferencia revelada directa. Nótese, además, que si $u(\cdot)$ es tal función de utilidad y $\phi_1, \dots, \phi_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ los números de Afriat satisfaciendo (1.25), necesariamente tiene que ocurrir que $u(\bar{x}_i) = \dots = u(\bar{x}_r)$ para todo subconjunto ordenado de observaciones $\{i, j, k, \dots, r\}$ tal que $\bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \leq 0, \bar{p}_j(\bar{x}_k - \bar{x}_j) \leq 0, \dots, \bar{p}_r(\bar{x}_r - \bar{x}_i) \leq 0$. En efecto, supongamos, por reducción al absurdo, que existe un subconjunto ordenado de observaciones $C = \{s, i, \dots, j, \dots, r\}$ tal que $\bar{p}_s(\bar{x}_i - \bar{x}_s) \leq 0, \dots, \bar{p}_r(\bar{x}_s - \bar{x}_r) \leq 0$ y, además, existen observaciones i, j en C tales que $u_i \neq u_j$. Sin pérdida alguna de generalidad se puede suponer que $\bar{x}_i R \bar{x}_j$, $\bar{x}_j R^0 \bar{x}_i$ y que $\phi_i = u(\bar{x}_i) \neq \phi_j = u(\bar{x}_j)$. En virtud de (1.25), para todo par de observaciones i, j tales que $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$ se tiene $\phi_i \geq \phi_j$, y, por tanto, $\phi_i > \phi_j$. Por otra parte, como $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$ se tiene por (1.25) que $\phi_j < \phi_i \leq \phi_j + \lambda_j a_{ji} \leq \phi_j$, lo cual es un absurdo. En consecuencia, como para toda observación j se tiene que $u(\bar{x}_j) = \phi_j$, hemos probado que para*

todo subconjunto ordenado $\{i, j, k, \dots, r\}$ de observaciones que forman parte de un ciclo de la relación de preferencia revelada se cumple: $u(\bar{x}_i) = u(\bar{x}_j) = \dots = u(\bar{x}_r)$, lo que demuestra la anterior afirmación.

El siguiente algoritmo nos permitirá obtener en un tiempo polinomial los $2n$ números de Afriat $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ y ϕ_1, \dots, ϕ_n para una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ verificando GARP. La finitud y corrección de este nuevo procedimiento están garantizadas por la Proposición 1.4.1 y el Teorema 1.4.1.

Algorithm 3. Pseudo-code for computing Afriat's number

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. for $i, j := 1, \dots, n$ do $A[i, j] = C[i, j] - C[i, i]$
2. for $i, j := 1, \dots, n$ do if $C[i, i] \geq C[i, j]$ then $R^0[i, j] \leftarrow 1$ else $R^0[i, j] \leftarrow 0$
3. Computing strongly connected components $\tilde{V} = \{V_1, \dots, V_r\}$ de R^0 .
Note: $(V_i, V_j) \in \tilde{E}$ if and only if $\exists r \in V_i$ and $s \in V_j$ with $R^0[r, s] = 1$.
4. Construct matrix $\tilde{A} \equiv (\tilde{a}_{ij})$ defined by $\tilde{a}_{ij} = \min_{p \in V_i} \min_{q \in V_j} A[p, q]$.
5. Topological ordering of reduced digraph ($\tilde{a}_{ij} > 0, j < i$)
6. for $i := 1, \dots, r$ computing $\tilde{\phi}_i$ and $\tilde{\lambda}_i > 0$ associated with V_i
$$\tilde{\phi}_i = \min_{j=1, \dots, i-1} \tilde{\phi}_j + \tilde{\lambda}_j \cdot \tilde{a}_{ji}; \quad \tilde{\lambda}_i = \max_{j=1, \dots, i-1} \left(\frac{\tilde{\phi}_j - \tilde{\phi}_i}{\tilde{a}_{ij}} \right).$$
7. for $i := 1, \dots, r$ and for all $j \in V_i$ do $\phi_j = \tilde{\phi}_i$ and $\lambda_j = \tilde{\lambda}_i$
8. return

Output: Afriat's numbers $\lambda_j > 0$ and ϕ_j .

A continuación, utilizaremos el Teorema de la Alternativa⁹⁵ para mostrar cómo el problema de encontrar una función de utilidad cóncava, continua, monótona y no saciada que racionalice la conducta observada se reduce al problema matemático de resolver un sistema lineal de inecuaciones⁹⁶. Esta técnica ha sido profusamente utilizada en la literatura económica por numerosos autores para resolver multitud de problemas económicos se pueden reducir, desde el punto de vista matemático, a un conjunto finito o infinito de desigualdades lineales⁹⁷.

⁹⁵Véase Rockafellar (1970, teorema 22.2), para más detalles.

⁹⁶Para la forma específica del Teorema de la Alternativa utilizada aquí véanse los trabajos de Matzkin y Richter (1991, pág. 296), McFadden y Richter (1990, págs. 180-182), Richter (2004, págs. 347-351) y Rockafellar (1970, pág. 198, teoremas 22.1 y 22.2).

⁹⁷Véanse los trabajos de McFadden y Richter (1990), Matzkin y Richter (1991) y Richter (2004).

Teorema 1.4.2 (Teorema de la Alternativa) Sea $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, m$, y sea k un entero, $1 \leq k \leq m$. Supongamos que el sistema

$$\langle \bar{a}_i, x \rangle \leq \alpha_i \quad \text{for } i = k + 1, \dots, m$$

es consistente. Entonces una, y sólo una, de las siguientes alternativas se verifica:

(i) Existe un vector x tal que

$$\begin{aligned} \langle \bar{a}_i, x \rangle &\leq \alpha_i \quad \text{for } i = 1, \dots, k \\ \langle \bar{a}_i, x \rangle &\leq \alpha_i \quad \text{for } i = k + 1, \dots, m \end{aligned}$$

(ii) Existen λ_1, λ_m números reales no negativos con $\lambda_i \neq 0$ para algún i , y

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{a}_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i \leq 0$$

La demostración de este resultado se encuentra en Rockafellar (1970, pág. 199). ■

En el contexto restringido en el que nos encontramos, Matzkin y Richter (1991) mostraron que para cualquier conjunto finito de observaciones de demanda-precio, determinar si dicho conjunto de datos de demanda puede ser racionalizado por una función de utilidad estrictamente cóncava equivale a inferir la factibilidad de un determinado sistema lineal de ecuaciones e inecuaciones. Matzkin y Richter (1991) utilizaron el Teorema de la Alternativa para demostrar que un conjunto finito de observaciones de demanda-precio satisface el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada (SARP) si y solamente si el siguiente sistema de desigualdades lineales es factible.

$$\begin{aligned} \phi_i + \lambda_i \bar{p}_i [\bar{x}_j - \bar{x}_i] &> \phi_j && \text{para todos } i, j = 1, \dots, n \text{ con } \bar{x}_i \neq \bar{x}_j \\ \lambda_i &> 0 && \text{para todo } i = 1, \dots, n \\ \phi_i &= \phi_j && \text{para todos } i, j = 1, \dots, n \text{ con } \bar{x}_i = \bar{x}_j \end{aligned} \quad (1.48)$$

Diewert (1973, págs. 421-423) relacionó las desigualdades de Afriat con un cierto problema de programación lineal que, sin embargo, no utilizó directamente en su demostración del conocido teorema de Afriat de racionalización. En los últimos años, Scarf, Fostel y Todd (2004) presentan las desigualdades de Afriat como un problema de programación lineal,

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, \phi} \quad & 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \phi \\ & \lambda_i \geq 1, \text{ para todos } i, j \in \mathbb{N}, \\ & a_{ij} \lambda_i + \phi_i - \phi_j \geq 0, \text{ para todos } i, j \in \mathbb{N} \text{ con } i \neq j, \end{aligned} \quad (1.49)$$

Este problema de programación lineal es casi idéntico al planteado por Diewert (1973), en el cual la función objetivo es cero y las restricciones, las desigualdades de Afriat. Scarf, Fostel y Todd (2004, págs. 216-218) utilizan el teorema de la dualidad de la programación lineal para mostrar la existencia de una solución del problema (1.49) satisfaciendo las desigualdades de Afriat. En el siguiente resultado utilizamos el teorema de la Alternativa⁹⁸ para demostrar que GARP es una condición necesaria y suficiente para que un conjunto finito de datos de demanda sea racionalizable por una función de utilidad continua, cóncava y monótona.

Teorema 1.4.3 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ un conjunto de observaciones de demanda consistentes con GARP. Entonces existen $\phi_1, \dots, \phi_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tales que para todo par de observaciones i, j se tiene $\phi_i \leq \phi_j + \lambda_i a_{ij}$.*

Demostración: Para encontrar una función de utilidad $u(\cdot)$ no saciada, cóncava, monótona y continua que racionalice los datos, es suficiente encontrar $\phi_1, \dots, \phi_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ verificando:

$$\phi_i - \phi_j + \lambda_i a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ con } \bar{x}_i \not\approx \bar{x}_j \quad (1.50)$$

$$\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1.51)$$

$$\phi_i - \phi_j = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ con } \bar{x}_i \approx \bar{x}_j \quad (1.52)$$

La demostración de este resultado de representación para un conjunto finito de observaciones de demanda-precio es puramente rutinaria: el Teorema de la Alternativa⁹⁹ proporciona una condición necesaria y suficiente para garantizar la factibilidad de (1.50)-(1.52) y, casi una aplicación mecánica del mismo permite demostrar la existencia de una relación de preferencia que racionaliza un conjunto de observaciones de demanda consistentes con GARP. Para demostrar la factibilidad del sistema de inecuaciones (1.50)-(1.52) es conveniente reescribir este sistema de inecuaciones en forma matricial:

$$Ar \geq 0, \quad (1.53)$$

$$Br > 0, \quad (1.54)$$

$$Cr = 0, \quad (1.55)$$

donde $r = (\phi_1, \dots, \phi_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ son los parámetros desconocidos y A, B y C las matrices con filas (1.50), (1.51) y (1.52), respectivamente y $2n$ columnas. Sea K el número de pares de observaciones i, j tales que $\bar{x}_i \approx \bar{x}_j$. La matriz A de $n(n-1) - K$ filas tiene un 1 en la posición i -ésima, un -1 en la j -ésima y a_{ij} en la posición $n+i$. La matriz B tiene n filas que están formadas por 0's excepto un 1 en la posición $n+i$. En la matriz C de K filas todos los elementos de ésta son cero excepto el elemento i -ésimo que es 1 y el j -ésimo que es -1. Razonaremos por reducción al absurdo para probar la existencia de un vector r solución de (1.53)-(1.55).

⁹⁸El teorema de la Alternativa proporciona un criterio de solubilidad para cualquier conjunto finito de desigualdades lineales. Richter y Wong (2005) proporcionan un criterio similar, el ω -axiom, para conjuntos no necesariamente finitos.

⁹⁹Véase Matzkin y Richter (1991, pág. 296), Richter y Wong (2004, pág. 9) y Rockafellar (1970, pág. 198).

Supongamos que el sistema lineal (1.53)-(1.55) no tiene solución. Entonces por el teorema de la alternativa existen vectores \bar{v}, \bar{w} y \bar{z} tales que:

$$\bar{v}'A + \bar{w}'B + \bar{z}'C = (0, 0, \dots, 0), \quad \bar{v}, \bar{w} \geq \bar{0} \quad \text{con} \quad \bar{v} \neq \bar{0}, \bar{w} \neq \bar{0}. \quad (1.56)$$

Si algunas componentes de \bar{z} son negativas, podemos multiplicar, sin cambiar la factibilidad del sistema (1.53)-(1.55), las correspondientes filas de la matriz C por -1 . Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\bar{z} \geq \bar{0}$. Además, si alguna componente de los vectores \bar{v}, \bar{w} y \bar{z} es cero, podemos eliminar, sin pérdida de generalidad, la fila asociada a esa componente de las matrices A, B y C, respectivamente. Por tanto, podemos suponer sin pérdida alguna de generalidad que $\bar{v}, \bar{w}, \bar{z} > \bar{0}$. Denotamos por $Row^A(j_1, j_2)$ a la fila de la matriz A que posee un 1 en la columna j_1 , un -1 en la columna j_2 y $a_{j_1 j_2}$ en la columna $(n + j_1)$ -ésima. Denotamos por $Row^B(j_1)$ a la fila de la matriz B que posee un 1 en la columna $n + j_1$, y por $Row^C(j_1, j_2)$ a la fila de la matriz C con un 1 en la columna j_1 y un -1 en la columna j_2 . Denotamos por $Col^A(j), Col^B(j)$ y $Col^C(j)$ a las columnas j -ésimas de las matrices A, B y C, respectivamente. Sea \bar{x}_1 una observación de consumo cualquiera. Entonces, si

$$\begin{aligned} \bar{v}'A &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n), \\ \bar{w}'B &= (0, \dots, 0, \delta_1, \dots, \delta_n), \\ \bar{z}'C &= (\gamma_1, \dots, \gamma_n, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

se tiene por (1.56) que $\beta_1 < 0$ y, por tanto, existe una observación j tal que $a_{1j} \leq 0$, ya que en caso contrario $\bar{v}'Col^1(A) + \bar{w}'Col^1(B) + \bar{z}'Col^1(C) > 0$, en contra de lo supuesto. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $j = 2$. Por tanto, $\bar{x}_1 R^0 \bar{x}_2$. Por otra parte, por (1.56) se tiene que o bien (i) existe una fila h en A tal que $Row^A(h, 2) = 1$ y, por tanto, existe una observación j tal que $\bar{x}_2 R^0 \bar{x}_j$, $\bar{x}_2 \notin [\bar{x}_j]$, o bien $\gamma_2 > 0$. En este caso, afirmo:

$$\text{Existe una observación } j = 1, \dots, K \text{ tal que } \gamma_j < 0 \text{ y } \bar{x}_2 \approx \bar{x}_j \quad (1.57)$$

Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $\bar{z}'Col^C(j) = \gamma_j \geq 0$ para cada $j = 1, \dots, K$. Entonces, como $\bar{z}'Col^C(2) = \gamma_2 > 0$ se cumple

$$0 < \sum_{j=1}^n \gamma_j = \sum_{j=1}^n \bar{z}'Col^C(j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^K z_i C_{ij} = \sum_{i=1}^K z_i \sum_{j=1}^n C_{ij} = 0, \quad (1.58)$$

lo que contradice lo supuesto. Por tanto, existe una observación $j = 1, \dots, K$ tal que $\gamma_j < 0$ y $\bar{x}_2 \approx \bar{x}_j$. Entonces, $\alpha_j > 0$ y, en consecuencia, existe una observación i tal que $\bar{x}_j R^0 \bar{x}_i$ con $\bar{x}_i \notin [\bar{x}_j]$ y, por tanto, $\bar{x}_2 R \bar{x}_i$ con $\bar{x}_i \notin [\bar{x}_2]$. Repitiendo el proceso mediante un procedimiento de recurrencia obtenemos que existen un par de observaciones de demanda \bar{x}_i, \bar{x}_j tales que $\bar{x}_i R \bar{x}_j$, $\bar{x}_j R \bar{x}_i$ y $\bar{x}_i \not\approx \bar{x}_j$, lo cual es absurdo, lo que concluye la demostración. ■

El resultado anterior proporciona un test empírico para determinar si un conjunto finito de datos de demanda observados puede ser racionalizado por una función de utilidad $u(\cdot)$ continua, cóncava, localmente no saciada y monótona. En la práctica, no resulta difícil contrastar si un conjunto de datos de demanda procede de un comportamiento maximizador de la utilidad. En este sentido cabe señalar la existencia de algoritmos que permiten contrastar la factibilidad de estos sistemas lineales y obtener una solución¹⁰⁰.

Para finalizar la sección mostraremos la interconexión existente entre la versión reducida de la teoría de la preferencia revelada y la teoría de grafos dirigidos. Además, caracterizamos la consistencia de las decisiones de consumo de un individuo en términos de la teoría de grafos y mostramos cómo el problema de encontrar una función de utilidad no saciada, continua, cóncava y monótona asociada a un conjunto finito de observaciones de consumo consistentes con la maximización de la utilidad es equivalente a resolver un problema de distancias mínimas en un grafo dirigido.

En el contexto restringido en el que nos encontramos (un número finito de observaciones de demanda) toda relación binaria puede ser representada gráficamente por un grafo dirigido, como consecuencia del isomorfismo existente en este contexto entre las relaciones binarias, las matrices booleanas y los grafos dirigidos¹⁰¹.

Definición 1.4.1 *Un grafo dirigido G es un par (V, E) donde V es un conjunto de elementos denominados nodos o vértices y $E \subseteq V \times V$ es un conjunto de pares ordenados denominados aristas. La cardinalidad de V se denotará por n y la cardinalidad de E por e . El tamaño de un grafo G es $n + e$. Un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo $G' = (V', E')$ donde $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.*

En esta memoria no consideraremos grafos no dirigidos por lo que cuando se mencione el vocablo “grafo” nos estaremos refiriendo siempre a grafos dirigidos finitos. Si (u, v) es una arista de $G = (V, E)$ se dice que el vértice u es adyacente a v y que v es adyacente desde u . Designaremos por $\text{AdjTo}(v)$ al conjunto de vértices adyacentes a v y por $\text{AdjFrom}(v)$ al conjunto de vértices adyacentes desde v . Se denomina grado de entrada de un vértice v al número de aristas que inciden en dicho vértice o, equivalentemente, al número de vértices adyacentes a dicho vértice. Designaremos por $\text{Indeg}(v)$ al grado de entrada del vértice v . Análogamente se define el grado de salida de un vértice v como el número de aristas que salen de dicho vértice o, equivalentemente, el número de vértices adyacentes desde dicho vértice. Denotaremos por $\text{Outdeg}(v)$ al grado de salida del vértice v . La siguiente ecuación relaciona el grado de entrada y el grado de salida de

¹⁰⁰Véase Stoer y Witzgal (1970, teorema 1.1.9), para más detalles.

¹⁰¹En la sección 3.2 titulada *Operatividad de la Preferencia Revelada* analizaremos, entre otras muchas cuestiones, la equivalencia lógica entre las relaciones binarias definidas sobre cualquier conjunto finito de opciones y los grafos dirigidos.

un nodo cualquiera en un grafo:

$$\sum_{v \in V} \text{Indeg}(v) = \sum_{v \in V} \text{Outdeg}(v) = e \quad (1.59)$$

Las aristas están formadas por pares ordenados de vértices. El número de aristas e en un grafo de n vértices es siempre menor o igual que n^2 . Si un vértice es adyacente a sí mismo se dice que la arista correspondiente es un lazo.

Definición 1.4.2 *Un grafo dirigido $G = (V, E)$ se dice que es:*

- (a) *disperso si su número de aristas está muy próximo a cero.*
- (b) *denso si su número de aristas está muy próximo a ser n^2 .*
- (c) *completo si para todo par de vértices (no necesariamente distintos) u, v se cumple que u es adyacente a v y que u es adyacente desde u .*

En lo sucesivo, para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ identificaremos la cesta demandada \bar{x}_j con el nodo \bar{x}_j del grafo¹⁰² dirigido $G = (V, E)$ que representa la relación de preferencia revelada asociada; esto es, $V = \{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^l : \exists \bar{p} \in \mathbb{R}_{++}^l \text{ tal que } (\bar{p}, \bar{x}) \in \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n\}$ y $E \subseteq V \times V$ es el conjunto de aristas¹⁰³ del grafo G que representa la relación de preferencia revelada. Sobre el conjunto $E(G)$ formado por las aristas del grafo $G = (V, E)$ definimos una función de peso ω por:

$$\begin{aligned} \omega : E &\longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ (\bar{x}_i, \bar{x}_j) &\longmapsto a_{ij} = c_{ij} - c_{ii}, \end{aligned}$$

donde c_{ij} representa el elemento correspondiente a la fila i y a la columna j en la matriz de gasto $C \equiv (c_{ij})$. Nótese que $a_{ij} = c_{ij} - c_{ii}$ representa el coste de ir del nodo \bar{x}_i al nodo \bar{x}_j en el grafo dirigido que representa a la relación de preferencia revelada directa. Nótese, además, que si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda normalizada entonces se cumple $a_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j - 1, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. El siguiente ejemplo ilustra, para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ del Ejemplo 1.3.2, la representación de la estructura preferencial del consumidor en términos de la teoría de grafos dirigidos.

¹⁰²Nótese que $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E$ si y solamente si el consumidor revela directamente que prefiere \bar{x}_i frente a \bar{x}_j .

¹⁰³El número de aristas en un grafo dirigido G es menor o igual que n^2 , donde n es el número de vértices.

Ejemplo 1.4.1 (Estructura preferencial de un consumidor) Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ la serie finita de datos de demanda del Ejemplo 1.3.2. Entonces, para esta lista finita de datos de demanda obtenemos de manera inmediata la matriz de gasto $C \equiv (c_{ij})$ asociada¹⁰⁴:

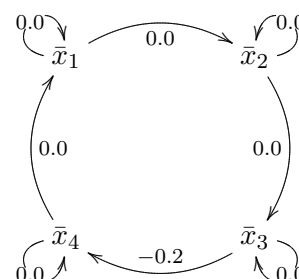
$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.4 & 2.0 \\ 0.5 & 1.5 & 1.0 & 2.0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8.0 & 5.0 & 5.0 & 8.0 \\ 1.0 & 5.0 & 6.0 & 8.0 \\ 8.0 & 6.0 & 5.0 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13.0 & 13.0 & 13.5 & 16.5 \\ 17.0 & 16.0 & 16.0 & 17.0 \\ 16.4 & 13.0 & 12.4 & 12.2 \\ 26.0 & 27.0 & 27.0 & 26.0 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

a) Matriz de precios P_{ij} b) Matriz de demanda X_{ij} c) Matriz de gasto C_{ij}

A partir de la matriz de gasto, $C \equiv (c_{ij})$, podemos representar gráficamente la estructura preferencial del consumidor por medio de un grafo dirigido $G = (V, E)$ que representa a la relación de preferencia revelada directa R^0 asociada al conjunto finito de datos de demanda. Para cada fila i -ésima de la matriz $C \equiv (c_{ij})$, si $c_{ii} \geq c_{ij}$ para algún j entonces \bar{x}_i se revela directamente preferida a \bar{x}_j , y lo representamos en $G = (V, E)$ por una arista $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E$ con peso $a_{ij} = c_{ij} - c_{ii}$.

$$\begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.50 & 3.50 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \\ 4.00 & 0.60 & 0.00 & -0.20 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}$$

(b) Matriz de "coste" $A \equiv (a_{ij})$



(b) Grafo $G = (V, E)$ representando R^0

Nótese que si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t \in \{1, \dots, n\}$) se cumple $a_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j - 1, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Como hemos señalado con anterioridad, para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, podemos representar las diferentes relaciones de la preferencia revelada (R^0, P^0, R, P , etc.) mediante un grafo dirigido. Este hecho será de vital importancia, como mostraremos en esta memoria, para poner analizar la eficiencia en el consumo. A continuación, presentamos para la lista finita de datos de demanda-precio del Ejemplo 1.3.2 los grafos dirigidos asociados a las relaciones de la preferencia revelada R^0, P^0 y R , respectivamente. La Figura 1.6 muestra los grafos dirigidos que representan a las matrices booleanas $\mathbf{R}^0, \mathbf{P}^0$ y \mathbf{R} , respectivamente, para la serie finita de datos de demanda (1.60).

¹⁰⁴Nótese que $c_{ij} = \sum_{k=1}^l p_{ik} \cdot x_{kj}$ para todo i, j .

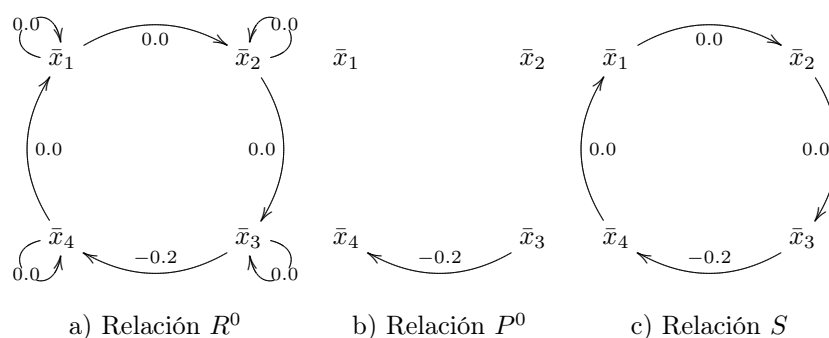


Figura 1.6: Relaciones de preferencia revelada R^0 , P^0 y S .

El ejemplo anterior prueba que la “3-aciclicidad débil” en \mathbb{R}_+^3 no implica la “aciclicidad débil” de la relación de la preferencia revelada directa y, en consecuencia, que la ausencia de ciclos de longitud negativa de tamaño n en \mathbb{R}_+^n no implica GARP. El siguiente resultado muestra la equivalencia algebraica entre GARP y la ausencia de ciclos de longitud negativa¹⁰⁵ en el grafo dirigido $G = (V, E)$ asociado a la relación de preferencia revelada que representa la relación de preferencia revelada directa R^0 determinada por cualquier conjunto finito de observaciones de demanda-precio¹⁰⁶.

Proposición 1.4.2 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y sea (V, E) el grafo dirigido que representa la relación de preferencia revelada. Entonces son equivalentes:*

- (i) *La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP.*
- (ii) *La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface la consistencia cíclica.*
- (iii) *El grafo dirigido $G = (V, E)$ no posee ciclos de longitud negativa.*

Demostración:

[(i)] \implies [(ii)] Supongamos que la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ verifica el axioma generalizado de la preferencia revelada. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un subconjunto de observaciones $\{1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$ que pertenecen a un ciclo de la

¹⁰⁵Se dice que C es un ciclo de longitud negativa en (V, E) si existe un subconjunto de observaciones $\{i, j, k, \dots, r\}$ tal que $\bar{p}_i \bar{x}_i \geq \bar{p}_i \bar{x}_j$, $\bar{p}_j \bar{x}_j \geq \bar{p}_j \bar{x}_k$, \dots , $\bar{p}_r \bar{x}_r \geq \bar{p}_r \bar{x}_i$, siendo al menos una de las desigualdades anteriores una desigualdad estricta. En lo sucesivo, denotaremos por Σ a la familia de todos los subconjuntos de longitud negativa en (V, E) .

¹⁰⁶Es claro que si el grafo (V, E) que representa la relación de preferencia revelada directa posee ciclos de longitud negativa de orden m , éstos se pueden repetir tantas veces como se desee, provocando así la aparición de ciclos de orden $k \cdot m$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. De lo anterior se deduce que el problema de las distancias mínimas en el grafo (V, E) no tiene solución si existen en (V, E) ciclos de longitud negativa.

relación de preferencia revelada directa. Entonces $\bar{p}_j \cdot (\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j) \leq 0$, para todo $1 \leq j \leq k-1$ y $\bar{p}_k \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_k) \leq 0$. Así, para todo $1 \leq j \leq k-1$ se cumple $\bar{x}_j R \bar{x}_{j-1}$ y no ocurre que $\bar{x}_{j-1} P^0 \bar{x}_j$ y, además, $\bar{x}_k R \bar{x}_1$ y $\sim (\bar{x}_1 P^0 \bar{x}_k)$. Entonces $\bar{p}_j \cdot (\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j) \geq 0$ para todo $1 \leq h \leq k-1$ y $\bar{p}_k \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_k) \geq 0$, de donde se deduce que $\bar{p}_1 \cdot (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = 0, \dots, \bar{p}_k \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_k) = 0$

[(ii)] \implies [(iii)] Obvio.

[(iii)] \implies [(i)] Razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que no se satisface GARP. Entonces existen al menos dos observaciones de demanda i, j tales que $\bar{x}_i R \bar{x}_j$ y $\bar{x}_j P^0 \bar{x}_i$. Por tanto existe un conjunto de observaciones $\{i, r, s, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$ tales que $\bar{p}_i(\bar{x}_r - \bar{x}_i) \leq 0$, $\bar{p}_r(\bar{x}_s - \bar{x}_r) \leq 0, \dots, \bar{p}_i(\bar{x}_i - \bar{x}_k) < 0$, de donde se deduce que la secuencia $\{\bar{x}_j\}_{j=1}^k$ forma parte de un ciclo de longitud negativa en (V, E) , lo que contradice lo supuesto. ■

Desde un punto de vista estrictamente operativo o computacional resulta interesante, como mostraremos con total detalle en la sección 3.2, reexpresar las diferentes condiciones algebraicas de consistencia derivadas de la preferencia revelada en términos de la teoría de grafos dirigidos. Así, por ejemplo, merece la pena resaltar cómo el teorema de Afriat puede ser interpretado en términos del problema de “mínimo coste” de la teoría clásica de la optimización combinatoria. Si la serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, satisface la propiedad de la consistencia cíclica de Afriat, entonces existe un conjunto de multiplicadores $(\lambda_t)_{t=1}^n$ satisfaciendo (1.26). La implicación (ii) \implies (iii) del Teorema 1.3.2 muestra que (1.26) equivale a que el sistema de desigualdades lineales (1.25) sea factible. Fiedler y Ptak (1967) denominaron a cualquier solución de un sistema de desigualdades lineales de este tipo un subpotencial mientras que Afriat lo denominó escala para este sistema¹⁰⁷. Como hemos señalado con anterioridad, los sistemas de desigualdades lineales (1.42) que satisfacen la desigualdad triangular están caracterizados por la “propiedad de extensión” mediante la cual cualquier solución válida para cualquier subconjunto de observaciones de demanda puede extenderse, paso a paso, a todo el conjunto de datos observados¹⁰⁸. Este hecho permite utilizar procedimientos inductivos, como el que hemos empleado en el Teorema 1.4.1 –en la demostración del teorema de Afriat– o el utilizado por Scarf, Fostel y Todd (2004) para construir explícitamente la función de utilidad $u(\cdot)$ que genera la conducta observada por un consumidor racional. Estos procedimientos están basados en términos del clásico problema del “cálculo de distancias mínimas” de la teoría clásica de grafos dirigidos. Obsérvese que si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ designa a cualquier conjunto de observaciones de demanda consistente con GARP, entonces el Teorema 1.3.1 garantiza la existencia de un conjunto de multiplicadores $(\lambda_t)_{t=1}^n \in \mathbb{R}_{++}^n$ verificando (1.26); es decir, si $G' = (V, E')$ es el grafo dirigido asociado al conjunto de observaciones de demanda con función de peso $\lambda w : E' \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$ definida sobre las aristas

$$\begin{aligned} \lambda w : E' &\longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ (\bar{x}_i, \bar{x}_j) &\longrightarrow a'_{ij} = \lambda_i a_{ij}, \end{aligned} \tag{1.61}$$

¹⁰⁷Véase Afriat (1987, págs. 444,451 y 452), para más detalles.

¹⁰⁸Véase Afriat (1967, págs. 72-73) y Afriat (1987, págs. 454-457), para más detalles.

el grafo (V, E') no posee ciclos de longitud negativa si y sólo si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ y ϕ_1, \dots, ϕ_n satisfaciendo (1.25). Un procedimiento sencillo de recurrencia sobre el número n de observaciones de demanda permite encontrar un conjunto $(\lambda)_{t=1}^n \in \mathbb{R}_{++}^n$ de multiplicadores satisfaciendo (1.26). Para $n = 1$ el resultado es trivial, y, además, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda_1 = 1$. Supongamos cierto el resultado para $n-1$. Entonces, basta considerar $\lambda_n > 0$ lo suficientemente grande tal que para todo subconjunto $\{i, i_1, \dots, i_n\}$ de observaciones tales que $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_1} R^0 \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_n} R^0 \bar{x}_n$ se verifique

$$\lambda_i a_{ii_1} + \lambda_{i_1} a_{i_1 i_2} + \dots + \lambda_{i_n} a_{i_n n} + \lambda_n a_{ni} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i, i_1, \dots, i_n < n \quad (1.62)$$

Entonces, si $\lambda_n \min_{i=1, \dots, n-1} (a_{ni}) \geq \lambda_{n-1} \max_{i=1, \dots, n-1} (-a_{in})$ para todo par de observaciones de demanda \bar{x}_{n-1} y \bar{x}_n con $\phi_n < \phi_{n-1}$ y $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ si $\phi_n = \phi_{n-1}$ se tiene que λ_n satisface (1.62) y, además, $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$. En consecuencia, encontrar un conjunto de números $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ y ϕ_1, \dots, ϕ_n satisfaciendo las desigualdades de Afriat equivale a encontrar una función potencial ϕ definida sobre el conjunto de observaciones de demanda de consumo, solución del clásico problema *maximum potential* de teoría de grafos, dual del problema de distancias mínimas, *shortest dipath problem*, en un grafo dirigido. Además, fijado un $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^n$ verificando (1.26), un resultado clásico de teoría de grafos [v. Grotchel, Lovsz y Schrijver (1993, pág. 234)] permite encontrar el conjunto $\phi_1 \geq \dots \geq \phi_n$ calculando la distancia mínima¹⁰⁹ entre \bar{x}_1 y \bar{x}_j en (V, E') , para toda observación j .

A continuación, analizaremos la complejidad computacional¹¹⁰ de los diferentes procedimientos que permiten construir explícitamente la función de utilidad que genera un conjunto dado de datos de demanda procedentes de un comportamiento optimizador. Si disponemos de $2n$ números ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, que potencialmente satisfacen las desigualdades de Afriat, tenemos que contrastar las n^2 restricciones del problema (1.25) para determinar si proceden de una función de utilidad que racionaliza los datos. Varian (1982, pág. 949) propone un algoritmo que permite contrastar empíricamente en un tiempo de ejecución proporcional a n^3 tanto la consistencia de un conjunto finito de datos con la teoría neoclásica de la demanda como los datos inconsistentes¹¹¹ con GARP y, además, diseña un procedimiento constructivo¹¹², basado en el procedimiento constructivo de Diewert, de complejidad computacional $\mathcal{O}(n^3)$ que permite encontrar de manera recursiva los números λ 's y ϕ 's de Afriat. Finalmente, determinar ϕ_k y λ_k en cada paso requiere $\mathcal{O}(n)$. Por otra parte, Diewert (1973) y Diewert y Parkan (1985) proponen resolver un problema de programación lineal que es computacionalmente inabordable. Varian (1982) propone un algoritmo, basado en el procedimiento constructivo de Diewert, de complejidad computacional $\mathcal{O}(n^3)$ que permite encontrar de manera recursiva los números λ 's

¹⁰⁹Obsérvese que la distancia mínima entre dos observaciones i, j de la misma clase de indiferencia es cero, dado que $a_{ij} \geq 0$ y $a_{ji} \geq 0$, para todo par \bar{x}_i, \bar{x}_j de observaciones de demanda.

¹¹⁰Véase Glosario Terminológico para más detalles.

¹¹¹Según este autor, dado un conjunto finito $D = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ de datos de demanda, la cesta demandada \bar{x}_t es inconsistente con GARP si y sólo existe \bar{x}_s satisfaciendo $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{x}_t P^0 \bar{x}_s$.

¹¹²Demostraciones anteriores de este resultado pueden verse en Afriat (1967), Diewert (1973) y Scarf, Fostel y Todd (2004) entre otros.

y ϕ 's de Afriat. Más recientemente, Scarf, Fostel y Todd (2004) proponen un procedimiento que permite construir la función de utilidad en un tiempo proporcional a $\mathcal{O}(n^3)$. Este procedimiento permite construir una función de utilidad no saciada, estrictamente cóncava, monótona y continua en $\mathcal{O}(n^2)$, para todo conjunto de observaciones de demanda consistentes con el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada. Nuestro procedimiento inductivo permite construir los λ 's y ϕ 's en un tiempo proporcional a $\mathcal{O}(ne)$. En efecto, un algoritmo debido a Tarjan (1972) de complejidad computacional $\mathcal{O}(ne)$, donde e es el número de aristas del grafo dirigido (V, E) asociado a la relación de preferencia revelada permite construir la estructura acíclica asociada al conjunto de clases de indiferencia se puede construir y establecer un orden en el conjunto de observaciones de demanda tal que $\phi(\bar{x}_n) \geq \phi(\bar{x}_{n-1}) \geq \dots \geq \phi(\bar{x}_1)$. La matriz A' asociada al conjunto de clases de indiferencia puede determinarse en $\mathcal{O}(n^2 - n)$. Finalmente, determinar ϕ_k y λ_k en cada paso requiere $\mathcal{O}(n)$. Por tanto, nuestro procedimiento constructivo es de complejidad computacional menor que $\mathcal{O}(n^3)$ y, por tanto, es más eficiente que todos los procedimientos constructivos existentes en la literatura económica. Además, para todo conjunto de observaciones de demanda satisfaciendo SARP existen exactamente n clases de indiferencia y por tanto, nuestro procedimiento coincide, en este caso, con el propuesto por Scarf, Fostel y Todd (2004). En la sección anterior hemos mostrado la equivalencia entre encontrar ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ verificando (1.25) y resolver un problema de distancias mínimas en un grafo G' para un conjunto de multiplicadores $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^n$ cumpliendo (1.26). Takaoka (1998) construye un algoritmo basado en la estructura acíclica determinada por las clases de equivalencia de un grafo dirigido G que resuelve el shortest dipath problem en un tiempo $\mathcal{O}(m + n \log k)$, donde k es la cardinalidad máxima de las componentes fuertemente conexas (clases de equivalencia) en el grafo. Este algoritmo calcula las distancias mínimas dentro de cada una de las clases de equivalencia¹¹³ y actualiza estas distancias entre las clases de equivalencia. Entonces, el problema de encontrar un conjunto de números ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ verificando (1.25) puede resolverse en un tiempo proporcional a $\mathcal{O}(m + n \log k)$, el cual es inferior a $\mathcal{O}(n^3)$. Por tanto, nuestro procedimiento constructivo es de complejidad computacional menor que $\mathcal{O}(n^3)$ y, por tanto, es más eficiente que todos los procedimientos constructivos existentes en la literatura económica. Para finalizar, dos observaciones: en primer lugar, conviene señalar que todas las demostraciones constructivas calculan (de una manera implícita o explícita) la función de utilidad asociada a un conjunto finito de observaciones demanda-precio consistente con la teoría neoclásica de la demanda, resolviendo de manera implícita y recursiva, un problema de distancias mínimas sobre un grafo dirigido G' sin ciclos de longitud negativa. En segundo lugar, cabe señalar que en base a la equivalencia entre el problema de encontrar ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ verificando (1.25) y el de resolver un problema de distancias mínimas en un grafo G' para un conjunto de multiplicadores $(\lambda)_{t=1}^n \in \mathbb{R}_{++}^n$ satisfaciendo (1.26). Nuestro algoritmo calcula las distancias mínimas dentro de cada una de las clases de equivalencia y actualiza estas distancias entre las clases de equivalencia. Entonces, el problema de encontrar un conjunto de números ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ verificando (1.25) puede resolverse en un tiempo proporcional a

¹¹³Obsérvese que si G no posee ciclos de longitud negativa, la distancia mínima entre dos observaciones cualesquiera de una misma clase de equivalencia es cero.

$\mathcal{O}(e + n \log k)$, el cual es inferior a $\mathcal{O}(n^3)$. Nótese que Takaoka (1998) construye un algoritmo basado en la estructura acíclica determinada por las clases de equivalencia de un grafo dirigido G que resuelve el problema de las distancias mínimas en un grafo dirigido en un tiempo de ejecución proporcional a $\mathcal{O}(e + n \log k)$, donde k es la cardinalidad máxima de las componentes fuertemente conexas en el grafo dirigido.

Para finalizar, merece la pena resaltar que las relaciones binarias derivadas de los diferentes conceptos de revelación pueden representarse por grafos dirigidos finitos o por networks, por ser el conjunto de observaciones finito. Probar si un cierto sistema finito de desigualdades lineales es factible equivale a probar la “aciclicidad débil” de la relación binaria correspondiente. En consecuencia, los principales axiomas de racionalización (GARP, SARP, HARP, etc.) tienen una gran relevancia desde el punto de vista empírico pues para saber si un conjunto finito de datos observados puede ser racionalizado por una preferencia bastará probar la aciclicidad o la “aciclicidad débil” de los principales conceptos de revelación. En efecto, el Axioma Fuerte (SARP) es equivalente (desde el punto de vista lógico) a la aciclicidad de la relación de preferencia revelada directa definida en (1.2), la Proposición 1.4.2 caracteriza la “aciclicidad débil” de la relación de preferencia revelada en términos del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada (GARP). Finalmente, señalar que el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada Homotética (SCA), de naturaleza combinatoria, resulta muy sencillo de computar en la práctica. Si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es un conjunto finito cualquiera de observaciones demanda-precio, los datos satisfacen SCA si se cumple:

$$\log(\bar{p}_i \bar{x}_j) + \log(\bar{p}_j \bar{x}_k) + \dots + \log(\bar{p}_m \bar{x}_i) > 0 \quad (1.63)$$

Obsérvese que los datos observados satisfacen SCA si y solamente si la relación de preferencia revelada homotética es acíclica. Así, para contrastar si un conjunto finito de datos de demanda puede ser racionalizado por una preferencia monótona, continua, convexa y homotética (resp., monótona, continua, convexa y homotética) bastará con probar la aciclicidad (resp., la “aciclicidad débil”) de la relación de preferencia revelada homotética. Resumiendo, para comprobar si un cierto conjunto finito de datos observados es consistente con GARP, SARP, WARP, HARP, etc. equivale a probar la aciclicidad débil o estricta de las relaciones binarias asociadas a cada uno de los conceptos de revelación. Así GARP equivale a mostrar la aciclicidad débil de R^0 , SARP la aciclicidad de S y HARP la aciclicidad débil de la revelación homotética. De lo anterior se desprende la estrecha relación¹¹⁴ existente entre la aciclicidad y el grado de coherencia de las elecciones efectuadas por un individuo.

¹¹⁴Marc-Arthur Diaye, M. y Wong-Urdanivia, M. (2007) mostraron que un conjunto finito de observaciones demanda-precio puede ser racionalizado por una función a intervalos si y solamente si los datos satisfacen RARP; es decir, si y solamente si la parte asimétrica de la relación de preferencia revelada directa definida en (1.1) es acíclica.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1962) Preference Scale and Expenditure Systems. *Econometrica*, Vol. 30, págs. 305-23.
- [2] Afriat, S. (1967) The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 67-77.
- [3] Afriat, S. (1987) *Logic of Choice and Economic Theory*. Oxford: Clarendon Press.
- [4] Alcantud, J.C.R. y C. Rodríguez-Palmero (2002) A Note on Representability of Consumer's Behavior. *Economic Theory*, Vol. 20, págs. 207-216.
- [5] Diaye, M. y Wong-Urdanivia, M. (2007) A simple test of Richter rationality. *Cahiers de la MSE*, Vol. 8174. Centre National de la Reserche Scientifique. Paris.
- [6] Diewert, E. (1973) Afriat and Revealed Preference Theory. *Review of Economic Studies*, Vol. 40, págs. 419-426.
- [7] Diewert, E. y C. Parkan (1985) Tests for the Consistency of Consumer Data. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 127-147.
- [8] Grotschel, M, Lovsz, L. y Schrijver, A. (1993) *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag.
- [9] Houthakker, H. (1950) Revealed Preference and the Utility Function. *Economica*, Vol. 17, págs. 159-174.
- [10] Matzkin, R. y M. Richter (1991) Testing Strictly Concave Rationality. *Journal of Economic Theory*, Vol. 53, págs. 287-303.
- [11] McFadden, D. y M. Richter (1990) Stochastic Rationality and Revealed Stochastic Preference. En *Preferences, uncertainty, and optimality: Essays in honor of Leo Hurwicz*, Chipman, J. y D. McFadden y M. Richter (eds.), Westview Press, Boulder, Colorado, págs. 151-86.
- [12] Richter, M. (1966) Revealed Preference Theory. *Econometrica*, Vol. 34(3), págs. 635-645.
- [13] Richter, M. y Kam-Chau Wong (2004) Concave Utility on Finite Sets. *Journal of Economic Theory*, Vol. 115, págs. 341-357.
- [14] Richter, M. y Kam-Chau Wong (2005) Infinite Inequality Systems and Cardinal Revelations. *Economic Theory*, Vol. 26, págs. 947-971.
- [15] Rockafellar, T. (1970) *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press.

-
- [16] Samuelson, P. (1948) Consumption Theory in Terms of Revealed Preference. *Economica*, Vol. 15, págs. 243-253.
- [17] Samuelson, P. (1950) The Problem of Integrability in Utility Theory. *Economica S.N.*, Vol. 17, págs. 355-385.
- [18] Scarf, H.; Fostel, A. y M. Todd (2004) Two New Proofs of Afriat's Theorem. *Economic Theory*, Vol. 24, págs. 211-219.
- [19] Stoer, J. y C. Witzgal (1970) *Convexity and Optimization in Finite Dimensions, I*. Springer-Verlag, New York, N.Y.
- [20] Takaoka, T. (1998) Shortest Path Algorithms for Nearly Acyclic Directed Graphs. *Theoretical Computer Science*, Vol. 203(1), págs. 143-150.
- [21] Tarjan, R. (1972) Depth First Search and Linear Graph Algorithms. *SIAM Journal of Computing*, Vol. 1(2), págs. 146-160.
- [22] Uzawa, H. (1960) Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption. In *Mathematical Models in Social Science*, Cap. 9, K. J. Arrow, S. Karlin, and P. Suppes (eds.). Stanford University Press, California.
- [23] Varian, H.R. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50, págs. 945-971.
- [24] Varian, H. (1983) Nonparametric Tests of Consumer Behavior. *Review of Economic Studies*, Vol. 50, págs. 99-110.
- [25] Varian, H. (2006) Revealed preferences. In *Samuelsonian Economics and the 21st Century*, Michael Szenberg (ed.). Oxford University Press, págs. 99-115.

Bondad del ajuste

El comportamiento observado del consumidor es inconsistente en muchas ocasiones en el sentido de que viola los axiomas de preferencia revelada y por consiguiente no se puede derivar de un comportamiento optimizador de la utilidad¹. Las inconsistencias pueden ser problemáticas cuando se aplica el modelo del consumidor a demandas agregadas ya que algunos autores afirman que pequeñas desviaciones desde la optimización pueden tener graves efectos en la asignación de recursos². De este modo es natural preguntarse si el modelo neoclásico del equilibrio del consumidor está en contradicción con los datos. Para responder a esta cuestión, además de contar con una definición razonable del significado de “parecido”, es necesario disponer de una medida de la bondad del ajuste del modelo que nos permita cuantificar el grado de violación de las posibles inconsistencias presentes en los datos, así como colegir si el consumidor (resp., una empresa) ha presentado un comportamiento “casi optimizador” o “próximo” a uno optimizador³.

En consecuencia, resulta casi imprescindible disponer de diferentes medidas de la bondad del ajuste que nos permitan en primer lugar ofrecer una interpretación económica de las posibles inconsistencias presentes en los datos y, en segundo lugar, analizar el grado de eficiencia de las decisiones de consumo de un individuo, y, en consecuencia, determinar si el comportamiento de un consumidor es o no casi optimizador⁴.

¹Véase Andreoni y Miller (2002), Battalio et. al. (1973), Koo (1972) y Sippel (1997), para más detalles.

²Véase Thaler (1992), para más detalles sobre esta cuestión.

³Esta idea puede ampliarse con un carácter más general: una medida de la bondad del ajuste es el grado en que el agente económico no optimiza la función objetivo postulada.

⁴La presencia de “inconsistencias” (con el correspondiente modelo de optimización) puede haber estado ocasionada por multitud de factores, entre los que cabe destacar la existencia de algún error de medida, que no todas las elecciones de consumo sean observables, que exista un racionamiento en las cantidades demandadas, que las preferencias del consumidor varíen en el tiempo o las restricciones presupuestarias no estén siendo consideradas en el modelo de optimización.

La aproximación no-paramétrica basada en la teoría de la preferencia revelada será el marco idóneo, como mostraremos en este capítulo, para analizar el grado de coherencia de las elecciones de consumo efectuadas por un individuo⁵. Afriat (1972, 1973) fue el primer autor en sugerir utilizar el enfoque de la teoría de la preferencia revelada para analizar la eficiencia económica y/o tecnológica en los modelos de optimización. Este autor señala la importancia de disponer una medida global de la bondad del ajuste del modelo optimizador de un consumidor que permita determinar si un individuo presenta un comportamiento “casi optimizador” en sus decisiones de consumo. Para ello, propone encontrar el mayor índice global de eficiencia, e^* , entre cero y uno que garantice la consistencia de los datos, a ese nivel de eficiencia, con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Desde el trabajo seminal de Afriat (1973) han aparecido en la literatura económica multitud de índices que tratan de determinar el nivel de coherencia de las decisiones de consumo realizadas por un consumidor:

- Houtmann y Maks (1985) formulan un procedimiento para determinar todos los subconjuntos de elecciones de consumo consistentes con el axioma fuerte de la preferencia revelada;
- Varian (1985) plantea realizar un contraste de hipótesis⁶ no-paramétrico, basado en una chi-cuadrado, para determinar si la inconsistencia de un conjunto de datos de demanda es estructural o se debe a la existencia de algún pequeño error de medida o de naturaleza estocástica;
- Swofford y Withney (1987) sugieren comparar el número de elecciones de consumo que violan el axioma generalizado de la preferencia revelada con el número máximo posible;
- Chalfant y Alston (1988) proponen, para determinar el nivel de coherencia de las elecciones de consumo de un individuo, un índice de gasto basado en el axioma débil de la preferencia revelada que resultó ser inapropiado para cuantificar la magnitud de una violación; Grosss (1989) plantea determinar, como medida de la bondad del ajuste, el número de observaciones consistentes con el axioma generalizado de la preferencia revelada como medida de la bondad del ajuste;
- Varian (1987, 1990, 1993) generaliza la aproximación de eficiencia de Afriat permitiendo un nivel de eficiencia distinto en cada observación;
- Varian (1985) y Tsur (1989) plantean realizar un contraste de hipótesis no-paramétrico, basado en una chi-cuadrado, para determinar si la inconsistencia de un conjunto de obser-

⁵Varian (1990) argumenta las limitaciones de utilizar la aproximación tradicional paramétrica y sugiere utilizar el enfoque de la preferencia revelada de Afriat que no precisa establecer ningún tipo de restricción en los datos de demanda.

⁶Los diferentes test no-paramétricos de la hipótesis de la maximización de la utilidad [Afriat (1967, 1972, 1976), Diewert (1973), Diewert y Parkan (1978, 1980, 1985), Varian (1982, 1983) y Fleissig y Whitney (2005), entre otros] son contrastes “exactos” de la optimización que no incorporan ningún error de medida o de naturaleza estocástica que, como es sabido, pueden provocar que el comportamiento de un consumidor no sea optimizador.

vaciones de demanda se debe a la existencia un pequeño error de medida o de naturaleza estocástica;

- Gross (1995, pág. 705) al observar cómo en ocasiones el número de violaciones no permite inferir el grado de incoherencia de las decisiones de consumo de un individuo sugiere resolver el problema de “subracionalización” de encontrar para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto maximal de observaciones de demanda consistentes con el axioma generalizado de la preferencia revelada y realizar una estimación econométrica del dinero “derrochado” por un consumidor en sus elecciones efectuadas, con objeto de determinar si éste ha presentado un comportamiento “casi optimizador”;
- Gross y Kaiser (1996) realizan una primera aproximación a la resolución de este problema. Estos autores, inspirándose en el trabajo realizado por Houtman y Maks, proporcionan dos algoritmos que permiten obtener un conjunto maximal de observaciones de demanda consistentes con el axioma débil de la preferencia revelada, estableciendo para ello un isomorfismo entre un grafo no dirigido y las observaciones de demanda inconsistentes con el axioma débil de la preferencia revelada⁷.
- Famulari (1996), inspirándose en los trabajos de Swofford y Withney (1987), McMillan y Amoako-Tuffour (1988) y Mossin (1972), proporciona una nueva medida de eficiencia al comparar el número de violaciones del axioma generalizado de la preferencia revelada (GARP) con el número de cestas demandadas comparables por la relación de preferencia revelada asociada. Además, Famulari considera, para incrementar la potencia del test, sólo aquellas cestas demandadas cuyo gasto sea similar.

Estas medidas de eficiencia se explican con más detalle en la sección 2.1.

En este capítulo realizamos, en primer lugar, una aproximación a las principales medidas de eficiencia de la literatura económica y presentaremos, posteriormente, diferentes medidas de la bondad del ajuste del modelo optimizador de un consumidor que permitan cuantificar el grado de violación de las posibles inconsistencias presentes en los datos, ofrecer una interpretación económica de las inconsistencias presentes en los datos y colegir si un consumidor ha presentado un “comportamiento casi optimizador” sin necesidad de sumergir el modelo en un contexto paramétrico.

En la sección 2.2 caracterizamos a las observaciones de demanda que son inconsistentes con el axioma generalizado de la preferencia revelada y demostramos que el problema de encontrar un subconjunto maximal de cardinal máximo consistente con el axioma generalizado de la preferencia revelada es NP-completo. Los problemas NP-completos⁸ tienen la peculiaridad de que no

⁷Sin embargo, como hemos mostrado en el primer capítulo, el axioma débil de la preferencia revelada (WARP) no es una condición necesaria ni suficiente para que una serie finita de observaciones de elección sea consistente con la teoría neoclásica de la demanda.

⁸Para un estudio más exhaustivo de los problemas NP completos véanse, entre otros, los trabajos de M. Garey, M. y Johnson, D. (1979) y Karp, R. (1972).

se conoce en la actualidad ningún algoritmo eficiente que resuelva un problema NP-completo en un tiempo polinomial⁹. Además, proporcionamos un procedimiento exacto que permite calcular para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto maximal de cardinal máximo consistente con el axioma generalizado de la preferencia revelada. Y, finalmente, presentamos diferentes métodos aproximativos eficientes que permiten calcular un subconjunto maximal (no necesariamente de cardinal máximo) de observaciones de demanda consistentes con el axioma generalizado de la preferencia revelada y, por tanto, que se pueden utilizar en cualquier estudio empírico no paramétrico que analice el comportamiento de un consumidor.

En la sección 2.3 proporcionamos dos nuevas medidas “parciales de eficiencia” que nos permitirán analizar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo, determinar en cada observación de consumo el mínimo margen de error necesario en la optimización para eliminar todas las posibles inconsistencias con la teoría neoclásica de la demanda presentes en cualquier conjunto de datos y, además, precisar en qué observaciones el consumidor presenta un comportamiento inconsistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Estas nuevas medidas de la bondad del ajuste nos permiten determinar en cada observación de consumo el exceso de gasto que se le permite derrochar a un consumidor para que sus decisiones de consumo sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Estos índices mejoran el grado de eficiencia de los índices proporcionados por Afriat (1972, 1973), Tsur (1989) y Varian (1990) –que demostramos que son esencialmente el mismo– y, por tanto, demostramos que describen mejor el comportamiento de un consumidor que los procedimientos planteados por Afriat y Varian en sus artículos seminales.

En la sección 2.4 presentamos diferentes medidas de la bondad del ajuste que nos permitirán colegir si un consumidor ha presentado un comportamiento “casi optimizador” así como ofrecer una interpretación económica de las inconsistencias presentes en los datos y, además, determinar el porcentaje mínimo de dinero que necesita gastar un consumidor en cada situación presupuestaria para obtener el mismo bienestar en comparación con la cantidad de dinero que utiliza realmente. En primer lugar, mostramos que para cada serie finita de datos de demanda se puede construir –a partir de la familia formada por todos los subconjuntos inconsistentes¹⁰ o fuertemente inconsistentes con el axioma generalizado de la preferencia revelada– una familia finita de “vectores-índice” que nos permitirán analizar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo, así como determinar aquellas observaciones inconsistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. En segundo lugar, generalizamos la aproximación de eficiencia de Afriat con el fin de hallar el porcentaje mínimo de dinero que se le permite “derrochar” a un consumidor en aquellas observaciones inconsistentes, y no en todas las observaciones, tal y como sugiere Afriat. A continuación introducimos los conceptos de estructura de

⁹Un algoritmo es de complejidad polinomial, o se dice que emplea un tiempo polinomial en su ejecución, cuando el número de operaciones que efectúa está acotado por una función polinomial en el tamaño de su entrada; es decir, se dice que un algoritmo es polinomial si su peor caso de ejecución es de orden $\mathcal{O}(n^k)$, donde n es el tamaño de la entrada y k es una constante.

¹⁰Un subconjunto de cestas demandadas \tilde{X} es inconsistente con GARP si $\tilde{X} \cap C \neq \emptyset$ para cada ciclo C de la relación de preferencia incoherente con GARP.

eficiencia y de variedad de eficiencia que nos permitirán comparar las diferentes aproximaciones no-paramétricas a la bondad del ajuste del modelo de la elección óptima. Además, construimos una variedad de eficiencia, que generaliza la aproximación de eficiencia sugerida por Afriat, a partir de la cual se podrá obtener la cantidad mínima de dinero que se le permite “derrochar” a un consumidor en todas las observaciones de cualquier conjunto inconsistente para que sus decisiones de consumo sean consistentes con la teoría clásica de la demanda, mostramos cómo el índice de Afriat es un germen de esta variedad de eficiencia, analizamos las relaciones existentes entre los diferentes gérmenes de esta variedad, caracterizando a aquellos miembros (de esta variedad de eficiencia) que describen casi-mejor el comportamiento de un consumidor que el índice de eficiencia de Afriat. De manera análoga construimos, a partir de la función generalizada de compensación de Samuelson, una variedad de eficiencia que generaliza la aproximación de eficiencia de Varian, mostramos cómo la estructura de eficiencia generada por el procedimiento de Varian es un germen de eficiencia o miembro de esta variedad de eficiencia y, además, caracterizamos a las estructuras de eficiencia de esta variedad que describen casi-mejor el comportamiento de un consumidor que la estructura de eficiencia de Varian. Finalmente, construimos una tercera variedad de eficiencia que, además de describir casi-mejor el comportamiento de un consumidor que las anteriores variedades de eficiencia, permite resolver el problema de máxima norma planteado por Varian (1985, 1990), y cuantificar de manera exacta el porcentaje mínimo de dinero que se le permite “derrochar” a un consumidor para que sus decisiones de consumo sean consistentes con la teoría neoclásica de la demanda y colegir, por tanto, si un consumidor ha presentado un comportamiento próximo a uno “optimizador”, sin necesidad de sumergir el modelo en un contexto paramétrico.

Finalmente, en la sección 2.5 abordamos la cuestión de la significatividad estadística de las inconsistencias presentes en los datos con la hipótesis de la maximización de la utilidad. En las secciones anteriores se ha mostrado que si un conjunto de observaciones de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, no satisface el axioma GARP, entonces se puede construir una perturbación mínima del conjunto de datos $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t, e_t)\}_{t=1}^n$ satisfaciendo $GARP(\bar{e})$. Si esta perturbación nos parece razonablemente pequeña se puede concluir que el conjunto de datos observados satisface el axioma GARP y que, en consecuencia, las violaciones GARP están ocasionadas por la existencia de algún pequeño error de medida o de naturaleza estocástica. En caso contrario, las inconsistencias presentes en los datos serían de carácter estructural y las observaciones de demanda no han sido generadas desde la optimización. Pero, ¿qué se entiende por razonablemente pequeña? Varian (1985) plantea realizar un contraste de hipótesis no paramétrico basado en una chi-cuadrado para, a partir de un “vector-índice” de máxima norma, contrastar estadísticamente si la inconsistencia con la hipótesis de la maximización de la utilidad es de carácter estructural o está ocasionada por la existencia de errores de medida o de naturaleza estocástica. En este sentido, Tsur (1989) inspirándose en los trabajos de Varian, desarrolla un test estadístico –basado en la aproximación de eficiencia planteada por Afriat (1972) y Varian (1987)– que permite contrastar la significatividad estadística de las violaciones del axioma generalizado de la preferencia revelada. En esta sección presentamos dos nuevos estadísticos (basados en las nuevas medidas de eficiencia creadas) para contrastar la significatividad estadística de una violación GARP.

Finalmente, realizamos un experimento de Monte Carlo para probar cómo el test planteado por Tsur rechaza, en algunas ocasiones, GARP cuando esta violación ha sido producida por la existencia de un pequeño error de medida o de naturaleza estocástica.

2.1. Antecedentes históricos

El concepto de eficiencia desempeña un papel importante en la teoría económica, tanto en la toma de decisiones de consumo, inversión y empresariales como en las políticas económicas y gubernamentales. En la teoría de la empresa, la condición de eficiencia es que cada empresa debe producir cualquier nivel de producción al mínimo coste. Así, si los precios están fijados por el mercado, resulta razonable suponer que el interés de la empresa es producir un determinado nivel de outputs con los mismos requerimientos de inputs o, de forma equivalente, dado un conjunto de inputs intentará obtener el máximo volumen de outputs posible. Esta idea recoge el espíritu del concepto de eficiencia. Intuitivamente, los planes de producción eficientes se encuentran sobre la frontera del conjunto de posibilidades de producción, aunque ello no es condición suficiente de eficiencia. Así, un plan de producción es eficiente si para cualquier entorno suyo arbitrariamente pequeño no podemos encontrar otro plan de producción con algún output o input mayor. Nótese que un plan de producción y perteneciente al conjunto de posibilidades de producción Y es eficiente si no es posible encontrar otro $y' \in Y$, $y \neq y'$, tal que $y' \geq y$. Una empresa será, por tanto, ineficiente si está incurriendo en un coste mayor del necesario; dado que en esta situación está reduciendo sus beneficios.

En ingeniería, la eficiencia se refiere a la cantidad física de algún input clave usado en la producción. Cuando, por ejemplo, un ingeniero se refiere a la eficiencia de un motor hace alusión al ratio entre la cantidad de energía contenida en el combustible quemado por el motor y la cantidad de energía aprovechable por éste. En este ámbito, la eficiencia representa, en una aplicación mecánica del concepto, el ratio del trabajo útil realizado en relación con la cantidad de energía utilizada. La eficiencia “ingeniera” es, por tanto, claramente medible y fácilmente interpretable. Sin embargo, y a pesar de la relación existente entre los modelos de la ingeniería y los modelos económicos, en economía la eficiencia no es siempre medible. En efecto, en la teoría de la producción cabe señalar que, en ocasiones, no es posible dotar a la tecnología de producción –que puede representarse a través del conjunto de posibilidades de producción– de una estructura específica a través de una función de transformación que, como es sabido, en el caso de la producción de un único output da lugar al concepto de función de producción. Si esto fuese posible; es decir, si conociésemos de antemano la función de producción $f(\cdot)$ que representa la tecnología de una empresa que produce un único output, entonces cualquier actividad de producción (\bar{x}, y) tal que $y < f(\bar{x})$ sería representada como ineficiente. Una cuestión similar sucede con la función de utilidad. Es claro que, en cierto modo, una función de utilidad es una clase de función de producción; pero, por su naturaleza ordinal, su magnitud carece de significado; solamente el orden que ésta proporciona a las cestas de bienes es significativo.

En economía, el análisis de la eficiencia en los modelos de optimización puede realizarse desde dos aproximaciones distintas: una aproximación econométrica o paramétrica y otra no paramétrica, basada en la teoría de la preferencia revelada. La aproximación econométrica requiere sumergir los datos en una determinada especificación paramétrica de una función de utilidad,

de una función de gasto o de alguna forma funcional¹¹ flexible potencialmente integrable para, a continuación, proceder a la estimación de los parámetros (utilizando los datos observados) y examinar si estas estimaciones difieren significativamente (en sentido estadístico) de los correspondientes valores teóricos; mientras que la aproximación no paramétrica no requiere sumergir los datos en un contexto no paramétrico y permite realizar un análisis de la eficiencia en términos de los axiomas de la preferencia revelada.

Supongamos que a partir de una serie finita de datos de demanda observados, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, se desea analizar la eficiencia en las elecciones de consumo efectuadas por un individuo cuyas preferencias han sido generadas por una función de utilidad $u(\bar{x}, \beta)$, donde β es un parámetro (o lista de parámetros) desconocido. A partir del parámetro (o lista de parámetros) estimado $\hat{\beta}$ que ha conseguido el mejor ajuste, podemos comparar la utilidad de las elecciones óptimas (calculada mediante la función de utilidad estimada) y la utilidad correspondiente a las elecciones reales para analizar la eficiencia de un consumidor en sus elecciones de consumo. Una vez seleccionada la especificación paramétrica se realiza la estimación de los parámetros estadísticos. Un procedimiento natural de estimación es encontrar los valores de β que minimizan la suma de los cuadrados de los residuos; esto es, $\sum_{t=1}^n \epsilon_t$ donde por ϵ_t designamos a la diferencia entre la demanda predicha en la observación t y la observada. Sin embargo, una diferencia significativa (en términos de distancia euclídea) entre los parámetros estimados y los correspondientes valores teóricos no implica necesariamente una clara violación de los datos con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Es decir, una gran diferencia entre las demandas predichas y observadas puede ser consistente con una diferencia muy pequeña en utilidad¹². Como Varian (1990) señala, una mejor aproximación podría ser considerar la función de gasto en vez de la función de utilidad para realizar la estimación de los parámetros desconocidos. Este autor sugiere utilizar la función de compensación de Samuelson, también conocida como función de utilidad métrica monetaria. A partir de la función de utilidad $u(\bar{x}, \beta)$ que representa las preferencias de un individuo se puede definir, utilizando las técnicas habituales de optimización, la función de utilidad “métrica monetaria” de Samuelson, también conocida como función de renta mínima o función de compensación directa¹³, $m(\bar{p}, \bar{x}, \beta)$, de la siguiente manera:

$$m(\bar{p}, \bar{x}, \beta) = \inf\{\bar{p}\bar{y} : u(\bar{y}, \beta) > u(\bar{x}, \beta)\} \quad (2.1)$$

La función de compensación directa, en adelante función de compensación, determina la cantidad mínima de renta monetaria que un consumidor debe emplear para alcanzar el mismo nivel

¹¹Las formas funcionales flexibles deben poseer suficientes parámetros para que, en primer lugar, puedan considerarse una aproximación adecuada a la verdadera función de utilidad (directa o indirecta) o de gasto y, en segundo lugar, deben generar funciones de demanda potencialmente integrables; esto es, capaces de verificar las restricciones teóricas que impone el modelo de la maximización de la utilidad.

¹²Varian (1990) muestra diferentes situaciones donde una gran diferencia entre las cantidades demandadas observadas y predichas no implica necesariamente una clara violación de la hipótesis de la minimización del gasto.

¹³Para un estudio más detallado sobre las propiedades de esta importante función en la teoría clásica de la demanda véase Alcantud y Manrique (2001).

de utilidad que le ha reportado la adquisición de la cesta de bienes \bar{x} . Es fácil ver que si \bar{x} es fijo también lo es $u(\bar{x})$, por lo que $m(\bar{p}, \bar{x})$ se comporta exactamente igual que una función de gasto: es monótona, cóncava en \bar{p} , etc. Lo que no es tan evidente es que cuando \bar{p} es fijo la función $m(\bar{p}, \bar{x})$ es, de hecho, una función de utilidad. La demostración es sencilla: cuando los precios son fijos, la función de gasto es creciente en el nivel de utilidad; si se quiere obtener un mayor nivel de utilidad, hay que gastar más dinero. De hecho, la función de gasto es estrictamente creciente en u cuando las preferencias satisfacen el supuesto de continuidad e insaciabilidad local. Por lo tanto, cuando \bar{p} es fijo la función $m(\bar{p}, \bar{x})$ es simplemente una transformación monótona de la función de utilidad y, en consecuencia, una función de utilidad; con la peculiaridad de que mide la utilidad¹⁴ en términos monetarios.

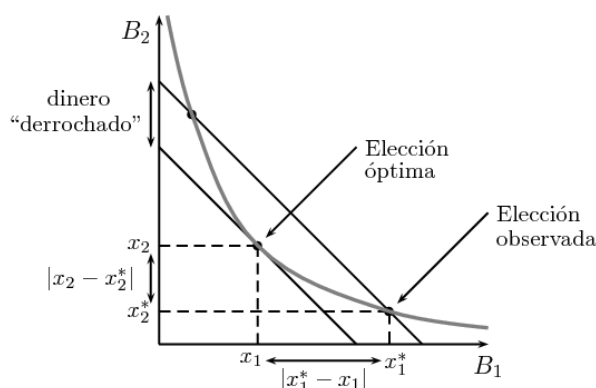


Figura 2.1: Bondad del ajuste.

de la utilidad métrica monetaria. Así, el modelo de la maximización de la utilidad tiene un mal ajuste en términos de la distancia euclídea, pero un buen ajuste en el sentido de que los consumidores no se encuentran muy alejados de un comportamiento optimizador en términos de la utilidad métrica monetaria. En segundo lugar, el óptimo de la función objetivo permitirá cuantificar la eficiencia de un consumidor en sus decisiones de consumo. A partir de la función de compensación de Samuelson estimada, $m(\bar{p}, \bar{x}, \hat{\beta})$, se puede determinar un conjunto de “residuos” o índices, $(\iota_t)_{t=1}^n$, de la siguiente manera:

$$\iota_t = \frac{m(\bar{p}_t, \bar{x}_t, \beta)}{\bar{p}_t \bar{x}_t} \quad (2.2)$$

¹⁴En ocasiones, es deseable conocer no solamente si alguna cesta de bienes es preferida a alguna otra cesta sino, además, cuanto es más preferida. Por supuesto, no existe una respuesta única a esta cuestión: la teoría de la demanda es ordinal en naturaleza y no existe una única representación cardinal de la utilidad. Una cardinalización particularmente útil es la función de compensación. Esta función se utiliza en la práctica para medir el bienestar económico.

A continuación, se utilizarían los datos observados para estimar la función métrica monetaria estimada $m(\bar{p}, \bar{x}, \hat{\beta})$ que mejor describe la conducta observada. Un procedimiento muy natural de estimación es encontrar los valores de β que minimizan la suma de los cuadrados de los residuos; esto es, $\sum_{t=1}^n (\iota_t)^2$. Esta clase de estimadores presenta unas propiedades muy deseables: en primer lugar, utilizan una norma económica muy sensible para cuantificar la bondad del ajuste. En efecto, la Figura 2.1 ilustra cómo la elección observada difiere considerablemente (en términos de la distancia euclídea) de la elección predicha, pero está bastante más próxima en términos

que permiten cuantificar la eficiencia de un consumidor en sus decisiones de consumo. Esta clase de “índice métrico-monetario” es una medida muy natural sobre cómo se aproximan las observaciones de consumo a las elecciones realizadas desde una función de utilidad particular $u(\bar{x}, \beta)$. Obsérvese que cada índice ι_t mide la cantidad mínima de dinero que necesita gastar el consumidor para obtener la utilidad $u(\bar{x}_t, \beta)$ en comparación con la cantidad de dinero que utiliza realmente. Finalmente, estos estimadores tienen una interpretación natural basada en la eficiencia: si el valor medio de ι_t es $\bar{\iota}$, podemos decir que en promedio el consumidor es eficiente en un $\bar{\iota}\%$ en su conducta de elección. Así, si el consumidor está maximizando perfectamente la función de utilidad $u(\bar{x}, \hat{\beta})$, entonces $\bar{\iota}$ será igual a 1, y, en esta situación, el consumidor será eficiente en un 100% en sus elecciones de consumo. Si, por ejemplo, $\bar{\iota}$ es igual a 0.95, el consumidor será eficiente en un 95%, etc. La magnitud de estas desviaciones determina la eficiencia en las elecciones efectuadas por el agente económico. Pero, ¿qué significado económico tiene el hecho de que los parámetros estimados difieran significativamente de sus correspondientes valores teóricos? “A saber, ninguno”. Esta aproximación al análisis de la eficiencia en el consumo presenta los mismos inconvenientes que la estimación de los parámetros desconocidos en un modelo paramétrico: las conclusiones dependerán de las especificaciones utilizadas. Si los estimadores no satisfacen las restricciones teóricas, esta desviación puede estar ocasionada por una conducta no optimizadora del agente económico o por una selección errónea de la especificación paramétrica utilizada. La aproximación no-paramétrica, que no precisa sumergir los datos en un contexto paramétrico, no presenta estas limitaciones dado que permite ofrecer una interpretación económica del concepto de eficiencia en términos del beneficio que deja de obtener la empresa en sus procesos ineficientes o del dinero “derrochado” por un consumidor en sus decisiones de consumo inconsistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

Afriat (1972, 1973) fue el primer autor en sugerir utilizar el enfoque de la teoría de la preferencia revelada para analizar la eficiencia económica y/o tecnológica en los modelos de optimización. Este autor señala la importancia de disponer una medida global de la bondad del ajuste del modelo optimizador de un consumidor que permita determinar si un individuo presenta un comportamiento “casi optimizador” en sus decisiones de consumo. Para ello, a propuesta de H. Rubin, Afriat (1973) propone usar una cota uniforme, e^* , entre cero y uno, como medida de la eficiencia (bondad del ajuste) del modelo de la maximización de la utilidad. En este trabajo, Afriat construye la medida de eficiencia más utilizada en la literatura económica, el índice crítico de coste de eficiencia, para analizar la eficiencia de las elecciones de consumo efectuadas por un consumidor¹⁵. El índice de Afriat, e^* , mide el mínimo margen de error necesario en la optimización para eliminar todas las inconsistencias presentes en el conjunto de datos de demanda y, además, permite cuantificar cual es el porcentaje mínimo de dinero que se le permite “derrochar” a un consumidor en todas sus elecciones para que sean consistentes con la teoría clásica de la demanda.

¹⁵Afriat (1973), considerando el mismo nivel de eficiencia en cada observación, propone encontrar para cada serie finita de datos de demanda el mayor índice parcial de eficiencia e^* , entre cero y uno, en todas las observaciones que garantice la consistencia de los datos (a ese nivel de eficiencia) con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

Desde el trabajo seminal de Afriat (1973) sobre la eficiencia en el consumo, han aparecido en la literatura económica multitud de índices que tratan de determinar el nivel de coherencia de las decisiones de consumo realizadas por un individuo. Houtmann y Maks (1985) formulan un procedimiento¹⁶ de complejidad computacional exponencial (el tiempo de cálculo crece exponencialmente con el tamaño del conjunto de elecciones de consumo) para determinar todos los subconjuntos de observaciones de demanda consistentes con el *Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada*. Varian (1985) diseña un contraste de hipótesis no paramétrico, basado en una chi-cuadrado, para determinar (a partir de un vector-índice de máxima norma) la magnitud de los errores de medida o de naturaleza estocástica asociados a la serie finita de datos de demanda y contrastar estadísticamente si la inconsistencia de los datos de demanda es de carácter estructural o, por el contrario, está ocasionada por la existencia de errores de medida o de naturaleza estocástica. Este contraste de hipótesis (computacionalmente inabordable desde un punto de vista algorítmico) permitirá colegir si las violaciones GARP están ocasionadas por la existencia de errores de medida o de naturaleza estocástica. Swofford y Withney (1987) y McMillan y Amoako-Tuffour (1988) sugieren comparar el número de elecciones de consumo que violan el *Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada* con el número máximo posible¹⁷. Chalfant y Alston (1988) proponen, para determinar el nivel de coherencia de las elecciones de consumo de un individuo, un índice de gasto basado en el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada* que resultó ser inapropiado para cuantificar la magnitud de una violación. Estos autores construyen, para cada par de observaciones i, j inconsistentes con el axioma débil de la preferencia revelada, un índice de gasto¹⁸, Φ_{ij} , definido por $\Phi_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j / \bar{p}_j \bar{x}_i$. Es claro que si un consumidor dispone de la misma renta monetaria en dos períodos distintos i, j y las preferencias de este individuo son similares en ambos períodos, entonces su índice de gasto (basado en el cálculo de aproximaciones de la fracción de renta monetaria derrochada por un consumidor) también será similar. Chalfant y Alston (1988, pág. 400) argumentan que existe un cambio estructural en las pautas de comportamiento de un consumidor representativo si se pueden encontrar dos períodos i, j en los que simultáneamente $\Phi_{ij} < 1$ y $\Phi_{ji} < 1$ y, además, que el recíproco de la afirmación anterior es cierto y que, en consecuencia, este índice de gasto permite cuantificar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un consumidor. Gross (1989) plantea determinar, como medida de la bondad del ajuste, el número de observaciones consistentes con el axioma generalizado de la preferencia revelada como medida de la bondad del ajuste. Varian (1987) señala la importancia de disponer de diferentes medidas de la bondad del ajuste del modelo optimizador de un consumidor que permitan cuantificar el grado de violación de las posibles inconsistencias presentes en los datos, ofrecer una interpretación económica de las inconsistencias presentes en los datos y colegir si un consumidor ha presentado un “comportamiento casi optimizador” sin necesidad de sumergir el modelo en un contexto paramétrico. Para ello, Varian (1987, 1990,

¹⁶El problema de encontrar todos los subconjuntos de lotes de bienes consistentes con SARP es NP-completo, es decir, no se conoce un algoritmo que lo resuelva en tiempo polinomial.

¹⁷El número máximo de violaciones de los axiomas débil, fuerte y generalizado de la preferencia revelada es $n(n-1)$, siendo n el número de observaciones demanda-precio.

¹⁸Este índice de gasto es, esencialmente, el índice de Laspeyres. Nótese que si $\Phi_{ij} < 1$, entonces el bienestar del consumidor en el período i -ésimo es mayor que el bienestar del consumidor en el período j .

1993) generaliza la aproximación de eficiencia de Afriat permitiendo un índice distinto en cada observación. Este autor utiliza¹⁹ la función de sobrecompensación de Samuelson para construir para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, un conjunto de índices o “niveles de eficiencia” $(i_t)_{t=1}^n$ análogos a los residuos en la teoría clásica de regresión. A partir de este conjunto de índices es posible cuantificar el margen de error necesario en la optimización para eliminar todas las violaciones del axioma generalizado de la preferencia revelada, determinar las elecciones inconsistentes con el modelo maximizador de la utilidad e inferir el porcentaje de dinero (no necesariamente el mínimo) que necesita gastar un consumidor en cada situación presupuestaria para obtener el mismo bienestar en comparación con la cantidad de dinero que utiliza realmente. Tsur (1989) inspirándose en los trabajos de Varian, desarrolla un test estadístico, basado en la aproximación de eficiencia planteada por Afriat (1973) y Varian (1987), que permite contrastar la significatividad estadística de las violaciones del *Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada*. Gross (1991, pág. 417) muestra que este índice de gasto no permite determinar la consistencia de las decisiones de consumo de un individuo y que, por lo tanto, no resulta apropiado para cuantificar la magnitud de una violación y, en consecuencia, para determinar la existencia de un cambio estructural en el comportamiento de un consumidor. Para ello considera un consumidor representativo que realiza sus elecciones de consumo en un conjunto de consumo formado únicamente por dos bienes de consumo. El consumidor dispone de la misma renta monetaria, 1000\$, en dos períodos distintos y sus preferencias en ambos períodos vienen representadas en el primer período por la función de utilidad $u_i(x_1, x_2) = x_1^1 x_2^9$, y en el segundo período por $u_j(x_1, x_2) = x_1^9 x_2^1$, siendo los precios del bien 1 y del bien 2 en el primer período $p_i^1 = 99\$$ y $p_i^2 = 101\$$ respectivamente, y en el segundo período $p_j^1 = p_j^2 = 100\$$. Resulta fácil comprobar cómo el índice de gasto asociado a los períodos i y j es igual a 0.992, próximo a uno, mientras que claramente existe un cambio estructural en las preferencias del consumidor entre estos dos períodos, lo que implica que el índice de gasto Φ_{ij} propuesto por Chalfant y Alston no parece ser una buena medida de la bondad del ajuste. Gross (1991) muestra que si resolvemos el problema de optimización

$$\min p_{j1}x_1 + p_{j2}x_2 \quad \text{s.a. } \bar{u} = u_i(x_1, x_2),$$

entonces el gasto necesario que debe realizar el consumidor para alcanzar el mismo nivel de utilidad que el alcanzado en la situación i es 1724.27 euros. Por tanto, suponiendo que la función de utilidad u_i representa las preferencias del consumidor en el período j , entonces el consumidor se ahorra 8275.83 euros. De lo anterior²⁰ se desprende que las decisiones de consumo del consumidor violan significativamente la hipótesis de la minimización del gasto. Otros autores, entre los que cabe destacar a Gross (1995) y Gross y Kaiser (1996), entre otros, plantean, como aproximación a la eficiencia en el consumo, diferentes problemas de “subracionalización”. Gross (1995, pág. 704-705) al observar cómo, en ocasiones, el número de violaciones no permite inferir el grado de incoherencia de las decisiones de consumo de un individuo, sugiere resolver el

¹⁹Véase Varian (1990, 1993), para más detalles.

²⁰Este ejemplo depende del conocimiento en particular de las preferencias del consumidor.

problema de “subracionalización” de encontrar para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto maximal de observaciones de demanda consistentes con el *Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada*, y realizar una estimación econométrica del dinero “derrochado” por un consumidor en sus elecciones efectuadas, con objeto de determinar si éste ha presentado un comportamiento “casi optimizador”. Sin embargo, este autor no encuentra la solución a este problema. Gross y Kaiser (1996) realizan una primera aproximación (el axioma débil de la preferencia revelada no es una condición necesaria ni suficiente para que una serie finita de datos de demanda sea consistente con la teoría clásica de la demanda) a la resolución de este problema. Estos autores, inspirándose en el trabajo previo realizado por Houtman y Maks (1985), proporcionan dos algoritmos que permiten obtener un conjunto maximal (de tamaño máximo) o casi maximal de observaciones de demanda consistentes con el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada*, estableciendo para ello un isomorfismo entre un grafo no dirigido $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ y las observaciones de demanda inconsistentes con el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada*. El conjunto de vértices, \tilde{V} , del grafo \tilde{G} está formado por todos los lotes de consumo que violan WARP. La arista $(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \in \tilde{E}$ si y sólo si el par $(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$ violan WARP. El primer algoritmo de complejidad computacional $\mathcal{O}(n!)$ – n' es el número de componentes conexas de \tilde{G} – permite determinar el mínimo conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que V' contiene al menos un vértice para cada arista del grafo \tilde{G} . Dada la dificultad práctica para resolver de forma exacta este problema, Gross y Kaiser diseñan un procedimiento heurístico (este algoritmo aproximativo elimina, de manera secuencial, aquellos nodos de mayor grado) que permite obtener la partición deseada del conjunto de elecciones de consumo original. Así obtienen particiones maximales (o casi maximales) del conjunto de datos de demanda original en dos subconjuntos: un conjunto de elecciones de consumo consistentes con el *Axioma Débil de la Preferencia Revelada*, y su complementario. Famulari (1996), inspirándose en los trabajos de Swofford y Withney (1987), McMillan y Amoako-Tuffour (1988) y Mossin (1972), proporciona una nueva medida de eficiencia al comparar el número de violaciones del axioma generalizado de la preferencia revelada (GARP) con el número de cestas demandadas comparables por la relación de preferencia revelada asociada. Además, Famulari considera, para incrementar la potencia del test, sólo aquellas cestas demandadas cuyo gasto sea similar. Famulari (1995) –inspirándose en los trabajos de Mossin (1972), McMillan y Amoako-Tuffour (1988) y Swofford y Withney (1987)– proporciona un nuevo índice de eficiencia al comparar el número de violaciones del *Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada* con el número de lotes de bienes comparables por la relación de preferencia revelada indirecta asociada al conjunto de datos de demanda. Para incrementar la potencia de la prueba, consideró finalmente sólo aquellas observaciones de demanda cuyo gasto sea similar²¹. Finalmente, Gross (1996) propone un test, basado en la función de sobrecompensación de Samuelson, que también permite medir la significatividad estadística de una violación del *Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada* [v. Gross (1995, pág. 705)] realizar una estimación econométrica, a partir de la función de compensación de Samuelson, del dinero “de-

²¹Para la autora dos observaciones de consumo (\bar{p}_i, \bar{x}_i) y (\bar{p}_j, \bar{x}_j) tienen un gasto similar si y solamente si $2 \cdot (m_i - m_j) \leq k \cdot (m_i + m_j)$, donde k es un valor fijo cualquiera, $m_i = \bar{p}_i \bar{x}_i$ y $m_j = \bar{p}_j \bar{x}_j$.

rochado” por un consumidor en sus decisiones de consumo con el objeto de determinar si ha presentado un comportamiento “casi optimizador”²².

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1967) The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 67-77.
- [2] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An Extension of the Classical Method. *International Economic Review*, Vol. 14, págs. 460-472.
- [3] Chalfant, J. y J. Alston (1988) Accounting for Changes in Tastes. *Journal of Political Economy*, Vol. 21, págs. 391-410.
- [4] Diewert, E. (1973) Afriat and Revealed Preference Theory. *Review of Economic Studies*, Vol. 40, págs. 419-426.
- [5] Diewert, E. y C. Parkan (1985) Tests for the Consistency of Consumer Data. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 127-147.
- [6] Famulari, M. (1995) A Household-Based, Nonparametric Test of Demand Theory. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 77, págs. 372-382.
- [7] Gross, J. y D. Kaiser (1989) Determining the Number of Violators of the Weak Axiom. Working paper. Milwaukee: Univ. Wisconsin.
- [8] Gross, J. (1991) On Expenditure Indices in Revealed Preference Tests. *Journal of Political Economy*, Vol. 98, págs. 416-419.
- [9] Gross, J. (1995) Testing Data for Consistency with Revealed Preference. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 77, págs. 701-710.
- [10] Gross, J. y D. Kaiser (1996) Two Simple Algorithms for Generating a Subset of Data Consistent with WARP and Other Binary Relations. *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 14, págs. 251-255.
- [11] Houtman, M. y J. Maks (1985) Determining All Maximal Data Subsets Consistent with Revealed Preference. *Kwantitatieve Methoden*, Vol. 19, págs. 89-104.
- [12] McMillan, M. y J. Amoako-Tuffour (1988) An Examination of Preferences for Local Public Sector Options. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 70(1), págs. 45-54.

²²El carácter determinístico y exacto de los diferentes tests no paramétricos de la hipótesis de la maximización de la utilidad puede provocar que el comportamiento inconsistente (con la teoría clásica de la demanda) de las elecciones de consumo efectuadas por un individuo no sea de carácter estructural sino que sea la consecuencia de la presencia de errores de medida o de naturaleza estocástica en los datos observados.

-
- [13] Mossin, A. (1972) A Mean Demand Function and Individual Demand Functions Confronted with the Weak and Strong Axioms of Revealed Preference. *Econometrica*, Vol. 40, págs. 177-192.
- [14] Swofford, J. y G. Whitney (1987) Nonparametric Tests of Utility Maximization and Weak Separability for Consumption, Leisure and Money. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 69, págs. 458-64.
- [15] Tsur, Y. (1989) On Testing for Revealed Preference Conditions. *Economics Letters*, Vol. 31, págs. 359-362.
- [16] Varian, H. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50, págs. 945-972.
- [17] Varian, H. (1983) Nonparametric Test of Models of Consumer Behavior. *Review of Economic Studies*, Vol. 50, págs. 99-110.
- [18] Varian H. (1985) Non-Parametric Analysis of Optimizing Behavior with Measurement Error. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 445-458.
- [19] Varian, H. (1987) On Goodness-of-Fit of Revealed Preference Conditions. CREST Working Paper. Department of Economics. University of Michigan.
- [20] Varian, H. (1990) Goodness-of-Fit in Optimizing Models. *Journal of Econometrics*, Vol. 46, págs. 125-140.
- [21] Varian, H. (1993) Goodness-of-Fit for Revealed Preference Tests. Working Paper. University of Michigan.

2.2. Sobre los subconjuntos maximales consistentes con GARP

Un primer propósito de esta sección es caracterizar las observaciones de demanda que son inconsistentes con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada. Además, mostramos que el problema de encontrar un subconjunto maximal de cardinal máximo consistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada es equivalente al problema de encontrar un subconjunto minimal de cardinal mínimo inconsistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada y que este problema es NP-completo. Los problemas NP-completos²³ tienen la peculiaridad de que no se conoce en la actualidad ningún algoritmo eficiente que resuelva un problema NP-completo en un tiempo polinomial. Lo que se hace al final es resolver el problema de “subracionalización” consistente en encontrar para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto minimal (de cardinal mínimo) de observaciones inconsistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad y proporcionaremos, además, el modo de construir diferentes procedimientos aproximativos que permiten calcular un subconjunto maximal (no necesariamente de cardinal máximo) de observaciones de demanda consistentes con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada y, por tanto, que se pueden utilizar en cualquier estudio empírico no paramétrico que analice el comportamiento de un consumidor.

Una primera aproximación para analizar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo consiste en determinar el número de violaciones GARP que se presentan en los datos observados. Swofford y Whitney (1987) y McMillan y Amoako-Tuffour (1988) comparan el número de pares de cestas demandadas que violan GARP observadas con el número máximo posible como medida de eficiencia de las decisiones de consumo de un individuo. Es de sobra sabido que el algoritmo de Varian (1982, pág. 949) permite contar el número de pares de cestas de bienes de consumo inconsistentes con GARP de una manera bastante sencilla. Sin embargo, determinar el número de violaciones de la hipótesis de la maximización de la utilidad suele ser algo más complicado dado que las comparaciones de las cestas de bienes que violan los axiomas de la preferencia revelada no son independientes.

Supongamos, por ejemplo, que las observaciones i, j, k, l forman un ciclo irreducible de la relación de preferencia revelada directa; esto es, $\bar{p}_i \bar{x}_i > \bar{p}_i \bar{x}_j$, $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_j \bar{x}_k$, $\bar{p}_k \bar{x}_k > \bar{p}_k \bar{x}_l$ y $\bar{p}_l \bar{x}_l > \bar{p}_l \bar{x}_i$. Entonces, es claro que el par de observaciones i, l violan GARP. De manera similar, puede verse que las observaciones i, j violan GARP. Aunque existen cuatro pares de cestas demandadas que violan GARP, ¿en qué sentido existen cuatro violaciones de la hipótesis de la maximización de la utilidad? Además, si comparamos i con l , i con k y j con k observamos que estas observaciones no violan GARP y, sin embargo, forman parte del ciclo de la relación de preferencia revelada. Lo anterior sugiere formular las siguientes preguntas: ¿en qué sentido son estas observaciones consistentes con la maximización de la utilidad?, ¿el número de pares de violaciones GARP permite cuantificar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un consumidor? El siguiente ejemplo –propuesto por Gross (1995, pág. 705)– muestra que el número de pares de

²³Para un estudio más exhaustivo de los problemas NP completos véanse, entre otros, los trabajos de Garey y Johnson(1979) y Karp (1972).

violaciones GARP no es una buena medida de eficiencia del comportamiento de un consumidor dado que en ocasiones, como se puede apreciar en la Figura 2.2, el número de violaciones no permite cuantificar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo.

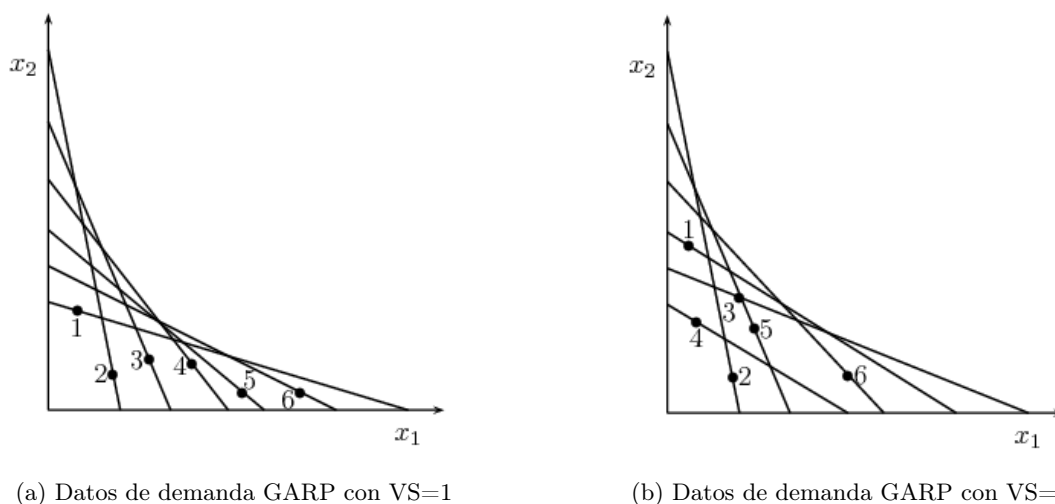


Figura 2.2: Número de violaciones GARP. Fuente: Gross (1996, pág. 705).

Los datos de demanda de las subfiguras (a) y (b) de la Figura 2.2 presentan un número similar de violaciones. En efecto, la subfigura (a) ilustra un conjunto de datos de demanda con cinco pares de cestas demandadas inconsistentes con GARP, mientras que los datos de demanda de la subfigura (b) presentan²⁴ seis pares de violaciones GARP. Sin embargo, las observaciones de demanda de la subfigura (a) presentan un comportamiento más próximo con la teoría neoclásica de la demanda que los datos de demanda que ilustra la subfigura (b). En efecto, si en la primera situación eliminásemos la observación 1, los datos restantes serían consistentes con GARP, mientras que en la segunda situación tendríamos que eliminar las observaciones 1,2,3 o 1,3,4. Nótese que en la subfigura (b) de la Figura 2.2 las observaciones de demanda 2, 3, 4, 5 y 6 son consistentes entre sí, mientras que sólo las observaciones 4, 5, 6 ó 2, 5, 6 son consistentes entre sí con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

Lo anterior sugiere encontrar diferentes medidas de eficiencia que permitan cuantificar, desde una perspectiva no paramétrica, el nivel de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo. Por tanto, para cuantificar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un consumidor cuyo comportamiento es inconsistente con la teoría neoclásica de la demanda será necesario, en primer lugar, determinar qué observaciones son inconsistentes con la hipótesis de

²⁴En la subfigura (a) de la Figura 2.2 los pares de cestas demandadas inconsistentes con la maximización de la utilidad son: $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}\}$, mientras que $\{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$ son los pares de violaciones GARP en la subfigura (b) de la Figura 2.2.

la maximización de la utilidad y, en segundo lugar, qué observaciones son las causantes de esta falta de coherencia. La siguiente definición nos permitirá abordar estas cuestiones.

Definición 2.2.1 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, X el conjunto de cestas demandadas asociado y $A = (a_{ij})$ la matriz real definida por $a_{ij} = \bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i)$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Diremos que un subconjunto $C \subseteq X$ es un ciclo de la relación de preferencia revelada si existen $\bar{x}_r, \bar{x}_s, \dots, \bar{x}_q$ tales que $a_{rs} \leq 0, \dots, a_{qr} \leq 0$. Además, diremos que un ciclo C es incoherente (con GARP) si para alguna observación i del ciclo se verifica $a_{ij} < 0$. Denotaremos por Σ_X a la familia formada por todos los ciclos incoherentes con GARP.

El siguiente resultado establece que una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma GARP si, y solamente si, no existen ciclos “incoherentes” con GARP en su relación de preferencia revelada.

Proposición 2.2.1 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, X el conjunto de cestas demandadas asociado y Σ_X la familia formada por todos los ciclos incoherentes con GARP. Entonces $\Sigma_X = \emptyset$ si, y solamente si, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma GARP.

Demostración: Supongamos que la serie finita de datos de demanda no satisface el axioma GARP. Entonces existen cestas demandadas \bar{x}_t y \bar{x}_s tales que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{x}_t P^0 \bar{x}_s$, lo que implica que existe un ciclo C incoherente con GARP en X tal que $\bar{x}_t, \bar{x}_s \in C$ y, por tanto, $\Sigma_X \neq \emptyset$. Recíprocamente, supongamos que existe un ciclo C incoherente con GARP en X . Entonces, $\forall \bar{x}_t, \bar{x}_s \in C$ se tiene que $(\bar{x}_s P \bar{x}_t \wedge \bar{x}_t R^0 \bar{x}_s) \vee (\bar{x}_s R \bar{x}_t \wedge \bar{x}_t P^0 \bar{x}_s)$, lo que implica que existen $\bar{x}_p, \bar{x}_q \in C$ tales que $\bar{x}_p R \bar{x}_q$ y $\bar{x}_q P^0 \bar{x}_p$ y, por tanto, la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface el axioma GARP, lo que completa la demostración. ■

Una aproximación alternativa para determinar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un consumidor es, como señalan Gross (1991, 1995) y Gross y Kaiser (1996), encontrar un subconjunto maximal de observaciones consistentes con la teoría neoclásica de la demanda. Pero para ello, como el mismo autor señala es necesario determinar qué observaciones son inconsistentes con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada²⁵. La siguiente definición caracteriza las observaciones de demanda que muestran un comportamiento inconsistente con la teoría neoclásica de la demanda y permite, por lo tanto, determinar las observaciones de demanda que son inconsistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

²⁵Gross (1991, pág. 418) expone, textualmente, lo siguiente: “[...] Clearly his discussion begs the question. Which observations are violations and which are consistent in the example? Either has claim to being the consistent observation. In larger data sets, one simple approach to remove the minimum number of observations necessary to leave inconsistent data and consider those removed as the violators [...]”.

Definición 2.2.2 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, y sean \bar{x}_t y \bar{x}_s cestas demandadas a precios (normalizados) \bar{p}_t, \bar{p}_s respectivamente. Se dice que

i) la cesta \bar{x}_t es inconsistente con GARP si $\bar{x}_t \in RW(\bar{x}_t)$; i.e., si existe una cesta \bar{x}_s tal que $[\bar{x}_s P \bar{x}_t \wedge \bar{x}_t R^0 \bar{x}_s] \vee [\bar{x}_s R \bar{x}_t \wedge \bar{x}_t P^0 \bar{x}_s]$.

ii) la cesta \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con GARP si existe una cesta \bar{x}_s tal que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{x}_t P^0 \bar{x}_s$.

En una primera aproximación al problema de encontrar, para cada serie finita de datos de demanda, un subconjunto maximal de observaciones consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad, Gross y Kaiser (1996) proporcionan dos algoritmos que permiten obtener para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto consistente con el axioma débil de la preferencia revelada y su complementario. Sin embargo, su apreciación no es del todo correcta porque, como hemos mostrado en el primer capítulo, WARP no implica GARP ni viceversa. En la siguiente definición caracterizamos a los subconjuntos inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP.

Definición 2.2.3 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, X el conjunto de cestas demandadas asociado y \tilde{X} un subconjunto de partes de X . Diremos que el conjunto $\tilde{X} \subseteq X$ es:

a) inconsistente con el axioma generalizado de la preferencia revelada si para cada $C \in \Sigma_X$ se verifica $\tilde{X} \cap C \neq \emptyset$.

b) fuertemente inconsistente con el axioma generalizado de la preferencia revelada si para cada $C \in \Sigma_X$ se verifica $\tilde{X} \cap C \neq \emptyset$ y, además, $\tilde{X} \subseteq VS$.

Denotamos por Φ y Ψ a las familias formadas por todos los subconjuntos inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP respectivamente; esto es, $\Phi = \{(X_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{P}(X) : X_j \cap C \neq \emptyset, \forall C \in \Sigma_X\}$ y $\Psi = \{(X_i)_{i \in I} \subseteq \Phi : X_i \subseteq VS, \forall i \in I\}$.

Existen dos subconjuntos formados por todas las observaciones inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP que merecen ser estudiados. En lo sucesivo, designaremos por \mathcal{VS} (resp., VS) al conjunto formado por todas las observaciones inconsistentes (resp. fuertemente inconsistentes) con GARP. Los subconjuntos \mathcal{VS} (resp., VS) proporcionan una aproximación a la bondad del ajuste de los datos²⁶. A continuación proponemos el siguiente algoritmo de complejidad computacional $\mathcal{O}(n^3)$ que permite determinar \mathcal{VS} para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, inconsistente con GARP.

²⁶Gross y Kaiser (1996, pág. 251) manifiestan literalmente que: “[...] In a general sense, a CS is valuable for further analysis in which exactly consistent with GARP. The relative sizes of the CS and the VS may be compared as an indicator of the overall lack of consistency in the original data. The observations in two sets may be compared to determine the seriousness of difference in underlying preferences [...]”

Algorithm 4. Pseudo-code for computing observations inconsistent with GARP**Input:** Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. Construct boolean matrices R^0 and P^0
3. for $i, j := 1$ to n do $R[i, j] \leftarrow R^0[i, j]$; if $(P^0[i, j] = \text{true})$ then $C[i, j] \leftarrow -1$
4. for $k, i := 1$ to n do
5. if $(i \neq k \text{ and } R[i, k] = \text{true})$ then
6. for $j := 1$ to n do
7. $R[i, j] \leftarrow R[i, j] \vee R[k, j]$
8. if $(R[i, j] = \text{true})$ then $C[i, j] \leftarrow \min[C[i, j], C[i, k] + C[k, j]]$
9. for $i, j := 1$ to n do
10. if $(R[i, j] = \text{true} \text{ and } R^0[j, i] = \text{true})$ then
11. if $(C[i, j] < 0 \text{ or } P^0[j, i] = \text{true})$ then $A[j] \leftarrow \text{true}$
12. return

Output: Set of observations inconsistent with GARP.

Varian (1982, pág. 949) proporciona un procedimiento que permite contrastar en un tiempo de ejecución proporcional a $\mathcal{O}(n^3)$, donde n es el tamaño de los datos, si una serie finita de datos de demanda ha sido generada por un comportamiento optimizador de un individuo. Una ligera modificación en este algoritmo permite calcular, en el mismo tiempo de ejecución, el conjunto VS formado por todas las observaciones fuertemente inconsistentes con GARP.

Algorithm 5. Pseudo-code for observations strongly inconsistent with GARP**Input:** Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. Construct boolean matrices R^0 and P^0
3. for $i, j := 1$ to n do $R[i, j] \leftarrow R^0[i, j]$
4. for $k, i := 1$ to n do
5. if $i \neq k \text{ and } R[i, k] = \text{true}$ then
6. for $j := 1$ to n do
7. $R[i, j] \leftarrow R[i, j] \vee R[k, j]$
8. for $i, j := 1$ to n do
9. if $R[j, i] = \text{true} \text{ and } P^0[i, j] = \text{true}$ then $VS[j] \leftarrow \text{true}$
10. return

Output: Set of observations strongly inconsistent with GARP.

La siguiente proposición muestra la equivalencia entre el problema de subracionalización propuesto y el problema de encontrar un subconjunto minimal inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Además, muestra que para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, inconsistente con GARP esta clase de conjuntos permiten realizar una partición del conjunto de cestas demandadas $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ en dos subconjuntos, el subconjunto \tilde{X} inconsistente (resp., fuertemente inconsistente) con GARP y su complementario $(X - \tilde{X})$ formado por un subconjunto de observaciones que verifican (entre ellas) GARP. Así pues, esta clase de conjuntos permiten caracterizar y responder a la pregunta planteada²⁷ por Gross (1995).

Proposición 2.2.2 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, X el conjunto de cestas demandadas asociado y \tilde{X} un subconjunto de partes de X . Entonces $\tilde{X} \in \Phi$ (resp., $\tilde{X} \in \Psi$) si, y solamente si, $(X - \tilde{X})$ satisface el axioma GARP.*

Demostración: En efecto, supongamos que $\tilde{X} \notin \Phi$ (resp., $\tilde{X} \notin \Psi$), entonces existe un ciclo C incoherente con GARP en X tal que $C \subseteq X - \tilde{X}$ y, por tanto, $(X - \tilde{X})$ no satisface el axioma GARP. Recíprocamente, si $(X - \tilde{X})$ no satisface el axioma GARP existe un ciclo C incoherente con GARP en X tal que $C \subseteq X - \tilde{X}$ y, por tanto, $\tilde{X} \cap C = \emptyset$, lo que implica que $\tilde{X} \notin \Phi$ (resp., $\tilde{X} \notin \Psi$). ■

De la proposición anterior y de la Definición 2.2.2 se desprende inmediatamente la siguiente afirmación.

Afirmación 2.2.1 *Supongamos que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda. Entonces, para todo ciclo C incoherente con GARP se verifica que $VS \cap C \neq \emptyset$ y $VS \cap C \neq \emptyset$.*

La Proposición 2.2.2 caracteriza a esta clase de subconjuntos que ofrecen una medida natural de la bondad del ajuste del modelo de optimización del consumidor²⁸. De la proposición anterior se desprende que para encontrar un subconjunto maximal de observaciones de demanda consistentes con GARP bastará con encontrar un subconjunto minimal inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP.

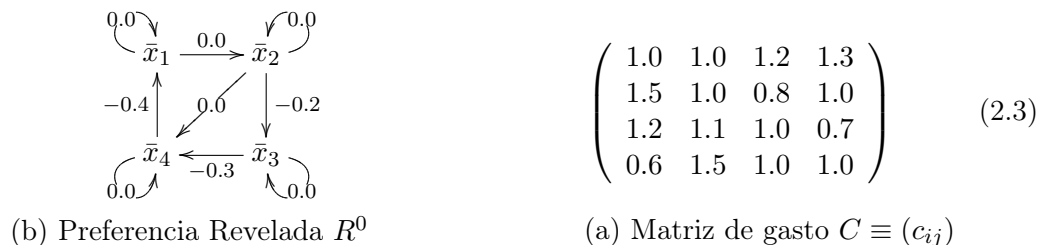
²⁷Gross (1995, pág. 704) expresa textualmente: “[...] We know of no algorithm which quickly partitions data (violators subsets and consistent subsets) in the GARP case; however, since WARP violations are also GARP violations the Gross and Kaiser (1996) approach should be the first step of any such algorithm [...]”.

²⁸Gross y Kaiser (1996, pág. 251) afirman que “[...] In larger data sets, one simple approach to remove the minimum number of observations necessary to leave inconsistent data and consider those removed as the violators [...]”. Por otra parte, Gross (1991, pág. 418) expone de manera textual: “[...] The relative sizes of the CS (complement of VS) and the VS may be compared as an indicator of the overall lack of consistency in the original data. The observations in two sets may be compared to determine the seriousness of difference in underlying preferences [...]”.

Definición 2.2.4 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda. Un conjunto $X^\alpha \in \Phi$ (resp., $X^\alpha \in \Psi$) inconsistente (resp., fuertemente inconsistente) con GARP se dice que es minimal si no existe ningún $X' \in \Psi$ (resp., $X^\alpha \in \Phi$), $X' \neq X^\alpha$, con $X' \subseteq X^\alpha$. Denotamos por \mathfrak{S} y por \mathfrak{R} a las familias de todos los subconjuntos minimales fuertemente inconsistentes e inconsistentes con GARP respectivamente; esto es, $\mathfrak{S} = \{(X_j^\alpha)_{j \in \Omega} \subseteq \Psi : \nexists X' \in \Psi \text{ con } X' \subsetneq X_j^\alpha\}$ y $\mathfrak{R} = \{(X_j^\alpha)_{j \in \Omega} \subseteq \Phi : \nexists X' \in \Phi \text{ con } X' \subsetneq X_j^\alpha\}$.

En el Ejemplo 2.2.1 mostramos que los subconjuntos \mathcal{VS} (resp., VS) formados por todas las observaciones de demanda inconsistentes (resp., fuertemente inconsistentes) con GARP no son, en general, minimales, por lo que se hace necesario abordar el problema de encontrar para cada serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP un subconjunto maximal consistente con GARP dado que es un problema que estaba abierto en la literatura económica²⁹. Es importante señalar que el problema de encontrar, para cada serie finita de datos de demanda, un subconjunto maximal de observaciones consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad es importante por diversas razones. En primer lugar, porque permiten definir una medida global de la bondad del ajuste del modelo de optimización. En segundo lugar porque en la investigación econométrica es deseable restringir la estimación econométrica a un subconjunto de tamaño maximal consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad³⁰.

Ejemplo 2.2.1 Supongamos que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de demanda de tamaño cuatro normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) cuya matriz de gasto asociada $C = (c_{ij})$ definida por $c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j \forall i, j \in \mathbb{N}$ viene dada por:



La Figura 2.3 ilustra el grafo dirigido asociado a los subconjuntos complementarios de $VS = \{\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$; $\mathcal{VS} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$; $\tilde{X}_1 = \{\bar{x}_2\}$ y $\tilde{X}_2 = \{\bar{x}_1\}$. Nótese que si designamos por X al conjunto de cestas demandadas –i.e., $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ – se cumple que los subconjuntos $(X - VS)$, $(X - \mathcal{VS})$, $(X - \tilde{X}_1)$ y $(X - \tilde{X}_2)$ son consistentes con GARP por lo que, en virtud de la Proposición 2.2.2 los subconjuntos VS, \mathcal{VS} , \tilde{X}_1 y \tilde{X}_2 son inconsistentes o fuertemente inconsistentes con GARP. Por otra parte, las cestas demandadas \bar{x}_2 , \bar{x}_3 y \bar{x}_4 son fuertemente

²⁹Véase Gross (1995, pág. 704), para más detalles.

³⁰Véase Gross (1991, págs. 418-419) y Gross (1995, pág. 252), para más detalles.

inconsistentes con GARP y \bar{x}_1 es inconsistente, pero no fuertemente inconsistente con GARP. Entonces es claro que \mathcal{VS} y VS no minimales, dado que $\tilde{X}_1 \in \Phi$ y $\tilde{X}_2 \in \Psi$ y, además, $\tilde{X}_1 \subsetneq \mathcal{VS}$ y $\tilde{X}_2 \subsetneq VS$. Nótese que este ejemplo permite inferir que \mathcal{VS} y VS son, en general, distintos.

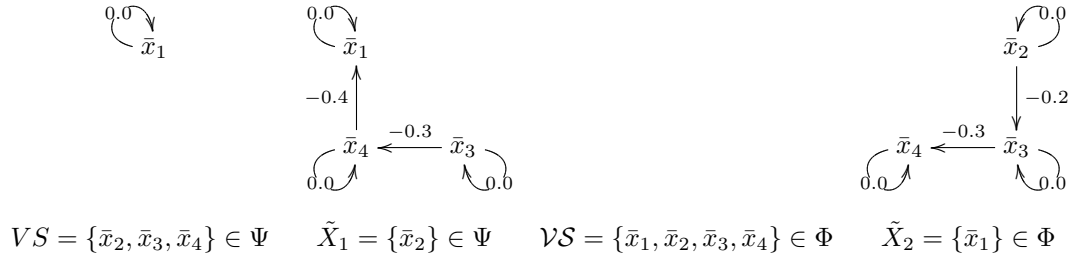


Figura 2.3: Conjuntos inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP.

El siguiente teorema garantiza la existencia de conjuntos minimales inconsistentes y fuertemente inconsistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada para toda serie finita de datos de demanda que sea inconsistentes con la teoría neoclásica de la demanda.

Teorema 2.2.1 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, X el conjunto de cestas demandadas asociado y sean \mathfrak{R} y \mathfrak{S} las familias formadas por todos los subconjuntos minimales inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP respectivamente. Entonces si los datos de demanda no proceden de un comportamiento optimizador de un consumidor se verifica que $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ y $\mathfrak{R} \neq \emptyset$.*

Demostración: En efecto, si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, podemos definir una relación binaria \succsim_{Ψ} sobre la familia Ψ formada por los subconjuntos fuertemente inconsistentes con GARP por:

$$\forall X_i, X_j \in \Psi \quad X_i \succsim_{\Psi} X_j \iff X_i \subseteq X_j$$

De manera análoga definimos una relación binaria \succsim_{Φ} sobre Φ . Es inmediato comprobar que las relaciones binarias \succsim_{Φ} y \succsim_{Ψ} son reflexivas, transitivas y antisimétricas y, por tanto, definen un orden parcial sobre las familias de subconjuntos Φ y Ψ inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP respectivamente. Además, tanto Ψ como Φ son conjuntos no vacíos ya que $X \in \Phi$ y $VS \in \Psi$. Sea $\mathcal{S} = \{X_i\}_{i \in I}$ una cadena cualquiera en Ψ (resp., Φ) tal que $X_i \subseteq X_j$ ó $X_i \supseteq X_j$ para cualesquiera $i, j \in I$. Entonces, es claro que $\sup(\mathcal{S}) = \bigcap_{i \in I} X_i$ es un extremo superior de la cadena, y, además³¹ se tiene que $\sup(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Veamos que $\sup(\mathcal{S})$ es un maximal

³¹Obsérvese que para todo subconjunto \tilde{X} inconsistente (resp., fuertemente inconsistente) con GARP se verifica que $VS - \Upsilon_{VS} \subseteq \tilde{X}$ (resp., $\mathcal{VS} - \Upsilon_{\mathcal{VS}} \subseteq \tilde{X}$). Además, se tiene que $VS \neq \Upsilon_{VS}$ (resp., $\mathcal{VS} \neq \Upsilon_{\mathcal{VS}}$); dado que en caso contrario $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ verificaría GARP, en contra de lo supuesto.

para \mathcal{S} ; es decir, $\text{sup}(\mathcal{S}) \in \Psi$ (resp., $\text{sup}(\mathcal{S}) \in \Phi$). Para ello, razonamos por reducción al absurdo suponiendo que existe un ciclo \mathcal{C}_k incoherente con GARP tal que $(\bigcap_{i \in I} X_i) \cap \mathcal{C}_k = \emptyset$. Entonces, $\bigcap_{i \in I} (X_i \cap \mathcal{C}_k) = \emptyset$, lo que implica que existe un $X_i \in \Psi$ (resp., $X_i \in \Phi$) tal que $X_i \cap \mathcal{C}_k = \emptyset$, lo cual es un absurdo. Por tanto, Ψ y Φ son conjuntos inductivos y, en virtud del lema de Zorn, se tiene que $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ (resp., $\mathfrak{R} \neq \emptyset$), como queríamos probar. ■

El siguiente concepto permitirá caracterizar a los conjuntos minimales inconsistentes o fuertemente inconsistentes con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada.

Definición 2.2.5 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, X el conjunto de cestas demandadas asociado y $X' \in \Phi$ (resp., $X' \in \Psi$) un conjunto inconsistente (resp., fuertemente inconsistente) con GARP. Para todo $\bar{x}_i \in X'$ diremos que \bar{x}_i es redundante en X' si $(X - X') \cup \{\bar{x}_i\}$ satisface el axioma GARP. En caso contrario, diremos que \bar{x}_i es no redundante. Denotaremos por $\Upsilon_{X'}$ al conjunto de cestas demandadas redundantes en X' .

La proposición que sigue contiene una condición necesaria y suficiente para que un conjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP sea minimal.

Proposición 2.2.3 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, X el conjunto de cestas demandadas asociado y \tilde{X} un conjunto inconsistente con GARP. Entonces \tilde{X} es minimal si, y solamente si, $\Upsilon_{\tilde{X}} = \emptyset$.

Demostración: Sea \tilde{X} un subconjunto inconsistente con GARP. Veamos que $\Upsilon_{\tilde{X}} = \emptyset$ es una condición necesaria para que $\tilde{X} \in \Phi$ sea minimal. Si $\Upsilon_{\tilde{X}} \neq \emptyset$, existe un $\bar{x}_j \in \tilde{X}$ redundante en \tilde{X} , es decir, es decir, existe un $\bar{x}_j \in \tilde{X}$ tal que $(X - \tilde{X}) \cup \{\bar{x}_j\}$ es consistente con GARP. Entonces, para todo ciclo C incoherente con GARP en X se verifica que $C \not\subseteq (X - \tilde{X}) \cup \{\bar{x}_j\}$, lo que implica que $(\tilde{X} - \{\bar{x}_j\}) \cap C \neq \emptyset$ para todo ciclo C incoherente con GARP y, en consecuencia, $(\tilde{X} - \{\bar{x}_j\}) \in \Phi$, de donde se deduce que \tilde{X} no es minimal. Recíprocamente, supongamos que $\tilde{X} \in \Phi$ no es minimal. Entonces, existe un $X' \subsetneq \tilde{X}$ tal que $X' \in \Phi$, luego $(X - X')$ satisface el axioma GARP y, además, $(X - \tilde{X}) \subsetneq (X - X')$, de donde se deduce que $\forall \bar{x}_j \in \tilde{X} - X'$ se tiene que $\bar{x}_j \in \Upsilon_{\tilde{X}}$ y, por tanto, $\Upsilon_{\tilde{X}} \neq \emptyset$, lo que completa la prueba. ■

Del resultado anterior se deduce el siguiente corolario que no requiere demostración.

Corolario 2.2.1 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, X el conjunto de cestas demandadas asociado y \tilde{X} un conjunto fuertemente inconsistente con GARP. Entonces \tilde{X} es minimal si, y solamente si, $\Upsilon_{\tilde{X}} = \emptyset$.

En la siguiente proposición proporcionamos una nueva condición necesaria y suficiente para garantizar la minimalidad de cualquier conjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada.

Proposición 2.2.4 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, X el conjunto de cestas demandadas asociado y \tilde{X} un conjunto inconsistente con GARP. Entonces \tilde{X} es minimal si y sólo si para cada $\bar{x}_i \in \tilde{X}$ existe un ciclo tal que $\bar{x}_i \in C_i$ y, además, $(\tilde{X} - \{\bar{x}_i\}) \cap C_i = \emptyset$.*

Demostración: Supongamos que $\tilde{X} \in \Phi$ es minimal. Entonces, $\forall X^* \subsetneq \tilde{X}$ se tiene $X^* \notin \Phi$. Por tanto, para cada $X^* \subsetneq \tilde{X}$ existe un $C \in \Sigma_X$ tal que $C \cap X^* = \emptyset$. En particular, para todo $\bar{x}_i \in \tilde{X}$ existe un ciclo C_i incoherente con GARP en X tal que $C_i \cap (\tilde{X} - \{\bar{x}_i\}) = \emptyset$. Además, $\bar{x}_i \in C_i$, ya en caso contrario se tendría que $\tilde{X} \notin \Phi$, en contra de lo supuesto. Recíprocamente, sea $\tilde{X} \in \Phi$ un subconjunto inconsistente con GARP tal que $\forall \bar{x}_i \in \tilde{X}$ existe un ciclo C_i incoherente con GARP tal que $\bar{x}_i \in C_i$ y, además, $(\tilde{X} - \{\bar{x}_i\}) \cap C_i = \emptyset$. Entonces para todo $X^* \subsetneq \tilde{X}$ existe un $\bar{x}_i \in \tilde{X}$ tal que $X^* \subseteq (\tilde{X} - \{\bar{x}_i\})$, luego si C_i es un ciclo incoherente con GARP tal que $\bar{x}_i \in C_i$ y $(\tilde{X} - \{\bar{x}_i\}) \cap C_i = \emptyset$, entonces $X^* \cap C_i = \emptyset$. Por tanto, para todo subconjunto X^* de partes de X tal que $X^* \subsetneq \tilde{X}$ se tiene que $X^* \notin \Phi$, de donde se deduce que \tilde{X} es minimal, lo que completa la demostración. ■

Del resultado anterior se deduce de manera inmediata el siguiente corolario que no precisa demostración.

Corolario 2.2.2 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, X el conjunto de cestas demandadas asociado y \tilde{X} un conjunto fuertemente inconsistente con GARP. Entonces \tilde{X} es minimal si y sólo si para cada $\bar{x}_i \in \tilde{X}$ existe un ciclo $C_i \in \Sigma_X$ tal que $\bar{x}_i \in C_i$ y, además, $(\tilde{X} - \{\bar{x}_i\}) \cap C_i = \emptyset$.*

El siguiente teorema describe a los conjuntos minimales inconsistentes con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada.

Teorema 2.2.2 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, X el conjunto de cestas demandadas asociado, y sea \mathfrak{R} la familia formada por los subconjuntos minimales inconsistentes con GARP. Entonces para todo $\tilde{X} \in \mathfrak{R}$ se verifica $\tilde{X} \subseteq \mathcal{VS}$. Además, si $\mathcal{VS} \notin \mathfrak{R}$ se tiene que $\tilde{X} \subsetneq \mathcal{VS}$ para todo $\tilde{X} \in \mathfrak{R}$.*

Demostración: Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existe un $\tilde{X} \in \mathfrak{R}$ tal que $\tilde{X} \not\subseteq \mathcal{VS}$. Entonces, como $\tilde{X} \in \Phi$ se tiene que $\mathcal{VS} \cap \tilde{X} \neq \emptyset$ y, por tanto, se verifica que $\tilde{X} \cap \mathcal{VS} \neq \emptyset$ y $\tilde{X} \cap (X - \mathcal{VS}) \neq \emptyset$ o bien $\mathcal{VS} \subsetneq \tilde{X}$. En cualquier caso, $\tilde{X} - \mathcal{VS} \subsetneq X - \mathcal{VS}$. Por otra parte, como $X - \mathcal{VS}$ satisface el axioma GARP se tiene que $\tilde{X} - \mathcal{VS}$ satisface el axioma GARP y, además, $\tilde{X} - \mathcal{VS} \neq \emptyset$, lo que implica que $\Upsilon_{\tilde{X}} \neq \emptyset$. Por tanto, para todo $\tilde{X} \in \mathfrak{R}$ se verifica $\tilde{X} \subseteq \mathcal{VS}$. ■

Nótese que si \tilde{X} es un conjunto minimal fuertemente inconsistente con GARP se cumple $\tilde{X} \subseteq \mathcal{VS}$, de donde se deduce inmediatamente que $\tilde{X} \subseteq \mathcal{VS}$ para todo $\tilde{X} \in \Psi$ minimal.

El problema de encontrar para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto maximal (con cardinal máximo) consistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada y la Proposición 2.2.2 nos sugieren definir el siguiente concepto.

Definición 2.2.6 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, X el conjunto de cestas demandadas asociado y $\xi : \mathcal{P}(X) \rightarrow Q_+$ una función no negativa tal que $\xi(X') = \sum_{\bar{x}_j \in X'} z(\bar{x}_j)$ para todo $X' \subseteq X$, donde $z : X \rightarrow Q_+$ es una función no negativa tal que $z(\bar{x}_j) = \frac{1}{n}$ para cada cesta demandada $\bar{x}_j \in X$. Diremos que un subconjunto $X^* \in \Psi$ (resp., $X^* \in \Phi$) es óptimo si $\xi(X^*) \leq \xi(X')$ para todo subconjunto $X' \in \Psi$ (resp., $X' \in \Phi$). Denotaremos por \mathcal{R} y por \mathcal{F} a las familias formadas por los subconjuntos óptimos inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP, respectivamente.

El siguiente teorema garantiza, para cada serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, la existencia de un conjunto óptimo (no necesariamente único) inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP.

Teorema 2.2.3 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, y sean \mathcal{R} y \mathcal{F} las familias formadas por todos los subconjuntos óptimos inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP respectivamente. Entonces si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es inconsistente con GARP se verifica que $\mathcal{R}, \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Demostración: En efecto, si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, y X el conjunto de cestas demandadas asociado. Entonces, podemos definir una relación binaria sobre la familia de partes de X por:

$$\forall X_i, X_j \in \mathcal{P}(X) \quad X_i \succsim X_j \iff \exists f_j : X_j \rightarrow X_i \text{ sobreyectiva}$$

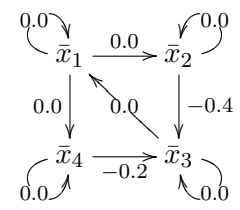
Es inmediato comprobar que la relación binaria \succsim es reflexiva y transitiva, por tanto, $\mathcal{P}(X)$ es un conjunto preordenado. Además, para todo par de subconjuntos $X_i, X_j \in \mathcal{P}(X)$, $X_i \succsim X_j$ si, y solamente si, $\xi(X_i) \leq \xi(X_j)$. Sea \approx una relación binaria en $\mathcal{P}(X)$ definida por $X_i \approx X_j \iff (X_i \succsim X_j) \wedge (X_j \succsim X_i)$. Es inmediato comprobar que \approx es una relación de equivalencia. Además, en virtud el teorema de Schröder-Bernstein³², $\forall X_i, X_j \in \mathcal{P}(X)$ se verifica $X_i \approx X_j \iff \xi(X_i) = \xi(X_j)$. Sean $\succsim_{\mathfrak{S}}$ y $\succsim_{\mathfrak{R}}$ las relaciones binarias inducidas por \succsim en \mathfrak{S} y en \mathfrak{R} respectivamente. Entonces, es claro que $\succsim_{\mathfrak{S}}$ y $\succsim_{\mathfrak{R}}$ son reflexivas y transitivas. Además, las relaciones binarias $\approx_{\mathfrak{R}}$ y $\approx_{\mathfrak{S}}$ inducidas por \approx en \mathfrak{R} y \mathfrak{S} respectivamente, son relaciones de equivalencia. Los elementos de de $\mathfrak{S}/\approx_{\mathfrak{S}}$, denotados por $[X_i]_{\mathfrak{S}}$, son las clases de equivalencia por la relación $\approx_{\mathfrak{S}}$; es decir, para todo $X_j \in \mathfrak{S}$, $[X_j]_{\mathfrak{S}}$ es la familia formada por los subconjuntos $\tilde{X} \in \mathfrak{S}$ tales que $\xi(\tilde{X}) = \xi(X_j)$. De manera análoga denotamos por $[X_i]_{\mathfrak{R}}$ a las clases de equivalencia por la relación $\approx_{\mathfrak{R}}$. Las relaciones binarias $\succ_{\mathfrak{S}}$ y $\succ_{\mathfrak{R}}$ inducidas por $\succsim_{\mathfrak{S}}$ y por $\succsim_{\mathfrak{R}}$ en $\mathfrak{S}/\approx_{\mathfrak{S}}$ y $\mathfrak{R}/\approx_{\mathfrak{R}}$ respectivamente son reflexivas, transitivas y antisimétricas y, por tanto, definen un orden parcial

³²Este teorema se denomina también Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein. Véase Dugundji (1989, corolario 7.7, pág. 47) y Kaplansky (2001, Th. 7, pág. 33), entre otros.

sobre $\mathfrak{S}/\approx_{\mathfrak{S}}$ y $\mathfrak{R}/\approx_{\mathfrak{R}}$ respectivamente. Además, afirmo que tanto $\succ_{\mathfrak{S}}$ como $\succ_{\mathfrak{R}}$ definen un orden lineal sobre \mathfrak{S}/\approx y $\mathfrak{R}/\approx_{\mathfrak{R}}$ respectivamente. Entonces, en virtud de la equivalencia lógica entre el Axioma de Zermelo y el Lema de Zorn, se tiene garantizada la existencia de minimales $[\tilde{X}_{j_0}]_{\mathfrak{S}}$ y $[\tilde{X}_{j_1}]_{\mathfrak{R}}$, como queríamos demostrar. Por tanto, para completar la demostración, sólo falta probar que $\succ_{\mathfrak{S}}$ y $\succ_{\mathfrak{R}}$ definen ordenes lineales sobre \mathfrak{S}/\approx y $\mathfrak{R}/\approx_{\mathfrak{R}}$ respectivamente. En efecto, $\forall X_i, X_j \in \mathcal{P}(X)$ existe una aplicación f de X_i en X_j que es o bien inyectiva, o sobreyectiva o una biyección. En particular, para cada par de elementos $[X_i]_{\mathfrak{S}}, [X_j]_{\mathfrak{S}}$ en $\mathfrak{S}/\approx_{\mathfrak{S}}$ existen $X'_i \in [X_i]_{\mathfrak{S}}$ y $X'_j \in [X_j]_{\mathfrak{S}}$ y una aplicación $f' : X'_i \rightarrow X'_j$ que es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. En consecuencia, si para cada $[X_i]_{\mathfrak{S}}$ en $\mathfrak{S}/\approx_{\mathfrak{S}}$ denotamos por $\xi_{\mathfrak{S}}([X_i]) = \xi([X_i]_{\mathfrak{S}})$, $\forall [X_i]_{\mathfrak{S}}, [X_j]_{\mathfrak{S}}$ se verifica que $\xi_{\mathfrak{S}}([X_i]) \geq \xi_{\mathfrak{S}}([X_j])$ o $\xi_{\mathfrak{S}}([X_j]) \geq \xi_{\mathfrak{S}}([X_i])$, de donde se deduce que $\succ_{\mathfrak{S}}$ es un orden lineal. De manera análoga se prueba que $\succ_{\mathfrak{R}}$ es un orden lineal en $\mathfrak{R}/\approx_{\mathfrak{R}}$, lo que completa la demostración. ■

Nótese que si $[\tilde{X}_{j_0}]_{\mathfrak{S}}$ es minimal en $\mathfrak{S}/\approx_{\mathfrak{S}}$ entonces $\mathcal{F} = \{X_j \in \Psi : \xi_{\mathfrak{S}}(X_j) = \xi_{\mathfrak{S}}([\tilde{X}_{j_0}])\}$. Análogamente, si $[\tilde{X}_{j_1}]_{\mathfrak{R}}$ es minimal en $\mathfrak{R}/\approx_{\mathfrak{R}}$ se tiene que $\mathcal{R} = \{X_j \in \Phi : \xi_{\mathfrak{R}}(X_j) = \xi_{\mathfrak{R}}([\tilde{X}_{j_1}])\}$. De lo anterior se deduce que para toda serie finita de datos de demanda podemos definir³³ dos medidas de eficiencia $\xi_{\mathcal{R}} = \xi(X_i)$ para algún $X_i \in \mathcal{R}$ y $\xi_{\mathcal{F}} = \xi(X_j)$ para algún $X_j \in \mathcal{F}$ que permiten cuantificar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo. Estas medidas de eficiencia son, por tanto, un invariante de la serie finita de datos de demanda y, nótese, además, que para todo conjunto de datos de demanda se verifica $0 \leq \xi_{\mathcal{R}}, \xi_{\mathcal{F}} < 1$. Así pues, un consumidor individual será más racional cuanto más próximo a cero sean tanto $\xi_{\mathcal{R}}$ como $\xi_{\mathcal{F}}$. Así mismo, obsérvese que para todo $\tilde{X} \in \mathcal{F}$ se verifica que $\tilde{X} \in \mathfrak{R}$, de donde se deduce que $\xi_{\mathcal{F}} \geq \xi_{\mathcal{R}}$ para toda serie finita de datos de demanda. Sin embargo, como muestra el siguiente ejemplo, no tiene por qué ser óptimo.

Ejemplo 2.2.2 Supongamos que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de demanda de tamaño cuatro normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) cuya matriz de gasto asociada $C = (c_{ij})$ definida por $c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j \forall i, j \in \mathbb{N}$ viene dada por (2.4).



(b) Preferencia Revelada R^0

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 2.0 & 1.0 \\ 2.0 & 1.0 & 0.6 & 1.5 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.5 \\ 1.3 & 1.5 & 0.8 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

(a) Matriz de gasto $C \equiv (c_{ij})$

³³El Teorema 2.2.3 garantiza que estas medidas de eficiencia están bien definidas.

La Figura 2.4 ilustra el grafo dirigido asociado a los subconjuntos complementarios de $\tilde{X}_1 = \{\bar{x}_2, \bar{x}_4\}$; $\tilde{X}_2 = \{\bar{x}_1\}$ y $\tilde{X}_3 = \{\bar{x}_3\}$. Nótese que si designamos por X al conjunto de cestas demandadas –i.e., $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ – se cumple que los subconjuntos $(X - \tilde{X}_1)$, $(X - \tilde{X}_2)$ y $(X - \tilde{X}_3)$ son consistentes con GARP por lo que, en virtud de la Proposición 2.2.2 los subconjuntos \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 y \tilde{X}_3 son inconsistentes o fuertemente inconsistentes con GARP. De la Figura 2.4 se desprende la no unicidad de los conjuntos minimales, la no unicidad de los conjuntos óptimos inconsistentes con GARP, que no todo conjunto minimal es óptimo y que no todo conjunto óptimo fuertemente inconsistente con GARP es un conjunto óptimo inconsistente con GARP. Nótese que $\{\bar{x}_2, \bar{x}_4\} \in \mathcal{F}$ y, sin embargo, $\{\bar{x}_2, \bar{x}_4\} \notin \mathcal{R}$, como ilustra la Figura 2.4.

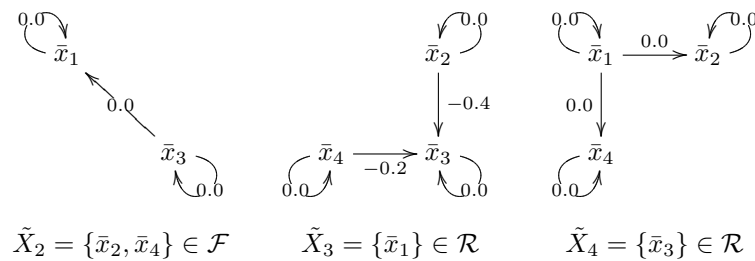


Figura 2.4: Conjuntos óptimos inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP.

La siguiente proposición muestra que todo conjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada es minimal.

Proposición 2.2.5 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, y $X^* \in \Phi$ un conjunto óptimo inconsistente con GARP. Entonces X^* es minimal.*

Demostración: Sea X^* un conjunto inconsistente con GARP. Si X^* no es minimal, entonces existe un $\bar{x}_i \in X^*$ redundante en X^* . Sea $\tilde{X} = X^* - \{\bar{x}_i\}$. Si $\tilde{X} \in \Phi$, entonces $\xi(\tilde{X}) < \xi(X^*)$, lo que implica que X^* no es óptimo y completaría la demostración. Veamos, por tanto, que $\tilde{X} \in \Phi$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\tilde{X} \notin \Phi$, entonces existe un ciclo C_k incoherente con GARP tal que $C_k \cap \tilde{X} = \emptyset$. Por otra parte, como $X^* \in \Phi$ se tiene que para todo ciclo C_i incoherente con GARP se verifica $X^* \cap C_i \neq \emptyset$. En particular, $X^* \cap C_k \neq \emptyset$, lo que implica que $\bar{x}_i \in C_k$ y, además, $\forall \bar{x}_j \in X^*$ tal que $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$ se tiene que $\bar{x}_j \notin C_k$. Por tanto, $C_k \subseteq (X - X^*) \cup \{\bar{x}_i\}$, de donde se deduce que \bar{x}_i no es redundante en X^* , en contra de lo supuesto. ■

A partir de la proposición anterior se deduce inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.2.3 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, y $X^* \in \Psi$ un conjunto óptimo fuertemente inconsistente con GARP. Entonces X^* es minimal.*

Sin embargo, como muestra el siguiente ejemplo, el recíproco no es cierto.

Ejemplo 2.2.3 Supongamos que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de demanda de tamaño cuatro normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) cuya matriz de gasto $C = (c_{ij})$ viene dada por:

(b) Preferencia Revelada R^0

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 2.0 & 0.9 \\ 2.0 & 1.0 & 0.6 & 1.5 \\ 0.7 & 1.1 & 1.0 & 2.0 \\ 1.3 & 1.5 & 0.8 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

(a) Matriz de gasto $C \equiv (c_{ij})$

La Figura 2.5 ilustra el grafo dirigido asociado a los subconjuntos complementarios de $\tilde{X}_1 = \{\bar{x}_2, \bar{x}_4\}$; $\tilde{X}_2 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_3\}$, $\tilde{X}_3 = \{\bar{x}_1\}$ y $\tilde{X}_4 = \{\bar{x}_3\}$. Nótese que si designamos por X al conjunto de cestas demandadas –i.e., $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ – se cumple que los subconjuntos $(X - \tilde{X}_1)$, $(X - \tilde{X}_2)$, $(X - \tilde{X}_3)$ y $(X - \tilde{X}_4)$ son consistentes con GARP por lo que, en virtud de la Proposición 2.2.2 los subconjuntos \tilde{X}_1 , \tilde{X}_2 , \tilde{X}_3 y \tilde{X}_4 son inconsistentes o fuertemente inconsistentes con GARP. De la Figura 2.5 se desprende la no unicidad de los conjuntos óptimos fuertemente inconsistentes con GARP y que no todo conjunto minimal fuertemente inconsistente con GARP es óptimo. Nótese que tanto \tilde{X}_1 como \tilde{X}_2 son conjuntos minimales fuertemente inconsistentes con GARP y, sin embargo, no son óptimos.

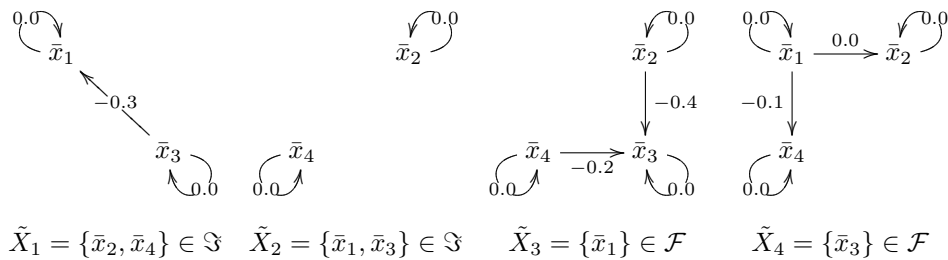


Figura 2.5: Optimalidad y minimalidad GARP.

Nótese que en este ejemplo, también se puede apreciar la no unicidad de los conjuntos minimales y óptimos fuertemente inconsistentes con GARP. A continuación, introducimos el siguiente lema auxiliar que utilizaremos en la demostración del siguiente teorema.

Lema 2.2.1 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y X el conjunto de cestas demandadas asociado. Entonces para todo par X_i, X_j de subconjuntos de partes de X tales que $X_i \subseteq X_j$ si $X_j \notin \Phi$ (resp., $X_j \notin \Psi$) se tiene que $X_i \notin \Phi$ (resp., $X_i \notin \Psi$).

Demostración: En efecto, si $X_j \notin \Phi$ (resp., $X_j \notin \Psi$) existe un ciclo C_k incoherente con GARP tal que $X_j \cap C_k = \emptyset$. Así, teniendo en cuenta que $X_i \subseteq X_j$ se tiene que $X_i \cap C_k = \emptyset$, de donde se deduce que $X_i \notin \Phi$ (resp., $X_i \notin \Psi$), lo que completa la demostración. ■

Los siguientes teoremas proporcionan una condición necesaria y suficiente para que un conjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP sea óptimo.

Teorema 2.2.4 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, X el conjunto de cestas demandadas asociado y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X . Entonces si X^* es un conjunto inconsistente con GARP tal que $\xi(X^*) = k/n$, $1 \leq k \leq n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X^* es óptimo.

(ii) X^* es minimal y, además, $\forall \tilde{X} \in \mathcal{P}(X)$ si $\xi(\tilde{X}) = (k-1)/n$ se verifica que $\tilde{X} \notin \Phi$.

Demostración: Supongamos que $X^* \in \Phi$ (resp., $X^* \in \Psi$) es óptimo, entonces, por la Proposición 2.2.5, X^* es minimal. Además, para cada subconjunto $\tilde{X} \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\xi(\tilde{X}) = (k-1)/n$ se tiene $\xi(\tilde{X}) < \xi(X^*)$ y, en consecuencia, $\tilde{X} \notin \Phi$ (resp., $\tilde{X} \notin \Psi$). Recíprocamente, supongamos que se verifica (ii). Entonces para probar que X^* es óptimo bastará con ver que $\forall \tilde{X} \in \mathcal{P}(X)$ con $\xi(\tilde{X}) < \xi(X^*)$ se verifica que $\tilde{X} \notin \Phi$. Supongamos que existe un $X' \in \Phi$ tal que $\xi(X') < \xi(X^*)$. Entonces existe un subconjunto \tilde{X} de partes de X tal que $\xi(\tilde{X}) = (k-1)/n$ y, además, $X' \subseteq \tilde{X}$. Por otra parte, como $\tilde{X} \notin \Phi$ se tiene, en virtud del lema anterior, que $X' \notin \Phi$, lo que implica que X^* es óptimo y completa la demostración. ■

En el siguiente teorema caracterizamos a los conjuntos óptimos fuertemente inconsistentes con GARP. Este teorema no precisa demostración, dado que ésta es análoga a la proporcionada en el teorema anterior³⁴.

Teorema 2.2.5 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, X el conjunto de cestas demandadas asociado y X^* un conjunto fuertemente inconsistente con GARP tal que $\xi(X^*) = k/n$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que X^* sea óptimo es que X^* sea minimal y, además, para todo \tilde{X} tal que $\xi(\tilde{X}) = (k-1)/n$ se verifique que $\tilde{X} \notin \Phi$. ■*

Una vez caracterizados los subconjuntos óptimos y minimales inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP, resolveremos a continuación el problema de encontrar para cada serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP un subconjunto maximal (de cardinal máximo) consistente con GARP. Gross y Kaiser (1996, pág. 250-251) realizan una aproximación al problema. Estos autores establecen un isomorfismo entre las observaciones inconsistentes con el axioma débil de la preferencia revelada y un grafo no dirigido $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ que representa la

³⁴Nótese que, a efectos computacionales, es preferible trabajar con el tamaño del conjunto de observaciones de demanda.

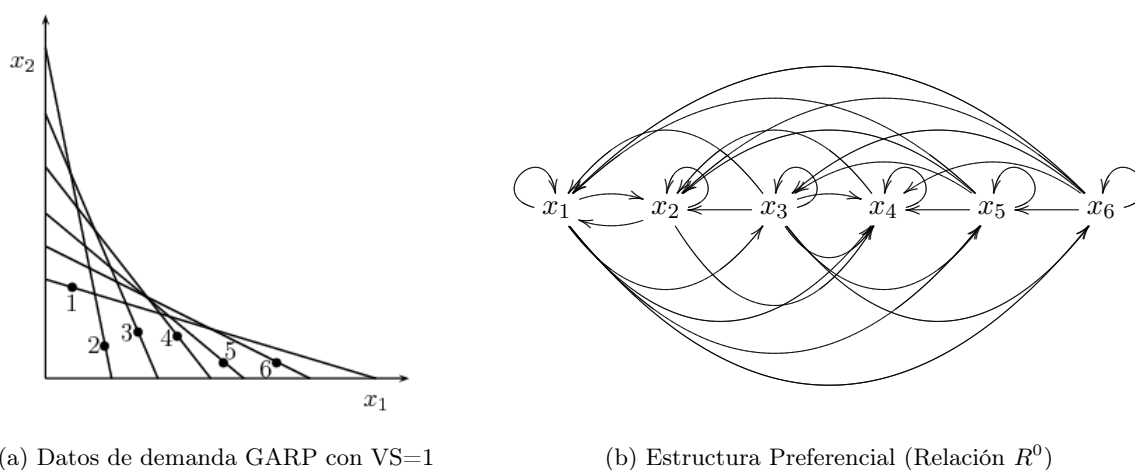
estructura de estas violaciones para encontrar para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto maximal de observaciones consistentes con WARP. El conjunto de nodos de este grafo está formado por aquellas observaciones inconsistentes con WARP. Así, si las observaciones i y j forman una violación WARP; es decir, si la cesta demandada \bar{x}_i se revela directamente preferida a \bar{x}_j y viceversa, entonces los nodos i y j del grafo \bar{G} tienen una arista en común. En este caso, decimos que el nodo i es adyacente a j . El grado de un nodo i , $deg(i)$, es el número de nodos adyacentes a i . Así, si i y j son adyacentes; esto es, si forman una violación WARP, podemos eliminar i o j y su arista en común, eliminando así la violación. Dado cualquier grafo no dirigido $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$, que representa la estructura de las violaciones WARP de un conjunto finito de datos de demanda dado, encontrar un subconjunto CS de tamaño maximal consistente con el axioma débil de la preferencia revelada equivale a encontrar el mínimo conjunto de nodos tal que al eliminarlos, junto con sus aristas correspondientes, del grafo original \bar{G} obtengamos un grafo \bar{G}' formado por nodos aislados. Resulta fácil probar que este problema NP-completo, por lo que, en general, resulta prácticamente imposible encontrar para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto consistente de tamaño maximal en un tiempo razonable.

Observación 2.2.1 *Gross y Kaiser (1996) presentan dos algoritmos, el primero de ellos exacto, que calculan para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto de tamaño maximal consistente con el axioma débil de la preferencia revelada. El primer algoritmo que proponen es bastante simple. Este algoritmo calcula todas las posibles formas de eliminar todas las aristas del grafo \bar{G} o, equivalentemente, de desconectar dicho grafo. Este algoritmo requiere un tiempo de ejecución proporcional a $O(m!)$, donde m designa al número de nodos inconsistentes con el axioma débil de la preferencia revelada. Por tanto, este algoritmo no resulta muy práctico en aquellos estudios empíricos del comportamiento de un consumidor donde el conjunto de datos es de tamaño elevado. Para solventar este problema, Gross y Kaiser (1996, pág. 254) proporcionan un segundo algoritmo aproximativo que va eliminando los nodos de mayor grado en el grafo \bar{G} de manera secuencial hasta desconectar este grafo. Estos autores proporcionan condiciones suficientes para garantizar cuando un nodo i cualquiera del grafo G pertenece al conjunto VS de tamaño minimal y cuando no. Sin embargo, como estos autores señalan, este algoritmo no es exacto; es decir, no permite calcular para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto de tamaño maximal de observaciones de demanda consistentes con el axioma débil de la preferencia revelada.*

Gross y Kaiser (1996) proporcionan diferentes algoritmos para encontrar subconjuntos maximales consistentes con WARP³⁵. Sin embargo, tal y como hemos mostrado con anterioridad, WARP no implica GARP (incluso en el espacio de consumo formado únicamente por dos bienes); por lo que se hace necesario abordar la resolución de este problema y encontrar procedimientos

³⁵ Los algoritmos propuestos por Gross y Kaiser (1996) pueden aplicarse a aquellas condiciones algebraicas de la preferencia revelada, que para ser contrastadas, no precisen calcular la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada. Ejemplos de tales condiciones algebraicas de la preferencia revelada son la versión débil del Axioma de Varian –introducido en el capítulo anterior–, el axioma débil de la maximización del beneficio (WAPM) o el axioma débil de la minimización del coste (WACM), que se encuentran definidos en Varian (1984).

exactos que nos permitan hallar para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto de tamaño máximo consistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada. Este problema puede entenderse como un problema de “subracionalización”, dado que para cada serie finita de datos de demanda estamos buscando un subconjunto maximal de cardinalidad máxima que sea consistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada. Nótese que si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda y $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ la matriz definida por $a_{ij} = \bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \forall i, j \in \mathbb{N}$, entonces podemos representar gráficamente la relación de preferencia revelada asociada a este conjunto de datos de demanda por un grafo dirigido $G = (V, E)$ con nodos en el conjunto de cestas demandadas y con un conjunto de aristas E , donde $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E$ si, y solamente si, \bar{x}_i se revela directamente preferida a \bar{x}_j . En la Figura 2.15 representamos al grafo dirigido asociado a la relación de preferencia revelada directa R^0 determinada por la serie finita de datos de demanda de la subfigura (a) de la Figura 2.15.



(a) Datos de demanda GARP con VS=1

(b) Estructura Preferencial (Relación R^0)

Figura 2.6: Representación gráfica de un problema de “subracionalización”.

Encontrar la solución a este problema de subracionalización equivale, como mostraremos a continuación, a resolver un problema del tipo “minimum feedback vertex set problem” en los ciclos de la relación de preferencia revelada que causan el comportamiento irracional de un consumidor. El siguiente algoritmo permite encontrar para toda serie finita de datos de demanda un subconjunto óptimo inconsistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada³⁶.

³⁶Nótese que el mismo procedimiento aplicado a VS permite hallar un subconjunto óptimo fuertemente inconsistente con GARP.

Algorithm 6. Pseudo-code for computing optimum subset strongly inconsistent with GARP

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. procedure inconsistent optimum subset
2. begin
3. Calcular $\mathcal{VS} \in \Phi$; $\bar{X}^* \leftarrow \emptyset$
4. procedure recursive optimum (\mathcal{VS})
5. construct the revealed preference associated to \mathcal{VS} ; $k \leftarrow 1$
6. While [$k \leq \#\mathcal{VS}$]
7. While [X^* no sea óptimo en X]
8. procedure new ksubset-lex-sucesor X^*
9. construct the revealed preference associated to $\mathcal{VS} - X^*$
10. for each $\bar{x}_t \in \mathcal{VS} - X^*$ do
11. if \bar{x}_t viola GARP en $\mathcal{VS} - X^*$ then $\tilde{X} \leftarrow \tilde{X} \cup \{\bar{x}_t\}$
12. $X \leftarrow \mathcal{VS} - \tilde{X}$
13. if X^* doesn't óptimo in X then $\bar{X}^* \leftarrow X^* \cup \bar{X}^*$; $\mathcal{VS} \leftarrow \tilde{X}$
14. optimum (\mathcal{VS})
15. $k \leftarrow k + 1$
16. return optimum

Output: An optimum subset inconsistent with GARP.

El algoritmo, después de un número finito de pasos, determina una partición³⁷ finita $\{X_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos inconsistentes con GARP y una sucesión finita subconjuntos $\{X_i^*\}_{i \in I}$ de partes de X tal que para cada $i \in I$, X_i^* es un conjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente en X_i . Nótese, además, que si designamos por Σ_{X_i} a la familia formada por todos los ciclos C incoherentes con GARP en X tales que $C \cap X_i \neq \emptyset$, entonces $\{\Sigma_{X_i}\}_{i \in I}$ es una partición del conjunto Σ_X formado por todos los ciclos incoherentes con GARP existentes en la relación de preferencia revelada determinada por la serie finita de datos de demanda. Entonces para cada $C_k \in \Sigma_X$ existe un $i \in I$ tal que $C_k \in \Sigma_{X_i}$ y, por tanto, $C_k \cap X_i \neq \emptyset$. Por otra parte, por la construcción³⁸ del algoritmo, se tiene que $C_k \cap X_i^* \neq \emptyset$, de donde se deduce inmediatamente

³⁷Llamaremos partición de un conjunto X a toda familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de partes de X tal que $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ y $\forall i, j \in I, X_i \cap X_j \neq \emptyset$ implica que $X_i = X_j$.

³⁸Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y X el conjunto de cestas demandadas asociado, entonces para cada $i \in I$ si eliminamos todos los datos de demanda del conjunto X_i^* , entonces estamos eliminando todos los ciclos incoherentes con GARP en X tales que $C \cap X_i^* \neq \emptyset$, es decir, eliminamos tanto los ciclos incoherentes con GARP totalmente contenidos en X_i como todos los ciclos C incoherentes con GARP en X tales que $C \cap X_i \neq \emptyset$ y $C \cap (X \setminus \bigcup_{j \leq i} X_j) \neq \emptyset$.

que $(\bigcup_{i \in I} X_i^*) \cap C_k \neq \emptyset$ para cada ciclo C_k incoherente con GARP en X , lo que implica que $X^* = \bigcup_{i \in I} X_i^*$ es un conjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP.

El siguiente teorema garantiza que X^* es óptimo y, por tanto, la corrección de este procedimiento.

Teorema 2.2.6 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP, X el conjunto de cestas demandadas asociado y sean $\{X_i\}_{i \in I}$ y $\{X_i^*\}_{i \in I}$ las particiones obtenidas a partir del procedimiento anterior tales que cada $i \in I$, X_i^* es un conjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente en X_i . Entonces, $X^* = \bigcup_{i \in I} X_i^*$ es un conjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP.*

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un $\tilde{X} \in \Phi$ (resp., $\tilde{X} \in \Psi$) óptimo tal que $\xi(\tilde{X}) < \xi(X^*)$. Entonces, se tiene que $\tilde{X} = \bigcup_{i \in I} (X_i \cap \tilde{X})$, por ser $\{X_i\}_{i \in I}$ una partición finita de subconjuntos de X . Para todo $i \in I$ definimos $\tilde{X}_i = X_i \cap \tilde{X}$, entonces, como $\xi(\tilde{X}) < \xi(X^*)$, se tiene que $\xi(\tilde{X}_i) < \xi(X_i^*)$ para algún $i \in I$. Por otra parte, si designamos por Σ_{X_i} a la familia formada por todos los ciclos C incoherente con GARP tales que $C \cap X_i \neq \emptyset$, es claro que $\{\Sigma_{X_i}\}_{i \in I}$ es una partición del conjunto Σ_X y, además, $\forall C \in \Sigma_{X_i}$ se verifica que $C_i \cap X_j = \emptyset$ para todo $j \neq i$. Así, como \tilde{X}_i^* es óptimo en X_i existe un ciclo $C_i \in \Sigma_{X_i}$ incoherente con GARP tal que $C_i \cap \tilde{X}_i^* \neq \emptyset$ y $C_i \cap \tilde{X}_i = \emptyset$, ya que en caso contrario \tilde{X}_i^* no sería óptimo. De lo anterior se deduce que $\bigcup_{j \in I} (C_i \cap \tilde{X}_j) = \emptyset$, lo que implica que \tilde{X} no es inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP y, por tanto, \tilde{X} no es óptimo, en contra de lo supuesto. ■

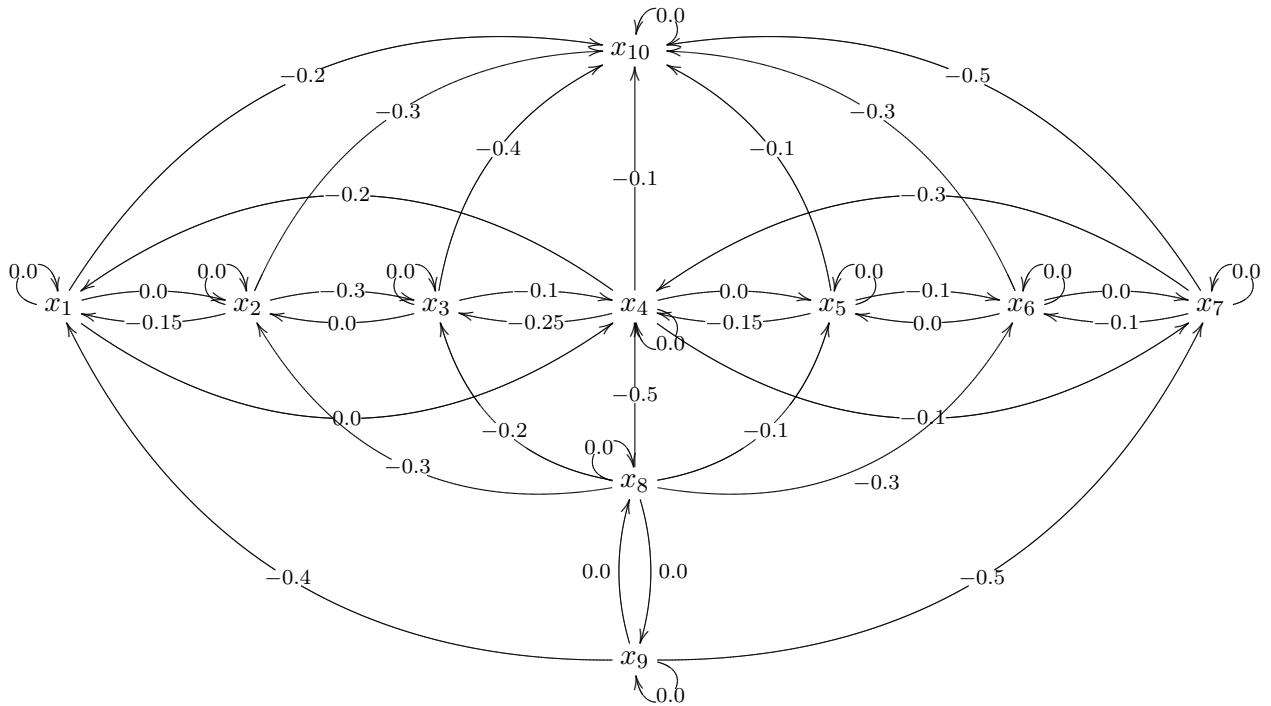
A continuación presentamos el siguiente ejemplo que pretende clarificar el funcionamiento del algoritmo presentado.

Ejemplo 2.2.4 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1$, $\forall t$) cuya matriz de gasto asociada es:

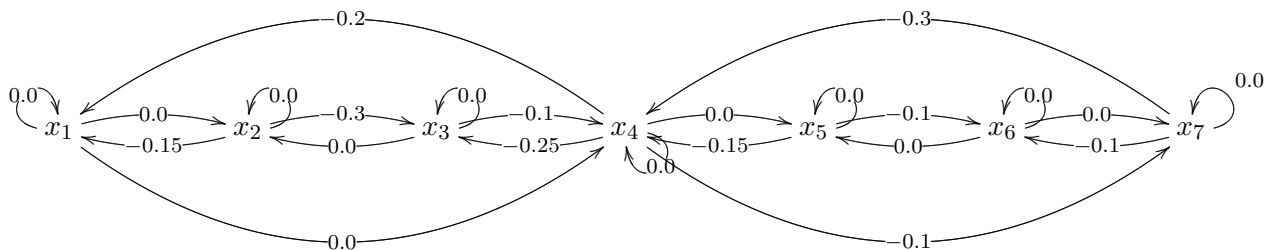
$$\begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.10 & 1.00 & 1.20 & 1.10 & 1.30 & 1.10 & 1.20 & 0.80 \\ 0.85 & 1.00 & 0.70 & 1.10 & 1.20 & 1.10 & 1.30 & 1.40 & 1.10 & 0.70 \\ 1.10 & 1.00 & 1.00 & 0.90 & 1.10 & 1.20 & 1.10 & 1.20 & 1.10 & 0.60 \\ 0.80 & 1.20 & 0.75 & 1.00 & 1.00 & 1.10 & 0.90 & 1.10 & 1.20 & 0.90 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.85 & 1.00 & 0.90 & 0.90 & 1.10 & 1.10 & 0.90 \\ 1.10 & 1.10 & 1.10 & 1.10 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.10 & 1.10 & 0.70 \\ 1.10 & 1.10 & 1.20 & 0.70 & 1.10 & 0.90 & 1.00 & 1.10 & 1.10 & 0.50 \\ 1.20 & 0.70 & 0.80 & 0.50 & 0.90 & 0.70 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.20 \\ 0.60 & 1.10 & 1.20 & 1.10 & 1.20 & 1.15 & 0.50 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.20 & 1.10 & 1.30 & 1.10 & 1.20 & 1.30 & 1.20 & 1.30 & 1.10 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Veamos que $X^* = \{\bar{x}_2, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_7\}$ es el conjunto óptimo fuertemente inconsistente con GARP para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y que $X^* = \{\bar{x}_2, \bar{x}_4, \bar{x}_6\}$ es el conjunto óptimo inconsistente con GARP

asociado. El siguiente gráfico ilustra la relación de preferencia revelada supongamos que tenemos una serie finita de datos de demanda R^0 asociada:

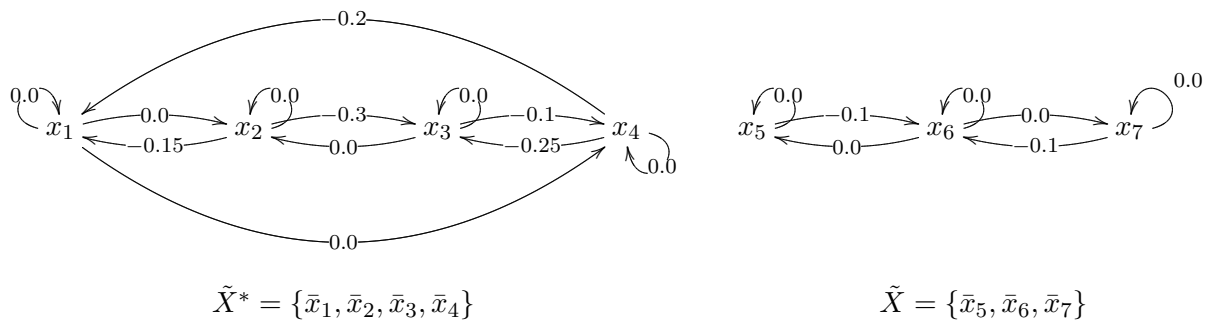


Nótese que el Teorema 2.2.2 pone de manifiesto que todo conjunto minimal inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP debe estar contenido en el conjunto \mathcal{VS} formado por todas las cestas demandadas inconsistentes con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada. Así pues, el problema de encontrar para toda serie finita de datos de demanda un subconjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP consiste en hallar un conjunto óptimo en el conjunto formado por todas las cestas demandadas inconsistentes con GARP. En el siguiente gráfico representamos la relación de preferencia revelada R^0 asociada al conjunto de cestas demandadas inconsistentes con GARP.



Es fácil ver que $VS = \{\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_7\}$. También es claro que para todo $X' \in \Psi$ se verifica que $X' \subseteq VS$, luego si \tilde{X} es un conjunto minimal u óptimo fuertemente inconsistente con GARP, entonces $\tilde{X} \subseteq VS$. Consideremos, en primer lugar, siguiendo un orden lexicográfico sobre los

índices de las datos de demanda, los conjuntos candidatos de tamaño 1 contenidos en VS ; esto es, seleccionamos, en primer lugar, $X^* = \{\bar{x}_2\}$. En lo sucesivo, para cada conjunto candidato X^* designamos por \tilde{X} al conjunto formado por todas las cestas demandadas inconsistentes con GARP en $\mathcal{VS} - X^*$ y por \tilde{X}^* al conjunto $\tilde{X}^* = \mathcal{VS} - \tilde{X}$. Obsérvese si $X^* = \{\bar{x}_2\}$, entonces se verifica que $\tilde{X}^* = \tilde{X}^*$ y, en consecuencia, \tilde{X}^* satisface el axioma GARP, por lo que X^* no es óptimo en \tilde{X}^* . De manera análoga se prueba que no existen subconjuntos óptimos fuertemente inconsistentes con GARP de tamaño uno. Consideremos, a continuación, todos los posibles candidatos de tamaño dos. Si $X^* = \{\bar{x}_2, \bar{x}_3\}$, entonces es claro que $\tilde{X}^* = \{\bar{x}_2, \bar{x}_3\}$, de donde se deduce que X^* no es óptimo en \tilde{X}^* , por no ser minimal. De manera análoga, se prueba que las cestas demandadas \bar{x}_3 y \bar{x}_4 no pueden formar parte simultáneamente de ningún conjunto óptimo fuertemente inconsistente con GARP. Si consideramos $X^* = \{\bar{x}_2, \bar{x}_4\}$, entonces es claro que $\tilde{X}^* = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ y $\tilde{X} = \{\bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\}$. Además, se comprueba inmediatamente que X^* satisface la condición (ii) del Teorema 2.2.4, por lo que X^* es un conjunto óptimo fuertemente inconsistente con GARP en \tilde{X}^* tal y como muestra el siguiente gráfico.



Repitiendo el proceso sobre el subconjunto \tilde{X} , obtenemos de manera inmediata que $\{\bar{x}_5, \bar{x}_7\}$ es óptimo en \tilde{X} , de donde se deduce que $X^* = \{\bar{x}_2, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_7\}$ es el conjunto óptimo fuertemente inconsistente con GARP (no tiene por qué ser único) para la serie finita de datos de demanda de nuestro ejemplo. De manera similar obtenemos que $X^* = \{\bar{x}_2, \bar{x}_4, \bar{x}_6\}$ es el conjunto óptimo inconsistente con GARP buscado, que, como es sabido, tampoco tiene por qué ser único.

El algoritmo anterior resultará especialmente efectivo si el tamaño de los datos no es muy elevado o si el consumidor tiene un comportamiento próximo a uno optimizador. Sin embargo, dado una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ tal que $\bar{p}_i \bar{x}_i \neq \bar{p}_i \bar{x}_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$, el algoritmo realiza un número exponencial de operaciones para encontrar un subconjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Sin embargo, cabe señalar que en la práctica estas situaciones son muy poco habituales, incluso cuando el comportamiento de un consumidor es aleatorio. Nótese, además, que si $G = (V, E)$ es el grafo dirigido asociado a la relación de preferencia, se puede conseguir, desde un punto de vista operativo, una mayor eficiencia computacional si se ejecuta el procedimiento sobre las cestas demandadas inconsistentes con GARP que pertenecen a cada una de las componentes fuertemente conexas del grafo dirigido

(V, E) que, como es sabido, forman una partición. En este caso, el conjunto óptimo buscado sería la unión de los conjuntos óptimos de cada una de las componentes fuertemente³⁹ conexas del grafo dirigido asociado a la relación de preferencia revelada determinada por la serie finita de datos de demanda.

Cabe señalar que una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma fuerte de la preferencia revelada (SARP) si, y solamente si, la relación de preferencia revelada⁴⁰ S es acíclica. Entonces, por el isomorfismo existente entre las relaciones binarias definidas sobre un conjunto finito de opciones y los grafos dirigidos, es claro que hallar un conjunto maximal de datos de demanda consistentes con SARP⁴¹ equivale encontrar un *minimum feedback vertex set* (MFVS) en el grafo dirigido asociado a la relación binaria S definida sobre la serie finita de datos de demanda. Nótese que en la literatura computacional Smith y Walford (1975), Ashar y Malik (1994) y Hen-Ming Lin y Jing-Yang You (2000) entre otros han proporcionado diferentes algoritmos exactos que calculan un MFVS para un grafo dirigido, luego el problema de encontrar para toda serie finita de datos de demanda un conjunto maximal consistente con SARP es, por tanto, un problema que está ya resuelto. En esta sección se ha proporcionado un algoritmo que permite calcular de manera exacta un conjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Este problema está estrechamente relacionado con el clásico problema *minimum feedback vertex set* (MFVS) en grafos dirigidos. En efecto, si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda tal que $\bar{p}_i \bar{x}_i \neq \bar{p}_j \bar{x}_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$, encontrar un conjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP es, en esta situación, equivalente a resolver el problema clásico *minimum feedback vertex set* en el grafo dirigido determinado por la relación de preferencia S asociada a este serie finita de datos de demanda. Por otra parte, Karp (1972) y Garey y Johnson (1979) demuestran que el *minimum feedback vertex set problem* es un problema NP-completo, por lo que ningún algoritmo permite, en general, resolver este problema en un tiempo polinomial. En consecuencia, no existe ningún procedimiento que permita encontrar en un tiempo de ejecución razonable un conjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada, y queda justificada la siguiente

Proposición 2.2.6 *Encontrar un conjunto óptimo inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP es un problema NP-completo.* ■

Cabe, pues, preguntarse si existen procedimientos eficientes que calculen un conjunto minimal inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP y cuya ejecución necesite sólo un tiempo

³⁹Para más detalles sobre las componentes fuertemente conexas de un grafo dirigido véanse los trabajos de Tarjan, R. (1972) y, más recientemente, Nuutila, E. (1995) y Nuutila, E. y Soisalon-Soininen, E. (1993) entre otros.

⁴⁰Sean \bar{x}_t y \bar{x}_s cestas demandadas a precios (normalizados) \bar{p}_t y \bar{p}_s respectivamente. Se dice que el consumidor revela directamente que prefiere \bar{x}_t a \bar{x}_s , y se denota por $x_t S x_s$, si, y solamente si, $x_t \neq x_s$ y, además, $\bar{p}_t x_t \geq \bar{p}_s x_s$.

⁴¹Houtmann y Maks (1985) proporcionaron un procedimiento que permitía encontrar todos los subconjuntos inconsistentes con SARP en un conjunto finito de datos de demanda.

polinomial en el tamaño del conjunto de datos. Si existen, estos procedimientos podrían utilizarse en cualquier análisis empírico que analice desde una perspectiva no paramétrica la estructura de las decisiones de consumo de un individuo o la existencia de cambios estructurales en las preferencias de un consumidor tanto para calcular una medida de eficiencia de la bondad del ajuste como para efectuar un análisis previo a cualquier análisis econométrico.

La demostración del Teorema 2.2.1 proporciona, de manera implícita, un algoritmo efectivo que calcula un conjunto minimal inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. En efecto, el Teorema 2.2.1 muestra que tanto Ψ como Φ son conjuntos inductivos con la relación de inclusión \supseteq definida sobre ellos, es decir, para toda cadena $S = \{X_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos inconsistentes o fuertemente inconsistentes con GARP $\sup(S) = \bigcap_{i \in I} X_i$ es un maximal para la cadena. De manera más precisa, si $VS \notin \mathfrak{S}$ (resp., $\mathcal{VS} \notin \mathfrak{R}$), se puede elegir (siguiendo un criterio preestablecido) un $\bar{x}_i \in \Upsilon_{VS}$ (resp., $\bar{x}_i \in \Upsilon_{\mathcal{VS}}$) tal que si $\tilde{X}_1 = VS - \{\bar{x}_i\}$ (resp., $\tilde{X}_1 = \mathcal{VS} - \{\bar{x}_i\}$) se verifica que $\tilde{X}_1 \in \Psi$ (resp., $\tilde{X}_1 \in \Phi$). Entonces, si $\tilde{X}_1 \in \mathfrak{S}$ (resp., $\tilde{X}_1 \in \mathfrak{R}$) habríamos terminado. Supongamos, por tanto, que $\tilde{X}_1 \notin \mathfrak{S}$ (resp., $\tilde{X}_1 \notin \mathfrak{R}$), entonces, como $\Upsilon_{\tilde{X}_1} \neq \emptyset$, podemos elegir (siguiendo el mismo criterio preestablecido) un $\bar{x}_j \in \tilde{X}_1$ de tal modo que si $\tilde{X}_2 = \tilde{X}_1 - \{\bar{x}_j\}$ se tiene $\tilde{X}_2 \in \Psi$ (resp., $\tilde{X}_2 \in \Phi$). Repitiendo el proceso, podemos construir en un número finito de pasos⁴² una cadena finita $\{\tilde{X}_i\}_{i \in I}$ no vacía de subconjuntos de X tal que $\tilde{X}_i \in \Psi$ (resp., $\tilde{X}_i \in \Phi$) $\forall i \in I$ y $\tilde{X}_i \supseteq \tilde{X}_j \forall i, j \in I$ con $j > i$ y, por tanto, $\tilde{X} = \bigcap_{i \in I} \tilde{X}_i$ es un conjunto minimal fuertemente inconsistente (resp., inconsistente) con GARP. Desde un punto de vista operativo y, con el objeto de encontrar un conjunto minimal (de tamaño casi mínimo) inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP podemos utilizar los siguientes criterios: Seleccionar las observaciones de demanda que siendo redundantes en VS o \mathcal{VS} presenten un mayor número de violaciones o un mayor grado de salida en el grafo dirigido asociado a la relación de preferencia revelada.

De manera similar, podría pensarse en un procedimiento que permita construir de manera directa un subconjunto maximal de datos de demanda consistente con GARP. Nótese que la Proposición 2.2.2 garantiza la equivalencia lógica entre el problema anterior y este problema. Si designamos por Λ a la familia de todos los subconjuntos consistentes con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada, y por \succsim_Λ al orden inducido en Λ por la relación binaria \subseteq definida sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de X , es claro que toda cadena $T = \{X_j\}_{j \in I}$ de elementos de Λ está acotada superiormente, $\Lambda \neq \emptyset$ y, además, $\sup(T) = \bigcup_{j \in I} X_j$ es el maximal de la cadena. Una aplicación inmediata del lema de Zorn garantiza la existencia de una cadena maximal entre todas las cadenas de Λ y, por tanto, la existencia de un subconjunto maximal de datos de demanda consistentes con GARP. Es claro que el conjunto trivial \emptyset es un conjunto consistente con GARP. Además, $\forall \bar{x}_t \in X$ se verifica que $\{\bar{x}_t\} \in \Lambda$. Entonces, entonces podemos elegir (siguiendo un criterio establecido) un \bar{x}_t . A continuación, seleccionamos un \bar{x}_s (siguiendo el mismo criterio preestablecido). Si $X^* \cup \{\bar{x}_s\}$ satisface el axioma

⁴²El proceso requiere un número de pasos menor o igual a $|\Upsilon_{VS}|$ (resp., $|\Upsilon_{\mathcal{VS}}|$). La corrección del procedimiento está garantizada dado que para todo par de subconjuntos X_i, X_j de partes de X tales que $X_i \subseteq X_j$ y para todo $\bar{x}_j \in X_i$, $\bar{x}_j \notin \Upsilon_{X_j}$ implica que $\bar{x}_j \notin \Upsilon_{X_i}$. Además, $\Upsilon_{X_i} \subseteq \Upsilon_{X_j}$.

GARP entonces $X^* = X^* \cup \{\bar{x}_s\}$. En caso contrario, $\bar{x}_s \notin X^*$ y seleccionamos otro candidato. Repitiendo el proceso podemos construir una cadena finita $\{X_j\}_{j \in I}$ no vacía de subconjuntos de X tal que $X_i \in \Lambda \quad \forall i \in I$ y $X_i \subseteq X_j \quad \forall i, j \in I$ con $j > i$ y, por tanto, $X^* = \bigcup_{i \in I} X_i$ es un conjunto maximal consistente con GARP. Obsérvese que a efectos prácticos se pueden utilizar los siguientes criterios: seleccionar aquellas observaciones de demanda que presenten un mayor grado, un mayor grado de salida o un mayor $in(\bar{x}_i) \times out(\bar{x}_i)$, donde $in(\bar{x}_i)$ y $out(\bar{x}_i)$ representan respectivamente al grado de entrada y al grado de salida de \bar{x}_i en el grafo dirigido asociado a la relación de preferencia revelada.

Nótese que todos estos criterios se pueden contrastar en un tiempo polinomial. Además, es sabido que contrastar GARP requiere un tiempo de ejecución de $\mathcal{O}(t(n))$, donde $t(n)$ es la complejidad polinomial de cualquier algoritmo que se utilice en el cálculo de la clausura transitiva asociada a la relación de preferencia revelada determinada por el número finito de datos de demanda. En consecuencia, estos algoritmos son de complejidad polinomial, lo que los convierte en procedimientos muy útiles en cualquier estudio empírico no paramétrico de la estructura de las decisiones de consumo de un individuo.

Referencias Bibliográficas

- [1] Ashar, R. y S. Malik (1994) Implicit Computation of Minimum-Cost Feedback Vertex Sets for Partitial Scan and Other Applications. Proc. 31st Design Automation Conf, 77-80.
- [2] Dugundji, J. (1989) Topology. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Publishers.
- [3] Garey, M. y D. Johnson (1979) Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness, Freeman and Company (eds.), San Francisco.
- [4] Gross, J. (1991) On Expenditure Indices in Revealed Preference tests. Journal of Political Economy, Vol. 98, págs. 416-419.
- [5] Gross, J. (1995) Testing Data for Consistency with Revealed Preference. The Review of Economics and Statistics, Vol. 77(4), págs. 701-710.
- [6] Gross, J. y D. Kaiser (1996) Two Simple Algorithms for Generating a Subset of Data Consistent with WARP and Other Binary Relations. Journal of Bussiness and Economic Statistics, Vol. 14(2), págs. 251-255.
- [7] Hen-Ming Lin y Jing-Yang You (2000) On Computing the Minimum Feedback Vertex Set of a Directed Graph by Contractions Operations. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of integrated circuits and systems, Vol. 19, págs. 295-307.
- [8] Houtman, M. y J. Maks (1985) Determining All Maximal Data Subsets Consistent with Revealed Preference. Kwantitatieve Methoden, Vol. 19, págs. 89-104.

-
- [9] Kaplansky, I. (2001) *Set Theory and Metric Spaces*. New York: AMS Chelsea Publishing Company.
- [10] Karp, R. (1972) Reducibility Among Combinatorial Problems, en *Complexity of Computer Computations*, R. Miller and J. Thatcher (eds.), Plenum Press, New York, págs. 85-103.
- [11] McMillan, M. y J. Amoako-Tuffour (1988) An Examination of Preferences for Local Public Sector Options. *Review of Economic and Statistics*, Vol. 70, págs. 45-54.
- [12] Nuutila, E. (1995) Efficient Transitive Closure Computation in Large Digraphs. *Acta Polytechnica Scandinavica, Mathematics and Computing in Engineering Series No. 75*, Helsinki.
- [13] Nuutila, U. y E. Soisalon-Soininen (1994) On Finding the Strongly Connected Components in a Directed Graph. *Information Processing Letters*, Vol. 49, págs. 9-14.
- [14] Smith, G. y R. Walford (1975) The Identification of a Minimal Feedback Vertex Set of a Directed Graph. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-22, págs. 9-14.
- [15] Swofford, J. y Whitney, G. (1987) Nonparametric Tests of Utility Maximization and Weak Separability for Consumption, Leisure and Money. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 69, págs. 458-64.
- [16] Tarjan, R. (1972) Depth First Search and Linear Graph Algorithms. *SIAM Journal of Computing*, Vol. 1(2), págs. 146-160.
- [17] Varian, H. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50, págs. 945-971.

2.3. Sobre la aproximación no paramétrica de Afriat y Varian

En esta sección realizamos una profunda revisión de la aproximación no paramétrica a la eficiencia en el consumo de Afriat (1972, 1973) y Varian (1987, 1990), y extendemos sus resultados en varias direcciones. En primer lugar, examinamos todas las propiedades que verifica el índice de Afriat y proporcionamos un procedimiento algorítmico que nos permite obtener el valor exacto del índice de Afriat en un tiempo polinomial y que no presenta las desventajas del método original de Afriat (NP-completitud) ni del método propuesto por Houtman y Maks (1987) –basado en el método de la bisección– que no proporciona un valor exacto. En segundo lugar, analizamos la aproximación a la eficiencia en el consumo de Varian (1987, 1990) y proporcionamos un procedimiento matricial para obtener el conjunto de niveles de eficiencia de Varian, en adelante vector-índice de Varian, a partir de operaciones elementales (sumas, multiplicaciones booleanas, etc.) en los espacios de matrices (booleanas y reales). Además, demostramos que el conjunto de niveles de eficiencia de Varian (1990) no se puede considerar⁴³ la perturbación mínima de los datos para que verifiquen GARP y proporcionamos dos nuevos índices de eficiencia que son más eficientes (en el sentido de Pareto) que el proporcionado por Varian (1987, 1990). A continuación, estudiamos las diferencias y similitudes entre las aproximaciones a la eficiencia en el consumo de Afriat (1972, 1973) y Varian (1987, 1990) y generalizamos la aproximación a la eficiencia en el consumo de Afriat (1972) construyendo un nuevo índice de eficiencia más eficiente en el sentido de Pareto que el índice de Afriat. Finalizamos la sección construyendo un nuevo índice de eficiencia que simultáneamente es más eficiente (en el sentido de Pareto) que los índices de Varian (1987, 1990) y Afriat (1972), respectivamente. Los nuevos índices de eficiencia aquí presentados admiten una interpretación económica y estadística y permiten analizar la bondad del ajuste de nuestro modelo de optimización, así como precisar en qué observaciones el consumidor presenta un comportamiento inconsistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

Los modelos de optimización que aceptan la ineficiencia se obtienen mediante la introducción bien de un parámetro global, e , bien de un conjunto, $(e_t)_{t=1}^n$, de parámetros (uno para cada observación) entre cero y uno con el requisito de que cualquier elección tiene una eficiencia de al menos e_t , lo que permite inferir (a partir de los datos observados) la bondad del ajuste. A lo largo de las siguientes secciones identificaremos (a efectos de notación) al conjunto de índices o niveles de eficiencia $(e_t)_{t=1}^n$ por un elemento $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ del cubo n-dimensional⁴⁴ estándar unidad C_n , en adelante n-cubo, que denominaremos vector-índice.

⁴³Varian (2006) manifiesta, de forma literal, lo siguiente: “[...] *I interpret these i_t as a “minimal perturbation”. They can be interpreted as error terms and thus be used to give a statistical interpretation to the Goodness-of-Fit measure [...]*”.

⁴⁴Un cubo n-dimensional estándar unidad C_n es el conjunto de puntos (x_1, \dots, x_n) en un espacio \mathbb{R}^n que satisface la relación $0 \leq x_t \leq 1$.

La relación de preferencia revelada directa o indirecta “relajada” asociada al conjunto de niveles de eficiencia $(e_t)_{t=1}^n$ se define de la siguiente manera:

Definición 2.3.1 (Niveles de eficiencia) Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda. Se dice que la cesta demandada \bar{x}_t se revela directamente preferida, al nivel de eficiencia e_t , a \bar{x}_s , y se denota por $\bar{x}_t R^0(e_t) \bar{x}_s$, si $e_t \bar{p}_t \bar{x}_t \geq \bar{p}_t \bar{x}_s$.

Se dice que la cesta demandada \bar{x}_t se revela preferida (directa o indirectamente) a \bar{x}_s , bajo el vector de “niveles de eficiencia” \bar{e} , y se denota por $\bar{x}_t R(\bar{e}) \bar{x}_s$, si existen $\bar{x}_{t_1}, \dots, \bar{x}_{t_k}$ satisfaciendo $\bar{x}_t R^0(e_{t_1}) \bar{x}_{t_1}, \bar{x}_{t_1} R^0(e_{t_2}) \bar{x}_{t_2}, \dots, \bar{x}_{t_k} R^0(e_{t_k}) \bar{x}_s$.

El conjunto de niveles de eficiencia, $(e_t)_{t=1}^n$, admite una interpretación económica (en términos del mínimo coste) del concepto de eficiencia: si el valor medio de e_t es \bar{e} , podemos decir que en promedio el consumidor es eficiente en un $\bar{e}\%$ en su conducta de elección. Desde un punto de vista intuitivo, Varian (1990) explica que si, por ejemplo, $e_t = 0.9$ tendremos solamente en cuenta como candidatos para que se revelen “peor” que la elección \bar{x}_t a aquellas cestas \bar{x}_s cuyo coste sea inferior al 90% del precio pagado por \bar{x}_t . Es intuitivamente claro que esto impone menos restricciones sobre las condiciones de optimización que deben verificarse⁴⁵ y por consiguiente yace un concepto no exacto de racionalidad en la forma expresada por el siguiente postulado:

Definición 2.3.2 (Varian; 1990) La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{e})$ si para todo \bar{x}_t y \bar{x}_s tal que $\bar{x}_t R(\bar{e}) \bar{x}_s$ se tiene $e_s \bar{p}_s \bar{x}_s \leq \bar{p}_s \bar{x}_t$.

La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $SARP(\bar{e})$ si para todo \bar{x}_t y \bar{x}_s tal que $\bar{x}_t R(\bar{e}) \bar{x}_s$ se tiene $e_s \bar{p}_s \bar{x}_s < \bar{p}_s \bar{x}_t$.

En lo sucesivo, para cada vector-índice $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ designaremos por $\Sigma^{\bar{e}}$ a la familia formada por todos los ciclos incoherentes con $GARP$ en $R^0(\bar{e})$ y por $\Sigma^{\bar{1}}$ a la familia formada por todos los ciclos en $R^0(\bar{1})$. De la Definición 2.3.2 se desprende, de manera inmediata, que una serie finita de datos de demanda \mathcal{D} satisface $GARP(\bar{e})$ si y solamente si $\Sigma^{\bar{e}} = \emptyset$. Es decir, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma $GARP(\bar{e})$ (resp., $SARP(\bar{e})$) si y solamente si la relación de preferencia revelada “relajada”, $R^0(\bar{e})$, no presenta ciclos de longitud negativa (resp., es acíclica).

⁴⁵Formalmente: si consideramos $\bar{0} = (0, \dots, 0)$ y $\bar{1} = (1, \dots, 1)$ entonces para cada vector $\bar{e} \in [\bar{0}, \bar{1}]$ las relaciones $R^0(\bar{e}) \subseteq R^0(\bar{1}) = R^0$ y $R(\bar{e}) \subseteq R(\bar{1}) = R$ deben verificarse.

Por otra parte, merece la pena destacar que el axioma $GARP(\bar{e})$ puede reescribirse en términos de la propiedad de la consistencia cíclica de Afriat. Para cada serie finita de datos de demanda normalizada, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, y para cada vector-índice, $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$, si consideramos la n -tupla de números reales $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ definida por $\bar{w} = \bar{1} - \bar{e}$, entonces $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{e})$ si y solamente si para cada ciclo $rst \dots ijk \dots pqr$ de la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{e})$ se cumple:

$$[a_{rs}^{w_r} \leq 0, \dots, a_{jk}^{w_j} \leq 0, \dots, a_{qr}^{w_q} \leq 0] \implies [a_{rs}^{w_r} = \dots = a_{jk}^{w_j} = \dots = a_{qr}^{w_q} = 0], \quad (2.7)$$

donde $a_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j - 1$ y $a_{ij}^{w_i} = a_{ij} + w_i$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nótese que w_t , en adelante coste de ineficiencia, admite una interpretación económica sencilla: representa el porcentaje (en términos unitarios) de la cantidad de dinero que se le permite derrochar a un consumidor en la observación t para que \bar{x}_t sea consistente con el axioma GARP. Así pues, a partir del conjunto de niveles de eficiencia, $(e_t)_{t=1}^n$, es posible cuantificar la cantidad de dinero que necesita gastar el consumidor para obtener el mismo bienestar en comparación con la cantidad de dinero que utiliza realmente en sus elecciones y, al mismo tiempo, es posible generalizar la teoría clásica de la conducta del consumidor.

En virtud de lo anterior, merece la pena resaltar que cuando la utilidad se construye sobre la base de las observaciones de demanda, las inconsistencias eliminan⁴⁶ cualquier construcción de la utilidad, mientras que sobre la base de este nuevo esquema siempre es posible construir una función de utilidad “aproximada” que genera los datos observados⁴⁷. Extendiendo las condiciones algebraicas de la preferencia revelada que caracterizan la racionalidad de un consumidor es posible encontrar, para cada conjunto, $(e_t)_{t=1}^n$, de niveles de eficiencia, un sistema preferencial compatible (a ese coste de eficiencia) con los datos observados que podrá representarse por una función de utilidad construida sobre los mismos modelos poliédricos y polítopos utilizados en el primer capítulo en la construcción clásica de la función de utilidad.

El siguiente teorema, cuya demostración es análoga a la demostración del teorema de Afriat (1967), permite responder a esta cuestión, al proporcionar una caracterización de todos los costes de eficiencia admisibles.

⁴⁶Si los datos observados $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisfacen las restricciones teóricas, incluso cuando éstos proceden de una conducta maximizadora (los datos pueden ser inconsistentes con la teoría económica por la existencia de algún error de medida o por la existencia de pequeños errores aleatorios), la teoría (en el sentido estricto) establece que no es posible encontrar $2n$ números ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ satisfaciendo las desigualdades de Afriat y, en consecuencia, que no es posible construir una función de utilidad que genere la conducta observada.

⁴⁷Este hecho resulta de vital importancia porque en numerosos estudios empíricos que analizan el comportamiento de un consumidor se ha apreciado un comportamiento inconsistente con la teoría clásica de la demanda que parece contradecir los elementos fundamentales del punto de vista clásico y tradicional de la conducta de un consumidor. Para más detalles véanse los trabajos de Andreoni y Miller (2002), Cox (1997), Mattei (2000) y Sippel (1997), entre otros.

Teorema 2.3.1 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada y $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ un vector-índice. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Existe una función de utilidad $u_e(\cdot)$ que racionaliza los datos al nivel (resp., al conjunto de niveles) de eficiencia e .
- (ii) El conjunto de datos $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface la “consistencia cíclica” al nivel (resp., al conjunto de niveles de eficiencia) e ; esto es,

$$e_r \bar{p}_r \bar{x}_r \geq \bar{p}_r \bar{x}_s, e_s \bar{p}_s \bar{x}_s \geq \bar{p}_s \bar{x}_t, \dots, e_q \bar{p}_q \bar{x}_q \geq \bar{p}_q \bar{x}_r$$

implica que

$$e_r \bar{p}_r \bar{x}_r = \bar{p}_r \bar{x}_s, e_s \bar{p}_s \bar{x}_s = \bar{p}_s \bar{x}_t, \dots, e_q \bar{p}_q \bar{x}_q = \bar{p}_q \bar{x}_r.$$

- (iii) Existen unos números $\phi_1^{e_1}, \dots, \phi_n^{e_n}$ y $\lambda_1^{e_1}, \dots, \lambda_n^{e_n} > 0$ tales que

$$\phi_i^{e_i} \leq \phi_j^{e_j} + \lambda_j^{e_j} \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j) + \lambda_j^{e_j} (1 - e_j) \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

- (iv) Existe una función de utilidad $u_e(\cdot)$ no saciada, continua, cóncava y monótona que racionaliza los datos al nivel de eficiencia al nivel (resp., al conjunto de niveles) de eficiencia e .

El teorema anterior caracteriza la existencia de una función de utilidad poliédrica “aproximada” que genera la conducta observada de un consumidor. Este resultado establece que para cada conjunto de niveles de eficiencia, $(e_t)_{t=1}^n$, si existen $2n$ números $\phi_1^{e_1}, \dots, \phi_n^{e_n}$ y $\lambda_1^{e_1}, \dots, \lambda_n^{e_n} > 0$ ($i = 1, \dots, n$) satisfaciendo (2.8), entonces es posible construir la función

$$u_e(\bar{x}) = \min_j \phi_j^{e_j} + \lambda_j^{e_j} \bar{p}_j (\bar{x} - \bar{x}_j) + \lambda_j^{e_j} (1 - e_j) \quad (2.9)$$

que caracteriza la conducta observada de un individuo. Esta construcción es, en cierto sentido, una aproximación a la “verdadera” función de utilidad, y proporciona una frontera similar a la curva de posibilidades de producción tradicional que caracteriza la eficiencia económica en la teoría de la empresa. Obsérvese, así mismo, que tanto la función poliédrica (2.9) como la función polítopa

$$u_e^*(\bar{x}) = \max \left[\sum \phi_j^{e_j} t_j : \sum \bar{x}_j t_j \leq \bar{x}; \sum t_j = 1; t_j \geq 0 \right] \quad (2.10)$$

son compatibles con los datos de demanda al nivel global de eficiencia e (resp., al conjunto de niveles de eficiencia $(e_t)_{t=1}^n$) con los datos de demanda y caracterizan a todas las funciones de utilidad compatibles (a estos niveles de eficiencia) con ellos. Nótese, además, que para cada función de utilidad $\phi_e(\cdot)$ tal que $u_e^*(\bar{x}) \leq \phi_e(\bar{x}) \leq u_e(\bar{x})$ para todo \bar{x} se verifica que $\phi_e(\bar{x})$ es una función de utilidad que racionaliza la conducta observada; esto es, es compatible con los datos de demanda. Además, toda función de utilidad $\phi_e(\bar{x})$ será compatible con los datos observados.

Observación 2.3.1 *El núcleo principal del modelo estándar o racional de la economía es la idea de que los consumidores pretenden maximizar sus preferencias innatas y estables sobre las cantidades y atributos de los productos que consumen. Sin embargo, en la visión contemporánea de la teoría de la elección se consideran diferentes procesos psicológicos (experiencia, percepción, motivación, memoria, afecto, etc.) que forman parte del proceso de elección de un individuo y que pueden ser la causa de la presencia de inconsistencias con la teoría estándar o racional de la conducta del consumidor, que no tiene (en principio) en cuenta la ineficiencia⁴⁸. Si un individuo no es optimizador en muy pocas ocasiones o la magnitud de la desviación (respecto a la hipótesis de maximización) en sus elecciones es “razonablemente pequeña”, entonces tal vez estemos dispuestos a aceptar que su conducta está muy “próxima a una optimizadora” y, en este caso, resultará de especial relevancia no solamente analizar la eficiencia de los datos con la conducta maximizadora de un individuo sino además poder construir (en el caso de un consumidor) una función de utilidad “aproximada” que caracterice las elecciones realizadas por un individuo; puesto que, para la mayoría de los propósitos, un comportamiento “próximo a uno optimizador” es justamente como un comportamiento optimizador [v. Akerlof y Yellen (1985), Cochrane (1989), Varian (1990)].*

Como hemos señalado anteriormente, la aproximación no paramétrica a la eficiencia en los modelos de optimización de Afriat (1972, 1973) estuvo influenciada por una comunicación conjunta que este autor realizó con Rubin en 1967. Afriat (1987, pág. 175) señala que le sugirió a Rubin la necesidad de “acomodar” la ineficiencia “relajando” el conjunto de desigualdades no paramétricas requeridas por la eficiencia perfecta, y que éste le propuso utilizar un único parámetro, e , entre cero y uno, como medida global de la eficiencia en las elecciones efectuadas por un consumidor. La siguiente proposición muestra que para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, se tiene garantizada la existencia de una medida global de eficiencia $i_\star \in (0, 1]$. Es decir, muestra que si los datos observados no son consistentes en sentido estricto, lo serán en algún nivel $i_\star \in (0, 1)$.

Proposición 2.3.1 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$). Entonces existe un $\bar{i}_\star = (i_\star, \dots, i_\star)$ con $i_\star \in (0, 1)$ tal que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(i_\star)$.*

Demostración: En efecto, si $i_\star = \min_{t,s} \bar{p}_t \bar{x}_s$ se cumple que $i_\star \bar{p}_t \bar{x}_t \leq \bar{p}_t \bar{x}_s \forall t, s$ y, en consecuencia, es claro que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(i_\star)$, puesto que para todo par de observaciones t, s tales que $\bar{x}_s R(i_\star) \bar{x}_t$ es cierto que $i_\star \bar{p}_t \bar{x}_t \leq \bar{p}_t \bar{x}_s$. ■

⁴⁸La teoría tradicional de la conducta del consumidor [Hicks (1956), Pareto (1927), Samuelson (1947), Slutsky (1915), Wold (1953)] supone que los agentes poseen un sistema preferencial completo que utilizan para mostrar sus preferencias sobre todos los pares de lotes de bienes concebibles y que eligen aquellos lotes que resultan ser óptimos con respecto a su sistema de preferencias, mientras que la teoría de la preferencia revelada, lógicamente equivalente a la teoría tradicional, postula la racionalidad de la conducta maximizadora de un agente económico en términos de ciertos contrastes “exactos” de la optimización.

La siguiente proposición establece que si $(e_t)_{t=1}^n$ es un conjunto de niveles de eficiencia para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, entonces ésta también será compatible (con la hipótesis de la maximización de la utilidad) para cualquier conjunto de índices $(e'_t)_{t=1}^n$ con $e'_t \leq e_t$.

Proposición 2.3.2 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1 \forall t$) y $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ una n -tupla del n -cubo unidad tal que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{e})$. Entonces $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{e}')$ para todo $\bar{e}' \leq \bar{e}$.*

Demostración: Será suficiente probar que para todo par de observaciones r y s tales que $\bar{x}_r R(\bar{e}') \bar{x}_s$ se cumple $e'_s \bar{p}_s \bar{x}_s \leq \bar{p}_s \bar{x}_r$. Supongamos que $\bar{x}_r R(\bar{e}') \bar{x}_s$, entonces se cumple que $\bar{x}_t R(\bar{e}) \bar{x}_s$, por ser $R(\bar{e}')$ una subrelación de $R(\bar{e})$. Por otra parte, como (por hipótesis) $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{e})$ se tiene que $e_s \bar{p}_s \bar{x}_s \leq \bar{p}_s \bar{x}_r$, de donde se deduce inmediatamente que $e'_s \bar{p}_s \bar{x}_s \leq \bar{p}_s \bar{x}_r$. ■

En virtud de la proposiciones 2.3.1 y 2.3.2, resultará interesante⁴⁹ encontrar para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, el límite superior, e^* , de todos los niveles de eficiencia globales admisibles, o un conjunto de índices, $(e_t)_{t=1}^n$, solución del siguiente problema de optimización:

$$\max_{e_t} \sum_{t=1}^n (e_t)^2 \text{ sujeto a } \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \text{ verifique } GARP(\bar{e});$$

La pregunta que surge de manera natural es la siguiente: ¿es el índice i_* una medida idónea de la bondad del ajuste? En el siguiente ejemplo mostramos que, en general, no. Es decir, i_* no es, en general, el límite superior de todos los niveles globales de eficiencia y, por tanto, no proporciona una buena medida de la bondad del ajuste.

Ejemplo 2.3.1 Supongamos que en el espacio de consumo tridimensional, \mathbb{R}_+^3 , un consumidor demanda $\bar{x}_1 = (8, 1, 8)$, $\bar{x}_2 = (5, 5, 6)$, $\bar{x}_3 = (5, 6, 5)$ y $\bar{x}_4 = (8, 8, 1)$ para los precios respectivos $\bar{p}_1 = \frac{1}{13}(1, 1, 0.5)$, $\bar{p}_2 = \frac{1}{19}(1, 1, 1.5)$, $\bar{p}_3 = \frac{1}{13}(1, 0.5, 1)$, $\bar{p}_4 = \frac{1}{26}(1, 2, 2)$. Los datos violan GARP puesto que los pares de observaciones 2, 3 y 2, 4 son inconsistentes⁵⁰ con GARP. La Figura 2.7, que ilustra la matriz de gasto y la relación de preferencia revelada, R^0 , asociada⁵¹ a este conjunto de datos, muestra la existencia de dos ciclos incoherentes con GARP formados por las observaciones 1, 2, 3, 4 y 1, 2, 4, respectivamente. Como esta serie finita de datos de demanda está normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) el índice i_* es el mínimo valor de la matriz de gasto ilustrada en la sección (b) de la Figura 2.7. Así pues, resulta inmediato comprobar que $i_* = 17.5/19$ y,

⁴⁹La Proposición 2.3.2 establece que para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, y para cada n -tupla, $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$, del n -cubo unidad tal que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{e})$ se cumple que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{e}')$ para todo $\bar{e}' < \bar{e}$.

⁵⁰Nótese que $\bar{x}_3 R \bar{x}_2$ y $\bar{p}_2 \bar{x}_2 > \bar{p}_2 \bar{x}_3$. También ocurre que $\bar{x}_4 R \bar{x}_2$ y $\bar{p}_2 \bar{x}_2 > \bar{p}_2 \bar{x}_4$.

⁵¹Nótese que, en virtud del isomorfismo (ver sección 1.5) existente entre las relaciones binarias definidas sobre un conjunto finito de opciones y los grafos dirigidos finitos, es posible construir para cada serie finita de datos de demanda normalizada, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, el grafo dirigido finito $G = (V, E, \omega)$ que representa la relación de preferencia revelada directa R^0 con función de peso w definida sobre las aristas $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E$ por: $w(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \bar{p}_i \bar{x}_j - 1 \forall i, j$.

además, que los datos satisfacen $GARP(\bar{i}_*)$ puesto que para todo par de observaciones r, s se verifica $i_* \bar{p}_r \bar{x}_r \leq \bar{p}_r \bar{x}_s$. Por otra parte, una simple inspección a los datos nos permite afirmar que éstos verifican $GARP(\bar{\xi})$ para todo vector-índice $\bar{\xi}$ con $\bar{\xi} < \bar{1}$; puesto que $\sim \bar{x}_4 R(\bar{\xi}) \bar{x}_2$ y $\bar{x}_3 R(\bar{\xi}) \bar{x}_2$. De lo anterior se desprende que i_* no es una buena medida de la bondad del ajuste del modelo de la maximización de la utilidad.

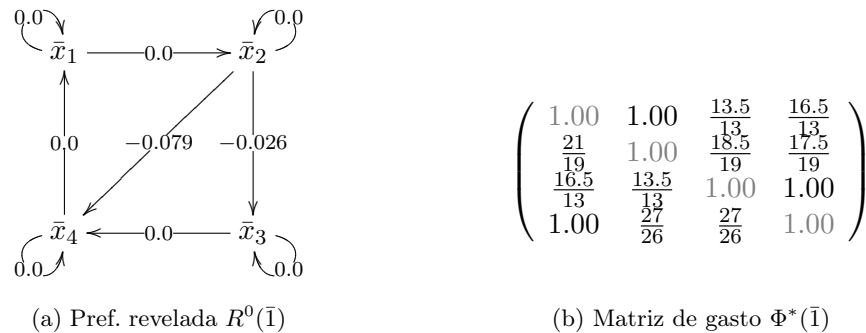


Figura 2.7: Un conjunto de datos de demanda violando GARP.

Afriat (1973, págs. 478-479) construye su índice (el mayor índice global de eficiencia consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad) a partir de un índice de ineficiencia, w^* , que representa el porcentaje mínimo de dinero (en términos unitarios) que se le permite derrochar a un consumidor en todas sus elecciones para que éstas sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Para cada serie finita de datos de demanda normalizada, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, $(\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t \in \{1, \dots, n\})$ inconsistente con GARP el índice de Afriat, e^* , viene determinado por la siguiente expresión $e^* = 1 - w^*$, donde $w^* = \max[0, -\min_r d_r]$ y $d_r = \max[a_{rs}, a_{st}, \dots, a_{qr}]$ para cada ciclo $rs \dots qr$ de la relación de preferencia revelada directa, R^0 , tal que:

$$\bar{p}_r \bar{x}_r \geq \bar{p}_r \bar{x}_s, \bar{p}_s \bar{x}_s \geq \bar{p}_s \bar{x}_t, \dots, \bar{p}_q \bar{x}_q \geq \bar{p}_q \bar{x}_r$$

Es claro que si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{e}^*)$, entonces para cada ciclo $rs \dots qr$ de de la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{1})$ para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ se cumple:

$$[a_{rs}^{w^*} \leq 0, a_{st}^{w^*} \leq 0, \dots, a_{qr}^{w^*} \leq 0] \implies [a_{rs}^{w^*} = \dots = a_{qr}^{w^*} = 0]$$

Así pues, el procedimiento de Afriat requiere encontrar todos los ciclos existentes en el grafo dirigido que representa la relación de preferencia revelada y considerar en cada ciclo el valor numérico correspondiente a la arista de peso máximo para, a continuación, seleccionar el mínimo valor de ellos para así obtener su índice crítico de coste de ineficiencia a partir del cual se define el índice de Afriat. Con el fin de comprender mejor el procedimiento⁵² de obtención del vector-índice de Afriat presentamos el siguiente ejemplo.

⁵²Por construcción, es claro que w^* es un número real entre cero y uno; y, por tanto, que $e^* = 1 - w^*$ toma valores entre cero y uno.

Ejemplo 2.3.2 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) cuya matriz de gasto asociada $C = (c_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ definida por $c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$ viene dada por (2.11). La Figura 2.8 ilustra la matriz de gasto y la relación de preferencia revelada R^0 asociada a esta serie finita de datos de demanda. La sección (a) de la Figura 2.8, que ilustra el grafo dirigido que representa a la relación de preferencia revelada directa, R^0 , asociada a la matriz de gasto (2.11), muestra cómo esta serie finita de datos de demanda viola GARP.

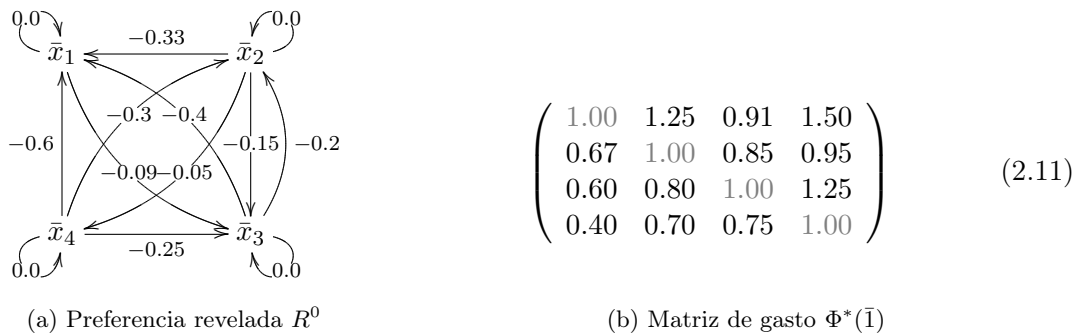


Figura 2.8: Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.

La sección (a) de la Figura 2.8 permite apreciar la existencia de seis ciclos no triviales⁵³ existentes en la relación de preferencia revelada directa, a partir de los cuales es posible obtener el índice de Afriat. A continuación, mostramos las observaciones que forman parte de cada ciclo, C_r , de la preferencia revelada.

Ciclo $\mathcal{C}_1 := \{\bar{x}_4, \bar{x}_3, \bar{x}_2\}$	$d_1 = \max[a_{43}, a_{32}, a_{24}] = -0.15$	$d = \min\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\} = -0.15$ $w^* = \max[0, -d] = 0.15$ $e^* = 1 - w^* = 0.85$ <p style="text-align: center;">Índice de Afriat</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$e^* = (0.85, 0.85, 0.85, 0.85)$</div>
Ciclo $\mathcal{C}_2 := \{\bar{x}_1, \bar{x}_3\}$	$d_2 = \max[a_{13}, a_{31}] = -0.09$	
Ciclo $\mathcal{C}_3 := \{\bar{x}_2, \bar{x}_3\}$	$d_3 = \max[a_{23}, a_{32}] = -0.15$	
Ciclo $\mathcal{C}_4 := \{\bar{x}_2, \bar{x}_4\}$	$d_4 = \max[a_{24}, a_{42}] = -0.05$	
Ciclo $\mathcal{C}_5 := \{\bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1\}$	$d_5 = \max[a_{32}, a_{21}, a_{13}] = -0.09$	

A partir de la identificación de cada ciclo, C_r , se calcula d_r . Para esta serie finita de datos de demanda, el índice crítico de coste de ineficiencia de Afriat, w^* , es igual a $w^* = \min[0, -\min d_r] = -0.15$, y, por tanto, $e^* = 0.85$.

Por construcción, el índice de Afriat, e^* , también conocido con el nombre de *índice crítico de coste de eficiencia*, es el límite superior de todos los niveles de eficiencia para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y, por tanto, proporciona una medida idónea de la consistencia

⁵³Un ciclo C se dice que es no trivial si no es un lazo.

de los datos observados. Resulta relativamente sencillo probar que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface el axioma GARP(\bar{v}) para todo $\bar{v} > \bar{e}^*$ y que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma GARP(\bar{v}) para todo $\bar{v} < \bar{e}^*$. Esto es, para todo $\nu \in [0, e^*)$ la lista finita de datos de demanda es consistente (al nivel global de eficiencia ν) con la hipótesis de la maximización de la utilidad⁵⁴. La siguiente proposición garantiza la validez de la afirmación anterior:

Proposición 2.3.3 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y \bar{e}^* el vector-índice de Afriat. Entonces se verifica la siguiente propiedad:*

$$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \text{ satisface GARP}(\bar{\xi}), \forall \bar{\xi} \in C_n \text{ tal que } \bar{\xi} \ll \bar{e}^*$$

Demostración: Para demostrar que $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\xi}$) será suficiente probar que $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\xi}} = \emptyset$, para cada $\bar{\xi} \ll \bar{e}^*$. Para cada ciclo \mathcal{C}_r de $R^0(\bar{1})$ tal que:

$$\bar{p}_r \bar{x}_r \geq \bar{p}_r \bar{x}_s, \dots, \bar{p}_j \bar{x}_j \geq \bar{p}_j \bar{x}_k, \dots, \bar{p}_q \bar{x}_q \geq \bar{p}_q \bar{x}_r$$

se define $d_r = \max[a_{rs}, \dots, a_{jk}, \dots, a_{qr}]$. Entonces si $d = \min_r d_r$ y \bar{e}^* el vector-índice de Afriat para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ se verifica que \mathcal{C}_r no es un ciclo incoherente con GARP(\bar{e}^*) si $d_r > d$; puesto que existen observaciones i, j en \mathcal{C}_r para las cuales se verifica: $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$ y $e^* \bar{p}_i \bar{x}_i < \bar{p}_j \bar{x}_j$. Por tanto, $a_{ij}^{w^*} = a_{ij} + w^* > 0$, donde $w^* = 1 - e^*$ representa al coste de ineficiencia de Afriat. Por otra parte, para cada ciclo \mathcal{C}_r incoherente con GARP en $R^0(\bar{1})$, si $d_r = d$ entonces \mathcal{C}_r es un ciclo de la relación $R^0(\bar{e}^*)$. Para este ciclo sólo caben dos posibilidades:

(i) que \mathcal{C}_r no sea incoherente con GARP(\bar{e}^*); esto es,

$$[a_{rs}^{w^*} \leq 0, \dots, a_{jk}^{w^*} \leq 0, \dots, a_{qr}^{w^*} \leq 0] \implies [a_{rs}^{w^*} = \dots = a_{jk}^{w^*} = \dots = a_{qr}^{w^*} = 0]$$

(ii) que \mathcal{C}_r sea incoherente con GARP(\bar{e}^*); es decir,

$$[a_{rs}^{w^*} \leq 0, \dots, a_{jk}^{w^*} \leq 0, \dots, a_{qr}^{w^*} \leq 0] \implies [a_{rs}^{w^*} \leq 0, \dots, a_{jk}^{w^*} \leq 0, \dots, a_{qr}^{w^*} \leq 0]$$

En ambos casos, por construcción del índice, existen al menos un par de observaciones i, j en \mathcal{C}_r para las cuales se cumple que $a_{ij}^{w^*} = 0$. Por otra parte, si para todo $\bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} \leq \bar{e}^*$ designamos por $\bar{w} = (w_1, \dots, w_n)$ a la n -tupla de números reales (asociada a $\bar{\xi}$) definida por $\bar{w} = \bar{1} - \bar{\xi}$ se verifica que $a_{ij}^{w_i} > a_{ij}^{w^*} = 0$ o, equivalentemente, que $\sim \bar{x}_i R^0(\bar{\xi}) \bar{x}_j$, lo cual implica que $\mathcal{C}_r \notin \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\xi}}$. En virtud de lo anterior para cada $\mathcal{C} \in \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{e}^*}$ se cumple que $\mathcal{C} \notin \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\xi}}, \forall \bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} \ll \bar{e}^*$. Además, como $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{e}^*} \subseteq \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{1}}$, puesto que $\bar{0} \leq \bar{e}^* \leq \bar{1}$ se tiene que $\mathcal{C} \notin \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\xi}^*}$, para cada $\mathcal{C} \notin \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{1}^*}$. Por tanto, $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\xi}^*} = \emptyset, \forall \bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} \ll \bar{e}^*$, como queríamos probar. ■

⁵⁴Nótese, además, que para toda n -tupla de números reales $\bar{\xi}$ en el n -cubo unidad C_n con $\bar{\xi} \ll \bar{e}^*$, si $\omega^* = 1 - \xi^*$ entonces $a_{ij}^{w_i^*} > a_{ij}^{w^*}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. De lo anterior se desprende que la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\xi}^*)$ es acíclica y que, por tanto, la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma SARP($\bar{\xi}^*$), $\forall \bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} \ll \bar{e}^*$.

El procedimiento propuesto por Afriat para el cálculo teórico de su índice de eficiencia precisa recorrer todos los ciclos de la relación de preferencia revelada. Este procedimiento (o la modificación que requiere únicamente tener en cuenta los ciclos incoherentes) es NP-completo y, por tanto, insoluble en el sentido más débil de la lógica matemática⁵⁵, dado que su coste computacional crece de manera exponencial en relación con el tamaño de los datos⁵⁶. Para solventar esta problemática, Houtman y Maks (1987) propusieron utilizar un procedimiento iterativo de localización basado en el método de la bisección. La siguiente figura muestra el funcionamiento de este procedimiento iterativo de búsqueda binaria, procedimiento que permite calcular una buena aproximación, e^* , al verdadero valor del índice de Afriat en un tiempo polinomial.

Algorithm 7. Pseudo-code for computing Afriat's index

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. for $i, j := 1$ to n do $C_{e^*}[i, j] \leftarrow C[i, j]$, $e^* := 1$; $\text{step} := 1$; $\text{maxstep} := 50$
3. for $i, j := 1$ to n if $(C[i, i] \geq C[i, j])$ then $R^0[i, j] \leftarrow 1$ else $R^0[i, j] := \text{false}$
4. Compute the transitive closure R of R^0 and check for GARP
5. While [$\text{step} \leq \text{maxstep}$] do
6. for $i := 1$ to n do $C_{e^*}[i, i] \leftarrow e^* \cdot C[i, i]$
7. Check $\text{GARP}(e^*)$
8. if ($\text{viol} > 0$) then $e^* := e^* - \frac{1}{2^{\text{step}+1}}$ else $e^* := e^* + \frac{1}{2^{\text{step}+1}}$
9. return

Output: $e^* = e^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

El procedimiento de localización anterior propuesto por Houtman y Maks (1987) considera el intervalo $[0, 1]$ en el que los datos satisfacen $\text{GARP}(\bar{0})$ y violan $\text{GARP}(\bar{1})$. Entonces, por la Proposición 2.3.1, existirá un índice $0 < e < 1$ para el cual los datos satisfacen $\text{GARP}(\bar{e})$. El objetivo es encontrar el mayor valor de e para el cuál se garantice la consistencia de los datos con la hipótesis de la maximización de la utilidad. El procedimiento anterior para calcular el índice de Afriat consiste en ir acercando sistemáticamente los extremos del intervalo hasta que

⁵⁵Nótese que para hallar el índice de Afriat basta con considerar únicamente los ciclos incoherentes con GARP puesto que $d_r = 0$ para cada ciclo \mathcal{C}_r de R^0 que no sea incoherente con GARP. Los ciclos incoherentes con GARP (en la relación de preferencia revelada directa S) que forman un subconjunto del conjunto de ciclos existentes en la relación de preferencia revelada directa.

⁵⁶El número máximo posible de ciclos incoherentes con GARP es $\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{n-j+1} (n-1)!$, donde n es el número de datos de demanda. Además, el tiempo de ejecución necesario para encontrar todos los ciclos incoherentes existentes en la relación de preferencia revelada es proporcional a $\mathcal{O}((n+e) \cdot (c+1))$, donde e designa al número de aristas ($e \leq n^2$) del grafo dirigido $G = (V, E)$ que representa la relación de preferencia revelada directa asociada a los datos observados.

obtenemos un intervalo de anchura suficientemente pequeña en el que se localiza e^* . El proceso de decisión para subdividir el intervalo consiste en tomar el punto medio del intervalo $[0, 1]$ y luego analizar las dos posibilidades que pueden darse:

- 1) La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ verifique $\text{GARP}(\bar{e}_1)$.
- 2) La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no verifique $\text{GARP}(\bar{e}_1)$.

En cualquier caso, se encuentra un intervalo la mitad de ancho que el original que contiene a un índice de eficiencia. Si ocurre 1) entonces el algoritmo considera el intervalo $[1/2, 1]$ puesto que siempre se cumple la siguiente propiedad: si la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{e}_1)$ entonces $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\xi})$ para todo $\bar{\xi} \ll \bar{e}_1$. El proceso se repite hasta encontrar un intervalo tan pequeño como el deseado; esto es, hasta hallar un $e^* \in [0, 1]$ tal que

$$|e^* - e_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

El tiempo de ejecución de este procedimiento es polinomial y depende de la precisión deseada. Más concretamente, la complejidad computacional es proporcional a $\mathcal{O}(\text{maxstep} \cdot t(n))$, donde maxstep es el número de pasos requerido para alcanzar la solución con la tolerancia deseada mientras que $t(n)$ es el tiempo de ejecución del algoritmo que se utilice para computar la clausura transitiva de la relación binaria. Nótese que si, por ejemplo, queremos una precisión de 15 cifras decimales significativas tenemos que hacer $\text{maxstep} = 50$. En consecuencia, si el número de datos n es inferior a 50 el tiempo de ejecución de este procedimiento es superior a $\mathcal{O}(n \cdot t(n))$. Es importante resaltar que e^* es una aproximación al verdadero valor del índice de Afriat que depende de la precisión deseada⁵⁷, mientras que el procedimiento original de Afriat [v. Afriat (1972, págs. 478-479)], a pesar de facilitar el valor exacto e^* , no es eficiente puesto que requiere un tiempo de ejecución proporcional a $\mathcal{O}(n!)$, donde n es el tamaño de los datos. Así pues, los dos procedimientos existentes en la literatura económica para obtener el índice de Afriat presentan limitaciones.

A continuación, presentamos el pseudocódigo de un nuevo procedimiento⁵⁸ que no presenta las limitaciones anteriores: es eficiente (es de tipo polinomial) y permite encontrar, para cualquier serie finita de datos de demanda, el valor exacto del índice de Afriat, e^* , sin necesidad de recorrer todos los ciclos de la relación de la preferencia revelada, siendo su tiempo de ejecución polinomial. En este procedimiento utilizamos el hecho de que toda la información preferencial de un consumidor está reflejada en su matriz de gasto. Nótese que, suponiendo normalizados los precios, podemos afirmar que si $C \equiv (c_{ij})$ es la matriz de gasto asociada a una serie finita de datos de demanda, existe un c_{ij} menor o igual que uno tal que $e^* = c_{ij}$.

⁵⁷Si \hat{p} es una aproximación al valor exacto p , el error de la aproximación es la distancia entre el valor exacto y el aproximado. Esto es, $E_p = |p - \hat{p}|$.

⁵⁸Este procedimiento es de complejidad polinomial. Nótese que para los datos de demanda agregados (series temporales) que casi siempre satisfacen GARP o, en su defecto, que presentan muy pocas violaciones GARP este algoritmo es más eficiente que el propuesto por Houtman y Maks.

Algorithm 8. Pseudo-code for computing Afriat's efficiency index**Input:** Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

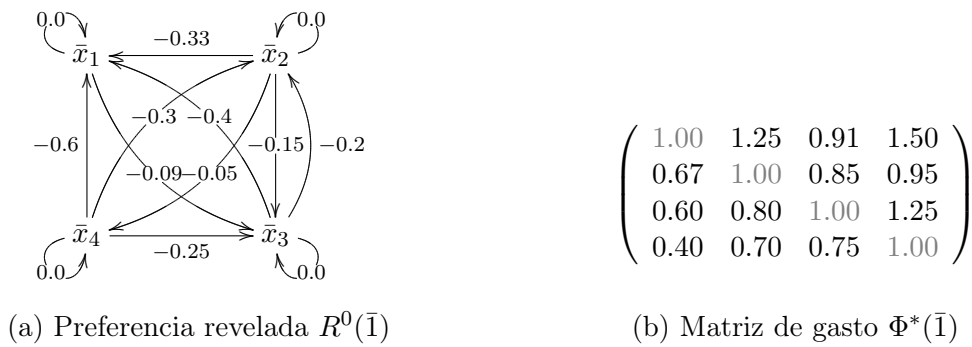
1. begin
2. Set $k := 1$ and $e_k \leftarrow 1$
3. for $i, j := 1$ to n do $C_{e_k}[i, j] \leftarrow C[i, j]$
4. Construct R^0 y P^0 matrices and compute the transitive closure R of R^0
5. If [$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ violates GARP]
6. for $i, j := 1$ to n do $A_1[i, j] \leftarrow R^t[i, j] \odot P^0[i, j]$ and $A[i, j] \leftarrow A_1 \odot C[i, j]$
7. Construct dynamic array $[e_1, e_2, \dots, e_h]$
8. procedure inverse quicksort ($e_r \geq e_s, \forall r < s$)
9. While [$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ violates GARP(\bar{e}_k)]
10. for $i := 1$ to n do $C_{e_k}[i, i] \leftarrow e_k \cdot C[i, i]$
11. Construct $R^0(\bar{e}_k)$ y $R(\bar{e}_k)$ matrices and check GARP(\bar{e}_k)
12. $k := k + 1$
13. $e \leftarrow (e_k + e_{k-1})/2$
14. If $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ violates GARP(\bar{e}) then $e^* \leftarrow e_k$ else $e^* \leftarrow e_{k-1}$
15. return e^*

Output: $\bar{e}^* = e^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

El algoritmo anterior determina aquellas observaciones fuertemente inconsistentes con GARP y el exceso de gasto en las elecciones que son las causantes de las violaciones GARP, y almacena la información en la matriz de números reales $A = \mathfrak{R}((R^t \odot P^0) \odot C)$. A continuación, selecciona aquellos elementos de la matriz A distintos de cero y los almacena en un array $[e_1, \dots, e_h]$. Posteriormente, hace una llamada a un procedimiento de ordenación, *procedure inverse quicksort*, que ordena los valores del array $[e_1, e_2, \dots, e_h]$ en orden decreciente⁵⁹. El algoritmo construye para estos valores las relaciones de preferencia revelada “relajadas” $R^0(\bar{e}_k)$ y $R(\bar{e}_k)$ para, a continuación contrastar GARP(\bar{e}_k) finalizando una vez que los datos satisfacen GARP. Nótese que la corrección y validez del procedimiento están completamente caracterizadas por la siguiente propiedad: para cualquier serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ se tiene que los datos satisfacen GARP(\bar{e}_*), donde $\bar{e}_* = (e_*, \dots, e_*)$ y $e_* = \min_{i,j} c_{ij}$. El siguiente ejemplo permite ilustrar el funcionamiento de este procedimiento.

Ejemplo 2.3.3 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) cuya matriz de gasto asociada, ilustrada en la sección (b) de la siguiente figura, está definida en (2.11).

⁵⁹ El procedimiento de ordenación quicksort un array de n elementos en un tiempo de ejecución proporcional a $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$.



Entonces se cumple⁶⁰:

$$A_1 = R^t \odot P^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \mathfrak{R}(A_1) \odot C = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.91 & 0.00 \\ 0.67 & 0.00 & 0.85 & 0.95 \\ 0.60 & 0.00 & 0.80 & 0.00 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 0.00 \end{pmatrix}$$

Recorriendo la matriz A y seleccionando aquellos valores distintos de cero construimos (paso 7 del algoritmo) el array dinámico

e_k	1.00	0.91	0.67	0.85	0.95	0.60	0.80	0.40	0.70	0.75
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

La llamada al procedimiento *procedure inverse quicksort* ordena el array anterior de tal modo que $e_r \geq e_s, \forall r < s$ obteniendo (paso 8 de algoritmo) el siguiente array:

e_k	1.00	0.95	0.91	0.85	0.80	0.75	0.70	0.67	0.60	0.40
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Como $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viola $\text{GARP}(\bar{e}_1)$ el algoritmo considera (de manera ordenada) cada uno de estos índices como candidatos posibles. Una simple comprobación permite apreciar como se viola $\text{GARP}(\bar{e}_k)$ para $k = 2, \dots, 4$, y como se satisface para $k = 5$ por lo que el bucle While (paso 9) proporciona el valor de $k = 5$. A continuación, considera el índice (paso 13) $e = (e_4 + e_5)/2 = 0.825$ y contrasta $\text{GARP}(\bar{e})$. Por construcción, si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisficiera $\text{GARP}(\bar{e})$, entonces e_5 no sería el límite superior de los niveles globales de eficiencia⁶¹ y, por lo tanto, $e^* = e_4$. En caso contrario, $e^* = e_5$. Para estos datos es claro que se satisface $\text{GARP}(\bar{e})$ y, por lo tanto, $e^* = e_4 = 0.85$. La Figura 2.9 ilustra gráficamente este procedimiento.

⁶⁰El producto lógico $A \odot B$ de dos matrices cuadradas A y B de orden n es una matriz cuadrada C de orden n definida por $C[i, j] = A[i, j] \cdot B[i, j], \forall i, j$.

⁶¹Por razones de continuidad puede probarse que si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{e})$, entonces $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{v})$ para todo $e_k \leq v < e_{k-1}$.

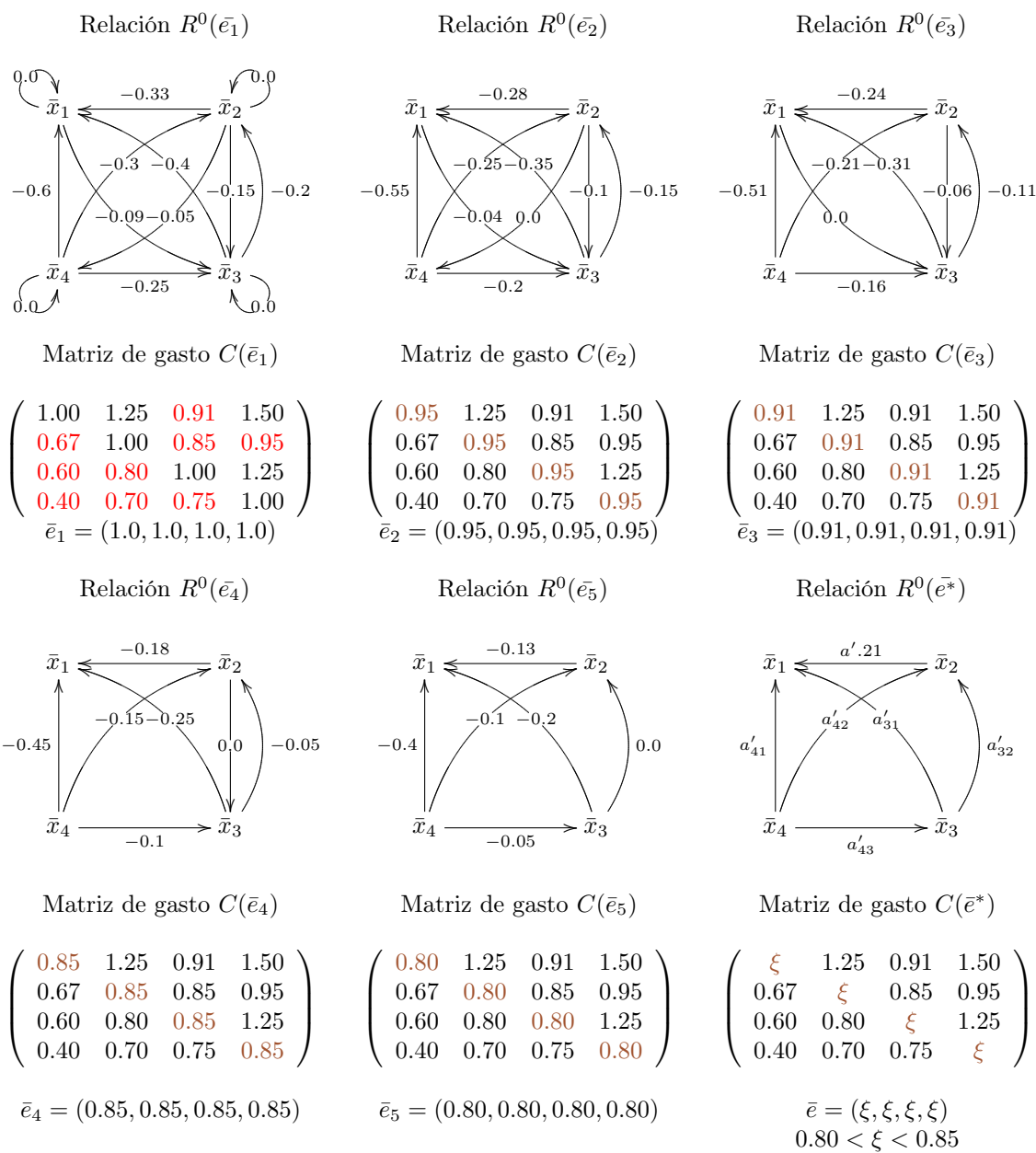


Figura 2.9: Cálculo del índice de Afriat e^* .

El índice de Afriat, que se ha utilizado en numerosos estudios empíricos del comportamiento de un consumidor⁶² para analizar la eficiencia en el consumo, presenta unas propiedades muy deseables que pasamos a estudiar.

⁶²Varian (1993), utilizando los datos coleccionados por Battalio (1973), revela que el 98% de los individuos evidenció un comportamiento consistente al 95% de eficiencia (índice de Afriat igual a 0.95) con la maximización.

Afriat (1973, pág. 468) prueba, en primer lugar, que si $\min_r d_r > 0$, entonces los datos observados son consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Es obvio que si $\min_r d_r > 0$, entonces para cada secuencia ordenada de observaciones $rst \dots q$ se cumple que $\max[a_{rs}, a_{st}, \dots, a_{qr}] > 0$ y, en consecuencia, las observaciones $rst \dots q$ no pueden formar parte de un ciclo de la relación de la preferencia revelada directa y, por tanto, la relación de preferencia revelada es acíclica y los datos satisfacen GARP. De hecho, también satisfacen SARP. Recíprocamente, si la preferencia revelada es acíclica entonces para cada secuencia ordenada de observaciones $rst \dots q$ se cumple que $\max[a_{rs}, a_{st}, \dots, a_{qr}] > 0$ y, en consecuencia, $\min_r d_r > 0$. Este autor también prueba que si $\min_r d_r < 0$, entonces los datos no pueden haber sido generados por una función de utilidad cóncava, no saciada, continua y monótona que genera la conducta observada. Si $\min_r d_r < 0$, necesariamente debe existir una secuencia ordenada de observaciones $rst \dots q$ distintas que forman parte de un ciclo incoherente con GARP y, por tanto, los datos no satisfacen el axioma GARP. Por otra parte, si los datos violan GARP existen observaciones $rst \dots q$ que forman parte de un ciclo de la relación de preferencia revelada incoherente con GARP, luego $\max[a_{rs}, a_{st}, \dots, a_{qr}] < 0$ y, por lo tanto, $\min_r d_r < 0$. El mismo autor afirma (sin poner ningún ejemplo) que si $\min_r d_r = 0$ entonces los datos pueden ser o no consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Lo anterior justifica la validez de la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y e^* su índice de Afriat asociado. Entonces,*

- (i) $e^* < 1 \Rightarrow \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface el axioma GARP.
- (ii) $e^* = 1 \not\Rightarrow \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma GARP.

El Ejemplo 2.3.4 garantiza la validez del segundo aserto de la proposición anterior.

zación de la utilidad. Mattei (1994) obtiene que el 0.8% y el 0% de las familias encuestadas presentan un comportamiento inconsistente al 95% de eficiencia con datos cuatrimestrales y anuales, respectivamente. Sippel (1997) encuentra que el 8.3% y el 10% de los participantes de sus experimentos mostraron un comportamiento inconsistente con la teoría neoclásica de la demanda a un 95% de eficiencia. Sippel (1996) realiza 1000 simulaciones de Monte Carlo obteniendo que los datos de consumo agregado encontrados en Varian (1990) verifican el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada al 97% de eficiencia. Andreoni y Miller (2002) encuentran que el 78.1% de los individuos de una población de 5000 consumidores con comportamiento aleatorio mostraron inconsistencias con la teoría neoclásica de la demanda, etc.

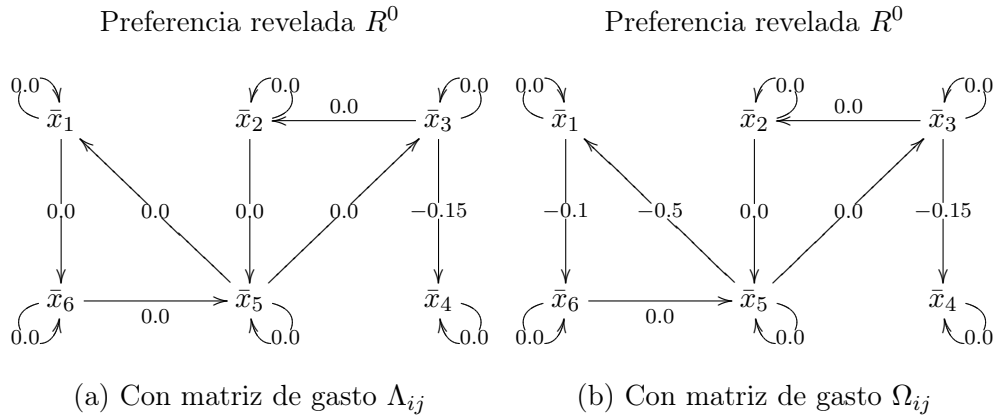
Ejemplo 2.3.4 Sean $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y $\{(\bar{p}'_t, \bar{x}'_t)\}_{t=1}^n$ dos series finitas de datos de demanda de tamaño seis normalizadas cuyas matrices de coste asociadas $C = (c_{ij})_{i,j}$ definidas por $c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j$ $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ son Λ_{ij} y Ω_{ij} respectivamente

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1.00 & 1.10 & 1.10 & 1.20 & 1.30 & 1.00 \\ 1.40 & 1.00 & 1.30 & 1.20 & 1.00 & 1.10 \\ 1.10 & 1.00 & 1.00 & 0.85 & 1.10 & 1.30 \\ 1.20 & 1.10 & 1.30 & 1.00 & 1.30 & 1.10 \\ 1.00 & 1.10 & 1.00 & 1.20 & 1.00 & 1.10 \\ 1.10 & 1.20 & 1.30 & 1.20 & 1.00 & 1.00 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccccc} 1.00 & 1.10 & 1.10 & 1.20 & 1.30 & 0.90 \\ 1.40 & 1.00 & 1.30 & 1.20 & 1.00 & 1.10 \\ 1.10 & 1.00 & 1.00 & 0.85 & 1.10 & 1.30 \\ 1.20 & 1.10 & 1.30 & 1.00 & 1.30 & 1.10 \\ 1.00 & 1.10 & 1.00 & 1.20 & 1.00 & 1.10 \\ 1.10 & 1.20 & 1.30 & 1.20 & 1.00 & 1.00 \end{array} \right)$$

(a) Matriz de gasto Λ_{ij}

(b) Matriz de gasto Ω_{ij}

Resulta inmediato comprobar que el índice de Afriat, e^* , es igual a uno en ambos casos. Sin embargo, la matriz de gasto Υ_{ij} genera una función de utilidad continua, cóncava, no saciada y creciente que racionaliza la conducta observada, mientras que la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}'_t, \bar{x}'_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto Ω_{ij} no satisface el axioma GARP. El siguiente gráfico ilustra los grafos dirigidos que representa la relación de preferencia revelada directa asociada a las matrices de coste Λ_{ij} y Ω_{ij} , respectivamente.



A pesar de las bondades del índice de Afriat es importante resaltar que los datos observados no tienen por qué ser necesariamente consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad al nivel global de eficiencia e^* .

Proposición 2.3.5 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada y e^* su índice de Afriat asociado. Entonces $\{(\bar{p}'_t, \bar{x}'_t)\}_{t=1}^n$ no tiene por qué satisfacer GARP(\bar{e}^*). ■

A continuación, presentamos un contraejemplo (Ejemplo 2.3.5) que muestra la veracidad del resultado anterior.

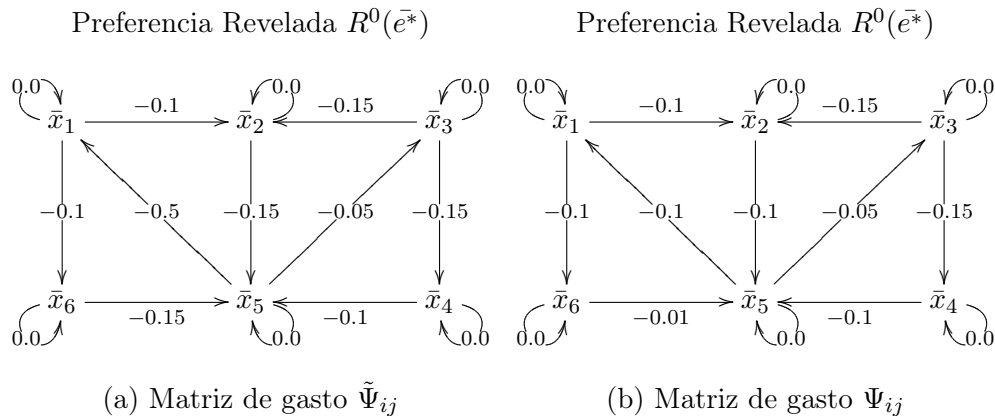
Ejemplo 2.3.5 Sean $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y $\{(\bar{p}'_t, \bar{x}'_t)\}_{t=1}^n$ dos series finitas de datos de demanda observados cuyas matrices de coste asociadas vienen dadas por:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1.00 & 0.90 & 1.10 & 1.20 & 1.30 & 0.90 \\ 1.40 & 1.00 & 1.30 & 1.20 & 0.85 & 1.10 \\ 1.10 & 0.85 & 1.00 & 0.85 & 1.10 & 1.30 \\ 1.20 & 1.10 & 1.30 & 1.00 & 0.90 & 1.10 \\ 0.50 & 1.10 & 0.95 & 1.20 & 1.00 & 1.10 \\ 1.10 & 1.20 & 1.30 & 1.20 & 0.85 & 1.00 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccccc} 1.00 & 0.90 & 1.10 & 1.20 & 1.30 & 0.90 \\ 1.40 & 1.00 & 1.30 & 1.20 & 0.90 & 1.10 \\ 1.10 & 0.85 & 1.00 & 0.85 & 1.10 & 1.30 \\ 1.20 & 1.10 & 1.30 & 1.00 & 0.90 & 1.10 \\ 0.90 & 1.10 & 0.95 & 1.20 & 1.00 & 1.10 \\ 1.10 & 1.20 & 1.30 & 1.20 & 0.99 & 1.00 \end{array} \right)$$

(a) Matriz de gasto $\tilde{\Psi}_{ij}$

(b) Matriz de gasto Ψ_{ij}

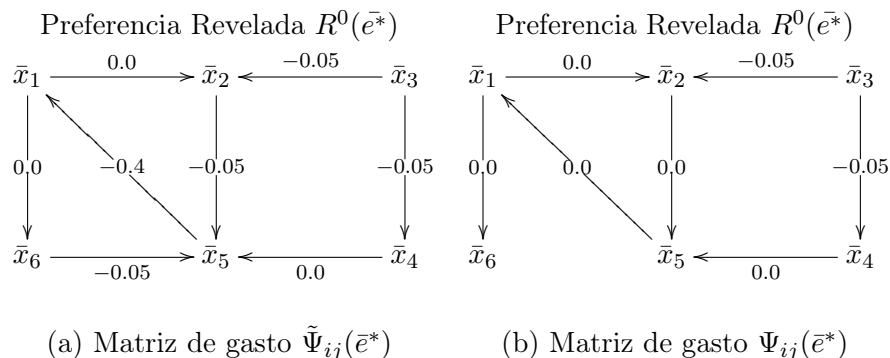
El siguiente gráfico ilustra la relación de preferencia revelada asociada a las series finitas de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y $\{(\bar{p}'_t, \bar{x}'_t)\}_{t=1}^n$ con matrices de coste asociadas $\tilde{\Psi}_{ij}$ y Ψ_{ij} respectivamente. Una simple inspección del gráfico muestra la existencia de ciclos incoherentes con GARP. En consecuencia, los datos violan GARP.



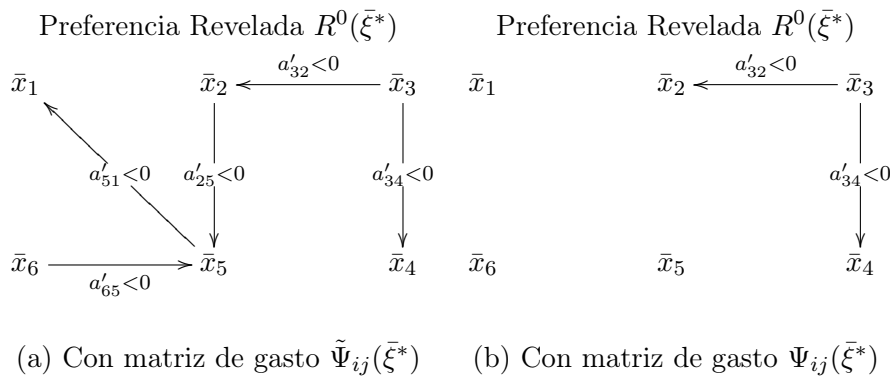
El índice de Afriat asociado a cada una de las series finitas de datos de demanda analizadas es igual a 0.9. Por otra parte, resulta inmediato ver que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viola el axioma $\text{GARP}(\bar{e}^*)$, mientras que $\{(\bar{p}'_t, \bar{x}'_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma $\text{GARP}(\bar{e}^*)$ ⁶³. Esto es, existe una función de utilidad $u_{e^*}(\cdot)$ que representa las preferencias de un consumidor al nivel global de eficiencia e^* para la matriz de gasto perturbada Ψ_{ij}^* . De lo anterior se desprende que una serie finita de datos de demanda dada que viole GARP no tiene por qué necesariamente ser consistente, al nivel global de eficiencia e^* , con la hipótesis de la maximización de la utilidad. A continuación, representamos la relación de preferencia revelada directa $R^0(e^*)$ para cada una de las series

⁶³El ciclo $\{(\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{x}_2, \bar{x}_5), (\bar{x}_5, \bar{x}_1)\}$ no es incoherente con GARP al nivel de eficiencia e^* .

finitas de datos de demanda analizadas.



En virtud de la Proposición 2.3.3, y dado que para toda serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y para cada n-tupla de números reales $\bar{\xi}^* = (\xi^*, \dots, \xi^*)$ en el n-cubo estándar unidad C_n con $\bar{\xi}^* \ll \bar{e}^*$, la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\xi}^*)$ es acíclica y, por tanto, la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma GARP($\bar{\xi}^*$). El siguiente gráfico ilustra el grafo dirigido asociado que representa para las series de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y $\{(\bar{p}'_t, \bar{x}'_t)\}_{t=1}^n$, respectivamente, la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\xi}^*)$ para todo $\bar{\xi}^*$ suficientemente próximo a \bar{e}^* con $\bar{\xi}^* \ll \bar{e}^*$, donde $\bar{\xi}^* = (\xi^*, \dots, \xi^*)$ es un elemento del n-cubo C_n . Obsérvese cómo $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y $\{(\bar{p}'_t, \bar{x}'_t)\}_{t=1}^n$ satisfacen SARP($\bar{\xi}^*$) para todo $\bar{\xi}^*$ en C_n con $\bar{\xi}^* \ll \bar{e}^*$.



El índice crítico de coste de eficiencia de Afriat no proporciona ninguna información sobre qué observaciones son las causantes de la falta de coherencia de las elecciones de consumo con la conducta optimizadora del consumidor, a pesar de ser la medida de eficiencia más utilizada en la literatura económica para analizar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo [v. Andreoni y Miller (2002), Barnett, Fisher y Sertelis (1992), Choi y Sosin (1992), Cox (1997), Drake (1997), Drake y Chrystal (1997a,1997b), Fleissig, Hall y Seater (2000), Harbaugh y Krause (2001), Mattei (1994, 2000), Patterson (1991), etc.]. Es deseable disponer,

por tanto, de una medida de la bondad del ajuste que permita determinar las observaciones que violan GARP y que permita conocer el grado de eficiencia del consumidor en su conducta de elección. Supongamos, por ejemplo, conocida una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ cuya matriz de gasto es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 1.0 & 0.8 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Una simple inspección de los datos permite afirmar que la matriz de gasto (2.12) no ha podido haber sido generada por una función de utilidad $u(\cdot)$ continua, cóncava, monótona y no saciada que racionaliza la conducta observada; esto es, la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viola el axioma GARP. En efecto, en la Figura 2.10, que ilustra el grafo dirigido que representa la relación de preferencia revelada directa asociada a la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.12), se puede apreciar la existencia de dos ciclos irreducibles de longitud negativa. El primer ciclo, formado por lotes de bienes $\bar{x}_1, \bar{x}_6, \bar{x}_7$; mientras que $\bar{x}_1, \bar{x}_6, \bar{x}_5$ componen el segundo ciclo. La figura muestra cómo los pares de observaciones 1, 6, 1, 7, 6, 7 y 5, 6 violan GARP. Esta figura muestra, además, como $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ no son inconsistentes con GARP; puesto que no forman parte de ningún ciclo de longitud negativa de la preferencia revelada directa.

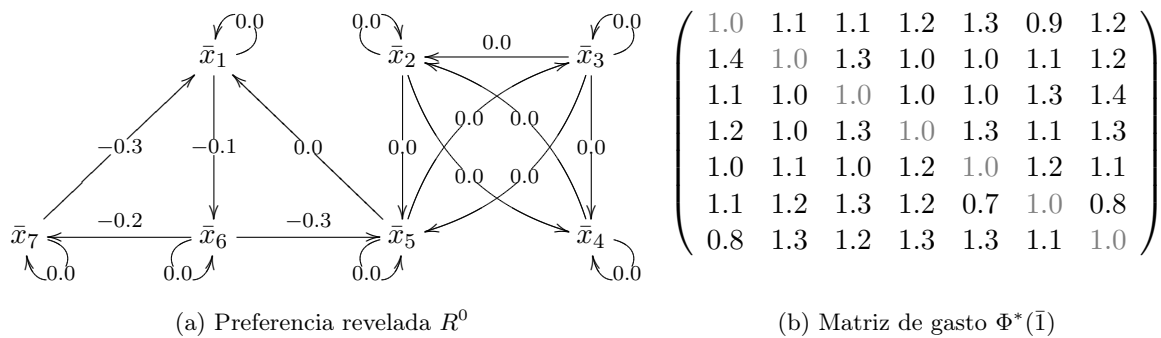
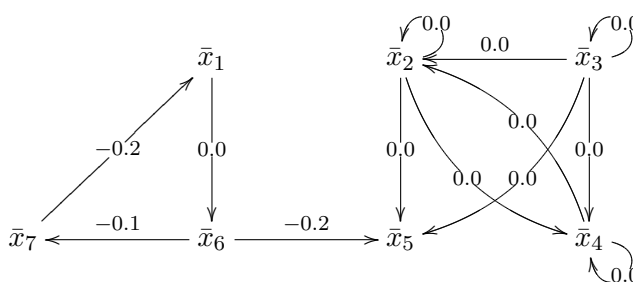


Figura 2.10: Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.

Resulta inmediato comprobar como el índice de Afriat, e^* , para estos datos es igual a 0.9. Pero, ¿por qué necesariamente tenemos que relajar la relación de la preferencia revelada en todas las observaciones si las observaciones 2, 3 y 4 no forman parte de ningún ciclo incoherente con GARP? Resulta lógico pensar que si el objetivo es eliminar los ciclos existentes en la

relación de preferencia revelada no tiene sentido relajar la relación de preferencia revelada en aquellas observaciones que son consistentes con GARP. Si, por ejemplo, para este conjunto de datos consideramos el vector-índice $\bar{\varphi}^* = (0.9, 1, 1, 1, 0.9, 0.9, 0.9)$, entonces se verifica la siguiente propiedad⁶⁴: la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.12) satisface $\text{GARP}(\bar{\xi})$ para todo $\bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} \ll \bar{\varphi}^*$. Obsérvese, además, que el vector-índice $\bar{\varphi}^* = (0.9, 1, 1, 1, 0.9, 0.9, 0.9)$ no relaja la relación de preferencia revelada original en las observaciones 2, 3 y 4 y es igual al índice de Afriat $e^* = 0.9$ en todas las demás observaciones⁶⁵. La Figura 2.11, que ilustra la matriz de gasto perturbada por $\bar{\varphi}^*$ y la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\varphi}^*)$ para este conjunto finito de observaciones de demanda, permite inferir que la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.12) satisface $\text{GARP}(\bar{\xi})$ para todo $\bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} \ll \bar{\varphi}^*$.

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 0.9 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$



(a) Matriz de gasto $\Phi^*(\bar{\varphi})$

(b) Preferencia revelada $R^0(\bar{\varphi})$

Figura 2.11: Índice crítico de coste de eficiencia de Afriat generalizado.

Del ejemplo anterior surge de manera natural la siguiente pregunta: si Afriat se propone “relajar” la relación de preferencia revelada introduciendo un índice global de eficiencia en todas las observaciones con objeto de “romper” todos los ciclos existentes en dicha relación, ¿por qué “relajar” la relación de preferencia revelada en todas las observaciones y no solamente en aquellas observaciones que forman parte de algún ciclo incoherente con GARP? Cabe, pues, preguntarse si sería factible “relajar” la relación de preferencia revelada solamente en aquellas observaciones inconsistentes con GARP, puesto que estas observaciones son las causantes de las inconsistencias presentes en los datos. La Definición 2.3.3 junto con el Teorema 2.3.2 nos permitirán resolver afirmativamente a esta cuestión, y generalizar, por consiguiente, la aproximación de Afriat a la eficiencia en el consumo.

⁶⁴Nótese que para todo $\bar{\xi} \ll \bar{\varphi}^*$ la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\xi}^*)$ es acíclica puesto que estamos sumando la cantidad positiva $(1 - \xi^*)$ mayor que 0.1 a todas las aristas del grafo que representa R^0 para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y, por tanto, rompiendo todos los ciclos existentes en R^0 .

⁶⁵Obsérvese que los lotes de bienes \bar{x}_2, \bar{x}_3 y \bar{x}_4 no son inconsistentes con el axioma GARP (puesto que no pertenecen a ningún ciclo incoherente con GARP) y que los lotes de bienes \bar{x}_1, \bar{x}_5 y \bar{x}_6 forman parte de algún ciclo incoherente con GARP.

Definición 2.3.3 (Índice APM) Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda. Llamaremos índice APM al vector-índice $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ definido por:

$$\epsilon_t = \begin{cases} e^* & \text{si } \bar{x}_t \text{ es inconsistente con GARP} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \forall t = 1, \dots, n$$

El procedimiento de obtención de este índice es muy sencillo, por lo que hemos considerado que no era necesario introducir ningún ejemplo explicativo. En primer lugar, se computan las observaciones inconsistentes con GARP (algoritmo 4). Posteriormente, se calcula el índice de Afriat (algoritmo 8). Finalmente, se asigna el valor numérico 1 a aquellas observaciones consistentes con GARP y el índice de Afriat, e^* , a aquellas observaciones inconsistentes con GARP en el sentido de la Definición 2.2.2 de la sección 2.2.

En lo sucesivo, para cada serie finita de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, y para cada n-tupla de números reales $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ en el n-cubo unidad C_n designaremos por $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{e}}$ a la familia formada por todos los ciclos de longitud negativa en $R^0(\bar{e})$. Nótese que para cada $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ en C_n y para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, inconsistente con GARP es cierto⁶⁶ que $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{e}} = \emptyset$ si y solamente si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP(\bar{e}). El siguiente teorema nos muestra que el índice generalizado de Afriat es un índice apropiado para medir la bondad del ajuste del modelo de maximización de la utilidad.

Teorema 2.3.2 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y $\bar{\epsilon}$ el vector-índice de Afriat generalizado. Entonces se verifica la siguiente propiedad:

$$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \text{ satisface GARP}(\bar{\zeta}), \quad \forall \bar{\zeta} \in C_m \text{ con } \bar{\zeta} \ll \bar{\epsilon}$$

Demostración: Será suficiente probar que $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\xi}} = \emptyset$ para cada $\bar{\xi} \ll \bar{\epsilon}^*$, donde \mathcal{D} designa a la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Sea $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ la n-tupla en C_n definida por $\omega_t = 0$, si \bar{x}_t es consistente con GARP y $\omega_t = w^*$, en caso contrario; donde w^* es el índice crítico de coste de ineficiencia de Afriat. Por construcción de $\bar{\epsilon}$, para cada ciclo \mathcal{C} de $R^0(\bar{\omega})$ tal que:

$$\bar{p}_r \bar{x}_r \geq \bar{p}_r \bar{x}_s, \dots, \bar{p}_j \bar{x}_j \geq \bar{p}_j \bar{x}_k, \dots, \bar{p}_q \bar{x}_q \geq \bar{p}_q \bar{x}_r$$

sólo caben dos posibilidades:

(i) existen $\bar{x}_i, \bar{x}_j \in \mathcal{C}$ tales que $\bar{x}_j R \bar{x}_j \wedge \bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$, con $1 - \bar{p}_i \bar{x}_j < w^*$.

⁶⁶Si suponemos los datos normalizados, para cada $0 \leq e_i \leq 1$ se cumple que $\bar{p}_i \bar{x}_j > e_i \Leftrightarrow \bar{x}_i R^0(e_i) \bar{x}_j$. Nótese que $\bar{x}_i R^0(e_i) \bar{x}_j \Leftrightarrow |\bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i)| = |\bar{p}_i \bar{x}_j - 1| > w_i$, donde $w_i = 1 - e_i$. En consecuencia, $\bar{x}_i R^0(e_i) \bar{x}_j \Leftrightarrow 1 - \bar{p}_i \bar{x}_j > w_i \Leftrightarrow \bar{p}_i \bar{x}_j < 1 - w_i$. Por otra parte, es importante resaltar que para cada $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ en C_n como $R^0(\bar{e}) \subseteq R^0$ se cumple $\bar{x}_i R^0(e_i) \bar{x}_j \Rightarrow \bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$ y, en consecuencia, que $\sim \bar{x}_i R^0 \bar{x}_j \Rightarrow \bar{x}_i R^0(e_i) \bar{x}_j$. De lo anterior se desprende que $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{e}} \subseteq \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\omega}} = \Sigma_{\mathcal{D}}$, por ser $R^0(\bar{e})$ una subrelación de $R^0(\bar{\omega}) = R^0$.

(ii) existen $\bar{x}_i, \bar{x}_j \in \mathcal{C}$ tales que $\bar{x}_j R \bar{x}_j \wedge \bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$, con $1 - \bar{p}_i \bar{x}_j = w^*$.

Si ocurre (i), entonces $\sim \bar{x}_i R^0(\bar{\epsilon}) \bar{x}_j$ y, por tanto, $\mathcal{C} \notin \Sigma_{\mathcal{G}}^{\bar{\epsilon}}$. Si ocurre (ii) entonces, $\epsilon_i \bar{p}_i \bar{x}_i = \bar{p}_i \bar{x}_j$, luego $\bar{x}_i R^0(\bar{\epsilon}) \bar{x}_j$. Además se verifica que $\bar{x}_j R(\bar{\epsilon}) \bar{x}_i$. Por tanto, \mathcal{C} es un ciclo de la relación $R^0(\bar{\epsilon})$ que puede ser incoherente con GARP en $R^0(\bar{\epsilon})$, o no. En el primer caso, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viola GARP($\bar{\epsilon}$), mientras que en el segundo, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\epsilon}$). Veamos, a continuación, que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\xi}$) para todo vector-índice $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ en C_n tal que $\xi_t < \epsilon_t$ si \bar{x}_t es inconsistente con GARP y $\xi_t = \epsilon_t$, en caso contrario. Para cada \bar{x}_t inconsistente con GARP se tiene $1 - \xi_t > 1 - \epsilon_t = w^*$ y, por tanto, para cada par de observaciones i, j en \mathcal{C} para las cuales $1 - \bar{p}_i \bar{x}_j = w^*$ se cumple $1 - \bar{p}_i \bar{x}_j > 1 - \xi_i$, lo cual implica que $\sim \bar{x}_i R^0(\bar{\xi}) \bar{x}_j$ y, por lo tanto $\mathcal{C} \notin \Sigma_{\mathcal{G}}^{\bar{\xi}}$. De lo anterior se desprende de manera inmediata que $\Sigma_{\mathcal{G}}^{\bar{\xi}} = \emptyset$ y, en consecuencia que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\zeta}$), $\forall \bar{\zeta} \in C_n$ con $\bar{\zeta} \ll \bar{\epsilon}$, dado que para todo $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ con $\bar{\zeta} \leq \bar{\xi}$ y $\zeta_t < \xi_t$ para todo $\bar{x}_t \notin \mathcal{VS}$ se cumple que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\zeta}$). ■

A continuación, presentamos el pseudocódigo de un procedimiento eficiente para obtener el índice de Afriat generalizado. El tiempo de ejecución de este algoritmo es proporcional a $\mathcal{O}(n^2 \cdot t(n))$, donde $t(n)$ es la complejidad computacional del algoritmo utilizado en el cómputo de la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada directa.

Algorithm 9. Pseudo-code for computing generalized Afriat's efficiency index

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. Construct R^0 and P^0 matrices
3. Construct the transitive closure R of R^0 and check GARP
4. If [$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ violates GARP] then
5. procedure inconsistent with GARP (algorithm 5)
 Note: $V[j] = 1$ if and only if \bar{x}_j is inconsistent with GARP
6. procedure Afriat's efficiency index (algorithm 9)
7. for $j := 1$ to n if $V[j] = 1$ then $\epsilon_j \leftarrow e^*$ else $\epsilon_j \leftarrow 1$.
8. return

Output: $\bar{\epsilon} = \epsilon(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

El funcionamiento del algoritmo es muy sencillo: en primer lugar, realiza una llamada al algoritmo 5 para determinar aquellas observaciones inconsistentes⁶⁷ con GARP. A continuación, realiza una llamada al algoritmo 8 que calcula el índice de Afriat. Finalmente, en el paso 6 el procedimiento asigna el índice de Afriat a aquellas observaciones inconsistentes con GARP y

⁶⁷Recordemos que \bar{x}_t es inconsistente con GARP si y solamente si $\exists \bar{x}_s$ tal que $[\bar{x}_s P \bar{x}_t \wedge \bar{x}_t R^0 \bar{x}_s] \vee [\bar{x}_s R \bar{x}_t \wedge \bar{x}_t P^0 \bar{x}_s]$ Para más detalles véase la sección 2.2 de esta memoria.

el valor numérico 1 al resto de las observaciones. Es importante resaltar, además, las siguientes propiedades que verifica este nuevo índice de eficiencia. Es importante resaltar que si $\bar{\epsilon} < \bar{1}$ entonces la serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface el axioma GARP. Por otra parte, el Ejemplo 2.3.4 y el Ejemplo 2.3.5 garantizan la veracidad del siguiente aserto.

Proposición 2.3.6 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y $\bar{\epsilon}$ su índice de Afriat generalizado asociado. Entonces,*

i) $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no tiene por qué satisfacer $GARP(\bar{\epsilon})$.

ii) $\bar{\epsilon} = \bar{1} \Leftrightarrow \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma GARP. ■

Si suponemos conocida la forma paramétrica de la función de utilidad que representa las preferencias de un consumidor, entonces es posible determinar el conjunto de índices $(\iota_t)_{t=1}^n$ definidos en (2.2) directamente. Sin embargo, como las preferencias no son directamente observables tampoco lo es la función métrica monetaria. En el espíritu de la aproximación no paramétrica al análisis de la demanda, cabe preguntarse cómo obtener (a partir de los datos de demanda observados) “buenas” aproximaciones a la función métrica monetaria y cómo podríamos comparar funciones que proporcionan cotas sobre $m(\bar{p}, \bar{x})$ que son consistentes con cualquier serie finita de datos de demanda.

Una alternativa deseable a la verdadera función métrica monetaria es la función de sobrecompensación, m^+ , introducida en la literatura económica por Varian (1982, pág. 959). La función de sobrecompensación (que se postula como la menor de las cotas superiores de todas las funciones de utilidad que racionalizan los datos) viene determinada por:

$$m^+(\bar{p}, \bar{x}_0) = \inf \{ \bar{p}\bar{x} : \bar{x} \in RP(\bar{x}_0) \}, \quad (2.13)$$

donde para cada cesta de bienes \bar{x}_0 , el conjunto $RP(\bar{x}_0)$ está formado por todas aquellas cestas de bienes que son estrictamente preferidas a \bar{x}_0 para cada función de utilidad $u(\cdot)$ que racionaliza (podría haber racionalizado) los datos. Esto es, $RP(\bar{x}_0) = \{ \bar{x} : \text{para todo } \bar{p} \in S(\bar{x}), \bar{x}P\bar{x}_0 \}$ designa al conjunto de observaciones “reveladas preferidas” a \bar{x}_0 . El conjunto $RP(\bar{x}_0)$ es importante porque si $\bar{x} \in RP(\bar{x}_0)$, entonces el consumidor representativo que generó los datos prefiere estrictamente \bar{x} a \bar{x}_0 y constituye, como veremos posteriormente, la mejor “frontera interior” del conjunto de puntos del contorno superior que pasa por el punto \bar{x}_0 . Knoblauch (1992) muestra –como veremos posteriormente– cómo construir de una manera sencilla y plausible este conjunto. En la Figura 2.12 se ilustra en el espacio de consumo bidimensional este importante concepto. Esta figura representa una única observación de la conducta del consumidor, (\bar{p}_1, \bar{x}_1) .

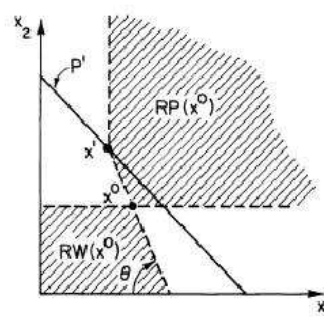


Figura 2.12: $RP(\bar{x}_0)$ y $RW(\bar{x}_0)$: un caso simple.

¿Qué implica esta elección respecto a la curva de indiferencia que pasa por la cesta \bar{x}_0 ? Adviértase que \bar{x}_0 no se ha observado previamente; en concreto, carecemos de los datos sobre los precios a los cuales \bar{x}_0 sería una elección óptima. Tenemos que utilizar la “preferencia revelada” para “acotar” la curva de indiferencia que pasa por \bar{x}_0 . Obsérvese cómo el consumidor revela que prefiere \bar{x}_1 a \bar{x}_0 . Además, si las preferencias son convexas y monótonas, todas las cestas situadas en el segmento que conecta \bar{x}_0 y \bar{x}_1 deben ser, al menos, tan buenas como la \bar{x}_0 y todas las cestas situadas al noreste de esta cesta son, al menos tan buenas, como la \bar{x}_0 ; es decir, el conjunto formado por todas las cestas de bienes que pertenecen a $RP(\bar{x}_0)$. El conjunto $RP(\bar{x}_0)$, formado por aquellas cestas de bienes que el consumidor revela que prefiere estrictamente a \bar{x}_0 , es simplemente la envolvente monótona convexa de todas las cestas de bienes reveladas preferidas a \bar{x}_0 : a saber \bar{x}_1 y \bar{x}_0 . Para verificar esta afirmación, sea \bar{x} cualquier punto en $RP(\bar{x}_0)$, y sea \bar{p} cualquier vector (no negativo) de precios en el cual podría haber sido demandado por un consumidor. Geométricamente, es claro que para cualquier restricción presupuestaria, \bar{x} se revelará preferido a \bar{x}_0 , bien directamente o indirectamente a través de \bar{x}_1 . De manera análoga, para verificar la construcción del conjunto de observaciones⁶⁸ “reveladas peor a \bar{x}_0 , $RW(\bar{x}_0)$, se consideran todos los precios en los cuales \bar{x}_0 podría ser demandado siendo todavía consistente con la configuración (\bar{p}_1, \bar{x}_1) . En este caso, tal y como se puede apreciar en la Figura 2.12, GARP impone una importante restricción sobre \bar{p}_0 : el ángulo que forma la recta de balance que pasa por \bar{x}_0 con el eje de coordenadas no puede ser superior a θ , dado que en caso contrario, esto podría ocasionar inconsistencias con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada: podría darse el caso que $\bar{x}_1 P \bar{x}_0$ y $\bar{x}_0 P^0 \bar{x}_1$. Así pues, $RW(\bar{x}_0)$ es el conjunto de puntos en \mathbb{R}_+^2 que situados justamente por debajo de todas las restricciones presupuestarias o rectas de balance consistentes con GARP, como se puede apreciar en la Figura 2.12.

La función de sobrecompensación, $m^+(\bar{p}, \bar{x}_0)$, es la menor de las cotas superiores para $m(\bar{p}, \bar{x}_0)$, donde m designa a la función métrica monetaria asociada con alguna utilidad $u(\cdot)$ que racionaliza los datos. Nótese que para todo par (\bar{p}_0, \bar{x}) se cumple $m^+(\bar{p}, \bar{x}_0) \geq m(\bar{p}, \bar{x}_0)$. Además, $\bar{x}_i R \bar{x}$ implica que $m^+(\bar{p}, \bar{x}_i) \geq m^+(\bar{p}, \bar{x})$. De lo anterior se desprende que $m^+(\bar{p}, \bar{x})$ es una función de utilidad que respeta el orden de la preferencia revelada, proporcionando, por tanto, una cota teórica ideal a la función de compensación. Varian (1982, pág. 960) señala la dificultad que entraña computar esta función en la práctica dado que (aunque desde el punto de vista teórico resultaba muy fácil comprobar si una cesta de bienes \bar{x} era un elemento de $RP(\bar{x}_0)$ o de $RW(\bar{x}_0)$) en la teoría de programación matemática no existía ningún procedimiento que permitiese determinar explícitamente estos conjuntos. Por esta razón, Varian (1982, pág. 960) define una cota superior a la función de sobrecompensación:

$$am^+(\bar{p}, \bar{x}_0) = \inf \{ \bar{p}\bar{x} : \bar{x} \in CM(\bar{x}_0) \} \quad (2.14)$$

⁶⁸Nótese que si \bar{x}' está en $RW(\bar{x}_0)$, sea cual sea el precio bajo el cual \bar{x}_0 ha sido demandado –siempre, claro está, que sea consistente con el conjunto de datos previo– ese precio hará necesariamente que \bar{x}_0 se revele preferido a \bar{x}' . Así pues, para cada función de utilidad $u(\cdot)$ cóncava y monótona que racionalice los datos se debe cumplir que $u(\bar{x}_0) \geq u(\bar{x}')$. Entonces, es claro que $RW(\bar{x}_0)$ es el conjunto formado por todas las cestas de bienes \bar{x} son peores que la \bar{x}_0 . Es importante señalar (este hecho se desprende inmediatamente de las definiciones) que \bar{x}_0 se revela preferido a \bar{x}' si y solamente si \bar{x}' se “revela peor” que \bar{x}_0 . Es decir, $\bar{x}_0 \in RP(\bar{x}') \Leftrightarrow \bar{x}' \in RW(\bar{x}_0)$.

donde $CM(\bar{x}_0)$ es el interior de la envolvente convexa del conjunto $\{\bar{x} : \bar{x} \geq \bar{x}_i, \bar{x}_i R \bar{x}_0\}$. Entonces, como $CM(\bar{x}_0)$ es el polígono convexo cuyos vértices son precisamente aquellas cestas de bienes \bar{x}_i tales que $\bar{x}_i R \bar{x}_0$, para hallar $am^+(\bar{p}, \bar{x}_0)$ bastará con calcular $\bar{p}\bar{x}$ solamente en los vértices⁶⁹ de $\overline{CM}(\bar{x}_0)$; esto es, solamente en $\{\bar{x}_i : \bar{x}_i R \bar{x}_0\}$. En consecuencia, la función $am^+(\bar{p}, \bar{x}_0)$ también puede reescribirse en términos del siguiente problema de optimización:

$$am^+(\bar{p}, \bar{x}_0) = \min\{\bar{p} \cdot \bar{x}_i : \bar{x}_i R \bar{x}_0\} \quad (2.15)$$

y es, por tanto, muy fácil⁷⁰ de calcular en la práctica, a partir del conjunto de datos observados. Sin embargo, la descripción de Knoblauch (1992, pág. 661-662) sobre los conjuntos de la preferencia revelada RP, RW y NRW permite calcular m^+ directamente. Esta autora muestra⁷¹ que para cada cesta de bienes \bar{x}_0 , $RP(\bar{x}_0) \subseteq \overline{CM}(\bar{x}_0)$ y, en consecuencia, $CM(\bar{x}_0) \subseteq RP(\bar{x}_0) \subseteq \overline{CM}(\bar{x}_0)$, lo que implica que $m^+(\bar{x}_0) = am^+(\bar{x}_0)$ y, por tanto, se puede calcular fácilmente en la práctica. Lo anterior sugiere utilizar, en lo sucesivo, la siguiente definición para la función de sobrecompensación.

Definición 2.3.4 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y R la relación de preferencia revelada definida sobre este conjunto. Llamaremos función de sobrecompensación, o función generalizada de compensación, a la función $m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R)$ del conjunto $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ en \mathbb{R}_+ definida por:

$$m^+(\bar{p}, \bar{x}, R) = \inf\{\bar{p}\bar{y} : \bar{y} R \bar{x}\} \quad (2.16)$$

Una característica interesante de la función de sobrecompensación⁷² es que sólo contiene argumentos observables. Esta función, que no muestra ninguna ambigüedad en lo que se refiere a las transformaciones monótonas, mide la utilidad en unidades monetarias; esto es, mide el gasto mínimo que necesitaría realizar un consumidor dados los precios $\bar{p} = (p_1, \dots, p_l)$ para disfrutar del mismo bienestar, en términos de la relación de preferencia revelada indirecta R , del que disfrutaría si demandase la cesta $\bar{x} = (x_1, \dots, x_l)$ en esa situación presupuestaria [v. Knoblauch (1992), Varian (1982), Varian (1990)]. A partir de la función de sobrecompensación es posible construir un conjunto de índices de eficiencia que permiten medir el grado de violación del comportamiento optimizador de un consumidor. Varian (1990, 1993) generaliza, a partir de la la función generalizada de sobrecompensación de Samuelson, la aproximación de eficiencia de Afriat permitiendo un “nivel de eficiencia”, i_t , distinto en cada observación.

⁶⁹El conjunto $\overline{CM}(\bar{x}_0)$ es la adherencia de $CM(\bar{x}_0)$.

⁷⁰Varian (1982, pág. 960-961) muestra, en primer lugar, que $am^+(\bar{p}, \bar{x}) \geq m^+(\bar{p}, \bar{x})$ para todo par \bar{p}, \bar{x} y, en segundo lugar, que existe una relación de preferencia, \succeq , convexa y monótona que genera los datos de demanda tal que $am^+(\bar{p}, \bar{x}_0) = m(\bar{p}, \bar{x}_0)$ para todo \bar{x}_0 .

⁷¹Así, dadas dos cestas de bienes cualesquiera \bar{x}_i y \bar{x}_j , es posible afirmar que \bar{x}_i es estrictamente preferida a \bar{x}_j , $\bar{x}_i \in RP(\bar{x}_j)$, que \bar{x}_j es estrictamente preferida a \bar{x}_i , $\bar{x}_j \in RP(\bar{x}_i)$, o que existe una insuficiente información en los datos para decidir qué cesta de bienes es estrictamente preferida a la otra, si $\bar{x}_i \notin RP(\bar{x}_j)$ y $\bar{x}_j \notin RP(\bar{x}_i)$. En este caso pueden existir algunas funciones de utilidad que racionalizan los datos para las que \bar{x}_i es estrictamente preferida a \bar{x}_j y otras para las que \bar{x}_j es estrictamente preferida a \bar{x}_i .

⁷²Nótese que, para toda cesta demandada \bar{x}_t se cumple $m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) \leq \bar{p}_t \bar{x}_t$, por ser R reflexiva.

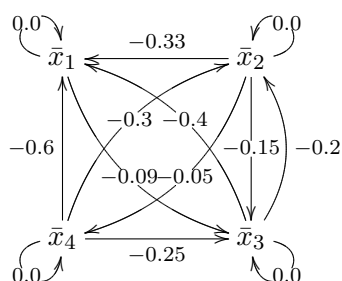
Definición 2.3.5 (Varian; 1990) Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ un conjunto de observaciones de demanda. Llamaremos índice de eficiencia de Varian al vector-índice $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$ tal que

$$i_t = \frac{m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R)}{\bar{p}_t \bar{x}_t}, \quad \forall t = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

La interpretación económica del vector-índice de eficiencia \bar{i} o, equivalentemente, del conjunto $(i_t)_{t=1}^n$ de “índices de eficiencia” es la siguiente: si el valor medio de i_t es \bar{i} , podemos decir que en promedio el consumidor es eficiente en un $\bar{i}\%$ en su conducta de elección. Los “residuos” $(i_t)_{t=1}^n$ miden la cantidad de dinero que necesita gastar el consumidor para obtener el mismo bienestar en comparación con la cantidad de dinero que utiliza realmente.

El conjunto de “niveles de eficiencia” de Varian, $(i_t)_{t=1}^n$, permite calcular una aproximación a la fracción de renta monetaria derrochada por un consumidor y, por tanto, determinar el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo así como precisar que observaciones son las causantes de esta falta de coherencia. Con el fin de comprender mejor el proceso de obtención del índice de Varian presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.6 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.11). El siguiente gráfico, que representa la relación de preferencia revelada directa para este conjunto de datos de demanda, muestra como todas las observaciones de demanda son fuertemente inconsistentes con GARP.



(a) Preferencia revelada $R^0(\bar{I})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Matriz booleana $R^0(\bar{I})$

Para cada \bar{x}_t inconsistente con GARP denotaremos por $\Upsilon(\bar{x}_t)$ al conjunto formado por todos los \bar{x}_s tales que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{x}_t P^0 \bar{x}_s$; esto es, $\bar{x}_s \in \Upsilon(\bar{x}_t) \Leftrightarrow \bar{x}_s R \bar{x}_t \wedge \bar{x}_t P^0 \bar{x}_s$. Nótese que $\Upsilon(\bar{x}_t) \neq \emptyset$ si y solamente si \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con GARP. Nótese, además, que para cada \bar{x}_t fuertemente inconsistente con GARP se cumple que el $\min_s \{\bar{p}_t \bar{x}_s : \bar{x}_s R \bar{x}_t\}$ se alcanza, por definición de $\Upsilon(\bar{x}_t)$, en un elemento de dicho conjunto. anterioridad, “relaja” la relación de preferencia revelada solamente en aquellos lotes de bienes fuertemente inconsistentes con GARP, dado que éstos son los causantes del comportamiento inconsistente de un individuo.

De la relación de preferencia revelada asociada a la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.11) se deduce, por ejemplo, que \bar{x}_1 se revela preferido a \bar{x}_2 y éste último, estrictamente preferido a \bar{x}_1 . Lo mismo ocurre con \bar{x}_3 y \bar{x}_4 por lo que $\Upsilon(\bar{x}_2) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$. Ahora bien, como por (2.3.5) se tiene que $i_t = m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R)/\bar{p}_t \bar{x}_t$ para todo $t \in \{1, \dots, n\}$ y como $m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) = \{\bar{p}_t \bar{x}_s : \bar{x}_s R \bar{x}_t\}$ obtenemos el valor de $i_2 = \min\{\bar{p}_2 \bar{x}_1, \bar{p}_2 \bar{x}_3, \bar{p}_2 \bar{x}_4\} = 0.67$, como nivel de eficiencia de Varian, para \bar{x}_2 . Razonando de manera análoga se obtienen los restantes niveles de eficiencia de Varian. A continuación, presentamos los ciclos existentes en la relación de preferencia revelada así como los conjuntos $\Upsilon(\bar{x}_t)$ para cada \bar{x}_t fuertemente inconsistente con GARP y el vector-índice de Varian para la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.11).

Ciclo $\mathcal{C}_1 := \{\bar{x}_4, \bar{x}_3, \bar{x}_2\}$	$\Upsilon(\bar{x}_1) = \{\bar{x}_3\}$	$i_1 = m(\bar{p}_1, \bar{x}_1) = \min\{c_{13}\} = 0.91$
Ciclo $\mathcal{C}_2 := \{\bar{x}_1, \bar{x}_3\}$	$\Upsilon(\bar{x}_2) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$	$i_2 = m(\bar{p}_2, \bar{x}_2) = \min\{c_{21}, c_{23}, c_{24}\} = 0.67$
Ciclo $\mathcal{C}_3 := \{\bar{x}_2, \bar{x}_3\}$	$\Upsilon(\bar{x}_3) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4\}$	$i_3 = m(\bar{p}_3, \bar{x}_3) = \min\{c_{31}, c_{32}, c_{34}\} = 0.60$
Ciclo $\mathcal{C}_4 := \{\bar{x}_2, \bar{x}_4\}$	$\Upsilon(\bar{x}_4) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$	$i_4 = m(\bar{p}_4, \bar{x}_4) = \min\{c_{41}, c_{42}, c_{43}\} = 0.40$
Ciclo $\mathcal{C}_5 := \{\bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1\}$	Índice de Varian <div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px;">$\bar{i} = (0.91, 0.67, 0.60, 0.40)$</div>	

La siguiente figura ilustra la matriz de gasto perturbada por el conjunto de “niveles de eficiencia” de Varian, $(i_t)_{t=1}^n$, el grafo dirigido $G = (V, E, \omega)$ que representa la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{i})$ y los pesos definidos sobre las aristas de dicho grafo⁷³. La sección (c) de esta figura muestra la inexistencia de ciclos de longitud negativa en $R^0(\bar{i})$, por lo que la serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.11) satisface GARP(\bar{i}).

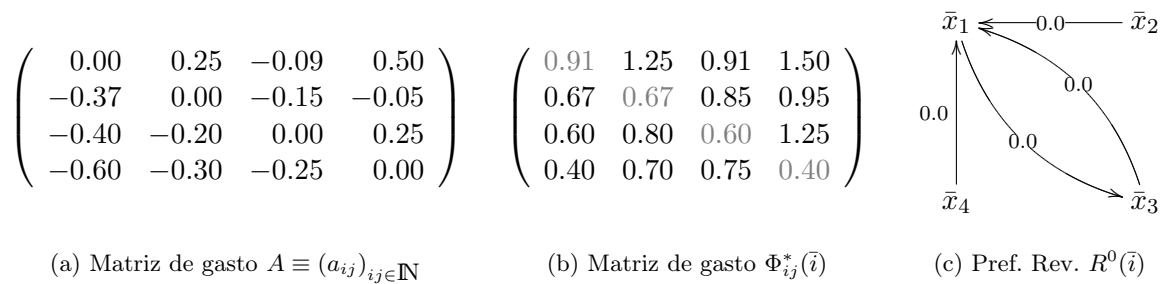


Figura 2.13: Niveles de eficiencia de Varian.

El procedimiento propuesto por Varian (1987) para el cálculo de su índice es un procedimiento iterativo de complejidad computacional polinomial. El siguiente algoritmo, que puede encontrarse en Tsur (1989, pág. aa) ilustra este procedimiento.

⁷³Sea $A \equiv (a_{rs})_{r,s \in \mathbb{N}}$ la matriz de números reales definida por: $a'_{rs} = \bar{p}_r \bar{x}_s - i_r \bar{p}_r \bar{x}_r, \forall r, s \in \{1, \dots, n\}$. Los elementos de esta matriz, a_{rs} , representan el “coste” de ir del nodo \bar{x}_r a \bar{x}_s en el grafo G que representa la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{i})$.

Algorithm 10. Pseudo-code for computing efficiency levels of Varian (Y.Tsur, 1989)

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. Set $M(j) = 1$ and $C_e(i, j) = C(i, j)$ for $i, j = 1, \dots, n$
3. Set $C_e(j, j) = M(j) \cdot C(i, j)$ for $j = 1, \dots, n$
4. for $i, j = 1, \dots, n$ set $R_e^0(i, j) = 1$ or 0 as $C_e(i, i) \geq$ or $<$ $C_e(i, j)$, respectively, and calculate its transitive closure R_e
5. Set $G_e = \{j : R_e(i, j) = 1 \text{ and } C_e(j, j) > C_e(j, i) \text{ for at least one case } i\}$
6. If $G_e = \emptyset$ then go to 7, else go to 2.
7. Calculate the n by 1 vector M as

$$M_j = \begin{cases} \min_{x_i R_e x_j} \{C_e(j, i)/C_e(j, j)\} & j \in G_e \\ M_j & j \in G_e^c \end{cases}$$

(G_e^c indicating the complement of G_e) and go to 2

Output: Efficiency levels of Varian (Tsur, 1989).

Tsur (1989, pág. 361) señala que el Algoritmo 10 es eficiente y que necesita, a lo sumo, de n iteraciones para obtener el vector-índice de Varian⁷⁴. Lo anterior equivale a afirmar que el tiempo de ejecución de este procedimiento es proporcional a $\mathcal{O}(n^4)$ dado que puede precisar de n iteraciones, y en cada iteración se precisa calcular la clausura transitiva de la preferencia revelada⁷⁵. Sin embargo, merece la pena resaltar que su apreciación no es del todo correcta puesto que este procedimiento calcula el ‘conjunto de “niveles de eficiencia” de Varian, $(i_t)_{t=1}^n$, en una única iteración y, por tanto, la complejidad computacional de este algoritmo es inferior a $\mathcal{O}(n^3)$.

A continuación, presentamos el pseudocódigo de un procedimiento eficiente para obtener el índice de Varian. Este procedimiento iterativo, corrección del algoritmo propuesto por Tsur (1989), sólo requiere una iteración para calcular el conjunto de “niveles de eficiencia” de Varian, $(i_t)_{t=1}^n$, en un tiempo polinomial.

⁷⁴Tsur (1989, pág. 361) afirma lo siguiente: “[...] *This procedure can take at most n iterations, since any case j has been corrected it can never violate $GARP_e$ again. Clearly, the perturbed data generated by the perturbation vector $e = M$ satisfy $GARP_e$ [...]*”.

⁷⁵Téngase en cuenta que tanto Varian (1982, pág. 970-971) como Tsur (1989, pág. 361) utilizan el clásico algoritmo de Warshall –de complejidad polinomial $\mathcal{O}(n^3)$ – para calcular la relación de preferencia revelada indirecta asociada a cualquier serie finita de datos de demanda de tamaño n . Véase Tsur (1989, pág. 361) y Varian (1982, pág. 970-971), para más detalles.

Algorithm 11. Corrected pseudo-code for computing Varian's index**Input:** Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. for $j := 1$ to n do $e[j] \leftarrow 1$
3. for $i, j := 1$ to n if $C[i, i] \geq C[i, j]$ then $R^0[i, j] \leftarrow 1$ else $R^0[i, j] \leftarrow 0$
4. Compute the transitive closure R of R^0 and check for GARP
5. if $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ does not agree with GARP then
 - for $j := 1$ to n do $e[j] \leftarrow \min \left\{ \frac{C[j, i]}{C[j, j]} : \bar{x}_i R \bar{x}_j \right\}$
6. return

Output: $\bar{i} = i(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

El algoritmo anterior presenta la misma complejidad computacional que el cómputo de la clausura transitiva de una relación binaria definida sobre un conjunto finito de opciones; esto es, su tiempo de ejecución es proporcional a $\mathcal{O}(t(n))$, donde $t(n)$ es la complejidad computacional del algoritmo utilizado en el cómputo de la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada directa.

Varian (1990) señala la principal ventaja de su índice respecto del propuesto por Afriat es que su índice resulta más fácil de calcular⁷⁶. Sin embargo, el procedimiento de obtención del vector-índice de Varian es poco intuitivo. Por tanto, desde un punto de vista académico resulta interesante la búsqueda de un **procedimiento matricial para la obtención del conjunto de niveles de eficiencia de Varian**. A priori, esto parece plausible puesto que en virtud del isomorfismo existente entre el álgebra de las matrices booleanas $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}), +, \odot, \cdot, {}^t, {}^c, \mathbf{O}_n, \mathbf{I}_n \rangle$ y el álgebra $\langle \mathcal{R}(X), \cup, \cap, \circ, {}^{-1}, {}^c, \emptyset, \Delta \rangle$ de las relaciones binarias definidas sobre un conjunto finito de opciones $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) es posible contrastar la consistencia de los datos observados con los diferentes axiomas de la preferencia revelada WARP, SARP, GARP, etc. en términos matriciales⁷⁷. Así por ejemplo, comprobar si la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma GARP equivale a probar si $\mathbf{R} \odot (\mathbf{P}^0)^t = \mathbf{O}_n$ o, equivalentemente, $\mathbf{R}^t \odot \mathbf{P}^0 = \mathbf{O}_n$.

Como mostraremos a continuación, el vector-índice de Varian admite una interpretación matricial en términos de las matrices booleanas asociadas a la relación de preferencia revelada. En efecto, sea $C = (c_{ij})_{ij}$ ($c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j, \forall i, j$) la matriz de gasto asociada a $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, \mathbf{R}^0 la matriz booleana que representa a R^0 ($\mathbf{R}^0(i, j) = 1$ si $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$, y $\mathbf{R}^0(i, j) = 0$ en caso contrario), \mathbf{P}^0 la matriz booleana n por n que representa a P^0 ($\mathbf{P}^0(i, j) = 1$ si $\bar{x}_i P^0 \bar{x}_j$, y $\mathbf{P}^0(i, j) = 0$ en caso contrario), y, finalmente, \mathbf{R} la clausura transitiva de \mathbf{R}^0 ; esto es,

⁷⁶Citando palabras textuales de Varian (1990, pág. 131): “[...] In Afriat's (1967) original treatment of this idea, he considered choosing a single a that applied to all observations, rather than a different e_t for each observation. The advantage of Afriat's original proposal is that it is much easier to compute a single index than the multiple indices (e_t) [...]”. Véase Varian (1990), para más detalles.

⁷⁷Véase sección 1.5 y 3.2 de esta memoria, para más detalles.

$\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 \vee (\mathbf{R}^0)^2 \vee \dots \vee (\mathbf{R}^0)^n$. Entonces el vector-índice de Afriat, $\bar{i} \equiv (i_t)_{t=1}^n$ para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ se obtiene considerando el mínimo por filas de la matriz de números reales B definida por $B = A_1 + A_2$, donde A_1 designa la matriz cuadrada n por n definida por $A_1(i, j) = C(i, j) \cdot A(i, j)$ para todo i, j (esto es, $A_1 = C \odot A$), A_2 la matriz complemento de A en $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}), +, \odot, \cdot, {}^t, {}^c, O_n, I_n \rangle$ y, finalmente A es la matriz booleana cuadrada $\mathbf{R}^t \odot \mathbf{P}^0$ de tamaño n por n que representa a las observaciones fuertemente inconsistentes con GARP. Nótese que $A(i, j) = 1$ si y solamente si $\bar{x}_j R \bar{x}_i$ y $\bar{x}_i P^0 \bar{x}_j$.

El siguiente procedimiento permite obtener el conjunto del conjunto de niveles de eficiencia de Varian, $(i_t)_{t=1}^n$, combinando diferentes operaciones elementales (suma, suma booleana, producto lógico, trasposición, etc.) sobre los espacios de matrices⁷⁸.

Algorithm 12. New algorithm for computing Varian's index

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. for $j := 1$ to n do $e[j] \leftarrow 1$
3. for $i, j := 1$ to n if $C[i, i] \geq C[i, j]$ then $R^0[i, j] \leftarrow 1$ else $R^0[i, j] \leftarrow 0$
4. for $i, j := 1$ to n if $C[i, i] > C[i, j]$ then $P^0[i, j] \leftarrow 1$ else $P^0[i, j] \leftarrow 0$
5. Compute the transitive closure R of R^0
6. for $i, j := 1$ to n do $A[i, j] \leftarrow R[j, i] \cdot P^0[i, j]$ and $A_1[i, j] \leftarrow A[i, j] \cdot C[i, j]$
7. for $i, j := 1$ to n if $A[i, j] = 1$ then $A_2[i, j] \leftarrow 0$ else $A_2[i, j] \leftarrow 1$
8. for $i, j := 1$ to n do $B[i, j] \leftarrow A_1[i, j] + A_2[i, j]$
9. for $j := 1$ to n do $e[j] \leftarrow \minval B[j, 1 : n]$
10. return

Output: $\bar{i} = i(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

A continuación, ilustramos el procedimiento anterior calculando el vector-índice de Varian para la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.11). El procedimiento comienza considerando la matriz de gasto $C = (c_{ij})_{ij}$ ($c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j$, $\forall i, j$) que representa la estructura preferencial del conjunto de datos. A partir de esta matriz de gasto, el procedimiento calcula las matrices booleanas \mathbf{R}^0 y \mathbf{P}^0 en los pasos 3 y 4, respectivamente⁷⁹. En el paso número 5 el

⁷⁸Este procedimiento, aunque ilustrativo, es muy poco eficiente desde un punto de vista estrictamente computacional dado que requiere una complejidad computacional sensiblemente superior a $\mathcal{O}(n^3)$.

⁷⁹La matriz booleana \mathbf{R}^0 representa a la relación de preferencia revelada directa, mientras que \mathbf{P}^0 R^0 representa a la relación de preferencia revelada estricta. Nótese que $\mathbf{R}^0[i, j] = 1$ si y solamente si el consumidor revela directamente que prefiere \bar{x}_i frente a \bar{x}_j ; esto es, si y solamente si $C[i, i] \geq C[i, j]$. La matriz \mathbf{P}^0 se obtiene de manera similar, teniendo en cuenta que $\mathbf{P}^0[i, j] = 1$ si y solamente si $C[i, i] > C[i, j]$.

procedimiento calcula la matriz \mathbf{R} , clausura transitiva de la matriz booleana \mathbf{R}^0 . En el paso 6 se calcula la matriz $\mathbf{A} = \mathbf{R}^t \odot \mathbf{P}^0$ de la siguiente manera: $\mathbf{A}[i, j] = \mathbf{R}[j, i] \cdot \mathbf{P}^0[i, j]$, $\forall i, j$ y \mathbf{A}_1 , producto lógico de la matriz $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$ –representación real de la matriz \mathbf{A} – y la matriz de gasto. En el paso 7 se calcula la matriz \mathbf{A}_2 , matriz complemento⁸⁰ de la matriz booleana \mathbf{A} . En el siguiente paso se construye la matriz \mathbf{B} , a partir de la suma de las matrices \mathbf{A}_1 y $\mathfrak{R}(\mathbf{A}_2)$, la representación real de la matriz booleana \mathbf{A}_2 . El vector-índice de Varian se obtiene en el paso 9 tomando el mínimo por filas en la matriz \mathbf{B} .

El siguiente esquema ilustra el procedimiento matricial empleado para el cómputo del conjunto de niveles de eficiencia de Varian⁸¹.

$$\begin{array}{ccc}
 \Rightarrow \begin{array}{c} \text{matriz de gasto } C \\ \begin{pmatrix} 1.00 & 1.25 & 0.91 & 1.50 \\ 0.67 & 1.00 & 0.85 & 0.95 \\ 0.60 & 0.80 & 1.00 & 1.25 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 1.00 \end{pmatrix} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \mathbf{R}^0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \mathbf{P}^0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \\
 \\
 \Rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{R} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \mathbf{A} = \mathbf{R}^t \odot \mathbf{P}^0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \mathbf{A}_2 = [\mathbf{R}^t \odot \mathbf{P}^0]^c \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \\
 \\
 \Rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{A}_1 = \mathfrak{R}(\mathbf{A}) \odot C \\ \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.91 & 0.00 \\ 0.67 & 0.00 & 0.85 & 0.95 \\ 0.60 & 0.80 & 0.00 & 0.00 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 0.00 \end{pmatrix} \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{c} \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 + \mathfrak{R}(\mathbf{A}_2) \\ \begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 & 0.91 & 1.00 \\ 0.67 & 1.00 & 0.85 & 0.95 \\ 0.60 & 0.80 & 1.00 & 1.00 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 1.00 \end{pmatrix} \end{array} & \Rightarrow & \bar{i} = \begin{pmatrix} 0.91 \\ 0.67 \\ 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Observación 2.3.2 Del procedimiento anterior se desprende que si \mathbf{R}^0 y \mathbf{R} son las matrices booleanas asociadas a las relaciones de preferencia revelada \mathbf{R}^0 y \mathbf{R} , respectivamente, para una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1$, $\forall t$), entonces si $\mathbf{R}^0[i, j] = 1$ o $\mathbf{R}[i, j] = 1$ para todo $\forall i, j$, el vector-índice de Varian es el mínimo por filas de la matriz de gasto; i.e., $i_t = \min_s c_{ts}$ donde $c_{ts} = \bar{p}_t \bar{x}_s$, $\forall t, s$. Esto sucede, por ejemplo, para las series finitas

⁸⁰Nótese que $\mathbf{A}_2[i, j] = 0$ si y solamente si $\mathbf{A}[i, j] = 1$ y que $\mathbf{A}_2[i, j] = 1$ si y solamente si $\mathbf{A}[i, j] = 0$.

⁸¹Uno de los errores típicos en programación son los errores relativos a las operaciones erróneas por una incorrecta identificación y definición de las variables. En el procedimiento anterior, \mathbf{A} y \mathbf{A}_2 son matrices booleanas mientras que C es una matriz real. Para poder operar correctamente con ellas se hace necesario convertir las matrices booleanas \mathbf{A} y \mathbf{A}_2 a matrices reales. Las matrices $\mathfrak{R}(\mathbf{A})$ y $\mathfrak{R}(\mathbf{A}_2)$ representan la representación real de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{A}_2 .

de datos de demanda con matrices de coste (2.11) y (2.19); esto es, en el Ejemplo 2.3.2 y 2.3.8 de esta memoria.

A continuación, analizaremos las principales propiedades del índice de Varian. El siguiente resultado, consecuencia directa de que para todo par de cestas demandadas inconsistentes con GARP tales que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ se verifica que $m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) < \bar{p}_t \bar{x}_t$, garantiza que el vector-índice de Varian está bien definido.

Proposición 2.3.7 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, y sea $i = (i_t)_{t=1}^n$ el índice de eficiencia de Varian. Entonces $0 \leq i_t \leq 1, \forall t = 1, \dots, n$.*

Demostración: Si el conjunto de observaciones de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada de forma exacta; entonces $i_t = 1$ para todo $t = 1, \dots, n$. Si el conjunto de datos satisface el axioma GARP de forma trivial; es decir, si ninguna observación se revela directa o indirectamente preferida a otra, se tiene $i_t = 0, \forall t = 1, \dots, n$. Para todo par de cestas de consumo, \bar{x}_t y \bar{x}_s , violando GARP tal que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$, se tiene $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_s$, luego $\frac{\bar{p}_t \bar{x}_s}{\bar{p}_t \bar{x}_t} < 1$, y por tanto $i_t < 1$. El índice i_t mide la magnitud de esta violación. ■

La siguiente proposición permite afirmar que, a diferencia del índice de Afriat, el vector-índice propuesto por Varian permite además de determinar el grado de eficiencia del consumidor, precisar qué observaciones son las causantes de la falta de coherencia de un consumidor con la maximización de la utilidad.

Proposición 2.3.8 *Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, y sea $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$ el vector-índice de Varian. Entonces $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{i})$. Además, $i_t < 1$, para algún $t = 1, \dots, n$ cuando $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface GARP.*

Demostración: Para ver que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{i})$ será suficiente con probar que para todo \bar{x}_t y \bar{x}_s si $\bar{x}_s R(\bar{i}) \bar{x}_t$ se tiene $i_t \bar{p}_t \bar{x}_t \leq \bar{p}_t \bar{x}_s$. Sean \bar{x}_t y \bar{x}_s dos cestas de consumo cualesquiera tal que $\bar{x}_s R(\bar{i}) \bar{x}_t$, entonces $\bar{x}_s R \bar{x}_t$, por ser $R(\bar{i})$ una subrelación de R . Por otra parte, como $i_t = \min \left\{ \frac{\bar{p}_t \bar{x}_s}{\bar{p}_t \bar{x}_t} : \bar{x}_s R \bar{x}_t, \forall \bar{x}_s \right\}$, se tiene $i_t \bar{p}_t \bar{x}_t \leq \bar{p}_t \bar{x}_s, \forall \bar{x}_s R \bar{x}_t$. Además, si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface GARP existen un t, s tales que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_s$, de donde se deduce, de manera inmediata, que $i_t < 1$. ■

Varian (2006) afirma que $(1 - i_t)$ mide el porcentaje mínimo de dinero que se le permite derrochar a un consumidor en la situación presupuestaria t para que sus elecciones de consumo sean consistentes con la teoría neoclásica de la demanda⁸². Sin embargo, su apreciación no es del todo correcta. El siguiente ejemplo establece la validez de esta afirmación.

⁸²Varian (2006) expresa, textualmente, esta idea: “[...] Varian [1990] suggests defining i_t separately for each observation and then finding those i_t that are as close as possible to 1 (in some norm). I interpret these i_t as a “minimal perturbation”. They can be interpreted as error terms and thus be used to give a statistical interpretation to the Goodness-of-Fit measure [...]”.

Ejemplo 2.3.7 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) cuya matriz de gasto asociada $C = (c_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ definida por $c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$ viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.2 & 0.9 \\ 1.5 & 1.0 & 0.6 & 2.0 \\ 0.7 & 1.1 & 1.0 & 1.3 \\ 1.1 & 2.0 & 0.8 & 1.0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Para estos datos es fácil comprobar que $\bar{i} = (0.9, 0.6, 0.7, 0.8)$. Sin embargo, si consideramos el vector-índice $\bar{\vartheta} = (0.9, 1, 0.7, 0.8)$ la serie finita de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{\vartheta})$ y claramente $\bar{\vartheta} > \bar{i}$ ⁸³. La Figura 2.14 ilustra la estructura de este conjunto de datos de demanda.

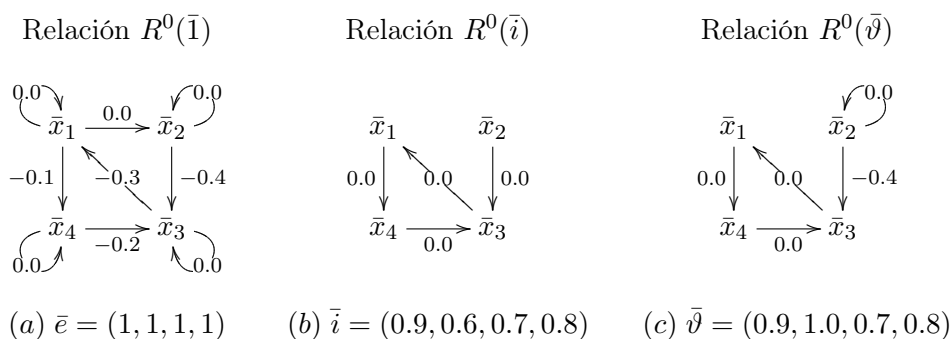


Figura 2.14: Niveles de eficiencia de Varian vs. “perturbación mínima”.

Nótese que el ejemplo anterior permite afirmar que, en algunas ocasiones, $1 - i_t$ no siempre representa el porcentaje mínimo de dinero (en términos unitarios) que se le permite derrochar al consumidor en la situación presupuestaria t -ésima para que sus decisiones de consumo sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. El Ejemplo 2.3.7 sugiere, por tanto, encontrar procedimientos alternativos de construcción de vectores-índice que permitan describir de manera más eficiente la bondad del ajuste del modelo de maximización de la utilidad.

Definición 2.3.6 Una aplicación-índice ξ es un procedimiento que asigna a cada serie de m observaciones de demanda un vector-índice $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m), 0 \leq \xi_t \leq 1 \quad \forall t$. Esto es, $\xi(\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m) = \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, para cada $\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$.

Para nuestros propósitos solo nos interesarán las aplicaciones-índice que describan bien el comportamiento aproximadamente racional que estamos estudiando. Esto puede alcanzarse en dos sentidos relacionados.

⁸³Nótese que para cada $\bar{\xi}$ en el cubo unidad con $\bar{\xi} > \bar{\vartheta}$, la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto 2.18 viola $GARP(\bar{\xi})$.

Definición 2.3.7 La aplicación-índice ξ es eficiente (resp., fuertemente eficiente) si para cada conjunto finito de datos $\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$ con $\bar{\xi} = \xi(\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m)$ asociado se verifica lo siguiente:

$$\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m \text{ satisface } GARP(\bar{\zeta}), \forall \bar{\zeta} \in C_m \text{ con } \bar{\zeta} \ll \bar{\xi} \text{ (resp., con } \bar{\zeta} \leq \bar{\xi})$$

Es trivial que la eficiencia fuerte implica la eficiencia. La implicación recíproca no se verifica: la aplicación-índice de Afriat es eficiente pero no fuertemente eficiente⁸⁴. Los conceptos anteriores admiten la siguiente definición formal⁸⁵.

Definición 2.3.8 Sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{D}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es la familia formada por todas las series finitas de datos de demanda inconsistentes con GARP, $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de n_λ -cubos donde $n_\lambda = |\mathcal{D}_\lambda| \forall \lambda \in \Lambda$ y para cada $\lambda \in \Lambda$ se considera la aplicación $\xi_\lambda : \{\mathcal{D}_\lambda\} \rightarrow \{\bar{\xi}_\lambda\}$ definida por $\xi_\lambda(\mathcal{D}_\lambda) = \bar{\xi}_\lambda$, donde $\bar{\xi}_\lambda = (\xi_{\lambda 1}, \dots, \xi_{\lambda n_\lambda})$ es un elemento del n_λ -cubo unidad C_λ que denominaremos vector-índice. Entonces, si

$$\xi = \prod_{\lambda \in \Lambda} \xi_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\mathcal{D}_\lambda\} \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\bar{\xi}_\lambda\}$$

es la aplicación definida por

$$\xi(d)(\lambda) = (\xi(d))_\lambda = \xi_\lambda \circ p_\lambda(d), \quad \forall \lambda \in \Lambda \text{ y } \forall d \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\mathcal{D}_\lambda\}$$

se verifica que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\mathcal{D}_\lambda\} & \xrightarrow{\xi} & \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\bar{\xi}_\lambda\} \\ p_\lambda \downarrow & & \downarrow p'_\lambda \\ \{\mathcal{D}_\lambda\} & \xrightarrow{\xi_\lambda} & \{\bar{\xi}_\lambda\} \end{array}$$

es conmutativo, luego $\forall \lambda \in \Lambda$ se tiene que $p'_\lambda \circ \xi = \xi_\lambda \circ p_\lambda$. Se dice que ξ es una aplicación de eficiencia (resp., fuertemente eficiente o α^* -eficiente) si para cada serie finita de datos de demanda $\mathcal{D}_\lambda \in \mathcal{F}$ se cumple:

$$\mathcal{D}_\lambda \text{ satisface } GARP(\bar{\zeta}), \forall \bar{\zeta} \in C_{n_\lambda} \text{ con } \bar{\zeta} \ll \bar{\xi}_\lambda \text{ (resp., con } \bar{\zeta} \leq \bar{\xi}_\lambda)$$

Llamaremos estructura de eficiencia al par (\mathcal{F}, ξ) , donde \mathcal{F} es la familia formada por todas las series finitas de datos de demanda inconsistentes con GARP y ξ una aplicación de eficiencia

⁸⁴Consideremos el siguiente contraejemplo: $\bar{x}_1 = (8, 1, 8), \bar{x}_2 = (5, 5, 6), \bar{x}_3 = (5, 6, 5), \bar{x}_4 = (8, 8, 1)$, para los precios respectivos $\bar{p}_1 = (1, 1, 0.5), \bar{p}_2 = (1, 1, 1.5), \bar{p}_3 = (1, 0.5, 1), \bar{p}_4 = (1, 2, 2)$. El índice de Afriat es $\bar{e}^* = (1, 1, 1, 1)$ y como los datos violan GARP no podemos tener la eficiencia fuerte.

⁸⁵Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. El producto cartesiano de esta familia, denotado por $\prod_{i \in I} X_i$, es el conjunto formado por las aplicaciones $x : i \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ tales que $x(i) = x_i \in X_i, \forall i \in I$. Para toda familia de conjuntos $\{X_i\}_{i \in I}$, denotamos por $p_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ a la i -ésima aplicación proyección definida por $p_i(x) = x(i) = x_i, \forall x \in \prod_{i \in I} X_i$.

definida sobre esta familia. Diremos que (\mathcal{F}, ξ) es una α^* -estructura de eficiencia si y solamente si ξ es fuertemente eficiente.

En lo sucesivo, para toda estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ξ) denotaremos por $\bar{\xi}_{\mathcal{D}}$ a la n-tupla de números reales en C_n tal que $\xi(\mathcal{D}) = \bar{\xi}_{\mathcal{D}}$ para cada $\mathcal{D} \in \mathcal{F}$, y emplearemos indistintamente como sinónimos (\mathcal{F}, ξ) es una α^* -estructura de eficiencia o (\mathcal{F}, ξ) es α^* -eficiente. Con objeto de facilitar el manejo de las diferentes estructuras de eficiencia, trabajaremos con un representante $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ de la familia \mathcal{F} .

Es importante señalar que tanto las aproximaciones a la eficiencia en el consumo de Afriat (1972, 1973) y Varian (1987, 1990, 1993) como el nuevo vector-índice introducido anteriormente, generalización del vector-índice de Afriat, admiten una in

En efecto, en virtud de la Proposición 2.3.3 si e^* es la aplicación-índice tal que $e^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{e}^* = (e^*, \dots, e^*)$, para cada $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, entonces e^* es eficiente y, por lo tanto, el par (\mathcal{F}, e^*) es una estructura de eficiencia, a la que denominaremos (por razones obvias) estructura de eficiencia de Afriat. Por otra parte, la Proposición 2.3.8 garantiza que la aplicación-índice i tal que $i(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$, para cada $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es fuertemente eficiente. En lo sucesivo, al par (\mathcal{F}, i) le llamaremos estructura de eficiencia de Varian. Finalmente, si ϵ es la aplicación-índice que a cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, le asigna el índice de Afriat generalizado, $\epsilon(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, descrito en la Definición 2.3.3 es claro que ϵ es eficiente y, por tanto, que el par (\mathcal{F}, ϵ) es una estructura de eficiencia. Nótese que el Teorema 2.3.2 garantiza que la aplicación-índice ϵ es eficiente. De lo anterior se desprende que:

† (\mathcal{F}, i) es una α^* -estructura de eficiencia.

‡ (\mathcal{F}, e^*) y (\mathcal{F}, ϵ) son estructuras de eficiencia.

Es importante resaltar que la α^* -eficiencia implica, por definición, la eficiencia pero que el recíproco no es cierto. Esto es, no toda estructura eficiente es α^* -eficiente. Nótese que las aplicaciones índice e^* y ϵ son eficientes, pero no fuertemente eficientes⁸⁶.

Para las series de observaciones de demanda que no son consistentes con el modelo exacto de la optimización, Varian propone usar la norma euclídea de $\bar{1} - \bar{i}$ como una medida estadística de la bondad del ajuste de los datos con el modelo estándar. Él argumentó que existe una correlación positiva entre el grado de coherencia en las decisiones y $\|\bar{i}\|$. Con objeto de poder comparar la calidad de las diferentes estructuras de eficiencia (resp., aplicaciones-índices) con respecto a la eficiencia introducimos la siguiente definición⁸⁷.

⁸⁶Consideremos el siguiente contraejemplo: $\bar{x}_1 = (8, 1, 8)$, $\bar{x}_2 = (5, 5, 6)$, $\bar{x}_3 = (5, 6, 5)$, $\bar{x}_4 = (8, 8, 1)$, para los precios respectivos $\bar{p}_1 = (1, 1, 0.5)$, $\bar{p}_2 = (1, 1, 1.5)$, $\bar{p}_3 = (1, 0.5, 1)$, $\bar{p}_4 = (1, 2, 2)$. El índice de Afriat es $\bar{e}^* = (1, 1, 1, 1) = \bar{\epsilon}$, y como los datos violan GARP no podemos tener la eficiencia fuerte.

⁸⁷Nótese que el Ejemplo 2.3.7 sugiere plantearse la construcción de diferentes aplicaciones-índice eficientes o, alternativamente, de nuevas estructuras de eficiencia que permitan analizar (de manera eficiente) la bondad del ajuste del modelo de optimización.

Definición 2.3.9 Sean (\mathcal{F}, ξ) y (\mathcal{F}, ζ) dos estructuras de eficiencia. Decimos que (\mathcal{F}, ξ)

1. describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, ζ) si para cada $\mathcal{D} = \{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$ es cierto que $\xi(\mathcal{D}) \geq \zeta(\mathcal{D})$ y para al menos un caso la desigualdad es estricta.
2. describe mejor el comportamiento de la demanda que ζ si para cada $\mathcal{D} = \{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$ es cierto que $\xi(\mathcal{D}) > \zeta(\mathcal{D})$.

El Ejemplo 2.3.7 sugiere estudiar, en primer lugar, qué condiciones tiene que verificar una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ para que sea posible encontrar una n-tupla de números reales $\bar{\xi} > \bar{i}$ en el n-cubo C_n verificando $GARP(\bar{\xi})$ y, en segundo lugar, si es posible encontrar estructuras de eficiencia que describan mejor, o, en su defecto, casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, i) . En lo sucesivo, para cada \bar{x}_{t_0} con $\Upsilon(\bar{x}_{t_0}) \neq \emptyset$ y para cada $\bar{x}_{t_0}^* \in \Upsilon(\bar{x}_{t_0})$ denotamos por $\mathcal{C}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*)$ a la familia formada por todos los ciclos $\mathcal{C} = \{\bar{x}_{t_0}, \bar{x}_{t_0}^*, \bar{x}_h, \dots\}$ tales que $\bar{x}_h R \bar{x}_{t_0} \wedge \bar{x}_{t_0}^* R \bar{x}_h$ para cada $\bar{x}_h \in \mathcal{C}$. Formalmente, $\mathcal{C}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*) = \{\mathcal{C} \in \Sigma_{\mathcal{D}}^1 / \bar{x}_h R \bar{x}_{t_0} \wedge \bar{x}_{t_0}^* R \bar{x}_h, \forall \bar{x}_h \in \mathcal{C}\}$.

Proposición 2.3.9 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda inconsistente con $GARP$, y m^+ la función de compensación de Samuelson. Entonces son equivalentes:

- i) Existe un \bar{x}_{t_0} con $\Upsilon(\bar{x}_{t_0}) \neq \emptyset$ tal que $\forall \bar{x}_{t_0}^* \in \Upsilon(\bar{x}_{t_0})$ y $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{C}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*)$ existen $\bar{x}_r, \bar{x}_s \in \mathcal{C}$ distintos tales que $m^+(\bar{p}_r, \bar{x}_r, R) < \bar{p}_r \bar{x}_s \leq \bar{p}_r \bar{x}_r$.
- ii) Existe un vector-índice $\bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} > \bar{i}$ tal que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{\xi})$.

Demostración: $i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que se cumple $i)$, entonces $\exists \bar{x}_{t_0}$ con $\Upsilon(\bar{x}_{t_0}) \neq \emptyset$ tal que $\forall \bar{x}_{t_0}^* \in \Upsilon(\bar{x}_{t_0})$ y $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{C}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*)$ existen $\bar{x}_r, \bar{x}_s \in \mathcal{C}$ distintos tales que $m^+(\bar{p}_r, \bar{x}_r, R) < \bar{p}_r \bar{x}_s \leq \bar{p}_r \bar{x}_r$, lo que implica que $\sim \bar{x}_r R^0(i_r) \bar{x}_s$. Por otra parte, para cada $\bar{x}_{t_0}^* \in \Upsilon(\bar{x}_{t_0})$ consideramos la familia $\tilde{\mathcal{C}}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*)$ formada por todos los ciclos $\tilde{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{C}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*)$ tales que para cada ciclo $\tilde{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{C}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*)$ existe un $\bar{x}_r \in \tilde{\mathcal{C}}$ tal que $\bar{x}_r \neq \bar{x}_{t_0}$ y, además, $\sim \bar{x}_r R(\bar{i}) \bar{x}_{t_0}$. Entonces, si para cada \bar{x}_{t_0} tal que $\bar{x}_{t_0}^* R \bar{x}_{t_0}$ y $\bar{p}_{t_0} \bar{x}_{t_0} > \bar{p}_{t_0} \bar{x}_{t_0}^*$ se verifica que $\mathcal{C}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*) \setminus \tilde{\mathcal{C}}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*) = \emptyset$ se tiene que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{\xi})$ para toda tupla de números reales $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ tal que $\xi_t = i_t \forall t \neq t_0$ y $\xi_{t_0} \in (i_{t_0}, 1)$. En caso contrario, se tendría, por hipótesis, que $\bar{p}_{t_0} \bar{x}_{t_0}^* > m(\bar{p}_{t_0}, \bar{x}_{t_0})$, luego si definimos la n-tupla de números reales $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ por: $\xi_t = m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) / \bar{p}_t \bar{x}_t \forall t \neq t_0$ y $\xi_{t_0} = \min \left\{ \frac{\bar{p}_{t_0} \bar{x}_{t_0}^*}{\bar{p}_{t_0} \bar{x}_{t_0}} : \mathcal{C}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*) \neq \emptyset \right\}$, es claro que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{\xi})$, de donde se deduce inmediatamente $ii)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Para probar esta implicación, veremos que si no se cumple $i)$ entonces $ii)$ tampoco. Que no se cumpla la condición $i)$ significa que para cada \bar{x}_{t_0} con $\Upsilon(\bar{x}_{t_0}) \neq \emptyset$ existe un $\bar{x}_{t_0}^* \in \Upsilon(\bar{x}_{t_0})$ y existe un ciclo \mathcal{C} en $\mathcal{C}(\bar{x}_{t_0}; \bar{x}_{t_0}^*)$ tal que $\forall \bar{x}_r, \bar{x}_s \in \mathcal{C}$ distintos si $\bar{x}_r R^0 \bar{x}_s$, entonces $m^+(\bar{p}_r, \bar{x}_r, R) = \bar{p}_r \bar{x}_s$. Entonces, para todo $\bar{\xi} \in C_n$, si $\bar{\xi} > \bar{i}$ se verifica que $\bar{x}_t R(\bar{\xi}) \bar{x}_r$,

por ser $R(\bar{i})$ una subrelación de $R(\bar{\xi})$. Por otra parte, si $\xi_{t_0} > i_{t_0}$, entonces, \bar{x}_{t_0} es fuertemente inconsistente con GARP, por construcción. Además, por hipótesis, existe un \bar{x}_h tal que $\bar{x}_h R(\bar{i}) \bar{x}_{t_0}$ y $\bar{x}_{t_0} R(\bar{i}) \bar{x}_h$, de donde se deduce que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface $GARP(\bar{\xi})$ para toda n -tupla de números reales $\bar{\xi}$ con $\bar{\xi} > \bar{i}$, lo que completa la demostración. ■

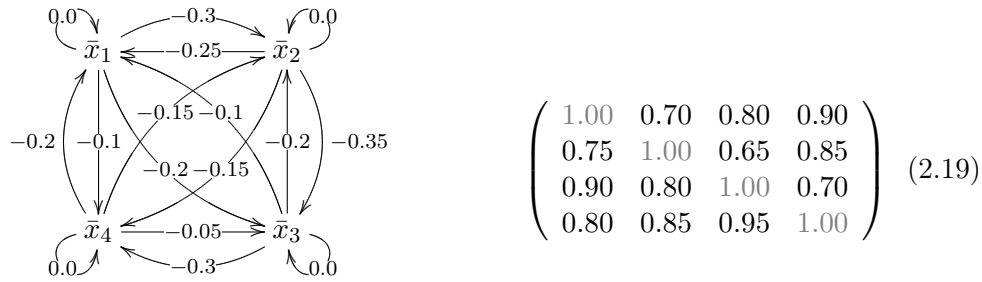
Observación 2.3.3 *La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.18) satisface la condición i) de la Proposición 2.3.9. Como $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{\zeta})$, donde $\bar{\zeta} = (0.9, 1, 0.7, 0.6)$ y, además, $\zeta_2 > i_2$, la cesta \bar{x}_2 satisface la condición i) de la Proposición 2.3.9. En efecto, \bar{x}_2 es fuertemente inconsistente con GARP puesto que $\Upsilon(\bar{x}_2) = \{\bar{x}_3\} \neq \emptyset$. Para probar la afirmación bastará con ver que existen \bar{x}_r, \bar{x}_s distintos en $\mathcal{C} = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{x}_2, \bar{x}_3), (\bar{x}_3, \bar{x}_1)\}$ tales que $m^+(\bar{p}_r, \bar{x}_r, R) < \bar{p}_r \bar{x}_s \leq \bar{p}_r \bar{x}_r$, puesto que \mathcal{C} es el único elemento de la familia $\mathcal{C}(\bar{x}_2; \bar{x}_3)$. Pero esto es inmediato puesto que para el par de cestas \bar{x}_1 y \bar{x}_2 se tiene que $m^+(\bar{p}_1, \bar{x}_1, R) = 0.9$ y $\bar{p}_1 \bar{x}_1 = \bar{p}_1 \bar{x}_2$, y, en consecuencia, que $m^+(\bar{p}_1, \bar{x}_1, R) < \bar{p}_1 \bar{x}_2 \leq \bar{p}_1 \bar{x}_1$, lo que justifica la afirmación.*

En virtud de la Proposición 2.3.9 y del Ejemplo 2.3.7 cabe preguntarse si existen estructuras de eficiencia que describan casi-mejor o mejor el comportamiento de la demanda que la estructura de eficiencia de Varian. En primer lugar, porque para describir la bondad del ajuste del modelo de optimización es necesario encontrar para alguna norma razonable un vector-índice $\bar{\xi}$ satisfaciendo $GARP(\bar{\xi})$ tan próximo a uno como sea posible; esto es, que minimize $\|\bar{1} - \bar{\xi}\|$. En segundo lugar porque $1 - \xi_t$ representa el exceso de gasto que se le permite derrochar a un consumidor en la situación presupuestaria t -ésima para que sus elecciones de consumo sean consistentes (al nivel de eficiencia $\bar{\xi}$) con la teoría neoclásica de la demanda⁸⁸.

La Proposición 2.3.9 de manera inherente establece la imposibilidad de encontrar α^* -estructuras de eficiencia que describan casi mejor el comportamiento ante la demanda. Para probar esta afirmación bastará con encontrar ejemplos de series finitas de datos de demanda para las cuales todas sus cestas demandadas fuertemente inconsistentes con GARP no verifiquen la condición i) de la Proposición 2.3.9. El siguiente ejemplo justifica la validez de la afirmación anterior.

⁸⁸Este vector de niveles de eficiencia sería una medida de la bondad del ajuste del modelo optimizador de un consumidor que permitiría describir mejor el comportamiento de un individuo en su proceso de optimización.

Ejemplo 2.3.8 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) con matriz de gasto (2.19):



Un simple cálculo permite obtener $\bar{i} = (0.7, 0.65, 0.7, 0.8)$ como vector-índice de Varian. Resulta inmediato comprobar que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface $GARP(\bar{\xi})$ para ningún $\bar{\xi}$ con $\bar{\xi} > \bar{i}$. Si designamos por $a'_{rs} = \bar{p}_r(\bar{x}_s - \bar{x}_r) + (1 - \xi_r) \forall r, s$, entonces es claro que si $\xi_r > i_r$ para algún r , entonces $a'_{rs} < 0$ puesto que $(1 - \xi_r) < (1 - i_r)$ y $\bar{p}_r(\bar{x}_s - \bar{x}_r) + (1 - i_r) = \bar{p}_r(\bar{x}_s - i_r \bar{x}_r) = 0$. Nótese que, en este caso, el ciclo formado por las observaciones 1, 2, 3 y 4 sería de longitud negativa, tal y como muestra la Figura 2.15.

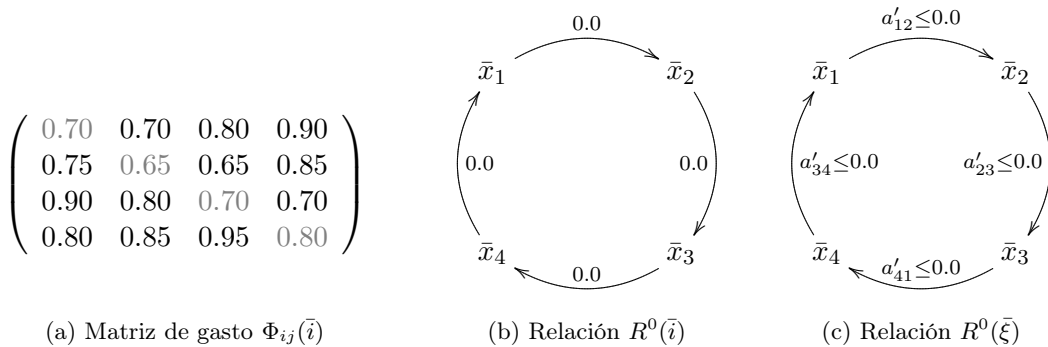


Figura 2.15: Comportamiento casi-optimizador de un consumidor.

Este ejemplo prueba que no existen α^* -estructuras de eficiencia que describan mejor el comportamiento ante la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ y, en consecuencia, lo máximo que podemos encontrar son α^* -estructuras de eficiencia casi-mejores que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$.

Observación 2.3.4 La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto asociada (2.19) no cumple la condición *i* de la Proposición 2.3.9 y, por tanto, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface $GARP(\bar{\xi}), \forall \bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} > \bar{i}$. En efecto, $\forall \bar{x}_t$ se cumple que $\Upsilon(\bar{x}_t) \neq \emptyset$ ⁸⁹. Además, el

⁸⁹Nótese que $\Upsilon(\bar{x}_1) = \{\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$, $\Upsilon(\bar{x}_2) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$, $\Upsilon(\bar{x}_3) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4\}$ y $\Upsilon(\bar{x}_4) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$.

ciclo $\mathcal{C} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ es incoherente con GARP; y, además, pertenece simultáneamente a $\mathcal{C}(\bar{x}_1; \bar{x}_2)$, $\mathcal{C}(\bar{x}_2; \bar{x}_3)$, $\mathcal{C}(\bar{x}_3; \bar{x}_4)$ y $\mathcal{C}(\bar{x}_4; \bar{x}_1)$ ⁹⁰. Para este ciclo se tiene que:

$$\bar{p}_1 \bar{x}_2 = m^+(\bar{p}_1, \bar{x}_1, R); \quad \bar{p}_2 \bar{x}_3 = m^+(\bar{p}_2, \bar{x}_2, R); \quad \bar{p}_3 \bar{x}_4 = m^+(\bar{p}_3, \bar{x}_3, R); \quad \bar{p}_4 \bar{x}_1 = m^+(\bar{p}_4, \bar{x}_4, R),$$

lo que implica que la imposibilidad de que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ verifique GARP($\bar{\zeta}$) para algún $\bar{\zeta} > \bar{i}$ en el cubo unidad.

Se podría pensar, a la vista del ejemplo planteado, que tales situaciones son residuales (porque dicho ejemplo parece que está pensado ad-hoc) y que en la realidad el conjunto de tales series finitas de datos de demanda sería de “medida nula” en \mathcal{F} , entendiendo la frase “medida nula” como que la familia de conjuntos con esta propiedad es residual (casos aislados que no ocurren con frecuencia), no con el significado propio de dicho concepto en la teoría matemática de la medida. Sin embargo, esta apreciación no sería del todo correcta porque si en la relación de la preferencia revelada para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no existen ciclos con subciclos⁹¹ propios –es decir, los ciclos son irreducibles–, o bien los ciclos son aislados, es imposible encontrar vectores-índice tales que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ verifique GARP($\bar{\zeta}$), $\forall \bar{\zeta} \in C_n$ con $\bar{\zeta} > \bar{i}$. Estas situaciones ocurren cuando el comportamiento de un consumidor es casi-racional o casi-optimizador; esto es, cuando la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ ha sido generada a partir de las decisiones de consumo de un individuo con un comportamiento próximo a uno optimizador.

Los resultados y observaciones anteriores sugieren encontrar procedimientos que describan casi-mejor el comportamiento de un consumidor que los vectores-índice de Varian y de Afriat. A continuación, se presentan dos α^* -estructuras de eficiencia que describen casi-mejor el comportamiento de un consumidor que la estructura de eficiencia de Varian, $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$, y se analizan las relaciones existentes entre estas nuevas estructuras de eficiencia y la α^* -estructura de eficiencia de Varian en relación con los conceptos describir “casi-mejor”, “mejor” o “igual” enunciados con anterioridad.

Definición 2.3.10 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y sea $\{\bar{v}_k\}_{k=0}^{n-1}$ la familia de n -tuplas de números reales $\bar{v}_k = (v_{k1}, \dots, v_{kn}) \in \mathbb{R}_{++}^n$ asociada a $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, obtenida a partir de la siguiente ecuación de recurrencia inicializada en $\bar{v}_0 = (1, \dots, 1)$ y definida⁹² por $\bar{v}_k = \bar{v}_{k-1} \odot \bar{v}_k^*$, donde $\bar{v}_k^* = (v_{k1}^*, \dots, v_{kn}^*)$ es un vector en \mathbb{R}_{++}^n tal que $v_{kt}^* = \max \left\{ \frac{\bar{p}_t \bar{x}_s}{v_{tk-1} \bar{p}_t \bar{x}_t} < 1 : \bar{x}_s R(\bar{v}_{k-1}) \bar{x}_t \right\}$ si \bar{x}_t viola GARP(\bar{v}_{k-1}) y $v_{kt}^* = 1$ en caso contrario. Designaremos por \bar{v} al vector de índices de eficiencia $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{++}^n$ tal que $v_t = v_{(n-1)t}$ para toda observación t .

⁹⁰Por ejemplo, $\mathcal{C}(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5\}$, donde $\mathcal{C}_1 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$; $\mathcal{C}_2 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$; $\mathcal{C}_3 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4\}$; $\mathcal{C}_4 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ y, finalmente, $\mathcal{C}_5 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4, \bar{x}_3\}$

⁹¹Sea X un conjunto cualquiera, Q una relación binaria definida sobre X y C un ciclo de la relación binaria Q definida sobre X . Diremos que $C' \subseteq X$ es un subciclo propio de C si C' es un ciclo de la relación binaria Q y, además, $C' \subsetneq C$. Diremos que un ciclo C es simple o irreducible si no posee subciclos propios.

⁹²Sean $\bar{v}, \bar{w}, \bar{z}$ tres n -tuplas de números reales en \mathbb{R}^n . Designamos por $\bar{z} = \bar{v} \odot \bar{w}$ al vector $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ definido por $z_t = v_t \cdot w_t$, para todo t .

El algoritmo 12 permite calcular para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, el conjunto de niveles de eficiencia $(v_t)_{t=1}^n$ asociado a la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$.

Algorithm 13. Pseudo-code for computing IM1

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ inconsistent with GARP

1. begin
2. for $i, j := 1$ to n do $v[j] \leftarrow 1$; $C_v[i, j] \leftarrow C[i, j]$
3. While [$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ does not verify $GARP(v)$]
4. for $j := 1$ to n do $C_v[j, j] \leftarrow C[j, j]$; $C_v[j, j] \leftarrow v[j] \cdot C[j, j]$
5. for $i, j := 1$ to n if $C_v[i, i] \geq C_v[i, j]$ then $R_v^0[i, j] \leftarrow 1$ else $R_v^0[i, j] \leftarrow 0$
6. Compute the transitive closure R_v of the relation R_v^0
7. for $j := 1$ to n do $G_v(\bar{x}_j) \leftarrow \{\bar{x}_i : \bar{x}_i R_v \bar{x}_j \text{ and } C_v[j, j] > C_v[j, i]\}$
8. for $j := 1$ to n if $G_v(\bar{x}_j) \neq \emptyset$ then $v(j) \leftarrow v(j) \cdot \max \left\{ \frac{C_v[j, i]}{C_v[j, j]} : \bar{x}_i \in G_v(\bar{x}_j) \right\}$
9. return

Output: $\bar{v} = \mathbf{v}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

A continuación, pasamos a comentar el funcionamiento de este procedimiento de asignación de índices. El paso 2 del algoritmo 12 inicializa el vector-índice \bar{v} haciendo $\bar{v} = (1, \dots, 1)$ y, al mismo tiempo, asigna en la variable que representa a la matriz de gasto perturbada por \bar{v} los valores de la matriz de gasto original. Por otra parte, como $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface GARP, el algoritmo entra dentro del bucle del paso 3. Una vez dentro del bucle, el algoritmo ejecuta una serie de sentencias (pasos 4, 5, 6, 7 y 8) mientras la expresión lógica sea cierta; esto es, mientras que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no verifique $GARP(\bar{v})$. En el paso 4 se construye la matriz de gasto perturbada C_v para \bar{v} (nótese que sólo perturbamos los elementos de su diagonal principal). En los pasos 5 y 6 se calcula la relación de preferencia revelada “relajada” $R^0(\bar{v})$ y su clausura transitiva $R(\bar{v})$ para \bar{v} , respectivamente. El paso 7 identifica las cestas fuertemente inconsistentes con $GARP(\bar{v})$, mientras que en el paso 8 construimos el vector auxiliar v^* de la Definición 2.3.10 y aplicamos la fórmula recursiva $\bar{v}_k = \bar{v}_{k-1} \odot \bar{v}_k^*$. Esto se consigue mediante la asignación $v(j) \leftarrow v(j) \cdot \max \left\{ \frac{C_v[j, i]}{C_v[j, j]} : \bar{x}_i \in G_v(\bar{x}_j) \right\}$ del paso 8. El proceso se repite hasta encontrar el vector-índice \bar{v} asociado a $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ satisfaciendo $GARP(\bar{v})$. El Teorema 2.3.3 garantiza la finitud y la corrección de este procedimiento.

La Figura 2.16 ilustra la construcción algorítmica de la α^* -estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.11).

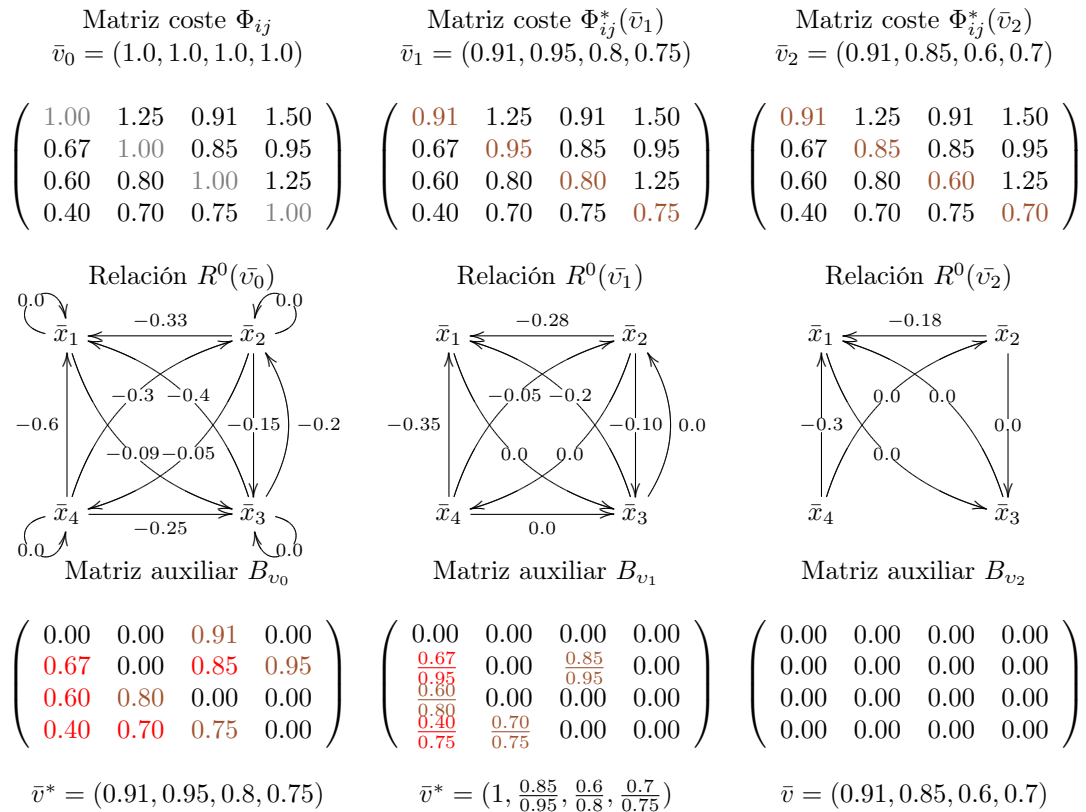


Figura 2.16: Estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$.

Es importante señalar que es posible trabajar (de alguna manera) con matrices para obtener el vector-índice buscado⁹³. En lo sucesivo, para cada n-tupla de números reales $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ en el n-cubo unidad designaremos por \mathbf{R}_e^0 a la matriz booleana asociada a la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{e})$, por \mathbf{R}_e a su clausura transitiva y por \mathbf{P}_e^0 a la matriz booleana asociada a la relación de preferencia revelada $P^0(\bar{e})$. Esto es, la matriz booleana \mathbf{R}_e^0 está definida por: $\mathbf{R}_e^0(i, j) = 1 \Leftrightarrow \bar{x}_i R^0(\bar{e}) \bar{x}_j$ y $\mathbf{R}_e^0(i, j) = 0$, en caso contrario. Análogamente se define \mathbf{P}_e^0 como sigue: $\mathbf{P}_e^0(i, j) = 1 \Leftrightarrow \bar{x}_i P^0(\bar{e}) \bar{x}_j$ y $\mathbf{P}_e^0(i, j) = 0$, en caso contrario. La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP(\bar{e}) si y solamente si $(R_e)^t \odot P_e^0 = O_n$, luego si

⁹³Nótese que en la computación científica es muy frecuente trabajar con conjuntos ordenados de valores que pueden almacenarse en un array de tamaño fijo (estructura estática) o de tamaño variable (estructura dinámica), mediante las variables puntero que en FORTRAN 90 son muy similares a las del lenguaje C

designamos por \mathbf{A}_e a la matriz booleana n por n definida por $(R_e)^t \odot P_e^{094}$, entonces $\mathbf{A}_e(i, j) = 1 \Leftrightarrow \bar{x}_j R(\bar{e}) \bar{x}_i \wedge \bar{x}_i P^0(\bar{e}) \bar{x}_j$. Es claro que para cada j la cesta demandada \bar{x}_j es fuertemente inconsistente con $\text{GARP}(\bar{e})$ si y solamente si $\max_i \mathbf{A}_e(j, i) = 1$.

En virtud de lo anterior cabe señalar que la Definición 2.3.10 permite considerar la construcción algorítmica de la α^* -estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ como un “procedimiento recursivo matricial”, puesto que toda relación binaria sobre un conjunto finito de opciones puede ser representada por una matriz booleana. En efecto, como $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface GARP –i.e., $\mathbf{R}^t \odot \mathbf{P}^0 \neq \mathbf{O}_n$, donde \mathbf{O}_n designa a la matriz nula en el álgebra de matrices booleanas $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}), +, \odot, \cdot, {}^t, {}^c, \mathbf{O}_n, \mathbf{I}_n \rangle$ – el algoritmo comienza inicializando el vector-índice \bar{v} – haciendo $\bar{v}_0 = (1, \dots, 1)$ – y, al mismo tiempo, asignando en la variable que representa a la matriz de gasto perturbada por \bar{v}_0 los valores de la matriz de gasto original. A continuación, construye las relaciones binarias $\mathbf{R}_{\mathbf{v}_0}^0, \mathbf{P}_{\mathbf{v}_0}^0$ y $\mathbf{R}_{\mathbf{v}_0}$, contrasta $\text{GARP}(\bar{v}_0)$ –i.e., si $\mathbf{R}_{\mathbf{v}_0}^t \odot \mathbf{P}_{\mathbf{v}_0}^0 \neq \mathbf{O}_n$ –. Posteriormente, construye la matriz $\mathbf{B}_{\mathbf{v}_0} = C_{\mathbf{v}_0} \odot \mathfrak{R}(\mathbf{A}_{\mathbf{v}_0})$, donde $\mathbf{A}_{\mathbf{v}_0} = \mathbf{R}_{\mathbf{v}_0}^t \odot \mathbf{P}_{\mathbf{v}_0}^0$, y calcula el vector auxiliar $\bar{v}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ definido por: $v_j^* = 1$, si $\max_i \mathbf{B}_{\mathbf{v}_0}[j, i] = 0$ y $v_j^* = \max_i \mathbf{B}_{\mathbf{v}_0}[j, i]$, en caso contrario, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ ⁹⁵. Una vez construido \bar{v}^* , la fórmula recursiva $\bar{v}_k = \bar{v}_{k-1} \odot \bar{v}_k^*$ de la Definición 2.3.10 se obtiene (paso 8) mediante la asignación $v(j) \leftarrow v(j) \odot v^*(j)$; i.e., se considera como candidato $\bar{v}_1 = \bar{v}^* \odot \bar{v}_0$. Si los datos satisfacen $\text{GARP}(\bar{v}_1)$ –i.e., si $\mathbf{R}_{\mathbf{v}_1}^t \odot \mathbf{P}_{\mathbf{v}_1}^0 = \mathbf{O}_n$ – entonces $\bar{v} = \bar{v}_1$. En caso contrario, se repite el proceso: se construye la matriz auxiliar $\mathbf{B}_{\mathbf{v}_1} = C_{\mathbf{v}_1} \odot \mathbf{A}_{\mathbf{v}_1}$ y se construye el vector auxiliar \bar{v}^* donde $v_j^* = 1$ si $\max_i \mathbf{B}_{\mathbf{v}_1}[j, i] = 0$ y el vector-índice candidato $\bar{v}_2 = \bar{v}^* \odot \bar{v}_1$. El proceso continúa hasta encontrar una n -tupla de números reales \bar{v} en el n -cubo unidad C_n tal que $\mathbf{R}_{\bar{v}}^t \odot \mathbf{P}_{\bar{v}}^0 = \mathbf{O}_n$.

En el siguiente teorema mostraremos que si \mathbf{v} es la aplicación-índice definida sobre \mathcal{F} que asigna a cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} el vector-índice $\bar{v}_{\mathcal{D}}$ obtenido a partir de la ecuación de recurrencia (2.3.10), entonces la aplicación-índice \mathbf{v} es fuertemente eficiente. En otras palabras, el siguiente teorema muestra que la aplicación-índice \mathbf{v} permite construir una estructura α^* -eficiente.

Teorema 2.3.3 $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ es una α^* -estructura de eficiencia.

Demostración: Tomamos $\{(\bar{p}_1, \bar{x}_1), \dots, (\bar{p}_n, \bar{x}_n)\}$ datos arbitrarios de demanda que son inconsistentes con GARP . Necesitamos probar que los datos de demanda satisfacen $\text{GARP}(\bar{v})$. Razonaremos por reducción al absurdo, suponiendo que existen cestas \bar{x}_t y \bar{x}_{t_j} tales que $\bar{x}_t R(\bar{v}) \bar{x}_t$ and $v_t \bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$. Como \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con GARP existen $\bar{x}_{t_1}, \dots, \bar{x}_{t_{r_t}}$, $1 \leq r_t \leq n - 1$ tales que $\bar{x}_{t_i} R \bar{x}_t$ y $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}$ para cada $1 \leq i \leq r_t$. Sin pérdida de generalidad podemos reordenar las cestas demandadas anteriores de tal modo que podamos decir que

⁹⁴Nótese que para todo par de observaciones i, j se cumple: $\mathbf{A}_e(i, j) = 1$ si y solamente si $\bar{x}_j R(\bar{e}) \bar{x}_i$ y $\bar{x}_i P_e^0 \bar{x}_j$.

⁹⁵Nótese que en cada repetición del bucle controlado por la sentencia lógica “mientras que los datos de demanda observados $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no verifiquen $\text{GARP}(\bar{v})$ ” el vector auxiliar \bar{v}^* puede obtenerse como suma de dos matrices \bar{v} y \bar{v} de tamaño n por 1 definidas de la siguiente manera: para $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ se define $v_j = \max_i \mathbf{B}_{\mathbf{v}}[j, i]$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$; mientras que $\bar{v} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ es la matriz complemento del array $\bar{\nu}_* = (\nu_{*1}, \dots, \nu_{*n})$ definido por: $\nu_{*j} = \max_i \mathbf{A}_{\mathbf{v}}[j, i]$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.

$\bar{p}_t \bar{x}_{t_i} \geq \bar{p}_t \bar{x}_{t_{i+1}}$ for $1 \leq i \leq r_t - 1$. De otra parte, cuando $k \geq 1$ la definición de $\{\bar{v}_k\}_{k=0}^{n-1}$ conlleva $\bar{v}_k \geq \bar{v}$, así $\bar{x}_{t_j} R(\bar{v}_k) \bar{x}_t$ y $v_{kt} \bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$. En particular, $\bar{x}_{t_j} R(\bar{v}_h) \bar{x}_t$ y $v_{ht} \bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$ para todo $h \leq j$. De esto se deduce $v_{jt} = \frac{\bar{p}_t \bar{x}_{jt}}{\bar{p}_t \bar{x}_t}$. Además, $\bar{v}_j \geq \bar{v}$ implica $v_{jt} \bar{p}_t \bar{x}_t \geq v_t \bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$, por consiguiente $\bar{p}_t \bar{x}_{t_j} \geq v_t \bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$, lo que implica que $\bar{p}_t \bar{x}_{t_j} > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$, una conclusión absurda que prueba la afirmación. ■

El siguiente concepto permite construir una α^* -estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) que también describirá, como veremos, casi-mejor el comportamiento de un consumidor que (\mathcal{F}, \bar{i}) . Este concepto precisa de la siguiente definición auxiliar:

Definición 2.3.11 Para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, y para cada familia $\{\bar{\xi}_k\}_{k \in I}$ de n -tuplas de números reales $\bar{\xi}_k = (\xi_{k1}, \dots, \xi_{kn}) \in \mathbb{R}_{++}^n$ diremos la familia $\{\bar{\zeta}_k\}_{k \in I}$ de n -tuplas de números reales $\bar{\zeta}_k = (\zeta_{k1}, \dots, \zeta_{kn}) \in \mathbb{R}_{++}^n$ está asociada a $\{\bar{\xi}_k\}_{k \in I}$ si $\zeta_{kt} = \max \left\{ \frac{\bar{p}_t \bar{x}_s}{\xi_{tk-1} \bar{p}_t \bar{x}_t} < 1 : \bar{x}_s R(\bar{\xi}_{k-1}) \bar{x}_t \right\}$ para cada \bar{x}_t inconsistente con $GARP(\bar{\xi}_{k-1})$ y $\zeta_{kt} = 1$, en caso contrario.

Definición 2.3.12 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y $\{\bar{\vartheta}_k\}_{k=1}^{n^2-n}$ una familia de n -tuplas de números reales $\bar{\vartheta}_k = (\vartheta_{k1}, \dots, \vartheta_{kn}) \in \mathbb{R}_{++}^n$ obtenida a partir de la siguiente ecuación de recurrencia inicializada en $\bar{\vartheta}_1 = (1, \dots, 1)$ y definida por $\bar{\vartheta}_{k+1} = \bar{\vartheta}_k \odot \bar{\vartheta}_k^*$, donde $\{\bar{\zeta}_k\}_{k=1}^{n^2-n}$ es la familia de n -tuplas de números reales asociada a $\{\bar{\vartheta}_k\}_{k=1}^{n^2-n}$ y $\bar{\vartheta}_k^* = (\vartheta_{k1}^*, \dots, \vartheta_{kn}^*)$ es un vector en \mathbb{R}_{++}^n tal que $\vartheta_{kt}^* = \zeta_{kt}$ si \bar{x}_t no es consistente con $GARP(\bar{\vartheta}_{k-1})$, $\zeta_{kt} = \zeta_k^*$ y $\nexists \bar{x}_s$ con $s < t$ tal que $\zeta_{ks} = \zeta_k^*$, donde $\zeta_k^* = \max\{\zeta_{ks} : \zeta_{ks} < 1\}$ y $\vartheta_{kt}^* = 1$ en caso contrario. Designamos por $\bar{\vartheta}$ al vector de niveles de eficiencia $\bar{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{R}_{++}^n$ tal que $\vartheta_t = \vartheta_{n(n-1)t}$ para todo t .

El Teorema 2.3.3 y 2.3.5 garantizan la corrección y finitud del procedimiento iterativo que calcula para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, inconsistente con GARP un conjunto de niveles de eficiencia $(\vartheta_t)_{t=1}^n$. A continuación ilustramos el funcionamiento del procedimiento que permite construir algorítmicamente la α^* -estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) . En el paso 2 el algoritmo inicializa el vector-índice $\bar{\vartheta}$ haciendo $\bar{\vartheta} = (1, \dots, 1)$ y, al mismo tiempo, asigna en la variable que representa a la matriz de gasto perturbada por $\bar{\vartheta}$ los valores de la matriz de gasto original. Por otra parte, como $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface GARP, el algoritmo comienza una estructura repetitiva condicionada por una expresión lógica (paso 3). Una vez dentro de este bucle While, la rutina ejecutará una serie de sentencias (pasos 4, 5, 6, 7 y 8) mientras la expresión lógica siga siendo cierta; esto es, mientras que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no verifique $GARP(\bar{\vartheta})$. En el paso 4 se construye la matriz de gasto perturbada $C_{\bar{\vartheta}}$ para $\bar{\vartheta}$ (nótese que sólo perturbamos los elementos de su diagonal principal). En los pasos 5 y 6 se calcula la relación de preferencia revelada “relajada” $R^0(\bar{\vartheta})$ y su clausura transitiva $R(\bar{\vartheta})$ para $\bar{\vartheta}$, respectivamente. El paso 7 identifica las cestas fuertemente inconsistentes con $GARP(\bar{\vartheta})$, mientras que los pasos 8 y 9 permiten construir el vector auxiliar ϑ^* de la Definición 2.3.12, a partir del cual se puede calcular el índice buscado. La fórmula recursiva $\bar{v}_k = \bar{v}_{k-1} \odot \bar{v}_k^*$ de la Definición 2.3.12 se

consigue mediante la asignación $\vartheta(j) \leftarrow v^* \cdot \vartheta(j)$ del paso 12, y la repetición de las sentencias del bucle hasta que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisfaga $\text{GARP}(\bar{\vartheta})$.

La Figura 2.21, que aparece representada al final de la sección, ilustra la construcción algorítmica del vector índice $\bar{\vartheta}$ asociado a la α^* -estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.11).

Algorithm 14. Pseudo-code for computing IM2

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ inconsistent with GARP

1. begin
2. for $i, j := 1$ to n do $\vartheta(j) \leftarrow 1$; $C_\vartheta(i, j) \leftarrow C(i, j)$
3. While [$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ does not verify $\text{GARP}(\vartheta)$]
4. for $j := 1$ to n do $C_\vartheta(j, j) \leftarrow C(j, j)$; $C_\vartheta(j, j) \leftarrow \vartheta(j) \cdot C(j, j)$
5. for $i, j := 1$ to n if $C_\vartheta(i, i) \geq C_\vartheta(i, j)$ then $R_\vartheta^0(i, j) \leftarrow 1$ else $R_\vartheta^0(i, j) \leftarrow 0$
6. Compute the transitive closure R_ϑ of the relation R_ϑ^0
7. for $j := 1$ to n do $G_\vartheta(\bar{x}_j) \leftarrow \{\bar{x}_i : \bar{x}_i R_\vartheta \bar{x}_j \text{ and } C_\vartheta(j, j) > C_\vartheta(j, i)\}$
8. for $j := 1$ to n if $G_\vartheta(\bar{x}_j) \neq \emptyset$ then $a^*(j) \leftarrow \max \left\{ \frac{C_\vartheta(j, i)}{C_\vartheta(j, j)} < 1 : \bar{x}_i \in G_\vartheta(\bar{x}_j) \right\}$
9. $v^* \leftarrow \max \{a^*(j) : G_\vartheta(\bar{x}_j) \neq \emptyset\}$
10. for $j := 1$ to n if [$G_\vartheta(\bar{x}_j) \neq \emptyset \wedge a^*(j) = v^*$] then $\vartheta(j) \leftarrow v^* \cdot \vartheta(j)$
11. return

Output: $\bar{\vartheta} = \vartheta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

Observación 2.3.5 La Definición 2.3.12 de tipo recursivo permite considerar la construcción algorítmica de la α^* -estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) como un “procedimiento recursivo matricial”, del mismo modo que ocurría con la construcción algorítmica de $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$. El procedimiento es idéntico al “procedimiento recursivo matricial” que permitía obtener $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ por lo que omitimos la explicación. La única diferencia radica en la construcción del vector-índice auxiliar $\bar{\vartheta}^*$, a partir del cual –mediante la asignación $\vartheta(j) \leftarrow \vartheta(j) \odot \vartheta^*(j)$ del paso 10 del algoritmo – se construye la fórmula recursiva $\bar{\vartheta}_k = \bar{\vartheta}_{k-1} \odot \bar{\vartheta}_k^*$ de la Definición 2.3.12. En cada repetición del bucle controlado por la sentencia lógica “mientras que los datos de demanda observados $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no verifiquen $\text{GARP}(\bar{\vartheta})$ ” el vector auxiliar $\bar{\vartheta}^*$ puede obtenerse como suma de dos matrices \bar{v} y \bar{v} de tamaño n por 1. La matriz \bar{v} se obtiene a partir del array $\bar{v}_* = (v_{*1}, \dots, v_{*n})$ definido por $v_{*j} = \max_j \max_i \mathbf{B}_\vartheta[j, i]$, si $v_j^* = \max_j \max_i \mathbf{B}_\vartheta[j, i]$ y $v_{*j} = 0$ en caso contrario, donde $v_j^* = \max_i \mathbf{B}_\vartheta[j, i]$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$; mientras que $\bar{v} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ es la matriz definida por: $\nu_j = 1$ si $v_{*j} \neq 0$ y $\nu_j = 0$, en caso contrario. Nótese que $\mathbf{B}_\vartheta = C_\vartheta \odot \mathbf{A}_\vartheta$, donde C_ϑ es la matriz de gasto perturbada por $\bar{\vartheta}$ y \mathbf{A}_ϑ la matriz booleana $\mathbf{R}_\vartheta^t \odot \mathbf{P}_\vartheta^0$. Nótese que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\vartheta})$ si y sólo si $\mathbf{R}_\vartheta^t \odot \mathbf{P}_\vartheta^0 = \mathbf{O}_n$.

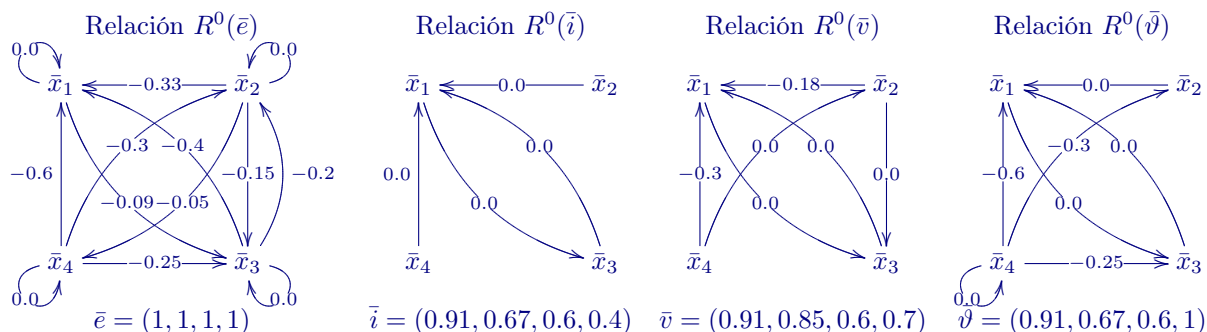
De la Definición 2.3.12 se sigue inmediatamente que si ϑ es una aplicación definida sobre \mathcal{F} que asigna a cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} el vector $\bar{\vartheta}_{\mathcal{D}}$, entonces ϑ está bien definida. El siguiente teorema muestra que (\mathcal{F}, ϑ) es una α^* -estructura de eficiencia.

Teorema 2.3.4 (\mathcal{F}, ϑ) es una α^* -estructura de eficiencia.

Demostración: Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ cualquier serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP. Necesitamos probar que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\vartheta})$. Razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que existen cestas \bar{x}_t y \bar{x}_{t_j} tales que $\bar{x}_{t_j} R(\bar{\vartheta}) \bar{x}_t$ y $\vartheta_t \bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$. El hecho de que $R(\bar{\vartheta})$ sea una subrelación de R , garantiza que \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con GARP y, por tanto, existen $\bar{x}_{t_1}, \dots, \bar{x}_{t_{r_t}}, r_t \geq 1$, tales que $\bar{x}_{t_i} R \bar{x}_t$ y $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}, \forall i = 1, \dots, r_t$. Podemos suponer sin pérdida alguna de generalidad que $\bar{p}_t \bar{x}_{t_i} \geq \bar{p}_t \bar{x}_{t_{i+1}} \forall i = 1, \dots, r_t - 1$. De otra parte, para todo $k \geq 1$ la definición de $\{\bar{\vartheta}_k\}_{k=1}^{n^2-n}$ garantiza que $\bar{\vartheta}_k \geq \bar{\vartheta}$, lo cual implica $\bar{x}_{t_j} R(\bar{\vartheta}_k) \bar{x}_t$, por ser $R(\bar{\vartheta})$ una subrelación de $R(\bar{\vartheta}_k)$, y además, $\vartheta_{kt} \bar{p}_t \bar{x}_t \geq \vartheta_t \bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$, de donde se deduce la existencia de un $k_j > 1$ tal que $\vartheta_{k_j t} = \frac{\bar{p}_t \bar{x}_{t_j}}{\bar{p}_t \bar{x}_t}$. Además, $\bar{\vartheta}_{k_j} \geq \bar{\vartheta}$ implica $\vartheta_{k_j t} \bar{p}_t \bar{x}_t \geq \vartheta_t \bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$, entonces $\bar{p}_t \bar{x}_{t_j} \geq \vartheta_t \bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$, lo que implica que $\bar{p}_t \bar{x}_{t_j} > \bar{p}_t \bar{x}_{t_j}$, lo cual es un absurdo. Esto prueba la afirmación. ■

A continuación, examinaremos las relaciones existentes entre la estructura de eficiencia de Varian, $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$, y las introducidas con anterioridad. El Ejemplo 2.3.9 muestra que las α^* -estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) , $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ son distintas y, además, que $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y (\mathcal{F}, ϑ) no son comparables en el sentido expresado por la Definición 2.3.9.

Ejemplo 2.3.9 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.11), entonces ni (\mathcal{F}, ϑ) describe mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$, ni viceversa. En efecto, en el Ejemplo — hemos probado que $\bar{\mathbf{i}} = \mathbf{i}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (0.91, 0.67, 0.6, 0.4)$ para estos datos, mientras que en las Figuras 2.16 y 2.21 que ilustran la construcción algorítmica de $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y (\mathcal{F}, ϑ) , respectivamente, para esta serie finita de datos de demanda se observa como $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (0.91, 0.85, 0.6, 0.7)$ y $\bar{\vartheta} = \vartheta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (0.91, 0.67, 0.6, 1)$. El siguiente gráfico ilustra las relaciones de preferencia revelada $R^0(\bar{\mathbf{i}})$, $R^0(\bar{\mathbf{v}})$ y $R^0(\bar{\vartheta})$ para este conjunto de datos de demanda.



Una consecuencia importante de este ejemplo es que si $\vartheta_{\mathcal{D}} \geq i_{\mathcal{D}}$ y $v_{\mathcal{D}} \geq i_{\mathcal{D}}$ para cada serie finita de demanda \mathcal{D} , entonces (\mathcal{F}, ϑ) y (\mathcal{F}, v) son α^* -estructuras de eficiencia que describen casi-mejor el comportamiento de un consumidor que (\mathcal{F}, i) . Cabe, pues, preguntarse si las estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) y (\mathcal{F}, v) describen mejor el comportamiento de un consumidor que (\mathcal{F}, i) . La respuesta (afirmativa) son los siguientes teoremas.

Teorema 2.3.5 (\mathcal{F}, v) describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, i) .

Demostración: En virtud del ejemplo anterior necesitamos solo comprobar que $\bar{v} = \bar{v}_{\mathcal{D}} \geq \bar{i}_{\mathcal{D}} = \bar{i}$ –eliminamos los subíndices por conveniencia– para cada lista finita de observaciones de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_1, \bar{x}_1), \dots, (\bar{p}_n, \bar{x}_n)\}$ que es inconsistente con GARP. Para cada cesta fija \bar{x}_t , si no es fuertemente inconsistente con GARP, es decir, si $\nexists \bar{x}_s$ tal que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_s$, entonces $i_t = v_t = 1$ por construcción. Si \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con GARP existen $\bar{x}_{t_1}, \dots, \bar{x}_{t_{r_t}}$, $r_t \geq 1$, tales que $\bar{x}_{t_i} R \bar{x}_t$ y $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}$, $\forall i = 1, \dots, r_t$. No perdemos generalidad si ordenamos las cestas demandadas anteriores de tal modo que $\bar{p}_t \bar{x}_{t_i} \geq \bar{p}_t \bar{x}_{t_{i+1}}$, $\forall i = 1, \dots, r_t - 1$. Supongamos que \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con $GARP(\bar{v}_k)$ para cada $k = 1, \dots, r_t - 1$, y también que \bar{x}_t es consistente con $GARP(\bar{v}_{r_t})$. Entonces $v_{k't} = v_{r_t t}$, $\forall k' = r_t, \dots, n - 1$, por tanto $v_t = v_{r_t t}$. Por otra parte, como $v_{kt} = \max \left\{ \frac{\bar{p}_t \bar{x}_s}{\bar{p}_t \bar{x}_t v_{k-1t}} < 1 : \bar{x}_s R(\bar{v}_{k-1t}) \bar{x}_t \right\}$, $\forall k = 1, \dots, r_t$ se verifica la siguiente igualdad:

$$v_t = v_{r_t t} = \frac{\prod_{i=1}^{r_t} \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}}{\prod_{i=1}^{r_t-1} \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}} \cdot \frac{1}{\bar{p}_t \bar{x}_t} = \frac{\bar{p}_t \bar{x}_{t_{r_t}}}{\bar{p}_t \bar{x}_t} = i_t$$

Si existe $k \in \mathbb{N}$ ($k \leq r_t - 1$) tal que \bar{x}_t viola $GARP(\bar{v}_h)$ para cada $h < k$ y \bar{x}_t es consistente con $GARP(\bar{v}_k)$, entonces

$$v_t = v_{kt} = \frac{\prod_{i=1}^k \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}}{\prod_{i=1}^{k-1} \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}} \cdot \frac{1}{\bar{p}_t \bar{x}_t} \implies v_t^k = i_t \cdot \frac{\prod_{i=k}^{r_t-1} \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}}{\prod_{i=k+1}^{r_t} \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}} = i_t \cdot \frac{\bar{p}_t \bar{x}_{t_k}}{\bar{p}_t \bar{x}_{t_{r_t}}} \geq i_t$$

En consecuencia, para cada t se tiene $v_t \geq i_t$, lo que completa la demostración. ■

A continuación, mostramos que la α^* -estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) también describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, i) .

Teorema 2.3.6 (\mathcal{F}, ϑ) describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, i) .

Demostración: En virtud del ejemplo anterior solo necesitamos verificar que $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_{\mathcal{D}} \geq \bar{i}_{\mathcal{D}} = \bar{i}$ –se han eliminado los subíndices por conveniencia– para cada lista finita de observaciones de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_1, \bar{x}_1), \dots, (\bar{p}_n, \bar{x}_n)\}$ que es inconsistente con GARP. Para cada cesta \bar{x}_t denotamos por $\Upsilon(\bar{x}_t)$ al conjunto formado por todas las cestas demandadas \bar{x}_s tales que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_s$. Nótese que para una cesta dada \bar{x}_t , si \bar{x}_t no es fuertemente inconsistente con GARP, es decir, si $\Upsilon(\bar{x}_t) = \emptyset$, por construcción se tiene que $\vartheta_t = i_t$. Por tanto, para probar

el resultado será suficiente ver que $\vartheta_t \geq i_t$ para cada \bar{x}_t que es fuertemente inconsistente con GARP. Sea \bar{x}_t fuertemente inconsistente con GARP, entonces existen $\bar{x}_{t_1}, \dots, \bar{x}_{t_{r_t}}$, $r_t \geq 1$, tales que $\bar{x}_{t_i} R \bar{x}_t$ y $\bar{p}_t \bar{x}_t > \bar{p}_t \bar{x}_{t_i} \quad \forall i = 1, \dots, r_t$. No perdemos generalidad si ordenamos las cestas demandadas de tal modo que $\bar{p}_t \bar{x}_{t_i} \geq \bar{p}_t \bar{x}_{t_{i+1}}$, $\forall i = 1, \dots, r_t - 1$. Sea $k^* = \sum_{t=1}^n \#\Upsilon(\bar{x}_t)$, entonces para cada \bar{x}_t y $k > k^*$ con $k^* < k \leq n(n-1)$ uno debe tener $\vartheta_{kt} = \vartheta_{k^*t}$ y, por tanto, $\vartheta_t = \vartheta_{k^*t}$. Si \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con $GARP(\bar{\vartheta}_k)$ para cada $k < k^*$, entonces

$$\vartheta_{k^*t} = \vartheta_t = \frac{\prod_{h=1}^{k^*} \vartheta_{ht}}{\prod_{h=1}^{k^*-1} \vartheta_{ht}} = \frac{\prod_{i=1}^{r_t} \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}}{\prod_{i=1}^{r_t-1} \bar{p}_t \bar{x}_{t_i}} \cdot \frac{1}{\bar{p}_t \bar{x}_t} = \frac{\bar{p}_t \bar{x}_{t_{r_t}}}{\bar{p}_t \bar{x}_t} = i_t$$

En caso contrario, existe $\tilde{k} < k^*$ tal que \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con $GARP(\bar{\vartheta}_{\tilde{k}})$ $\forall h < \tilde{k}$ y \bar{x}_t satisface $GARP(\bar{\vartheta}_{\tilde{k}})$, luego

$$\vartheta_t = \vartheta_{\tilde{k}t} = \frac{\prod_{h=1}^{\tilde{k}} \vartheta_{ht}}{\prod_{h=1}^{\tilde{k}-1} \vartheta_{ht}} \implies \vartheta_{\tilde{k}t} = i_t \cdot \frac{\prod_{h=\tilde{k}}^{k^*-1} \vartheta_{ht}}{\prod_{h=\tilde{k}+1}^{k^*} \vartheta_{ht}}$$

Además, como $\bar{\vartheta}_h \leq \bar{\vartheta}_k$ para cada $h > k$, se tiene que $\prod_{h=\tilde{k}}^{k^*-1} \vartheta_{ht} \geq \prod_{h=\tilde{k}+1}^{k^*} \vartheta_{ht}$, lo que implica que $\vartheta_{\tilde{k}t} \geq i_t$ y así $\vartheta_t \geq i_t$ para todo t , como queríamos probar. ■

Las estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y $(\mathcal{F}, \boldsymbol{\vartheta})$ se pueden construir de forma algorítmica a partir de la Definición 2.3.10 y de la Definición 2.3.12. El tiempo de ejecución de los algoritmos 13 y 14 es polinomial, lo cual facilita su posible aplicación en cualquier estudio empírico del comportamiento de un consumidor en donde se pretenda analizar la estructura de las decisiones de consumo de las unidades familiares o la existencia de un cambio estructural en las preferencias desde una perspectiva no paramétrica⁹⁶. A continuación, presentamos un ejemplo que prueba que, en la práctica, las estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y $(\mathcal{F}, \boldsymbol{\vartheta})$ describen mejor el comportamiento ante la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$.

Ejemplo 2.3.10 Sea $\{ \{ (\bar{p}_t^j, \bar{x}_t^j) \}_{t=1}^n : j = 1, \dots, 100 \}$ la familia formada por las series finitas de demanda correspondientes a los datos coleccionados por Mattei (2000) en su segundo experimento, realizado con 100 alumnos de Administración y Dirección de Empresas de la Universidad de Laussane⁹⁷. Para calcular los índices de eficiencia $(i)_{t=1}^n$, $(v)_{t=1}^n$ y $(\vartheta)_{t=1}^n$ se ha construido

⁹⁶Los algoritmos 13 y 14 nos permiten obtener para cada serie finita de datos de demanda el vector-índice asociado a las α^* -estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \boldsymbol{\vartheta})$ y $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$. La complejidad computacional de los procedimientos anteriores que determinan las α^* -estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y $(\mathcal{F}, \boldsymbol{\vartheta})$ respectivamente es del orden de $\mathcal{O}(nt(n))$ y $\mathcal{O}((n^2 - n)t(n))$ respectivamente, donde $t(n)$ designa el tiempo de ejecución del algoritmo utilizado en el cómputo de la clausura transitiva.

⁹⁷Mattei (2000) diseñó tres experimentos –considerando 8 bienes de consumo reales y 20 situaciones presupuestarias– para analizar el comportamiento de un consumidor. En los primeros dos experimentos los participantes eran estudiantes de la Universidad de Laussanne. En el primer experimento, el 25% de los 20 alumnos que asistían a sus clases de Microeconomía en la Universidad de Laussanne fueron inconsistentes con la teoría neoclásica de la demanda. En el segundo, efectuado a 100 alumnos matriculados en Administración y Dirección de Empresas, el 44% violaron GARP. Para su tercer experimento, Mattei envió un cuestionario a 435

un software [NONPARAMETRIC DEMAND.F90](#) en el lenguaje de programación FORTRAN 90 que como es ampliamente sabido es en la actualidad el lenguaje de alto nivel con más años de utilización ininterrumpida y que se ha convertido en uno de los lenguajes más populares en la comunidad científica debido a su simplicidad y eficiencia. El lenguaje FORTRAN (FORmula TRANslator) es un lenguaje muy próximo al lenguaje matemático y especialmente indicado para problemas susceptibles de descomposición funcional⁹⁸. Para más detalles sobre este lenguaje de programación véase el glosario de esta memoria.

Las tablas, que aparecen al final de esta sección, muestran los conjuntos de niveles de eficiencia $(i)_{t=1}^n$, $(v)_{t=1}^n$ y $(\vartheta)_{t=1}^n$ correspondientes a las estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, i) , (\mathcal{F}, v) y (\mathcal{F}, ϑ) , respectivamente, para cada uno de los 44 participantes del experimento 2 cuyas elecciones violaron GARP. A partir de los resultados obtenidos pueden extraerse las siguientes conclusiones: (1) El conjunto de series finitas de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ para las cuales el índice de Varian es maximal en el sentido de que no se puede encontrar un vector índice $\bar{\xi} > \bar{i}$ verificando $\text{GARP}(\bar{\xi})$ para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no es despreciable. Ocurre con frecuencia cuando el comportamiento está próximo a uno optimizador; (2) Los ciclos de la relación de la preferencia revelada para las series finitas para las cuales el vector-índice de Varian es maximal son aislados e irreducibles (numerosos participantes solo presentan un par de violaciones GARP) y (3) Para aquellos participantes cuyo comportamiento está más alejado de ser optimizador, los nuevos índices describen el comportamiento de la demanda mejor que el índice de Varian. Por tanto, para aquellos experimentos donde se analicen, por ejemplo, el efecto Threshold mediante la teoría de la preferencia revelada, nuestros índices describirán mejor el comportamiento de la demanda que el índice de Varian y permitirán, por tanto, analizar con mayor exactitud el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo.

A lo largo de esta sección hemos presentado tres nuevas estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, ϵ) , (\mathcal{F}, v) y (\mathcal{F}, ϑ) con unas propiedades muy deseables⁹⁹. La estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ϵ) describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que la estructura de eficiencia de Afriat, (\mathcal{F}, e^*) , mientras que (\mathcal{F}, v) y (\mathcal{F}, ϑ) son casi-mejores (en el sentido de la Definición 2.3.9) que (\mathcal{F}, i) . Sin embargo, y a pesar de todas las buenas propiedades que cumplen las nuevas estructuras de

individuos de la ciudad de Laussane, de los cuales 320 contestaron al mismo recibiendo 50 francos suizos por su colaboración. En este experimento, el 32% de los encuestados violaron GARP. Para más detalles sobre los experimentos y el diseño experimental, véase Mattei (2000).

⁹⁸FORTRAN 90 tiene cada característica en C que sea importante para la programación científica. Además, el lenguaje de programación FORTRAN 90 y versiones posteriores (Fortran 95/2000) han desarrollado una metodología para la POO con los que es posible obtener un alto nivel de abstracción y reducción del código. El lenguaje Fortran 90 posee casi la misma flexibilidad del lenguaje C++. Sin embargo, a diferencia del lenguaje C++, Fortran 90 está diseñado para generar códigos ejecutables que se optimizan altamente y conseguir un funcionamiento extremadamente más rápido. Las operaciones vectoriales con matrices están ya incluidas en el lenguaje, lo cual permite al programador escribir basándose en bibliotecas con alto grado de abstracción numérico. El proceso paralelo es otra de las características más importantes del lenguaje de programación FORTRAN 90.

⁹⁹El Ejemplo — muestra la imposibilidad de encontrar estructuras de eficiencia que describan mejor el comportamiento ante la demanda que (\mathcal{F}, i) , mientras que la nota al pie — permite realizar una afirmación análoga para la estructura de eficiencia (\mathcal{F}, e^*) .

eficiencia, éstas no son casi-mejores que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ y $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$ simultáneamente¹⁰⁰. Nuestro próximo objetivo será, por tanto, encontrar una estructura de eficiencia, (\mathcal{F}, ζ) , que simultáneamente describa casi-mejor el comportamiento ante la demanda que las estructuras de eficiencia de Afriat, $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$, y Varian, $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$, respectivamente.

Definición 2.3.13 (Índice AMP) Llamaremos índice de eficiencia AMP a la aplicación ζ que asigna, a cualquier serie finita de observaciones de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, el vector-índice $\zeta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{\zeta} = (\zeta_t)_{t=1}^n$ definido por:

$$\zeta_t = \begin{cases} 1 & \text{si } \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) = \emptyset \\ 1 + \min\{a_{ts}/\bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\} & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall t \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.20)$$

donde $\Gamma_{\mathcal{D}}$ designa a la aplicación multiforme $\Gamma_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D})$ definida por:

$$\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) = \begin{cases} \mathcal{X}_t & \text{si } \bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}} \\ \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall t \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.21)$$

ya \mathcal{X}_t denota el conjunto (posiblemente vacío) formado por todas las cestas de bienes \bar{x}_s para las cuales existe un ciclo \mathcal{C}_r con $\bar{x}_t, \bar{x}_s \in \mathcal{C}_r$ y $\Psi_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t, \bar{x}_s) = d_r$; siendo $d_r = \max\{\Psi_{\mathcal{D}}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) : (\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{C}_r\}$ y $\Psi_{\mathcal{D}}$ la función peso dada por:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{D}} : \quad E_{\mathcal{D}} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ (\bar{x}_i, \bar{x}_j) &\longmapsto \bar{p}_i \bar{x}_j - 1 = a_{ij} \end{aligned}$$

Por construcción, la n-tupla de números reales $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ es un elemento del n-cubo unidad C_n . Por otra parte, resulta sencillo probar que para cada $\bar{x}_t \in \mathcal{D}$ con $\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) \neq \emptyset$, una condición necesaria y suficiente para que $\min\{a_{ts} : \bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\} = 0$ es que \bar{x}_t sea inconsistente, pero no fuertemente¹⁰¹ inconsistente con GARP. Si \bar{x}_t no es inconsistente con GARP, entonces $\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) = \emptyset$ y, por tanto, $\zeta_t = 1$. Obsérvese, además, que si denotamos por $\tilde{\mathcal{D}}$ al conjunto (asociado a \mathcal{D}) formado por todas las cestas de bienes inconsistentes con GARP entonces se cumple $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{1}} = \bigcup_{\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}} \Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{1}}$, donde para cada $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ denotamos por $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{1}} = \{ \mathcal{C}_r \in \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{1}} / \bar{x}_t \in \mathcal{C}_r \wedge \exists \bar{x}_s \in \mathcal{C}_r \text{ con } \Psi_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t, \bar{x}_s) = d_r \}$.

A continuación, ilustramos con un ejemplo sencillo el procedimiento anterior.

Ejemplo 2.3.11 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.11). Como hemos mostrado con anterioridad, esta serie finita de datos de demanda no satisface GARP puesto que, por ejemplo, se tiene $\bar{x}_1 R \bar{x}_3$ y $\bar{p}_3 R \bar{x}_3 > \bar{p}_3 R \bar{x}_1$. Para obtener el

¹⁰⁰Nótese que las aproximaciones a la eficiencia en el consumo de Afriat y Varian no son comparables en el sentido de las definiciones de casi-mejor o mejor de la Definición 2.3.9. El Ejemplo 2.3.8 permite afirmar que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ no describe casi-mejor (resp., mejor) el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$, ni viceversa.

¹⁰¹Diremos que \bar{x}_t es inconsistente con GARP si existe un \bar{x}_s tal que $\bar{x}_s \in RP(\bar{x}_t)$ y $\bar{x}_t R^0 \bar{x}_s$ o si $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{x}_t P^0 \bar{x}_s$. Diremos que \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con GARP si existe un \bar{x}_s tal que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{x}_t P^0 \bar{x}_s$.

vector-índice $\bar{\zeta}$ es necesario conocer los ciclos existentes en la relación de preferencia revelada directa, R^0 , asociada.

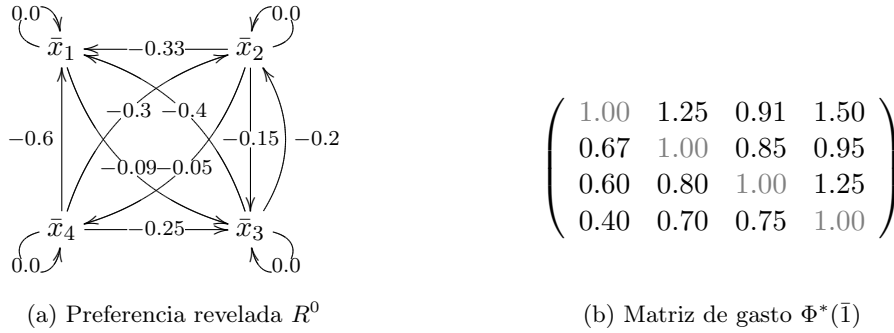


Figura 2.17: Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.

La Figura 2.17, que ilustra la matriz de gasto y la relación R^0 para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.11), muestra la existencia de cinco ciclos incoherentes con GARP. Estos ciclos permiten obtener los valores que toma la aplicación multiforme Γ definida en (2.21) para estos datos.

Ciclo $\mathcal{C}_1 := \{\bar{x}_4, \bar{x}_3, \bar{x}_2\}$	$d_1 = \max[a_{43}, a_{32}, a_{24}] = -0.05$	$\bar{x}_4 \in \Gamma(\bar{x}_2)$	$\Gamma(\bar{x}_1) = \{\bar{x}_3\}$
Ciclo $\mathcal{C}_2 := \{\bar{x}_1, \bar{x}_3\}$	$d_2 = \max[a_{13}, a_{31}] = -0.09$	$\bar{x}_3 \in \Gamma(\bar{x}_1)$	$\Gamma(\bar{x}_2) = \{\bar{x}_3, \bar{x}_4\}$
Ciclo $\mathcal{C}_3 := \{\bar{x}_2, \bar{x}_3\}$	$d_3 = \max[a_{23}, a_{32}] = -0.15$	$\bar{x}_3 \in \Gamma(\bar{x}_2)$	$\Gamma(\bar{x}_3) = \emptyset$
Ciclo $\mathcal{C}_4 := \{\bar{x}_2, \bar{x}_4\}$	$d_4 = \max[a_{24}, a_{42}] = -0.05$	$\bar{x}_4 \in \Gamma(\bar{x}_2)$	$\Gamma(\bar{x}_4) = \emptyset$
Ciclo $\mathcal{C}_5 := \{\bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1\}$	$d_5 = \max[a_{32}, a_{21}, a_{13}] = -0.09$	$\bar{x}_3 \in \Gamma(\bar{x}_1)$	

El gráfico anterior muestra los valores que toma la aplicación multiforme Γ para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.11). A partir de Γ obtenemos, en virtud de (2.20), $\bar{\zeta} = (0.91, 0.85, 1, 1)$ como vector-índice. La Figura 2.18 ilustra la relación de preferencia revelada directa $R^0(\bar{\zeta})$ para la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.11).

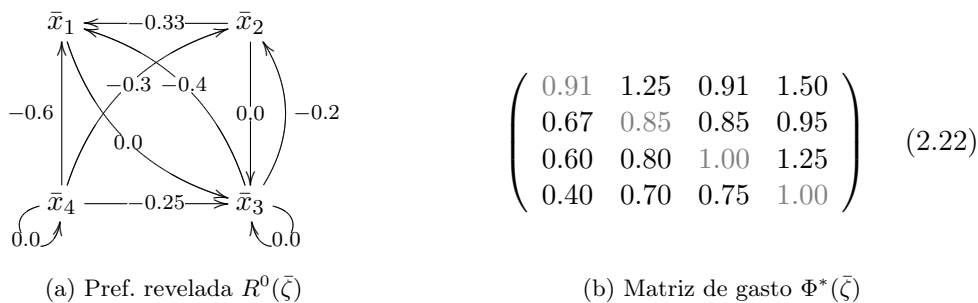


Figura 2.18: Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.

Por otra parte, es importante señalar que (por construcción del vector-índice $\bar{\zeta}$) para cada serie finita de m observaciones de demanda y para cada m -tupla de números reales $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ con $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$, la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\gamma})$ es acíclica y, por tanto, las observaciones de demanda satisfacen SARP($\bar{\gamma}$).

En lo sucesivo, denotaremos por ζ a la aplicación-índice que asigna a cada serie de m observaciones de demanda el vector-índice $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ definido en (2.20). Formalmente hablando, $\zeta(\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m) = \bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$, para cada $\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$. En el siguiente teorema probaremos que la aplicación-índice ζ es eficiente o, equivalentemente, que (\mathcal{F}, ζ) es una estructura de eficiencia.

Teorema 2.3.7 (\mathcal{F}, ζ) es una estructura de eficiencia.

Demostración: Para probar que (\mathcal{F}, ζ) es una estructura de eficiencia será suficiente probar que para cada serie finita de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ en \mathcal{F} se cumple:

$$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \text{ satisface GARP}(\bar{\gamma}) \text{ para todo } \bar{\gamma} \text{ en } C_n \text{ con } \zeta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{\zeta} \gg \bar{\gamma}$$

Por otra parte, como $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\gamma}$) si y solamente si $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$, será suficiente probar que para todo $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ se cumple $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$, puesto que $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\gamma}} = \bigcup \Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}}$ y la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\gamma}$) si y solamente si $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$. Veamos, pues, que $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$, para cada $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$. Para ello, y con objeto de facilitar la prueba, es conveniente expresar el vector-índice $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ en función de una lista finita $\{\bar{\zeta}^t\}_{t=1}^n$ de n -tuplas de números reales del n -cubo unidad. Para todo $\bar{x}_t \in \mathcal{D}$ tal que $\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) \neq \emptyset$ se considera la n -tupla de números reales $\bar{\zeta}^t = (\zeta_1^t, \dots, \zeta_n^t)$ definida por:

$$\zeta_j^t = \begin{cases} 1 + \min\{a_{ts}/\bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\} & \text{si } j = t \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por construcción, si $\bar{\zeta}^t = (1, \dots, 1)$ para todo $\bar{x}_t \notin \tilde{\mathcal{D}}$ se cumple $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^1 \odot \bar{\zeta}^2 \odot \dots \odot \bar{\zeta}^n$ y, por tanto, $\bar{\zeta} \leq \bar{\zeta}^t$ para todo $t \in \{1, \dots, n\}$. Así pues, para todo $\bar{\gamma}$ en C_n con $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$ se cumple que $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}^t$ para todo $t \in \{1, \dots, n\}$. Sea \mathcal{C}_r un ciclo cualquiera en $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^1 = \{\mathcal{C} \in \Sigma_{\mathcal{D}}/\bar{x}_t, \bar{x}_s \in \mathcal{C} \text{ para algún } \bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\}$, si $d_r^* > \min\{a_{ts}/\bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\}$ es claro que para todo $\bar{x}_k \in \mathcal{C}_r$ se cumple $\bar{x}_k R(\bar{\zeta}^t)\bar{x}_t$ y $\bar{x}_t R(\bar{\zeta}^t)\bar{x}_k$ y, por lo tanto, $\mathcal{C}_r \notin \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\zeta}^t}$ y, por tanto, $\mathcal{C}_r \notin \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\gamma}}$. Si $\mathcal{C}_r \in \Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^1$ es tal que $d_r^* = \min\{a_{ts}/\bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\}$, entonces se verifica que $\bar{x}_i R(\bar{\zeta}^t)\bar{x}_j$ y $\bar{x}_j R(\bar{\zeta}^t)\bar{x}_i$, para cualesquiera $\bar{x}_i, \bar{x}_j \in \mathcal{C}_r$. En particular, $\bar{x}_t R(\bar{\zeta}^t)\bar{x}_s$, $\bar{x}_s R(\bar{\zeta}^t)\bar{x}_t$ y, además, $\bar{\zeta}^t \bar{p}_t \bar{x}_t = \bar{p}_t \bar{x}_s$. Por otra parte, como $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$ se tiene, por definición de ζ que $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}^t$ para todo $\bar{x}_t \in \mathcal{D}$ tal que $\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) \neq \emptyset$, luego para cada $\bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)$ se cumple que $\gamma_t \bar{p}_t \bar{x}_t < \bar{p}_t \bar{x}_s$, de donde se deduce de manera inmediata que $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$ para todo $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$. De lo anterior se desprende, de manera inmediata, que para toda n -tupla de números reales $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ con $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$ y $\forall t \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$ y, en consecuencia que $\bigcup \Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$, lo cual implica que $\gamma_j \bar{p}_j \bar{x}_j < \bar{p}_j \bar{x}_i$ para todo par de observaciones i, j tales que $\bar{x}_j R(\bar{\gamma})\bar{x}_i$ y, por tanto,

la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\gamma})$ para todo $\bar{\gamma}$ del n-cubo unidad con $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$, como queríamos probar. ■

La estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ζ) admite una construcción algorítmica. El Algoritmo 14 que aparece ilustrado al final de esta sección permite la construcción del vector-índice $\bar{\zeta} = \zeta(\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m)$ para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$, normalizada. Por otra parte, merece la pena destacar que la estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ζ) es eficiente, pero no fuertemente eficiente. En efecto, el Ejemplo 2.3.11 prueba¹⁰² $\text{GARP}(\bar{\zeta})$, donde $\bar{\zeta} = (0.91, 0.85, 1, 1)$ que (\mathcal{F}, ζ) no es α^* -eficiente puesto que la serie finita de datos demanda con matriz de gasto (2.11) no satisface $\text{GARP}(\bar{\zeta})$. Este mismo ejemplo garantiza, además, la corrección del Teorema 2.3.8 así como de la Afirmación 2.3.10. Nótese que, para esta serie finita de datos de demanda, $e^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (0.85, 0.85, 0.85, 0.85)$ es el vector-índice de Afriat¹⁰³ y $i(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (0.91, 0.67, 0.60, 0.40)$ es el vector-índice de Varian¹⁰⁴.

A continuación, mostramos que (\mathcal{F}, ζ) describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, i) y (\mathcal{F}, e^*) .

Teorema 2.3.8 (\mathcal{F}, ζ) describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, e^*) .

Demostración: Para probar que (\mathcal{F}, ζ) describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, e^*) bastará con probar que $\zeta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) \geq e^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$, para cada $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Por lo tanto, para probar el resultado bastará probar que $\zeta_t \geq e^*$ para cada cesta \bar{x}_t . Pero, esto es inmediato puesto que $e^* = \min_t \zeta_t$, por construcción del índice. ■

El vector-índice de Varian admite una interpretación económica en términos del coste de ineficiencia. Esta interpretación nos servirá de ayuda para probar que (\mathcal{F}, ζ) describe casi-mejor el comportamiento ante la demanda que (\mathcal{F}, i) .

Observación 2.3.6 Encontrar un conjunto de niveles de eficiencia, $(e_t)_{t=1}^n$, satisfaciendo $\text{GARP}(\bar{e})$ equivale a encontrar un conjunto de “costes de ineficiencia”, $(w_t)_{t=1}^n$, asociado a $(e_t)_{t=1}^n$ de tal modo que para secuencia de observaciones $rs \dots qr$ pertenecientes a un ciclo de la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{e})$ se cumpla:

$$[a_{rs}^{w_r} \leq 0, a_{st}^{w_s} \leq 0, \dots, a_{qr}^{w_q} \leq 0] \Rightarrow [a_{rs}^{w_r} = \dots = a_{qr}^{w_q} = 0]$$

donde $a_{rs}^{w_r} = a_{rs} + w_r$ para cada par r, s . Para cada observación t el coste de ineficiencia, $w_t = 1 - e_t$, representa el porcentaje de dinero (no necesariamente el mínimo) que en cada observación se le permite derrochar al consumidor para que sus elecciones de consumo sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

¹⁰²Nótese que, para estos datos, se tiene $\bar{x}_1 R^0(\bar{\zeta}) \bar{x}_3$ y $\zeta_3 \bar{p}_3 \bar{x}_3 > \bar{p}_3 \bar{x}_1$.

¹⁰³Véase Ejemplo 2.3.2, para más detalles.

¹⁰⁴Véase Ejemplo 2.3.6, para más detalles.

Sea $\Upsilon_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D})$ la aplicación multiforme definida por:

$$\Upsilon_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) = \begin{cases} \mathcal{Z}_t & \text{si } \bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{V}\mathcal{S} \\ \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall t \in \{1, \dots, n\} \quad (2.23)$$

donde \mathcal{Z}_t es el conjunto (posiblemente vacío)

$$\mathcal{Z}_t = \{\bar{x}_s \in \mathcal{D} / \bar{x}_s R \bar{x}_t \wedge \bar{x}_t P^0 \bar{x}_s\}$$

El vector-índice de Varian se puede expresar en términos de la aplicación multiforme $\Upsilon_{\mathcal{D}}$. La n -tupla de números reales $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$ se construye como sigue:

$$i_t = \begin{cases} 1 & \text{si } \Upsilon_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) = \emptyset \\ 1 + \min\{a_{ts} / \bar{x}_s \in \Upsilon_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\} & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall t \in \{1, \dots, n\} \quad (2.24)$$

Por construcción, la n -tupla de números reales $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$ es un elemento del n -cubo unidad C_n . Nótese que $\Upsilon_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) = \emptyset \Leftrightarrow m(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) = 1 \Leftrightarrow i_t = 1$. Nótese, además, que $\forall t, s \in \{1, \dots, n\}$ se cumple $\bar{x}_s \in \Upsilon_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) \Leftrightarrow R^t[t, s] \odot P^0[t, s] = 1$. Finalmente, para todo $\bar{x}_s \in \Upsilon_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)$ se tiene que $\sim \bar{x}_t R^0(i_t) \bar{x}_s$, si $\bar{p}_r \bar{x}_s > m(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R)$. Obsérvese, además, que para cada \bar{x}_t es cierto que $\Gamma(\bar{x}_t) \subseteq \Upsilon(\bar{x}_t)$.

La observación anterior permite probar el siguiente teorema:

Teorema 2.3.9 (\mathcal{F}, ζ) describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, \bar{i}) .

Demostración: Para probar que (\mathcal{F}, ζ) describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, \bar{i}) bastará con probar que $\zeta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) \geq \bar{i}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$, para cada $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Por lo tanto, para probar el resultado bastará probar que $\zeta_t \geq i_t$. Veamos, pues, que $\zeta_t \geq i_t$ para cada cesta \bar{x}_t . Si \bar{x}_t es tal que $\Gamma(\bar{x}_t) = \emptyset$, entonces $\zeta_t = i_t = 1$; puesto que \bar{x}_t no es fuertemente inconsistente con GARP y, por tanto, $m(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) = \bar{p}_t \bar{x}_t$. Queda por demostrar que $\zeta_t \geq i_t$ para todo \bar{x}_t tal que $\Gamma(\bar{x}_t) \neq \emptyset$. Pero esto se sigue con facilidad de lo siguiente: para cada $\bar{x}_s \in \Gamma(\bar{x}_t)$ se tiene que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$, por (2.23). Por tanto, $\Gamma(\bar{x}_t) \subseteq \Upsilon(\bar{x}_t)$ para cada \bar{x}_t con $\Gamma(\bar{x}_t) \neq \emptyset$. Entonces, si $a_{ij} = \bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \quad \forall i, j$, se tiene que $\min\{a_{ts} : \bar{x}_s R \bar{x}_t\} \leq \min\{a_{ts} : \bar{x}_s \in \Gamma(\bar{x}_t)\}$, lo que implica que $\zeta_t \geq 1 + \min\{a_{ts} : \bar{x}_s R \bar{x}_t\}$. Por otra parte, como $m(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) = \min\{\bar{p}_t \bar{x}_s : \bar{x}_s R \bar{x}_t\} = 1 + \min\{a_{ts} : \bar{x}_s R \bar{x}_t\}$, por ser $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada, se tiene que $\zeta_t \geq i_t$ para cada \bar{x}_t tal que $\Gamma(\bar{x}_t) \neq \emptyset$, lo que completa la prueba. ■

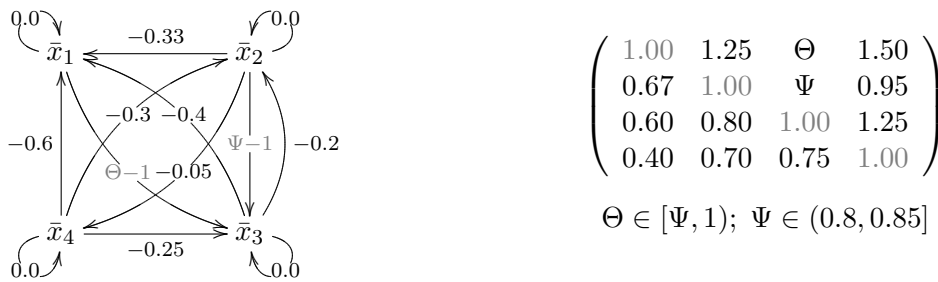
Para finalizar merece la pena resaltar que la prueba del teorema anterior justifica el siguiente resultado.

Proposición 2.3.10 (\mathcal{F}, ζ) describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$.

Demostración: En efecto, se ha probado que $\zeta_t \geq \epsilon^*$ para cada \bar{x}_t puesto que $\epsilon^* = \min_t \zeta_t$, por construcción. Por otra parte, si \bar{x}_t no es inconsistente con GARP entonces $\Gamma(\bar{x}_t) = \emptyset$ y, en

consecuencia, $\zeta_t = 1$, por (2.20), de lo que se desprende que $\zeta_t \geq \epsilon_t^*$ para cada \bar{x}_t consistente con GARP. Finalmente, para cada \bar{x}_t inconsistente, pero no fuertemente inconsistente con GARP se tiene que $m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) = \bar{p}_t \bar{x}_t$ y, por tanto, $0 = \min\{a_{ts} : \bar{x}_s R \bar{x}_t\}$, de donde se deduce inmediatamente que $\min\{a_{ts} : \bar{x}_s \in \Gamma(\bar{x}_t)\} = 0$ y $\zeta_t = 1$ puesto que $\min\{a_{ts} : \bar{x}_s R \bar{x}_t\} \leq \min\{a_{ts} : \bar{x}_s \in \Gamma(\bar{x}_t)\} \leq 0$, para cada cesta demandada \bar{x}_t . ■

Ejemplo 2.3.12 En infinitas situaciones el índice AMP describe mejor el comportamiento de un consumidor que los índices de Afriat y Varian, respectivamente.



Índice de Varian (1990, 1993) $\rightarrow \bar{e}^* = (\Theta, 0.67, 0.60, 0.40)$

Índice de Afriat (1973) $\rightarrow \bar{i} = (\Psi, \Psi, \Psi, \Psi)$

Índice AMP (2010) $\rightarrow \bar{\zeta} = (\Theta, \Psi, 1.00, 1.00)$

Para finalizar, tres observaciones. En primer lugar, señalar que los procedimientos anteriores que nos permitían construir algorítmicamente las estructuras α^* -estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y $(\mathcal{F}, \mathbf{\vartheta})$ pueden ser considerados como “procedimientos matriciales recursivos” –hablando en términos intuitivos y abusando del lenguaje– donde para cada vector-índice candidato $\bar{\epsilon}$ para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ se considera la matriz \mathbf{A}_ϵ que identifica las cestas \bar{x}_t fuertemente inconsistentes con GARP ($\Upsilon(\bar{x}_t) = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{A}_\epsilon[t, s] = 0, \forall s \in \{1, \dots, n\}$) y, a continuación, en la matriz $\mathbf{B}_\epsilon = \mathbf{C} \odot \mathbf{A}_\epsilon$ se selecciona un vector auxiliar con una operación del tipo min (mínimo por filas en \mathbf{B}_ϵ) –construcción de $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ –, del tipo max (máximo por filas) –construcción de $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ – y, finalmente, del tipo max-max (máximo por filas y por columnas) –construcción de $(\mathcal{F}, \mathbf{\vartheta})$ – para encontrar un vector auxiliar a partir del cual se pueda aplicar la correspondiente fórmula recursiva para obtener recursivamente el vector-índice $\bar{\epsilon}$ (resp., conjunto de niveles de eficiencia $(\epsilon)_{t=1}^n$) satisfaciendo GARP($\bar{\epsilon}$), para cada $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Abusando del lenguaje, podemos decir que el procedimiento que permite la construcción algorítmica de la estructura $(\mathcal{F}, \mathbf{\vartheta})$ es un procedimiento recursivo de tipo max-max, mientras que $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ es un procedimiento de tipo max y $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ un procedimiento de tipo min en la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{C} \odot \mathfrak{R}(\mathbf{R}^t \odot \mathbf{P}^0)$ ¹⁰⁵ Esta observación, junto con la visión matricial que de los procedimientos $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y $(\mathcal{F}, \mathbf{\vartheta})$ se ha realizado con anterioridad, nos lleva a pensar en procedimientos recursivos del tipo min-min,

¹⁰⁵ Como señalamos con anterioridad, este procedimiento “recursivo” necesitaría un sólo paso para hallar el vector índice de Varian, por definición del conjunto de niveles de eficiencia de Varian.

max-min o min-max que proporcionen aplicaciones-índice fuertemente eficientes que describan casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$. En segundo lugar, merece la pena destacar que a pesar de la similitud entre las aproximaciones a la eficiencia en el consumo de Afriat y Varian las diferencias son evidentes: (1) para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, se cumple que los datos perturbados satisfacen el axioma $\text{GARP}(\bar{i})$, mientras que no se cumple en general que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ verifique el axioma $\text{GARP}(\bar{e}^*)$; (2) las aproximaciones de Afriat, $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$, y Varian, $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$, no son comparables en el sentido de las definiciones de casi-mejor o mejor de la Definición 2.3.9. El Ejemplo 2.3.8 permite afirmar que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ no describe casi-mejor (resp., mejor) el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$, ni viceversa.

La aproximación no-paramétrica de Afriat (1973) y Varian (1990) permite ofrecer una interpretación económica del concepto de eficiencia en términos del dinero “derrochado” por un consumidor en sus decisiones de consumo inconsistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Estos índices están basados en la idea de que un consumidor ineficiente está “derrochando” dinero. Nótese que si el comportamiento de un consumidor es inconsistente con la hipótesis de la minimización del gasto (resp., maximización de la utilidad) entonces existe, al menos, una cesta de bienes más barata y que el consumidor revela que prefiere a otra que ha sido elegida. En efecto, supongamos que \bar{x}_1 y \bar{x}_2 representan las cestas de bienes demandadas por un consumidor en las situaciones presupuestarias B_1 y B_2 , donde $B_i = \{\bar{x} \in \mathbb{R}_+^k / \bar{p}_i \bar{x} \leq m_i\}$. La Figura 2.22 ilustra gráficamente esta situación para el caso de dos bienes ($k = 2$). Si el consumidor hubiese sido racional¹⁰⁶ en sus elecciones podría haberse ahorrado $|a_{21}|$ u.m. en B_1 y $|a_{12}|$ u.m. en el conjunto presupuestario B_2 . Así, $(1 - i_1) = |a_{12}|$ y $(1 - i_2) = |a_{21}|$ representan los márgenes de error que le permiten al consumidor para que sus elecciones verifiquen¹⁰⁷ el axioma GARP. Por otra parte, el ínfimo de estas cantidades w^* representa la cantidad mínima de dinero que se le permite derrochar a un consumidor en todas sus elecciones para que éstas sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

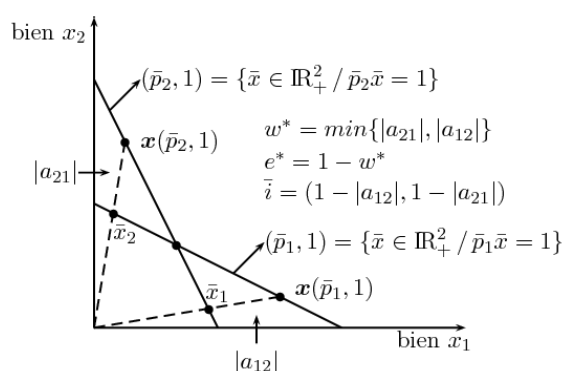


Figura 2.19: Índices de Afriat y Varian.

¹⁰⁶Nótese que el par de cestas demandadas \bar{x}_1 y \bar{x}_2 constituyen una violación del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada.

¹⁰⁷Nótese que en la situación presupuestaria B_1 el consumidor podría haberse ahorrado $\bar{p}_1 \cdot (\mathbf{x}(\bar{p}_1, 1) - \bar{x}_2)$ unidades monetarias. De manera similar, el consumidor se podría haber ahorrado $\bar{p}_2 \cdot (\mathbf{x}(\bar{p}_2, 1) - \bar{x}_1)$ unidades monetarias en la situación presupuestaria B_2 , donde $\mathbf{x}(\bar{p}_i, 1)$ designa a una cesta de bienes del conjunto presupuestario B_i tal que $\bar{p}_i \cdot \mathbf{x}(\bar{p}_i, 1) = 1$.

Finalmente, señalar que no se han considerado en nuestro estudio estos procesos eficientes de asignación de índices por no hacer más extensa la memoria y, fundamentalmente, por las razones que se enumeran a continuación:

1) El “procedimiento recursivo min-min” no es un buen candidato dado que si designamos por $\mathbf{i}_\star(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{i}_\star = (i_\star, \dots, i_\star)$ a la aplicación-índice tal que $i_\star = \min_{ij} B_{ij}$, para cada $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ entonces es claro que \mathbf{i}_\star es eficiente y, en consecuencia, $(\mathcal{F}, \mathbf{i}_\star)$ es una α^* -estructura de eficiencia¹⁰⁸; pero $(\mathcal{F}, \mathbf{i}_\star)$ verifica la siguiente propiedad, que no precisa demostración por ser ésta inmediata: “Las estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ y $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$ describen casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i}_\star)$ ”. Esta es la razón por la cual no ha sido considerado en este estudio. Nótese que se están buscando vectores-índice \bar{e} que sean los más próximos a uno en alguna norma razonable. Como se ha señalado en repetidas ocasiones a lo largo de esta memoria, Varian (1985, 1990) consideró la norma euclídea $\|\bar{1}\| - \|\bar{e}\|$ como medida estadística de la bondad del ajuste.

2) La segunda opción, el “procedimiento recursivo max-min”, sí que proporciona una α^* -estructura de eficiencia que describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$. Sin embargo, merece la pena resaltar que esta α^* -estructura de eficiencia de tipo max-min es un elemento de la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ que se ha analizado en la sección 2.4 de esta memoria.

3) En relación con el “procedimiento recursivo min-max”, merece la pena señalar que sí se podría haber incluido en la memoria¹⁰⁹. Sin embargo, hemos decidido no incluir esta α^* -estructura de eficiencia en nuestro análisis por varias razones: en primer lugar, porque no es comparable con las otras estructuras α^* -eficientes¹¹⁰ y, en segundo lugar, porque (esta es la razón fundamental) esta estructura tampoco permitiría resolver el problema de la máxima norma planteado por Varian (1985, 1990). Basta considerar en el espacio de consumo formado únicamente por dos bienes dos cestas demandadas \bar{x}_1 y \bar{x}_2 inconsistentes con GARP tales que $\bar{p}_1\bar{x}_1 = 1$; $\bar{p}_1\bar{x}_2 = 0.99$; $\bar{p}_2\bar{x}_1 = 0.99$ y $\bar{p}_2\bar{x}_2 = 1$. Para estos datos de demanda se tiene que $\bar{i} = (0.99, 0.99)$ es maximal en el sentido de que no se puede encontrar un vector-índice $\bar{\zeta} > \bar{i}$ satisfaciendo GARP($\bar{\zeta}$) para estos datos¹¹¹, lo que implica que los vectores-índices asociados a las estructuras “min-max” y “max-min” son iguales al vector-índice de Varian. Sin embargo, no son solución del clásico

¹⁰⁸ Este algoritmo precisa sólo de una repetición en el bucle para obtener el vector-índice eficiente.

¹⁰⁹ La prueba de que este procedimiento proporciona una α^* -estructura eficiente que describe casi-mejor el comportamiento ante la demanda que $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ es análoga a las demostraciones del Teorema 2.3.5 y del Teorema 2.3.6, que garantizan que (\mathcal{F}, ϑ) es una α^* -estructura de eficiencia que describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$. Nótese que esta estructura de eficiencia se obtiene modificando únicamente la sentencia de construcción del vector-índice auxiliar en el bucle “*mientras* $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ *no verifique* GARP(α)”, sentencia previa a la asignación recursiva del vector-índice.

¹¹⁰ La serie finita de datos de demanda que representa la matriz de gasto (2.11) permite afirmar que (\mathcal{F}, ϑ) no es comparable con el procedimiento min-max y que $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ tampoco es comparable con el procedimiento max-min. Por otra parte, haciendo que el elemento de la fila 4 y columna 1 de la matriz de gasto (2.11) pase a ser 0.7 se infiere que (\mathcal{F}, ϑ) no es comparable con min-max. Para la matriz de gasto (2.11) se tiene $\bar{\eta} = (0.91, 0.95, 0.6, 0.7)$, mientras que para la matriz de gasto modificada se tiene también que $\bar{\eta} = (0.91, 0.95, 0.6, 0.7)$, mientras que $\bar{\vartheta} = (0.91, 0.95, 0.6, 1)$, donde $\bar{\eta}$ es el vector-índice asociado al procedimiento min-max.

¹¹¹ Nótese, además, que para estos datos se verifica lo siguiente: $\bar{e}^* = \bar{i} = \bar{v} = \bar{\vartheta} = \bar{\zeta} = (0.99, 0.99)$

problema de optimización planteado por Varian (1985, 1990) en el “Journal of Econometrics”:

$$\max_{e_t} \sum_{t=1}^n (e_t)^2 \quad \text{s.a.} \quad \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \text{ verifique } GARP(\bar{e}) \quad (2.25)$$

Para estos datos si consideramos, por ejemplo, los vectores-índice $\bar{e} = (1, 0.9899\dots)$ o $\bar{e} = (0.9899\dots, 1)$ se verifica que el par de cestas demandadas \bar{x}_1 y \bar{x}_2 satisfacen $GARP(\bar{e})$ y que, por tanto, \bar{e} es solución de este problema de optimización, además de que la solución no es única, obviamente. De lo anterior se desprende que para resolver este clásico problema de optimización se hace necesario generalizar el concepto de estructura de eficiencia y relajar la relación de la preferencia revelada en conjuntos apropiados, que como mostraremos en la siguiente sección, son los subconjuntos inconsistentes o fuertemente inconsistentes con $GARP$, conjuntos que estudiamos, analizamos y caracterizamos en la sección 2.2 de esta memoria. En la próxima sección resolveremos este problema, considerando el concepto de variedad de eficiencia; generalización de la estructura de eficiencia.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1967) The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 67-77.
- [2] Afriat, S. (1972) Efficiency Estimates of Production Functions *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 568-598.
- [3] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An Extension of the Classical Method. *International Economic Review* 14, págs. 460-472.
- [4] Afriat, S. (1987) *Logic of Choice and Economic Theory*. Oxford: Clarendon Press.
- [5] Akerlof, G. y J. Yellen (1985) Can Small Deviations from Rationality Make Significant Differences to Economic Equilibria? *American Economic Review*, Vol. 75, págs. 708-20.
- [6] Alcántud, J.C.R. y A. Manrique (2001) A Continuous Representation by a Money-Metric Function. *Mathematical Social Sciences*, Vol. 41(3), págs. 365-373.
- [7] Andreoni, J. y J. Miller (2002) Giving According to GARP: An Experimental Test of the Consistency of Preferences for Altruism. *Econometrica*, Vol. 70, págs. 737-753.
- [8] Barnett, W., Fisher, D., y A. Serletis (1992) Consumer Theory and the Demand for Money. *Journal of Economic Literature*, Vol. 4, págs. 2086-2119.
- [9] Battalio, R.C. et al. (1973) A Test of Consumer Demand Theory Using Observations of Individual Consumer Purchases. *Western Economic Journal* Vol. 11, págs. 411-428.
- [10] Choi, S. y K. Sosin (1992) Structural Change in the Demand for Money. *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 24(2), págs. 226-238.
- [11] Cochrane, J. (1989) The Sensitivity of Tests of Intertemporal Allocation of Consumption to Near-Rational Alternatives. *American Economic Review*, Vol. 79, págs. 319-337.
- [12] Cox, J. (1997) On Testing the Utility Hypothesis. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1054-1078.
- [13] Drake, L. y K. Chrystal (1994) Company-Sector Money Demand: New Evidence on the Existence of a Stable Long-Run Relationship for the United Kingdom. *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 26(3), págs. 479-494.
- [14] Drake, L. y K. Chrystal (1997a) Personal Sector Money Demand in the UK. *Oxford Economic Papers, New Series*, Vol. 49(2), págs. 188-206.
- [15] Drake, L. y K. Chrystal (1997b) Nonparametric Demand Analysis of U.K. Personal Sector Decisions on Consumption, Leisure and Monetary Assets: a Reappraisal. *Oxford Economic Papers, New Series*, Vol. 49(2), págs. 188-206.

-
- [16] Fleissig, A.; Hall, A. y J. Seater (2000) GARP, Separability and the Representative Agent. *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 4, págs. 324-342.
- [17] Hicks, J. (1956) *A Revision of Demand Theory*. Oxford: Oxford University Press.
- [18] Houtman, M. y J. Maks (1987) *The Existence of Homothetic Utility Functions Generating Dutch Consumer Data*. University of Groningen.
- [19] Knoblauch, V. (1992) A Tight Upper Bound on the Money Metric Utility Function. *The American Economic Review*, Vol. 82, págs. 660-663.
- [20] Mattei, A. (1994) La Coherence des Choix des Cosommateurs Suisses. *Revue Suisse D'Economie Politique et de Statistique*, Vol. 30, págs. 3-20.
- [21] Mattei, A. (2000) Full-Scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data. *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 43, págs. 487-497.
- [22] Pareto, W. (1927) *Manuel d'Economie Politique*, 2.^a edición, Paris.
- [23] Patterson, K. (1991) A Non-Parametric Analysis of Personal Sector Decisions on Consumption, Liquid Assets and Leisure. *Economic Journal*, Vol. 101, págs. 1103-1116.
- [24] Samuelson, P. (1947) *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.
- [25] Sippel, R. (1996) A Note on the Power of Revealed Preference Tests with Afriat Inefficiency. Bonn University Discussion Paper, No. A-528.
- [26] Sippel, R. (1997) An Experiment On the Pure Theory Of Consumer's Behaviour. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1431-44.
- [27] Slutsky, E. (1915). Sulla teoria del bilancio del consumatore. *Giornale degli Economisti*, Vol. 51, págs. 1-26. Translation by O. Ragusa: 'On the theory of the budget of the consumer', in G. J. Stigler and K. E. Boulding (eds), *Readings in Price Theory*. Chicago: Richard D. Irwin, 1952, págs. 27-56.
- [28] Tsur, Y. (1989) On Testing for Revealed Preference Conditions. *Economics Letters*, Vol. 31, págs. 359-362.
- [29] Varian, H. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50, págs. 945-971.
- [30] Varian H. (1985) Non-Parametric Analysis of Optimizing Behavior with Measurement Error. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 445-458.
- [31] Varian, H. (1987) On Goodness-of-Fit of Revealed Preference Conditions. CREST Working Paper. Department of Economics. University of Michigan.

- [32] Varian, H. (1990) Goodness-of-Fit in Optimizing Models. *Journal of Econometrics*, Vol. 46, págs. 125-140.
- [33] Varian, H. (1993) Goodness-of-Fit for Revealed Preference Tests. CREST Working Paper. Department of Economics. University of Michigan.
- [34] Varian, H. (2006) Revealed preferences. In *Samuelsonian Economics and the 21st Century*, Michael Szenberg (ed.). Oxford University Press, págs. 99-115.
- [35] Wold, H. y L. Jureen (1953) *Demand Analysis*. John Wiley, New York.

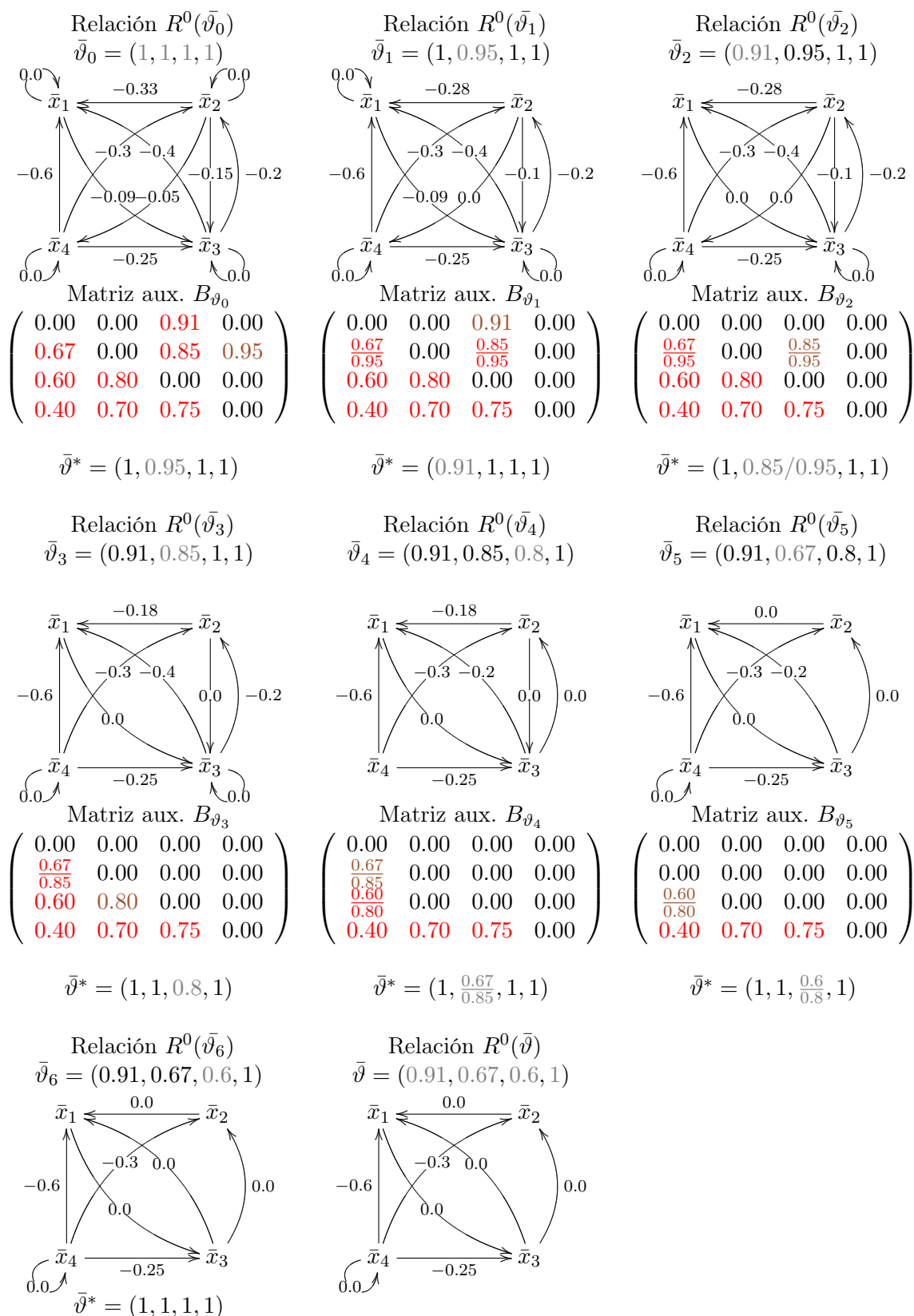
Algorithm 15. Pseudo-code for computing AMP index

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. for $i, j := 1$ to n do $a[i, j] \leftarrow c[i, j] - c[i, i]$; $R^0[i, j] \leftarrow 0$; $P^0[i, j] \leftarrow 0$
3. for $i, j := 1$ to n do
 4. if ($c[i, j] > c[i, i]$) then $P^0[i, j] \leftarrow 1$; $R^0[i, j] \leftarrow 1$
 5. else if ($c[i, j] = c[i, i]$) then $R^0[i, j] \leftarrow 1$
6. Compute the transitive closure matrix R of R^0 and check GARP
7. If $[\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ doesn't satisfies GARP] then
 8. call procedure algorithm's Johnson (1975)
 9. open this data file (which contains all cycles of revealed preference)
 10. for $i := 1$ to $nciclos$ do
 11. $s \leftarrow 1$; $T(1:nnode) \leftarrow 0$; $k(1:nnode) \leftarrow 0$; $long \leftarrow 0$; $d \leftarrow 0$
 12. read in this data file $h, (k(j), j=1, h)$
 13. for $j := 1$ to $h-1$ do
 14. If ($k(j) \neq 0$.and. $k(j+1) \neq 0$) then do
 15. $T(s) \leftarrow a[k(j), k(j+1)]$; $b[i, s] \leftarrow k(j)$; $b[i, s+1] \leftarrow k(j+1)$; $s=s+1$
 16. If ($k(h) \neq 0$) then $T(s) \leftarrow a[k(h), k(1)]$; $b[i, s] \leftarrow k(h)$; $b[i, s+1] \leftarrow k(1)$
 17. for $i := 1$ to s do $long \leftarrow long+T(i)$
 18. If ($long < 0$) then do
 19. compute $d=\maxval T(1:s)$
 20. for all indices $j \leq s$ such that $T(j)=d$ do
 21. if ($j < s$) then $F[p, 1] \leftarrow b[i, j]$; $F[p, 2] \leftarrow b[i, j+1]$; $p = p + 1$
 22. else if ($j=s$) then $F[p, 1] \leftarrow b[i, s]$; $F[p, 2] \leftarrow b[i, 1]$; $p = p + 1$
 23. $O[1:nnode, 1:p] \leftarrow 0$; $n(1:nnode) \leftarrow 1$
 24. for $i := 1$ to $nnode$
 25. for $j := 1$ to p do
 26. if ($F(j, 1)=i$) then $O[i, n(i)] \leftarrow a[F(j, 1), F(j, 2)]$; $n(i) \leftarrow n(i) + 1$
 27. for $i := 1$ to $nnode$ do
 28. if ($\minval O[i, 1:p]=0$) then $\zeta(i) \leftarrow 1$ else $\zeta(i) \leftarrow 1 + \maxval O[i, 1:n(i)]$
 28. return

Output: $\bar{\zeta} = \zeta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

Figura 2.20: Pseudocódigo del algoritmo que permite construir el índice de eficiencia AMP.

Figura 2.21: Construcción de la estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) .

Índices de eficiencia: participantes violando GARP (Exp. II)

D-EXP II	Participantante	Obs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
G5416939.PRN	(i_t)	.880	.889	.960	.892	1.00	.938	.942	.934	.871	1.00	1.00	1.00	.843	1.00	.971	.907	1.00	.843	.942	.892	.844
	(v_t)	.975	.992	.980	.971	1.00	.965	.942	.986	.970	1.00	1.00	1.00	.968	1.00	.971	.986	1.00	.974	.942	.977	.980
	(ϑ_t)	.975	.981	.960	.929	1.00	.938	.942	.963	.970	1.00	1.00	1.00	.974	1.00	.971	.984	1.00	.974	.942	.977	.936
A6412283.PRN	(i_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.995	1.00	.976
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.995	1.00	.976
	(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.995	1.00	.976
B6400452.PRN	(i_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.984	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.984	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.984	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
B6405907.PRN	(i_t)	.989	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.983	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	.989	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.983	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(ϑ_t)	.989	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.983	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
C5402640.PRN	(i_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	.984
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	.984
	(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	.984
C5426250.PRN	(i_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.950	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.950	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.950	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.950	1.00	1.00
	(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.950	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.950	1.00	1.00
C6400957.PRN	(i_t)	.986	.958	.976	.983	1.00	.955	.986	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.985	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.964	1.00	.966
	(v_t)	.986	.975	.976	.983	1.00	.967	.986	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.985	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.964	1.00	.966
	(ϑ_t)	1*	.971	.976	.983	1.00	.955	.986	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.985	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1*	1.00	.966
D6403357.PRN	(i_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
D6409438.PRN	(i_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00
	(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00
D6411392.PRN	(i_t)	.991	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	.991	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(ϑ_t)	.991	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
D6418090.PRN	(i_t)	.975	.892	.967	1.00	.956	.918	.940	.948	1.00	.913	1.00	.959	.960	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.959	1.00	.892
	(v_t)	.975	.914	.967	1.00	.956	.940	.940	.989	1.00	.913	1.00	.959	.960	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.959	1.00	.908
	(ϑ_t)	.975	.914	.967	1.00	.956	.918	.940	.948	1.00	.913	1.00	.959	.960	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.959	1.00	.994

Mattei, A. (2000) *Full-Scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data*. Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 43, pág. 487-97

D-EXP II		Índices de eficiencia: participantes violando GARP (Exp. II)																				
		Obs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D6418611.PRN	(v_t)	.864	.811	.914	.945	1.00	.870	1.00	.988	.667	1.00	.870	.965	.958	.791	1.00	.870	1.00	.870	1.00	.879	.832
	(v_t)	.964	.811	.914	.945	1.00	.870	1.00	.988	.667	1.00	.995	.965	.958	.992	1.00	.895	1.00	.895	1.00	.879	.832
	(v_t)	1*	.928	.963	.945	1.00	.870	1.00	.988	.858	1.00	.995	.965	.958	.887	1.00	.870	1.00	.870	1.00	.887	.967
F3406411.PRN	(v_t)	.950	.996	1.00	.955	1.00	1.00	.986	1.00	.987	1.00	.987	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.963	1.00
	(v_t)	.960	.996	1.00	.955	1.00	1.00	.986	1.00	.987	1.00	.987	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.963	1.00
	(v_t)	1*	.996	1.00	.955	1.00	1.00	.986	1.00	.987	1.00	.987	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.963	1.00
F6410519.PRN	(v_t)	1.00	1.00	1.00	.990	1.00	1.00	.962	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	.990	1.00	1.00	.962	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	.990	1.00	1.00	.962	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
F6428198.PRN	(v_t)	1.00	1.00	.982	.977	1.00	.984	1.00	1.00	.964	1.00	.978	.986	.932	1.00	1.00	.986	1.00	.986	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	.982	.985	1.00	.984	1.00	1.00	.964	1.00	.978	.986	.977	1.00	1.00	.986	1.00	.986	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	.982	.977	1.00	1*	1.00	1.00	.964	1.00	.978	.986	1*	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
G3807329.PRN	(v_t)	1.00	.992	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	1.00	1.00	.978	1.00	1.00	1.00	.983	1.00	.983	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	.992	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	1.00	1.00	.978	1.00	1.00	1.00	.983	1.00	.983	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1*	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	1.00	1.00	.978	1.00	1.00	1.00	.983	1.00	.983	1.00	1.00	1.00
G5416947.PRN	(v_t)	.889	.971	.929	.857	1.00	.881	1.00	1.00	.861	1.00	1.00	.929	1.00	1.00	.988	.972	.929	.929	.971	1.00	1.00
	(v_t)	.918	.971	.929	.978	1.00	.995	1.00	1.00	.974	1.00	1.00	.929	1.00	1.00	.988	.972	.967	.967	.971	1.00	1.00
	(v_t)	1*	.971	.929	.990	1.00	.985	1.00	1.00	.993	1.00	1.00	.929	1.00	1.00	.988	.972	.978	.978	.971	1.00	1.00
G6401351.PRN	(v_t)	1.00	1.00	.962	1.00	1.00	.937	1.00	.946	.996	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	.962	1.00	1.00	.937	1.00	.946	.996	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	.962	1.00	1.00	.937	1.00	.992	.996	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
G6407705.PRN	(v_t)	1.00	1.00	1.00	.998	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.976	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	.998	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.976	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	.998	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.976	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
H4421484.PRN	(v_t)	.916	1.00	1.00	.931	1.00	.986	.970	.909	.959	1.00	1.00	.871	1.00	.946	.940	1.00	.871	1.00	.871	.992	.936
	(v_t)	.992	1.00	1.00	.985	1.00	.986	.977	.909	.959	1.00	1.00	.998	1.00	.946	.940	1.00	.871	1.00	.871	.992	.936
	(v_t)	.992	1.00	1.00	.985	1.00	.986	1*	.974	.959	1.00	1.00	.998	1.00	1.00	1*	1.00	.871	1.00	.871	.992	1*
J5405551.PRN	(v_t)	.829	.819	.858	.906	1.00	.817	.917	1.00	1.00	.932	.741	.829	.654	.982	.784	1.00	.829	1.00	.829	1.00	.667
	(v_t)	.869	.819	.858	.906	1.00	.939	.917	1.00	1.00	.932	.955	.829	.885	.982	.966	1.00	.829	1.00	.829	1.00	.880
	(v_t)	1*	.819	1.00	.906	1.00	.936	1*	1.00	1.00	.932	.944	.971	.885	.982	.966	1.00	.971	1.00	.971	1.00	.969
L4408101.PRN	(v_t)	.939	1.00	1.00	1.00	1.00	.937	1.00	1.00	.840	1.00	.944	.967	1.00	1.00	1.00	1.00	.967	1.00	.967	1.00	1.00
	(v_t)	.939	1.00	1.00	1.00	1.00	.937	1.00	1.00	.840	1.00	.944	.967	1.00	1.00	1.00	1.00	.967	1.00	.967	1.00	1.00
	(v_t)	.939	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00	.840	1.00	1*	.967	1.00	1.00	1.00	1.00	.967	1.00	.967	1.00	1.00

Mattei, A. (2000) *Full-Scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data*. Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 43, pág. 487-97

Índices de eficiencia: participantes violando GARP (Exp. II)

D-EXP II	Participante	Obs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
L5404711.PRN		(v_t)	.990	.999	1.00	1.00	.986	1.00	.981	1.00	.981	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	1.00		
		(v_t)	.990	.999	1.00	1.00	.986	1.00	.981	1.00	.981	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	1.00	1.00	.993	1.00	1.00	1.00	
		(ϑ_t)	1*	.999	1.00	1.00	.986	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	1.00	1.00	1*	1.00	1.00	1.00	
M4411170.PRN		(v_t)	1.00	1.00	1.00	.952	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00	.978	
		(v_t)	1.00	1.00	1.00	.952	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00	.978
		(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	.994	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	1.00	1.00	.978
M5803987.PRN		(v_t)	.927	1.00	.978	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.984	.980	.984	1.00	1.00	1.00	1.00	.984	1.00	1.00	1.00	
		(v_t)	.927	1.00	.978	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.984	.980	.984	1.00	1.00	1.00	1.00	.984	1.00	1.00	1.00	
		(ϑ_t)	.927	1.00	.978	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.984	.980	.984	1.00	1.00	1.00	1.00	.984	1.00	1.00	1.00	
M6408323.PRN		(v_t)	1.00	1.00	1.00	.993	1.00	1.00	1.00	1.00	.990	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		(v_t)	1.00	1.00	1.00	.993	1.00	1.00	1.00	1.00	.990	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	.993	1.00	1.00	1.00	1.00	1*	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
M6411723.PRN		(v_t)	.919	.999	1.00	.914	1.00	.962	1.00	.915	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		(v_t)	.919	.999	1.00	.988	1.00	.962	1.00	.945	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		(ϑ_t)	.919	.999	1.00	.988	1.00	.962	1.00	1*	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
N6402334.PRN		(v_t)	.969	.985	1.00	.985	1.00	.982	1.00	1.00	1.00	.995	.994	.947	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.947	1.00	1.00	.964	
		(v_t)	.969	.985	1.00	.985	1.00	.982	1.00	1.00	1.00	.995	.994	.980	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	.968	
		(ϑ_t)	1*	.985	1.00	.985	1.00	.982	1.00	1.00	1.00	.995	.994	.979	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1*	1.00	1.00	.968	
N6420658.PRN		(v_t)	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	1.00	.997	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		(v_t)	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	1.00	.997	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	1.00	.997	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
P6402516.PRN		(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.973	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.973	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
		(ϑ_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.973	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
P6406426.PRN		(v_t)	.999	.987	1.00	.977	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	.961	1.00	.991	1.00	.996	1.00	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	1.00	
		(v_t)	.999	.987	1.00	.977	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	.961	1.00	.992	1.00	.996	1.00	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	1.00	
		(ϑ_t)	.999	.987	1.00	.977	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	.961	1.00	.991	1.00	.996	1.00	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	1.00	
P6411970.PRN		(v_t)	.999	1.00	.942	.920	.963	.915	.960	1.00	.948	.950	1.00	.950	.989	.969	.926	.976	.950	.950	.950	1.00	.983	
		(v_t)	.999	1.00	.953	.974	.963	.954	.960	1.00	.975	.950	1.00	.966	.989	.969	.961	.976	.968	.968	.968	1.00	.983	
		(ϑ_t)	.999	1.00	.942	.960	.963	1*	.960	1.00	.948	.950	1.00	.950	.989	.969	1*	.976	.990	.990	.990	1.00	.983	
Q5403945.PRN		(v_t)	.785	.767	.744	.861	.777	.796	.808	.826	1.00	1.00	1.00	.795	1.00	.944	1.00	1.00	.795	1.00	.795	1.00	.767	
		(v_t)	.890	.896	.744	.985	.777	.871	.808	.826	1.00	1.00	1.00	.995	1.00	.944	1.00	1.00	.932	1.00	.932	1.00	.811	
		(ϑ_t)	.785	.850	.744	.980	.777	1*	.808	.826	1.00	1.00	1.00	1*	1.00	.944	1.00	1.00	.882	1.00	.882	1.00	1*	

Mattei, A. (2000) *Full-Scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data*. Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 43, pág. 487-97

D-EXP II		Índices de eficiencia: participantes violando GARP (Exp. II)																					
		Obs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
R5403358.PRN	(v_t)	.785	.767	.744	.861	.777	.796	.808	.826	1.00	1.00	1.00	.795	1.00	.944	1.00	1.00	.795	1.00	.795	1.00	.767	1.00
	(v_t)	.890	.896	.744	.985	.777	.871	.808	.826	1.00	1.00	1.00	.995	1.00	.944	1.00	1.00	.932	1.00	.932	1.00	.811	1.00
	(v_t)	.785	.850	.744	.980	.777	1*	.808	.826	1.00	1.00	1.00	1*	1.00	.944	1.00	1.00	.882	1.00	.882	1.00	1*	1.00
S4657483.PRN	(v_t)	.976	1.00	1.00	.978	1.00	.976	.980	1.00	1.00	1.00	.963	1.00	1.00	1.00	1.00	.990	.995	1.00	.966	1.00	.967	1.00
	(v_t)	.976	1.00	1.00	.978	1.00	.976	.980	1.00	1.00	1.00	.963	1.00	1.00	1.00	1.00	.990	.995	1.00	.966	1.00	.967	1.00
	(v_t)	1*	1.00	1.00	.978	1.00	.976	.980	1.00	1.00	1.00	.963	1.00	1.00	1.00	1.00	.990	.995	1.00	.997	1.00	.967	1.00
S6403084.PRN	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.976	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.976	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.976	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.982	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
S6410154.PRN	(v_t)	.999	1.00	.996	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.988	1.00	1.00	1.00	1.00	.988	1.00	.988	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	.999	1.00	.996	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.988	1.00	1.00	1.00	1.00	.988	1.00	.988	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	.999	1.00	.996	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.988	1.00	1.00	1.00	1.00	.988	1.00	.988	1.00	1.00	1.00
S6410170.PRN	(v_t)	.992	.999	.981	.968	1.00	.969	.976	.998	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.993	1.00	1.00	1.00	.984	.985
	(v_t)	.992	.999	.981	.968	1.00	.994	.996	.998	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.993	1.00	1.00	1.00	.984	.985
	(v_t)	.992	.999	.981	.968	1.00	.969	.996	.998	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.993	1.00	1.00	1.00	.984	.985
V4410065.PRN	(v_t)	.951	1.00	1.00	1.00	1.00	.914	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	.977	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	.951	1.00	1.00	1.00	1.00	.914	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	.977	1.00	1.00	1.00
	(v_t)	.951	1.00	1.00	1.00	1.00	.914	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	.977	1.00	1.00	1.00
V4410067.PRN	(v_t)	.920	.977	1.00	.914	1.00	.926	.977	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	.930	.956	.956	1.00
	(v_t)	.961	.977	1.00	.962	1.00	.977	.978	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	.987	.956	.956	1.00
	(v_t)	.920	.977	1.00	.962	1.00	.957	.977	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.977	1.00	1.00	.974	.956	.993	1.00
V6412226.PRN	(v_t)	.932	.938	.960	.916	1.00	.961	.961	1.00	1.00	1.00	.929	.932	1.00	1.00	1.00	.961	1.00	.932	1.00	.972	.995	1.00
	(v_t)	.984	.938	.960	.916	1.00	.965	.983	1.00	1.00	1.00	.996	.955	1.00	1.00	1.00	.961	1.00	.991	1.00	.972	.995	1.00
	(v_t)	1*	.998	.960	.916	1.00	.991	.983	1.00	1.00	1.00	.989	.991	1.00	1.00	1.00	.961	1.00	1*	1.00	.972	.995	1.00
H3807121.PRN	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.974	.990	1.00	1.00	.992	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.981	1.00	1.00	.996	.993	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.974	.990	1.00	1.00	.992	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.981	1.00	1.00	.996	.996	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.990	1.00	1.00	.992	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.981	1.00	1.00	.996	.993	1.00
S6403001.PRN	(v_t)	1.00	1.00	1.00	.995	1.00	.967	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.980	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	.995	1.00	.967	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.980	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	1.00	.995	1.00	.967	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1*	1.00	1.00
C6412838.PRN	(v_t)	1.00	1.00	.992	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	1.00	.999	1.00	.999	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	1.00	.999	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	.992	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	1.00	.999	1.00	.999	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	1.00	.999	1.00	1.00
	(v_t)	1.00	1.00	.992	1.00	1.00	.991	1.00	1.00	1.00	.999	1.00	.999	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	1.00	.999	1.00	1.00

Mattei, A. (2000) *Full-Scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data*. Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 43, pág. 487-97

2.4. Sobre la aproximación a la eficiencia de Varian y Gross

En esta sección demostramos en primer lugar que para cada serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP se puede construir –a partir de la familia formada por todos los subconjuntos inconsistentes o fuertemente inconsistentes con GARP– una familia finita de conjuntos de niveles de eficiencia o “vectores-índice” que admiten una interpretación económica y estadística de la bondad del ajuste del modelo de optimización. Una vez probado el resultado anterior, generalizaremos la aproximación original de Afriat al estudio de la eficiencia en el consumo para construir una “variedad de eficiencia” que nos permitirá obtener la mínima cantidad de dinero común que se le permite malgastar a un consumidor en todo subconjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP para que su comportamiento observado sea consistente con la teoría neoclásica de la demanda¹¹². Además, mostramos cómo el vector-índice de Afriat es un elemento de esta “variedad de eficiencia” y caracterizaremos a aquellos miembros de esta familia que describen casi-mejor el comportamiento de un consumidor que la estructura de eficiencia de Afriat.

A continuación, construimos –a partir de la función generalizada de sobrecompensación de Samuelson– una nueva “variedad de eficiencia” que generaliza la aproximación de eficiencia de Varian y que nos permite resolver el problema¹¹³ planteado por Gross (1991) sobre la creación de un índice de eficiencia en el que la función de sobrecompensación reemplace al índice de gasto de Chalfant y Alston (1988) con objeto de poder cuantificar la magnitud de los cambios estructurales en la preferencia revelada. Además, mostramos cómo la estructura de eficiencia de Varian es un miembro de esta variedad de eficiencia y caracterizamos a los gérmenes de esta variedad de eficiencia que describen casi-mejor el comportamiento de un consumidor que la estructura de eficiencia de Varian.

Finalmente, construimos una tercera variedad de eficiencia que nos permitirá determinar de manera exacta el porcentaje mínimo de dinero que se le permite “derrochar” a un consumidor para que sus decisiones de consumo sean consistentes con la teoría neoclásica de la demanda y colegir, por tanto, si un consumidor ha presentado un comportamiento próximo a uno “optimizador”, sin necesidad de establecer ninguna especificación ad-hoc en los datos observados. Esta variedad de eficiencia describirá casi-mejor el comportamiento de un consumidor que las anteriores variedades de eficiencia y nos permitirá, además, resolver el conocido problema de optimización propuesto por Varian (1990): encontrar para cada serie finita de datos de deman-

¹¹²A partir de esta familia de niveles de eficiencia podremos determinar aquellas observaciones inconsistentes con la hipótesis de la minimización del gasto (resp., maximización de la utilidad) y cuantificar, para cada subconjunto inconsistente con GARP, la cantidad mínima de dinero que se le permite “derrochar” a un consumidor en esas observaciones para que sus decisiones de consumo sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

¹¹³Este autor manifiesta, en términos textuales, lo siguiente: “[...] *I believe that the expenditure index (Chalfant y Alston, 1988) is an inappropriate metric of the seriousness of violations of revealed preference [...] it is vital that, under other circumstances and in future research, the more satisfactory metric based on the direct compensation function replace the expenditure index [...]*”. Véase Gross (1991), para más detalles.

da $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ un conjunto de niveles de eficiencia $(e_t)_{t=1}^n$, solución del siguiente problema de optimización:

$$\max_{(e_t)} \sum_{t=1}^n (e_t^2) \quad \text{s.t.} \quad R(\bar{e}) \text{ verifique GARP} \quad (2.26)$$

En la sección 2.3 se han revisado las aproximaciones a la eficiencia en el consumo de Afriat y Varian y se ha proporcionado diferentes estructuras de eficiencia que describen razonablemente bien la bondad del ajuste del modelo clásico de optimización. Sin embargo, al finalizar la sección se muestra un ejemplo en el espacio de consumo bidimensional de dos observaciones \bar{x}_1 y \bar{x}_2 inconsistentes con GARP tales que $\bar{p}_1 \bar{x}_1 = 1$; $\bar{p}_1 \bar{x}_2 = 0.99$; $\bar{p}_2 \bar{x}_1 = 0.99$ y $\bar{p}_2 \bar{x}_2 = 1$. Para estos datos mostramos que el vector-índice de Varian $\bar{i} = (0.99, 0.99)$ es maximal en el sentido de que no se puede encontrar otro vector-índice $\bar{\zeta} > \bar{i}$ satisfaciendo $\text{GARP}(\bar{\zeta})$ para estos datos¹¹⁴. Sin embargo, este vector-índice no es una solución del clásico problema de optimización planteado por Varian (1985, 1987, 1990):

$$\max_{e_t} \sum_{t=1}^n (e_t)^2 \quad \text{s.a.} \quad \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \text{ verifique } \text{GARP}(\bar{e})$$

Como señalamos en la sección anterior, si consideramos, por ejemplo, los vectores-índice $\bar{e} = (1, 0.9899\dots)$ o $\bar{e} = (0.9899\dots, 1)$ se verifica que el par de cestas demandadas \bar{x}_1 y \bar{x}_2 satisfacen $\text{GARP}(\bar{e})$ y que, por tanto, \bar{e} es solución de este problema de optimización.

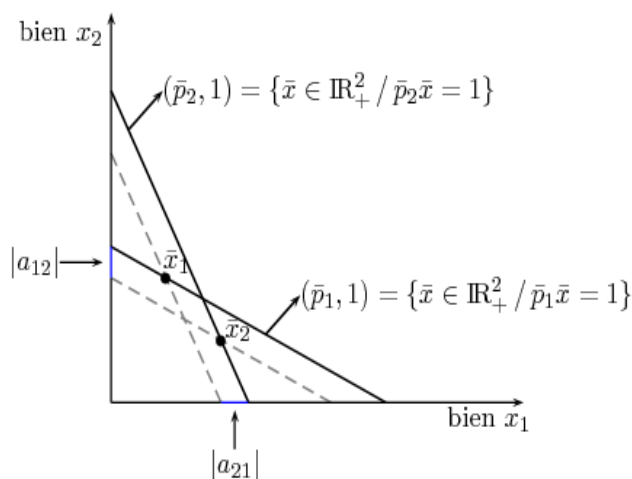


Figura 2.22: Una pequeña violación GARP. Una ligera perturbación de los conjuntos presupuestarios en las observaciones 1 y 2 elimina las violaciones GARP.

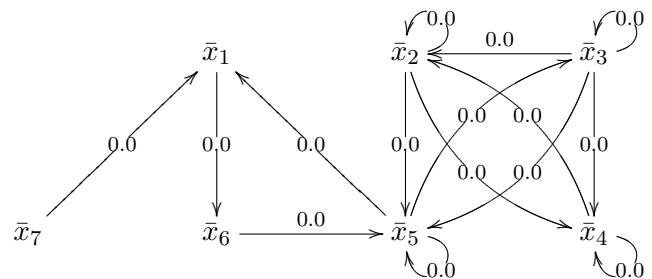
De lo anterior se desprende que para resolver este clásico problema de optimización se hace necesario generalizar el concepto de estructura de eficiencia y relajar la relación de la preferencia

¹¹⁴Nótese, además, que para estos datos se verifica lo siguiente: $\bar{e}^* = \bar{i} = \bar{v} = \bar{\vartheta} = \bar{\zeta} = (0.99, 0.99)$

revelada en conjuntos apropiados. Pero, ¿cual es son esos conjuntos apropiados? Supongamos, por ejemplo que consideramos la serie finita de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.12). La aproximación a la eficiencia de Varian (1987, 1990) relaja la relación de preferencia revelada sobre el subconjunto VS formado por todos los lotes de bienes fuertemente inconsistentes con GARP; esto es, “relaja” la relación de preferencia revelada en aquellas observaciones \bar{x}_j para las cuales se cumple que $m^+(\bar{p}_j, \bar{x}_j, R) < \bar{p}_j \bar{x}_j$, donde R designa la relación de preferencia revelada asociada a la serie finita de datos de demanda. Para esta serie finita de datos de demanda observados se tiene $\mathbf{i}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{i} = (0.9, 1, 1, 1, 1, 0.7, 0.8)$ como vector-índice asociado a la estructura de eficiencia de Varian (\mathcal{F}, \bar{i}) . El siguiente gráfico muestra la matriz de gasto $C_{ij}(\bar{i})$ perturbada por el conjunto $(i_t)_{t=1}^n$ de niveles de eficiencia de Varian y la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{i})$ para este conjunto finito de datos de demanda observados¹¹⁵.

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

(a) Matriz de gasto $C_{ij}(\bar{i})$



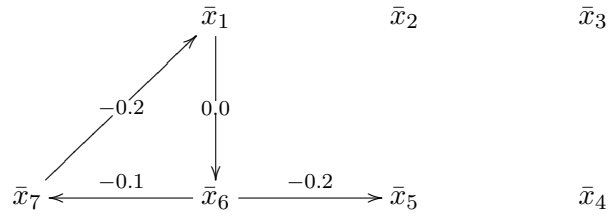
(b) Preferencia revelada $R^0(\bar{i})$

Por otra parte, Afriat (1973) relaja la relación de preferencia revelada sobre todas las observaciones. Nótese que si \mathbf{e}^* es la aplicación-índice de Afriat, entonces $\mathbf{e}^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{e}^* = (0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9)$ para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. El siguiente gráfico representa –para esta lista finita de datos de demanda observados– la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{e}^*)$ y la matriz de gasto perturbada $C_{ij}(\bar{e}^*)$ para el vector-índice \bar{e}^* asociado a la estructura de eficiencia de Afriat $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$.

¹¹⁵Nótese que $\bar{v}_{\mathcal{D}} = (0.9, 1, 1, 1, 1, 0.7, 0.8)$, para esta lista finita de datos de demanda. Además, $\bar{v}_{\mathcal{D}} = (0.9, 1, 1, 1, 1, 0.7, 0.8)$. Nótese, así mismo, que para todo $\bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} > \bar{i}$ se tiene que la serie finita de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.12) no satisface GARP($\bar{\xi}$).

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 0.9 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 0.9 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 0.9 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 0.9 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

(a) Matriz de gasto $C_{ij}(\bar{e}^*)$

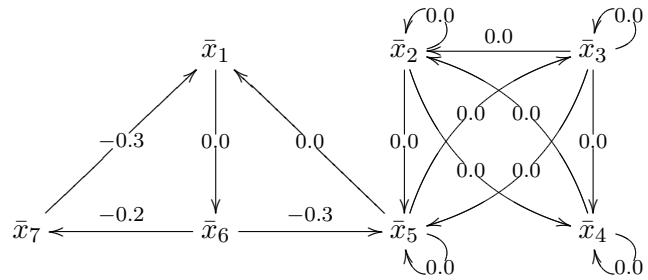


(b) Preferencia revelada $R^0(\bar{e}^*)$

De manera análoga podemos ver que $\bar{e}^* = \epsilon^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (0.9, 1, 1, 1, 0.9, 0.9, 0.9)$ es el vector-índice asociado a la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$ para estos datos y, además, que $\bar{\zeta} = \zeta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (0.9, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ es el vector-índice asociado a la estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ζ) para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$; puesto que $\bar{x}_1 \in \Gamma(\bar{x}_5)$, $\bar{x}_6 \in \Gamma(\bar{x}_1)$ y $\Gamma(\bar{x}_j) = \emptyset, \forall j = 1, \dots, n$ con $j \neq 1, 6$. El siguiente gráfico ilustra la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\zeta})$ y la matriz de gasto perturbada $C_{ij}(\bar{\zeta})$ para la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.12).

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 1.0 & 0.8 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 1.0 \end{pmatrix}$$

(a) Matriz de gasto $C_{ij}(\bar{\zeta})$

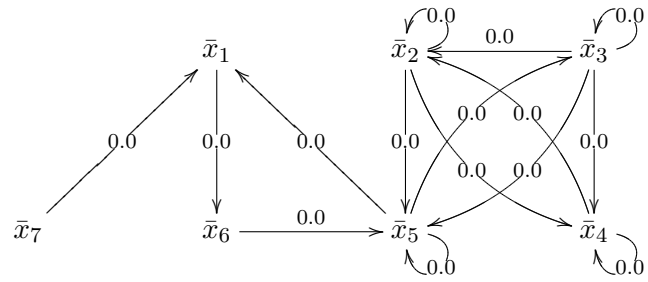


(b) Preferencia revelada $R^0(\bar{\zeta})$

Nótese que, aunque potencialmente la estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ζ) relaja la relación de preferencia revelada sobre el subconjunto formado por todas las observaciones fuertemente inconsistentes con GARP, para la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.12) la estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ζ) sólo relaja la relación de preferencia revelada en la observación $\{\bar{x}_1\}$. En virtud de lo anterior, cabe plantearse la siguiente cuestión: ¿sobre qué clase de conjuntos sería posible “relajar” la relación de preferencia para poder eliminar todos los “ciclos problemáticos” existentes en dicha relación? Supongamos, por ejemplo, que $\bar{\varphi}$ es el elemento del n-cubo unidad C_n definido por $\bar{\varphi} = (1, 1, 1, 1, 1, 0.7, 0.7)$. Para esta lista finita de observaciones de demanda $\bar{\varphi}$ no satisface $\text{GARP}(\bar{\varphi})$ puesto que para $R^0(\bar{\varphi})$ se tiene que $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\varphi}} \neq \emptyset$. Nótese que los ciclos \mathcal{C}_1 formado por las observaciones 1, 6 y 5 y el ciclo \mathcal{C}_2 formado por las observaciones 1, 6 y 7 son incoherentes con $\text{GARP}(\bar{\varphi})$.

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 0.8 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

(a) matriz de gasto $C_{ij}(\bar{\varphi})$



(b) Preferencia Revelada $R^0(\bar{\varphi})$

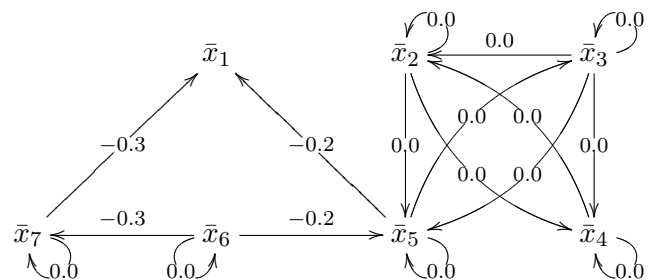
Sin embargo, para esta lista finita de datos de demanda y para $\bar{\varphi}$ se cumple la siguiente propiedad:

$$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \text{ satisface } GARP(\bar{\xi}), \forall \bar{\xi} \in C_n \text{ con } \bar{\xi} \ll \bar{\varphi} \quad (2.27)$$

El siguiente gráfico ilustra la relación de la preferencia revelada para la tupla de números reales $\bar{\xi}^* \ll \bar{\varphi}$ suficientemente próxima a $\bar{\varphi}$ (considerando la norma euclídea). La relación de la preferencia revelada relajada $R^0(\bar{\xi}^*)$ es acíclica y, por tanto, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface SARP($\bar{\xi}^*$), lo cual implica que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\xi}^*$) o, equivalentemente que $\bar{\xi}^*$ es consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$.

$$\begin{pmatrix} \xi^* & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 0.8 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 1.0 & 0.8 \\ 0.7 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 1.0 \end{pmatrix}$$

(a) matriz de gasto $C_{ij}(\bar{\xi}^*)$



(b) Preferencia Revelada $R^0(\bar{\xi}^*)$

Acabamos de ver que para la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.12), la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ relaja la relación de preferencia revelada en el conjunto $\hat{X}_1 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6, \bar{x}_7\}$, la estructura de eficiencia de Afriat $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$ en todas las cestas de bienes; puesto que $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_7\}$ es inconsistente con GARP, la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$ sobre el subconjunto $\hat{X}_2 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\}$ y, finalmente, la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \boldsymbol{\zeta})$ –que como mostramos en la sección 2.3 describe casi mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ y $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$ – solamente en $\hat{X}_3 = \{\bar{x}_1\}$. Veamos qué sucede si relajamos la relación de la preferencia revelada directa sobre, por ejemplo, el subconjunto $\hat{X}_4 = \{\bar{x}_7\}$. Consideremos, por ejemplo, la tupla de números reales del cubo unidad $\bar{\varphi} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0.7)$. Es fácil ver que $\bar{\varphi}$ no verifica

(2.27) para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Nótese, además, que incluso si $\bar{\varphi} = (1, 1, 1, 1, 1, 0)$, la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface $GARP(\bar{\varphi})$. En resumen, para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.12) hemos podido encontrar (relajando la preferencia revelada en los subconjuntos $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_7\}$; $\hat{X}_5 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6, \bar{x}_7\}$ y $\hat{X}_2 = \{\bar{x}_6\}$) vectores-índice $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$ cumpliendo la siguiente propiedad:

$$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \text{ satisface } GARP(\bar{g}), \forall \bar{g} \in C_n \text{ con } \bar{g} \ll \bar{f}$$

mientras que nos ha resultado imposible encontrar un vector-índice $\bar{\beta}$ “relajando” la relación de preferencia revelada sobre el subconjunto $\{\bar{x}_7\}$. Pero, ¿qué propiedad tienen en común los subconjuntos $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_7\}$; $\hat{X}_1 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6, \bar{x}_7\}$, $\hat{X}_2 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\}$ y $\hat{X}_3 = \{\bar{x}_6\}$? Estos subconjuntos son inconsistentes con GARP, mientras que el subconjunto $\hat{X}_4 = \{\bar{x}_7\}$ no es inconsistente con GARP y, por tanto, $(X - \hat{X}_4)$ no satisface el axioma GARP puesto que existe un ciclo $\mathcal{C} \in \Sigma_{\mathcal{D}}^1$ ($\mathcal{C} = \{(\bar{x}_6, \bar{x}_5), (\bar{x}_5, \bar{x}_1), (\bar{x}_1, \bar{x}_6)\}$) para el cual $\mathcal{C} \cap \hat{X}_4 = \emptyset$. Obsérvese, además, que si $(X - \hat{X}_4)$ no satisface GARP entonces para toda tupla de números reales $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ del cubo estándar unidad C_n tal que $\gamma_j = 1$ si $\bar{x}_j \in (X - \hat{X}_4)$, se cumple que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface $GARP(\bar{\gamma})$ ¹¹⁶. La Figura 2.23 representa, para el conjunto de datos de demanda observados con matriz de gasto (2.12), el subgrafo asociado al conjunto de lotes de bienes $(X - \{\bar{x}_7\})$ ¹¹⁷.

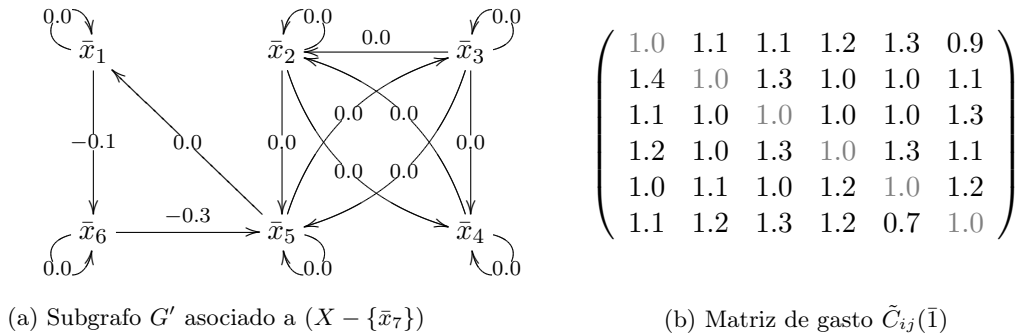


Figura 2.23: Un subconjunto de datos de demanda violando GARP.

¹¹⁶En el grafo dirigido $G_\gamma = (V, E_\gamma, \omega_\gamma)$ con función de peso ω_γ definida sobre las aristas de G_γ por: $\omega_\gamma(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \bar{p}_i(\bar{x}_j - \gamma_i \bar{x}_i)$, si $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E_\gamma$ estamos eliminando todas las aristas que parten de los $\bar{x}_i \in \hat{X}$ sin romper los ciclos existentes en la relación de la preferencia revelada puesto que si $\hat{X} \notin \Phi$, existe un ciclo \mathcal{C} incoherente con GARP tal que $\mathcal{C} \cap \hat{X} = \emptyset$.

¹¹⁷Nótese que para obtener la matriz de gasto asociada al subgrafo G' estamos suprimiendo en la matriz de gasto original (2.12) la fila 7 y la columna 7 que establecen las relación de preferencia revelada entre \bar{x}_7 y su complementario $(X - \{\bar{x}_7\})$ formado por los lotes de bienes $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_6\}$. Así, si $\tilde{X} = \{\bar{x}_r, \bar{x}_s, \bar{x}_t\}$ la matriz de gasto $\tilde{\Phi}_{ij}$ se obtiene a partir de la matriz de gasto Φ_{ij} suprimiendo en Φ_{ij} las filas r,s y t-ésimas y las columnas r,s y t-ésimas.

Observación 2.4.1 *Nótese que si designamos por Ψ a la familia formada por todos los lotes de bienes fuertemente inconsistentes con GARP [v. Definición 2.2.2]; esto es, $\Psi = \{(X_i)_{i \in I} \subseteq \Phi : X_i \subseteq VS, \forall i \in I\}$ y por Φ la familia formada por todas las cestas de bienes demandados inconsistentes con GARP [v. Definición 2.2.3], se cumple que $(X - \tilde{X})$ satisface GARP para todo subconjunto $\tilde{X} \in \mathcal{P}(X)$ con $\tilde{X} \in \Phi$ o $\tilde{X} \in \Psi$. Esto es, para todo $\tilde{X} \in \mathcal{P}(X)$ inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP, el subgrafo G' de G formado por todos los lotes de bienes de $(X - \tilde{X})$ no presenta ningún ciclo¹¹⁸ de longitud negativa [v. Proposición 2.2.2].*

En virtud de lo expuesto con anterioridad cabe pensar que para asignar un índice al conjunto de datos observados inconsistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad bastará solamente con relajar la relación de preferencia revelada sobre cualquier subconjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Resulta, pues, necesario caracterizar a aquellos subconjuntos de datos de demanda sobre los que es posible “relajar” la relación de la preferencia revelada para poder obtener un vector-índice $\bar{\varphi}$ verificando (2.27). La Proposición 2.4.1 permite responder a la cuestión planteada.

Proposición 2.4.1 *Sea $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP y $\tilde{\mathcal{D}}$ un subconjunto arbitrario de partes de \mathcal{D} , entonces los siguientes asertos son equivalentes:*

- (i) $\tilde{\mathcal{D}}$ es inconsistente con GARP.
- (ii) Existe una n -tupla de números reales $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ en el n -cubo C_n satisfaciendo las siguientes condiciones:
 - (ii.1) $\varphi_t = 1$ cuando $\bar{x}_t \in \mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}$.
 - (ii.2) \mathcal{D} satisface $GARP(\bar{\gamma})$ para todo $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ del n -cubo C_n tal que $\gamma_t < \varphi_t$ cuando $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$.

Demostración: Sea \mathcal{D} una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ inconsistente con GARP. Para cada subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ inconsistente con GARP consideramos la n -tupla de números reales $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ definida por: i) $\varphi_t = 1 \quad \forall \bar{x}_t \in \mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}$, ii) $\varphi_t = \min\{m^+(\bar{p}, \bar{x}) : (\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{D}\}$ donde m^+ es la función de compensación de Samuelson definida por $m^+(\bar{p}, \bar{x}) = \min\{\bar{p}\bar{y} : \bar{y} R \bar{x}\} \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{D}$ y R es la relación de preferencia revelada indirecta definida sobre \mathcal{D} . Entonces \mathcal{D} satisface $GARP(\bar{\gamma})$ para toda n -tupla de números reales $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ del n -cubo estándar unidad C_n tal que $\gamma_t < \varphi_t$ para todo $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$. En efecto, sea $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ una n -tupla de números reales arbitraria del n -cubo estándar unidad C_n tal que $\gamma_t < \varphi_t$ para todo $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$. Entonces para todo par de observaciones t, s tales que $\bar{x}_s R(\bar{\gamma}) \bar{x}_t$ se tiene, por ser

¹¹⁸Nótese que las observaciones $rst \dots qr$ forman parte de un ciclo \mathcal{C} de la relación de preferencia revelada directa R^0 (resp. S) si se cumple $\bar{x}_r R^0 \bar{x}_s \wedge \bar{x}_s R^0 \bar{x}_t \wedge \dots \wedge \bar{x}_q R^0 \bar{x}_r$ (resp. $\bar{x}_r S \bar{x}_s \wedge \bar{x}_s S \bar{x}_t \wedge \dots \wedge \bar{x}_q S \bar{x}_r$). Además, si es cierto que para todo par de observaciones i, j en $rst \dots qr$ se cumple $\bar{x}_i \in RP(\bar{x}_j) \wedge \bar{x}_i R^0 \bar{x}_j$, entonces \mathcal{C} es incoherente con GARP.

$R(\bar{\gamma})$ una subrelación de R , que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$, luego $\bar{x}_s \in \mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}$. Entonces si $\bar{x}_t \in \mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}$ se verifica, por ser $\mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}$ consistente con GARP, que $\bar{p}_t \bar{x}_t \leq \bar{p}_t \bar{x}_s$, luego $\gamma_t \bar{p}_t \bar{x}_t \leq \bar{p}_t \bar{x}_s$. Si $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ es claro que $\gamma_t \bar{p}_t \bar{x}_t < \bar{p}_t \bar{x}_s$, luego para todo par de observaciones t, s tales que $\bar{x}_s R(\bar{\gamma}) \bar{x}_t$ hemos probado que se verifica que $\gamma_t \bar{p}_t \bar{x}_t \leq \bar{p}_t \bar{x}_s$. Recíprocamente, veamos que si no se cumple (i), entonces (ii) tampoco. Supongamos que $\tilde{\mathcal{D}}$ no es inconsistente con GARP. Entonces existe un ciclo $\mathcal{C}_r \in \Sigma_{\tilde{\mathcal{D}}}^1$ tal que $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_r = \emptyset$. Por tanto, si $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ es la n-tupla de números reales definida por $\eta_t = 1$ para cada $\bar{x}_t \in \mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}$ y $\eta_t = 0 \quad \forall \bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ se verifica que \mathcal{D} no satisface $GARP(\bar{\eta})$, lo que implica que \mathcal{D} viola el axioma $GARP(\bar{\gamma})$ para toda n-tupla de números reales $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ del n-cubo estándar C_n tal que $\gamma_t = 1$ para cada $\bar{x}_t \in \mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}$, de donde se deduce inmediatamente que (ii) es falso, lo que completa la demostración. ■

Ejemplo 2.4.1 Supongamos que \mathcal{D} designa a una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ cuya matriz de gasto asociada $C = (c_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.80 & 1.20 & 0.90 \\ 1.50 & 1.00 & 0.60 & 2.00 \\ 1.00 & 1.10 & 1.00 & 1.30 \\ 1.10 & 2.00 & 0.75 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

La Figura 2.24 ilustra, para cada subconjunto no trivial $\tilde{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$, la relación de preferencia revelada determinada por el subconjunto de observaciones de demanda $\mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}$. Las secciones i) y o) de la Figura 2.24 muestran que los subconjuntos $\{\bar{x}_2\}$ y $\{\bar{x}_4\}$ no son inconsistentes con GARP. Del resultado anterior se deduce el siguiente corolario que no precisa demostración, por ser ésta inmediata.

Corolario 2.4.1 Sea $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda y $\tilde{\mathcal{D}}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ inconsistente con GARP. Entonces existe un vector $\bar{\xi}_{\tilde{\mathcal{D}}}$ (que depende de $\tilde{\mathcal{D}}$) en el n-cubo C_n verificando las siguientes condiciones:

(i) $\bar{\xi}|_{\mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}} \equiv 1$.

(ii) \mathcal{D} satisface $GARP(\bar{\zeta})$, $\forall \bar{\zeta} \in C_n$ con $\bar{\zeta} \ll \bar{\xi}$. ■

Nótese que el recíproco del corolario anterior no es cierto, como muestra el ejemplo anterior. En efecto, como señalamos con anterioridad $\{\bar{x}_2\}$ no es inconsistente con GARP. Sin embargo, si consideramos $\bar{\xi} = (1, 1, 1, 1)$ como vector-índice no resulta difícil comprobar que \mathcal{D} satisface $GARP(\bar{\gamma})$ para todo $\bar{\gamma} \ll \bar{\xi}$.

Observación 2.4.2 Para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.12), la familia Φ (resp., Ψ) está formada por la siguiente lista de subconjuntos inconsistentes (resp., fuertemente inconsistentes) con GARP.

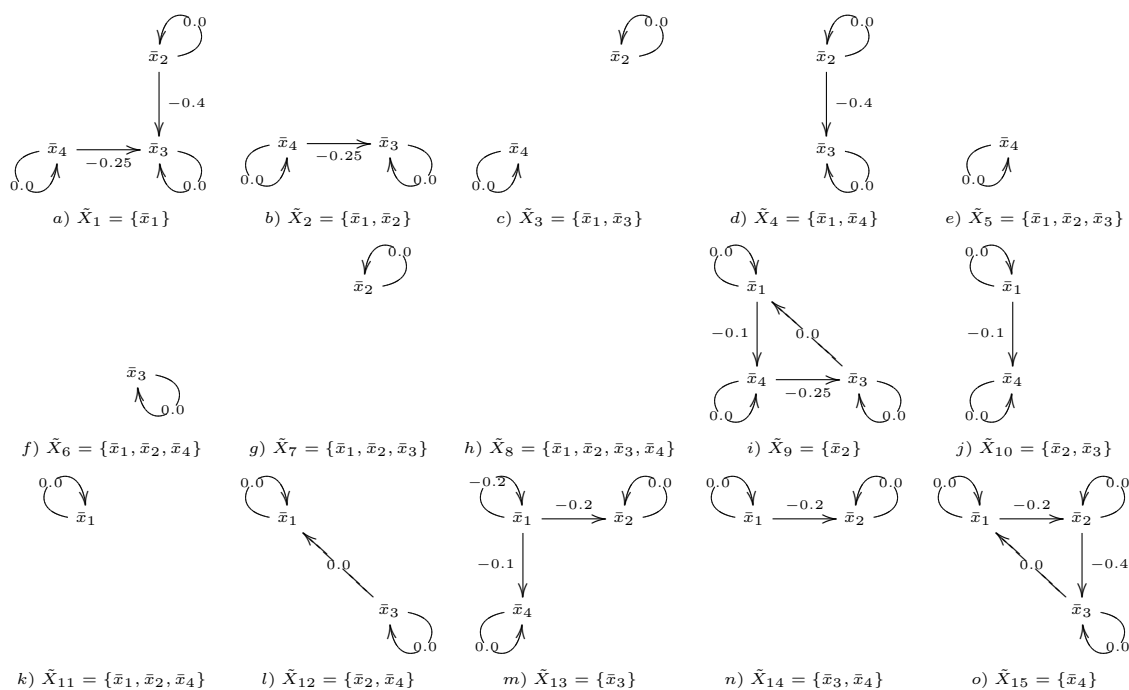


Figura 2.24: Relación de la Preferencia Revelada restringida a una familia de subconjuntos.

$$\begin{array}{l}
 \tilde{X}_1 = \{\bar{x}_1\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_2 = \{\bar{x}_6\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_3 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_5\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_4 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_5 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_6 = \{\bar{x}_5, \bar{x}_6\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_7 = \{\bar{x}_5, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_8 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_9 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_5, \bar{x}_6\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{10} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_5, \bar{x}_7\} \in \Phi
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \tilde{X}_{11} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{12} = \{\bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{13} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{14} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{15} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{16} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{17} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{18} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{19} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi \\
 \tilde{X}_{20} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Phi
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \hat{X}_1 = \{\bar{x}_1\} \in \Psi \\
 \hat{X}_2 = \{\bar{x}_6\} \in \Psi \\
 \hat{X}_3 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6\} \in \Psi \\
 \hat{X}_4 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_7\} \in \Psi \\
 \hat{X}_5 = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Psi \\
 \hat{X}_6 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \in \Psi
 \end{array}$$

El conjunto \mathcal{VS} formado por los lotes de bienes inconsistentes con GARP está configurado por las observaciones 1, 5, 6, 7; esto es, $\mathcal{VS} = \tilde{X}_{13}$, en la lista anterior. En consecuencia, si $\tilde{X} = \mathcal{VS}$ se cumple¹¹⁹ que $\tilde{X} = \mathcal{VS} \cup \{\bar{x}_j\} \in \Phi$ para todo \bar{x}_j tal que $\{\bar{x}_j\} \cap \mathcal{C}$ para todo ciclo \mathcal{C} incoherente con GARP; esto es, $\tilde{X} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7\} \cup \{\bar{x}_j\} \in \Phi$ para todo \bar{x}_j consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Además, es claro que si $\tilde{X}_i, \tilde{X}_j \in \mathcal{P}(X)$ con $\tilde{X}_i \subseteq \tilde{X}_j$ y $\tilde{X}_i \in \Phi$ (resp. $\tilde{X}_i \in \Psi$) se cumple $\tilde{X}_j \in \Phi$ (resp. $\tilde{X}_j \in \Psi$). En virtud de lo anterior, es claro que $\{\tilde{X}_{14}, \dots, \tilde{X}_{20}\} \subsetneq \Phi$. En particular, $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_7\}$ es inconsistente con GARP. Por otra parte, resulta relativamente sencillo probar que $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in \mathfrak{S}$ y $\tilde{X}_7 \in \mathfrak{R}$, donde por \mathfrak{R} e

¹¹⁹Nótese que si $\tilde{X} \in \Phi$, entonces $\tilde{X} \cup \{\bar{x}_j\} \in \Phi$

\mathfrak{S} designamos respectivamente a las familias formadas por todos los subconjuntos minimales¹²⁰ inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP.

Definición 2.4.1 Una aplicación-índice multiforme $[\xi]$ es un procedimiento que asigna a cada serie de m observaciones de demanda una familia $\{\bar{\xi}_{e_j^*}\}_{j \in J}$ vectores-índice $\bar{\xi}_{e_j^*} = (\xi_{1e_j^*}, \dots, \xi_{me_j^*})$, $0 \leq \xi_{te_j^*} \leq 1$ para cada $t \in \{1, \dots, m\}$ y para cada $j \in J$. Esto es, $\xi(\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m) = \{\bar{\xi}_{e_j^*} = (\xi_{1e_j^*}, \dots, \xi_{me_j^*}) : j \in J\}$, para cada $\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$.

Para nuestros propósitos solo nos interesarán las aplicaciones-índice multiformes que describan bien el comportamiento aproximadamente racional que estamos estudiando. Esto puede alcanzarse en tres sentidos relacionados.

Definición 2.4.2 La aplicación-índice multiforme $[\xi]$ es eficiente (resp., fuertemente eficiente) si para cada conjunto finito de datos $\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$ con $\{\bar{\xi}_j\}_{j \in J} = \xi(\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m)$ asociado se verifica lo siguiente:

$$\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m \text{ satisface } GARP(\bar{\zeta}), \forall \bar{\zeta} \in C_m \text{ con } \bar{\zeta} \ll \bar{\xi}_j \text{ (resp., con } \bar{\zeta} \leq \bar{\xi}_j), \text{ para cada } j \in J$$

Diremos, además, que la aplicación multiforme $[\xi]$ es β^* -eficiente si $[\xi]$ es eficiente y para cada $\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$, existe un $\bar{\xi}_* \in \{\bar{\xi}_j\}_{j \in J}$ tal que $\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$ satisface $GARP(\bar{\zeta})$, $\forall \bar{\zeta} \in C_m$ con $\bar{\zeta} \leq \bar{\xi}_*$.

Es trivial que la eficiencia fuerte implica la β^* -eficiencia y que la β^* -eficiencia implica la eficiencia. Por tanto, la eficiencia fuerte implica la eficiencia. Sin embargo, las implicaciones recíprocas no se verifican; es decir, una aplicación multiforme $[\xi]$ eficiente no tiene por qué ser necesariamente β^* -eficiencia y, por lo tanto, tampoco fuertemente eficiente. Tampoco es cierto que la β^* -eficiencia implique la eficiencia fuerte. A lo largo de esta sección, y una vez introducido el concepto de variedad de eficiencia y presentadas diferentes variedades de eficiencia, pondremos ejemplos de tales afirmaciones para corroborar su veracidad.

La siguiente definición nos permite generalizar el concepto de estructura de eficiencia introducido en la sección anterior.

Definición 2.4.3 Llamaremos variedad de eficiencia al par $(\mathcal{F}, [\xi])$ donde \mathcal{F} es la familia formada por todas las series finitas de datos de demanda inconsistentes con GARP y $[\xi]$ una aplicación multiforme de eficiencia. Diremos que la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi])$ es fuertemente eficiente si $[\xi]$ es fuertemente eficiente. De manera análoga, diremos que $(\mathcal{F}, [\xi])$ es β^* -eficiente si $[\xi]$ es β^* -eficiente.

¹²⁰Los subconjuntos \bar{X}_1 y \bar{X}_2 son óptimos pues no se puede encontrar ningún otro conjunto inconsistente (resp. fuertemente inconsistente) con GARP con un número menor de elementos.

Los conceptos anteriores admiten las siguientes definiciones formales¹²¹ que generalizan el concepto de eficiencia introducido en la sección anterior.

Definición 2.4.4 Sean $\mathcal{F} = \{\mathcal{D}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ la familia formada por todas las series finitas de datos de demanda inconsistentes con GARP, $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de n_λ -cubos donde $n_\lambda = |\mathcal{D}_\lambda|$ $\forall \lambda \in \Lambda$ y para cada $\lambda \in \Lambda$ se consideran las aplicaciones $\epsilon_\lambda^* : \{\mathcal{D}_\lambda\} \rightarrow \{\tilde{\mathcal{D}}_\lambda\}$ y $\xi_\lambda^* : \{\tilde{\mathcal{D}}_\lambda\} \rightarrow \{\bar{\xi}_\lambda\}$ donde $\tilde{\mathcal{D}}_\lambda$ es un conjunto inconsistente con GARP en \mathcal{D}_λ y $\bar{\xi}_\lambda$ un elemento del n_λ -cubo estándar unidad. Entonces, si $\xi_\lambda = \xi_\lambda^* \circ \epsilon_\lambda^*$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y

$$\xi_{\epsilon^*} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \xi_{\epsilon^*\lambda} : \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\mathcal{D}_\lambda\} \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\bar{\xi}_\lambda\}$$

es la aplicación definida por

$$\xi_{\epsilon^*}(d)(\lambda) = (\xi_{\epsilon^*}(d))_\lambda = \xi_{\epsilon^*\lambda} \circ p_\lambda(d) \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad y \quad \forall d \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\mathcal{D}_\lambda\}$$

se verifica que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \xi_{\epsilon^*} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\mathcal{D}_\lambda\} & \xrightarrow{\epsilon^*} & \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\tilde{\mathcal{D}}_\lambda\} & \xrightarrow{\xi^*} & \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\bar{\xi}_{\epsilon^*\lambda}\} \\ p_\lambda \downarrow & & p_\lambda^* \downarrow & & p'_\lambda \downarrow \\ \{\mathcal{D}_\lambda\} & \xrightarrow{\epsilon_\lambda^*} & \{\tilde{\mathcal{D}}_\lambda\} & \xrightarrow{\xi_\lambda^*} & \{\bar{\xi}_{\epsilon^*\lambda}\} \\ & & \curvearrowleft & & \\ & & \xi_{\epsilon^*\lambda} & & \end{array}$$

es conmutativo, luego $\forall \lambda \in \Lambda$ se tiene que $p'_\lambda \circ \xi_{\epsilon^*} = \xi_{\epsilon^*\lambda} \circ p_\lambda$. Diremos que ξ_{ϵ^*} es un germen-aplicación de eficiencia si para cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D}_λ se cumple:

$$\mathcal{D}_\lambda \text{ satisface } GARP(\bar{\zeta}), \quad \forall \bar{\zeta} \in C_{n_\lambda} \text{ con } \bar{\zeta} \ll \bar{\xi}_{\epsilon^*\lambda}$$

En este caso, diremos que el germen-aplicación ξ_{ϵ^*} está ϵ^* -determinado. Además, diremos que el par $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon^*})$ es un germen de eficiencia.

Es importante señalar que cada germen de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon^*})$ determina una estructura de eficiencia. En consecuencia, emplearemos indistintamente como sinónimos $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon^*})$ es un germen de eficiencia, $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon^*})$ es una estructura de eficiencia o $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon^*})$ es una determinación

¹²¹Recordemos que si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos, entonces el producto cartesiano de esta familia, denotado por $\prod_{i \in I} X_i$, es el conjunto formado por las aplicaciones $x : i \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ tales que $x(i) = x_i \in X_i$, $\forall i \in I$. Para toda familia de conjuntos $\{X_i\}_{i \in I}$, denotamos por $p_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ a la i -ésima aplicación proyección definida por $p_i(x) = x(i) = x_i$, $\forall x \in \prod_{i \in I} X_i$.

de eficiencia soportada por la aplicación ϵ^* . En lo sucesivo, designaremos por $[\xi]_{\epsilon^*}$ a la clase de equivalencia que contiene al germen-aplicación de eficiencia ξ_{ϵ^*} en la cual adquiere especial relevancia el conjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP que soporta al germen-aplicación ϵ^* . Además, diremos que la aplicación ϵ^* que asigna a cada \mathcal{D} en \mathcal{F} un subconjunto $\tilde{\mathcal{D}} \in \Phi_{\mathcal{D}}$ es la aplicación-soporte, o simplemente soporte, del germen de eficiencia $[\xi]_{\epsilon^*}$. Por otra parte, diremos también que los gérmenes-aplicación de eficiencia ξ_{ϵ} y ξ_{ϵ^*} de una aplicación multiforme de eficiencia $[\xi]$ son equivalentes si, y solamente si, tienen la misma aplicación soporte; esto es, si para cada $\mathcal{D} \in \mathcal{F}$ se verifica $\xi_{\epsilon}(\mathcal{D}) = \xi_{\epsilon^*}(\mathcal{D})$ y $\epsilon(\mathcal{D}) = \epsilon^*(\mathcal{D})$. En la siguiente definición formalizamos matemáticamente el concepto de variedad de eficiencia.

Definición 2.4.5 Sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{D}_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es la familia formada por todas las series finitas de datos de demanda inconsistentes con GARP, $\mathcal{C} = \{C_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de n_{λ} -cubos donde $n_{\lambda} = |\mathcal{D}_{\lambda}|$ $\forall \lambda \in \Lambda$ y para cada $\lambda \in \Lambda$ se considera la aplicación $[\xi]_{\lambda} : \{\mathcal{D}_{\lambda}\} \rightarrow \prod_{j \in J} \{\bar{\xi}_{j\lambda}\}$ definida por

$[\xi]_{\lambda}(\mathcal{D}_{\lambda}) = \{\bar{\xi}_{j\lambda} : j \in J\}$ donde para cada $j \in J$, $\bar{\xi}_{j\lambda} = (\xi_{j\lambda_1}, \dots, \xi_{j\lambda_{n_{\lambda}}})$ es un elemento del n_{λ} -cubo unidad $C_{n_{\lambda}}$ que denominaremos vector-índice. Entonces, si

$$[\xi] = \prod_{\lambda \in \Lambda} \xi_{\lambda} : \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\mathcal{D}_{\lambda}\} \rightarrow \prod_{j \in J} \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\bar{\xi}_{j\lambda}\}$$

es la aplicación definida por

$$[\xi](d)(\lambda) = ([\xi](d))_{\lambda} = [\xi]_{\lambda} \circ p_{\lambda}(d), \quad \forall \lambda \in \Lambda \text{ y } \forall d \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\mathcal{D}_{\lambda}\}$$

se verifica que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\mathcal{D}_{\lambda}\} & \xrightarrow{[\xi]} & \prod_{j \in J} \prod_{\lambda \in \Lambda} \{\bar{\xi}_{j\lambda}\} \\ p_{\lambda} \downarrow & & \downarrow p'_{\lambda} \\ \{\mathcal{D}_{\lambda}\} & \xrightarrow{[\xi]_{\lambda}} & \prod_{j \in J} \{\bar{\xi}_{j\lambda}\} \end{array}$$

es conmutativo, luego $\forall \lambda \in \Lambda$ se tiene que $p'_{\lambda} \circ [\xi] = [\xi]_{\lambda} \circ p_{\lambda}$. Se dice que $[\xi]$ es una aplicación multiforme eficiente (resp., fuertemente eficiente) si para cada serie finita de datos de demanda $\mathcal{D}_{\lambda} \in \mathcal{F}$ se cumple:

$$\mathcal{D}_{\lambda} \text{ satisface } \text{GARP}(\bar{\zeta}), \quad \forall \bar{\zeta} \in C_{n_{\lambda}} \text{ con } \bar{\zeta} \ll \bar{\xi}_{\lambda} \text{ para cada } \bar{\xi}_{j\lambda} \in \{\bar{\xi}_{j\lambda}\}_{j \in J}$$

Llamaremos variedad de eficiencia al par $(\mathcal{F}, [\xi])$, donde \mathcal{F} es la familia formada por todas las series finitas de datos de demanda inconsistentes con GARP y $[\xi]$ una aplicación multiforme de eficiencia definida sobre esta familia. Diremos que la variedad $(\mathcal{F}, [\xi])$ es fuertemente eficiente si y solamente si $[\xi]$ es fuertemente eficiente.

Es importante tener en cuenta que una variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi])$ representa a la familia $\{(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_j^*})\}_{j \in J}$ de estructuras de eficiencia. Nótese, además, que la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi])$ depende esencialmente de la aplicación multiforme $[\epsilon^*]$. Diremos que la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi])$ es β^* -eficiente si posee al menos una determinación de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon^*})$ α^* -eficiente.

Sea $[\epsilon^*]$ la aplicación multiforme soporte formada por la familia $\{\epsilon_j^*\}_{j \in J}$ de gérmenes-aplicación tal que para cada $j \in J$, la rama ϵ_j^* de $[\epsilon^*]$ asigna un subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon_j^*}$ (que está unívocamente determinado por ϵ_j^*) inconsistente con GARP en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$, para cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} en \mathcal{F} . En lo sucesivo, supondremos que para cada variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, \{[\xi]_{\epsilon_j^*} : j \in J\})$ sobre \mathcal{F} , la aplicación-índice multiforme $[\xi] = \{[\xi]_{\epsilon_j^*} : j \in J\}$ está soportada por la aplicación multiforme $[\epsilon^*] = \{\epsilon_j^* : j \in J\}$; esto es, el germen de eficiencia $[\xi]_{\epsilon_j^*}$ está determinado unívocamente dentro de la variedad $(\mathcal{F}, [\xi])$ por la aplicación soporte ϵ_j^* , para cada $j \in J$. En términos más intuitivos, y abusando un poco del lenguaje, podemos ofrecer la siguiente definición alternativa de variedad de eficiencia.

Definición 2.4.6 *Llamaremos variedad de eficiencia al par $(\mathcal{F}, \{[\xi]_{\epsilon_j^*} : j \in J\})$ donde \mathcal{F} es la familia formada por todas las series finitas de datos de demanda inconsistentes con GARP y $[\xi] = \{[\xi]_{\epsilon_j^*} : j \in J\}$ una aplicación multiforme de eficiencia formada por la familia $\{[\xi]_{\epsilon_j^*} : j \in J\}$ de gérmenes de eficiencia.*

En la sección 2.3 mostramos que la estructura de eficiencia de Afriat (\mathcal{F}, e^*) determina el mínimo porcentaje (en términos unitarios) de dinero que se le permite malgastar a un consumidor para que sus elecciones sean consistentes con la hipótesis de la minimización del gasto (resp., maximización de la utilidad). Esta aproximación a la eficiencia en el consumo “relaja” la relación de preferencia revelada en el conjunto formado por todas las cestas demandadas¹²². Por otra parte, la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$ –que como mostramos en la sección 2.3 describe casi mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, e^*) – permite cuantificar la mínima cantidad de dinero común que se le permite derrochar a un consumidor en todas las cestas demandadas inconsistentes con GARP para que sus elecciones sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

En virtud de la Proposición 2.4.1 cabe pensar en un procedimiento que nos permita determinar para cada serie finita de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ en \mathcal{F} y para cada $\tilde{\mathcal{D}}$ inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ la cantidad mínima de dinero (común a todas las observaciones del subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$) que se le permite “derrochar” a un individuo para que sus elecciones efectuadas sean consistentes con la teoría clásica de la demanda. Este procedimiento nos permitiría generalizar la estructura de eficiencia de Afriat dando lugar a una variedad de eficiencia que llamaremos variedad de eficiencia de Afriat, por ser una generalización del procedimiento de asignación de índices de Afriat.

¹²²Nótese que este conjunto es inconsistente con GARP en el sentido que proporciona la Definición 2.2.2, para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ inconsistente con GARP.

Definición 2.4.7 (Índice generalizado de Afriat) Llamaremos índice generalizado de Afriat a la aplicación $[\varepsilon]$ que asigna, a cualquier serie finita de observaciones de demanda, $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, la familia de vectores-índice $[\varepsilon](\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \{\bar{\varepsilon}_{\epsilon_j^*} = (\varepsilon_{1\epsilon_j^*}, \dots, \varepsilon_{n\epsilon_j^*}) : j \in J\}$, donde para cada $j \in J$ el vector-índice $\bar{\varepsilon}_{\epsilon_j^*} = (\varepsilon_{t\epsilon_j^*})_{t=1}^n$ está definido por:

$$\varepsilon_{t\epsilon_j^*} = \begin{cases} 1 + \min_{1 \leq r \leq m} d_r(\epsilon_j^*) & \text{si } \bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}_j \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad t \in \{1, \dots, n\} \quad (2.29)$$

donde m representa al número de ciclos existentes en la relación de preferencia revelada, y para cada $j \in J$, $\tilde{\mathcal{D}}_j$ designa a la imagen por ϵ_j^* de \mathcal{D} , d_r^* al número real (que depende de ϵ_j^*) definido por

$$d_r(\epsilon_j^*) = \max\{\Psi_{\tilde{\mathcal{D}}_j}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) : \bar{x}_i \in \tilde{\mathcal{D}}_j \wedge \bar{x}_i R^0 \bar{x}_j\} \text{ para cada } \mathcal{C}_r \in \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{1}}, \quad (2.30)$$

siendo $\Psi_{\tilde{\mathcal{D}}_j}$ la aplicación con dominio en $\tilde{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$ y codominio en el conjunto \mathbb{R} definida por:

$$\begin{aligned} \Psi_{\tilde{\mathcal{D}}_j} : E_{\tilde{\mathcal{D}}_j} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ (\bar{x}_i, \bar{x}_j) &\longmapsto \bar{p}_i \bar{x}_j - 1 = a_{ij}. \end{aligned}$$

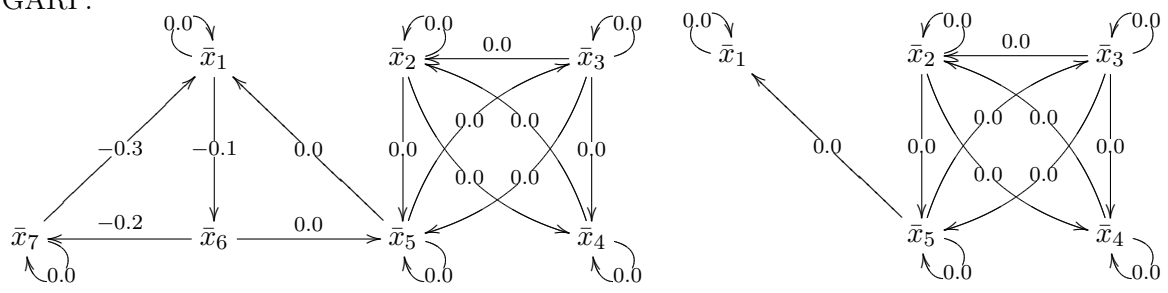
La aplicación índice $[\varepsilon]$ nos permitirá, por construcción, cuantificar el mínimo margen de error común necesario en todas las observaciones de cualquier conjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP para que las decisiones de consumo de un individuo sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Además, por construcción de $[\varepsilon]$, para cada subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}_j$ en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ inconsistente con GARP (determinado unívocamente por una aplicación-soporte ϵ_j^* de la aplicación multiforme soporte ϵ^*) es cierto que la n -tupla de números reales $[\varepsilon]_{\epsilon_j^*}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \{\bar{\varepsilon}_{\epsilon_j^*} = (\varepsilon_{1\epsilon_j^*}, \dots, \varepsilon_{n\epsilon_j^*}) : j \in J\}$ es un elemento del n -cubo estándar unidad, C_n , que permite cuantificar el mínimo margen de error necesario en todas las observaciones del conjunto $\tilde{\mathcal{D}}_j$ para eliminar todas las inconsistencias (presentes en el conjunto de elecciones de consumo de un individuo) con la teoría neoclásica de la demanda¹²³.

Con el fin de ofrecer una mayor claridad al procedimiento anterior, y antes de proceder con la prueba de este resultado, ilustraremos el procedimiento anterior de asignación de índices con un par de ejemplos¹²⁴.

¹²³Nótese, además, que $|\vartheta^*| = |\min_r d_r(\epsilon_j^*)|$ representa en términos económicos la mínima cantidad de dinero (común a todas las observaciones del subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}_j$) que se le permite “derrochar” a un individuo para que sus elecciones efectuadas sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Nótese, además, que $\vartheta^* < 0$ es una condición necesaria y suficiente para que la serie finita de datos de demanda \mathcal{D} no verifique GARP.

¹²⁴En virtud del isomorfismo existente entre las relaciones binarias definidas sobre un conjunto finito de opciones y los grafos dirigidos, el procedimiento anterior admite una ilustración gráfica muy sencilla. Sea $G = (\mathcal{D}, E_{\mathcal{D}}, \Psi_{\mathcal{D}})$ el grafo dirigido que representa la relación de preferencia revelada y sea $\tilde{E}_r = \{(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{C}_r : \bar{x}_i \in \tilde{\mathcal{D}}_j\}$. Entonces, para cada ciclo \mathcal{C}_r si $d_r(\epsilon_j^*)$ es el valor numérico (asociado a \mathcal{C}_r) definido por $d_r(\epsilon_j^*) = \max\{\Psi_{\mathcal{D}}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) : (\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in \tilde{E}_r\}$ es cierto que $d_r(\epsilon_j^*) \leq d_r$, donde $d_r = \max\{\Psi_{\mathcal{D}}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) : (\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{C}_r\}$. Nótese, además, que

Ejemplo 2.4.2 Sea $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.12) y $\tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon^*} = \{\bar{x}_6, \bar{x}_7\}$ un subconjunto inconsistente con GARP (soportado por una aplicación-soporte ϵ^*). En virtud de (2.29)-(2.30) mostraremos que $\bar{\epsilon} = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 7, 0.7)$ es el vector-índice asociado a $\tilde{\mathcal{D}}$ para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Se han eliminado los subíndices por conveniencia, con objeto de una mayor claridad. Una simple inspección a los datos permite inferir que \mathcal{D} no satisface GARP. En efecto, la siguiente figura –que ilustra la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{1})$ para esta serie finita de datos de demanda– muestra la existencia de dos ciclos incoherentes con GARP; el primero, formado por las observaciones 1, 6 y 7 y el segundo, por 1, 5 y 6. Esta figura muestra además que $(\mathcal{D} - \tilde{\mathcal{D}})$ satisface GARP, lo cual implica que $\tilde{\mathcal{D}}$ es inconsistente con GARP.

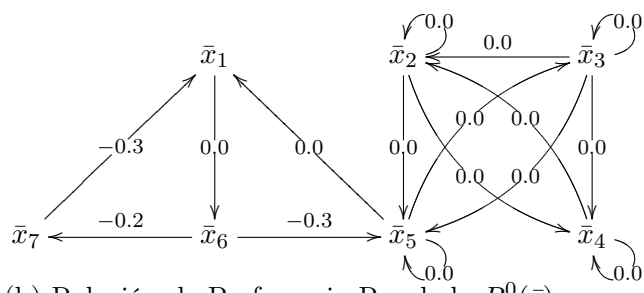


(a) Relación de Preferencia Revelada $R^0(\bar{1})$ (b) Pref. Revelada $R^0(\bar{1})$ para $(\mathcal{D} - \tilde{\mathcal{D}})$

Entonces, como $d_r(\epsilon^*) = \max\{\Psi_{\mathcal{D}}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) : \bar{x}_i \in \tilde{\mathcal{D}} \wedge \bar{x}_i R^0 \bar{x}_j\}$ se tiene que $d_1(\epsilon^*) = \max\{-0.2, -0.3\} = -0.2$ para \mathcal{E}_1 y que $d_2(\epsilon^*) = \max\{a\} = -0.3$ para el ciclo \mathcal{E}_2 . De lo anterior se desprende que $\vartheta^* = \min\{d_1(\epsilon^*), d_2(\epsilon^*)\} = -0.3$ y, en consecuencia, $\bar{\epsilon} = (1, 1, 1, 1, 1, 0.7, 0.7)$, por (2.29). El siguiente gráfico ilustra la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\epsilon})$ y la matriz de gasto $C_{ij}(\bar{\epsilon})$ perturbada por la tupla de números reales $\bar{\epsilon} = (1, 1, 1, 1, 1, 0.7, 0.7)$ del cubo estándar unidad, para la serie finita de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$.

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

(a) Matriz de gasto $C_{ij}(\bar{\epsilon})$



(b) Relación de Preferencia Revelada $R^0(\bar{\epsilon})$

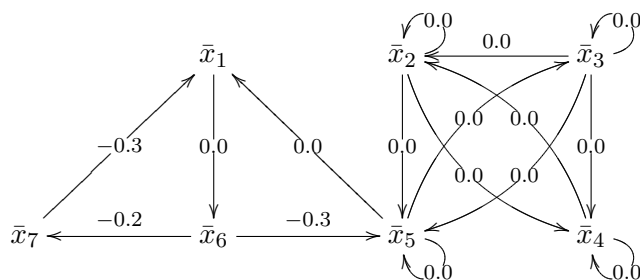
para obtener $d_r(\epsilon_j^*)$ bastará con considerar la arista de peso máximo en \mathcal{E}_r en el conjunto formado por todas las aristas en \mathcal{E}_r que “salen” de \bar{x}_i , para todo $\bar{x}_i \in \tilde{\mathcal{D}} \cap \mathcal{E}_r$.

A continuación presentamos un nuevo ejemplo con el objetivo de clarificar aún más el proceso anterior de construcción de los vectores-índice.

Ejemplo 2.4.3 Sea $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.12) y $\tilde{\mathcal{D}} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6, \bar{x}_7\}$ un subconjunto inconsistente con GARP (soportado por una aplicación-soporte ϵ_j^*). Como $\tilde{\mathcal{D}} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6, \bar{x}_7\}$ se tiene que $d_1(\epsilon_j^*) = \max\{a_{16}, a_{67}, a_{71}\} = \max\{-0.1, -0.2, -0.3\} = -0.1$ para \mathcal{C}_1 y $d_2(\epsilon_j^*) = \max\{a_{16}, a_{65}\} = \max\{-0.1, -0.3\} = -0.1$, lo cual implica que $\vartheta^* = \min\{d_1(\epsilon_j^*), d_2(\epsilon_j^*)\} = -0.1$ y que $\bar{\epsilon} = (0.9, 1, 1, 1, 1, 0.9, 0.9)$, por (2.29). El siguiente gráfico ilustra la matriz de gasto $C_{ij}(\bar{\epsilon})$ perturbada por la tupla de números reales $\bar{\epsilon} = (1, 1, 1, 1, 1, 0.7, 0.7)$ del cubo estándar unidad. Resulta muy sencillo probar que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\xi})$, $\forall \bar{\xi} \ll \bar{\epsilon}$.

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

(a) Matriz de gasto $C_{ij}(\bar{\epsilon})$



(b) Preferencia revelada $R^0(\bar{\epsilon})$

En el siguiente teorema mostramos que la aplicación-índice $[\epsilon]$ es una aplicación multiforme de eficiencia o, equivalentemente, que $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ es una variedad de eficiencia.

Teorema 2.4.1 $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ es una variedad de eficiencia.

Demostración: Será suficiente probar que fijado un germen-aplicación arbitrario $[\epsilon]_{\epsilon^*}$ de la aplicación multiforme $[\epsilon]$ el par $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon^*})$ es una estructura de eficiencia. Sea ϵ^* la aplicación soporte del germen-aplicación $[\epsilon]_{\epsilon^*}$ que asigna a cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} en \mathcal{F} el subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ de partes de \mathcal{D} inconsistente con GARP. Veamos que $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon^*})$ es una estructura de eficiencia. Bastará probar que para todo \mathcal{D} en \mathcal{F} si $\bar{\epsilon}_{\mathcal{D}}$ es la imagen de \mathcal{D} por el germen-aplicación $[\epsilon]_{\epsilon^*}$ se verifica que \mathcal{D} satisface $\text{GARP}(\bar{\gamma})$ para todo $\bar{\gamma} \ll \bar{\epsilon}_{\mathcal{D}}$. Sea $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1 \ \forall t$), y sea $a_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j - 1, \forall i, j$. Como, por hipótesis, \mathcal{D} es inconsistente con GARP se verifica que $\Sigma_{\tilde{\mathcal{D}}}^1 \neq \emptyset$. Para cada ciclo \mathcal{C}_r incoherente con GARP se considera la n-tupla de números reales $\bar{\epsilon}_r = (\epsilon_{r1}, \dots, \epsilon_{rn})$ definida por $\epsilon_{rt} = 1 + d_r^*$ si $\bar{x}_t \in \mathcal{C}_r \cap \tilde{\mathcal{D}}$ y $\epsilon_{rt} = 1$ en caso contrario, donde d_r^* es el número real definido en (2.30), entonces para todo par de cestas demandadas \bar{x}_i, \bar{x}_j en \mathcal{C}_r se tiene que $\bar{x}_i R(\bar{\epsilon}_r) \bar{x}_j$ y $\bar{x}_j R(\bar{\epsilon}_r) \bar{x}_i$. Además, si existe un par de cestas demandadas \bar{x}_t, \bar{x}_s en \mathcal{C}_r tales que $a_{ts} < d_r^*$

se tiene $\mathcal{C}_r \in \Sigma_{\mathcal{D}}^1(\bar{\varepsilon}_r)$. Nótese que para todo par de cestas demandadas $\bar{x}_i, \bar{x}_j \in \mathcal{C}_r$ se cumple: $\bar{x}_i R(\bar{\gamma}) \bar{x}_j$, entonces $\sim \bar{x}_j R(\bar{\gamma}) \bar{x}_i$ para todo $\bar{\gamma} \ll \bar{\varepsilon}_r$. Por otra parte, si $\bar{\varepsilon}_{\mathcal{D}}$ designa a la n -tupla de números reales definida en (2.29) entonces, por definición de $\bar{\varepsilon}_{\mathcal{D}}$, se tiene que para cada ciclo \mathcal{C}_r incoherente con GARP tal que $d_r^* > \vartheta_{\mathcal{D}}^*$, donde $\vartheta_{\mathcal{D}}^* = \min_{1 \leq r \leq k_d^*} d_r^*$ y $k_d^* = \# \Sigma_{\mathcal{D}}^1$, entonces $\exists \bar{x}_i, \bar{x}_j$ distintas en \mathcal{C}_r tales que $\bar{x}_j R(\bar{\varepsilon}_{\mathcal{D}}) \bar{x}_i$ y $\sim \bar{x}_i R^0(\bar{\varepsilon}_{\mathcal{D}}) \bar{x}_j$, lo que implica que $\mathcal{C}_r \notin \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\varepsilon}}$, de donde se deduce de manera inmediata que $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset, \forall \bar{\gamma} \in C_n$ tal que $\bar{\gamma} \ll \bar{\varepsilon}_{\mathcal{D}}$. En consecuencia, para todo par de observaciones i, j se cumple: $\bar{x}_i R(\bar{\gamma}) \bar{x}_j$, entonces $\gamma_j \bar{p}_j \bar{x}_j < \bar{p}_i \bar{x}_i$, lo que implica que $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon^*})$ es una estructura de eficiencia y completa la demostración. ■

En lo sucesivo, a la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ la llamaremos variedad de eficiencia de Afriat puesto que la estructura de eficiencia de Afriat, $(\mathcal{F}, \varepsilon^*)$, es un germen de eficiencia¹²⁵ de la variedad $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ que está soportada por la aplicación soporte identidad, id , que asigna a cada serie finita de datos de demanda, \mathcal{F} , su propio conjunto de datos. De lo anterior se desprende el siguiente resultado que no precisa demostración puesto que la estructura de eficiencia, $(\mathcal{F}, \varepsilon^*)$, es un germen de eficiencia de $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ que no es α^* -eficiente.

Proposición 2.4.2 *La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ no es fuertemente eficiente.* ■

El siguiente ejemplo permite inferir que $(\mathcal{F}, \{[\varepsilon]_{\iota_j} : j \in J\})$ no es β^* -eficiente. Nótese que para mostrar que $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ no es β^* -eficiente es suficiente encontrar una serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, para la cual se verifica que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface $\text{GARP}(\bar{\varepsilon})$, $\forall \bar{\varepsilon} = [\varepsilon]_{\iota_j}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$, donde $[\varepsilon] = \{[\varepsilon]_{\iota_j} : j \in J\}$ y $[\iota]$ la aplicación multiforme soporte para $[\varepsilon]$.

Ejemplo 2.4.4 Sea $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda cuya matriz de gasto $C = (c_{ij})$ ($c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j, \forall i, j$) es la matriz definida en (2.28). La Figura 2.28, que aparece ilustrada al final de la sección, representa gráficamente, para cada subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ inconsistente con GARP, la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\varepsilon})$ para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. A continuación examinaremos las relaciones existentes entre las diferentes determinaciones de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon})$ de la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ en relación con los conceptos comportarse mejor o comportarse casi-mejor relativos a la bondad del ajuste del modelo de la maximización de la utilidad.

Proposición 2.4.3 *La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ no es β^* -eficiente.* ■

La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ admite una construcción algorítmica. Por tanto, resultará interesante encontrar un procedimiento que nos permita calcular para cada serie finita de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) y para cada subconjunto inconsistente con GARP $\tilde{\mathcal{D}}_{\varepsilon^*}$ soportado por la aplicación-soporte ε_{\star} el vector-índice $\bar{\varepsilon}$ asociado. A continuación presentamos el pseudocódigo de un algoritmo basado en el método de la bisección que nos permite hallar en un tiempo polinomial el vector-índice dada una serie finita de demanda \mathcal{D}

¹²⁵La estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ es también un germen de eficiencia de la variedad $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$. Este germen de eficiencia está soportado por la aplicación soporte $()$ que asigna a cada serie finita de datos de demanda, \mathcal{D} , el subconjunto formado por todas las observaciones inconsistentes con GARP.

y un subconjunto de ella $\tilde{\mathcal{D}}$ inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Nótese que utilizando el lema de Zorn podemos encontrar subconjuntos minimales inconsistentes o fuertemente inconsistentes con GARP en un tiempo de ejecución polinomial proporcional al tamaño de los datos.

Algorithm 16. Pseudo-code for computing generalised Afriat's index

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. for $j := 1$ to n do $\varepsilon_j^* \leftarrow 1$
3. for $i, j := 1$ to n do $C_{\bar{\varepsilon}^*}[i, j] \leftarrow C[i, j]$; $\text{step} := 1$; $\text{maxstep} := 50$
4. for $i, j := 1$ to n if $(C[i, i] \geq C[i, j])$ then $R^0[i, j] \leftarrow 1$ else $R^0[i, j] := \text{false}$
5. Compute the transitive closure R of R^0 and check for GARP
6. procedure inconsistent subset with GARP
7. While [$\text{step} \leq \text{maxstep}$] do
8. for $i := 1$ to n do $C_{\bar{\varepsilon}^*}[i, i] \leftarrow \varepsilon_i^* \cdot C[i, i]$
9. Check $GARP(\bar{\varepsilon}^*)$
10. for $i := 1$ to n do
11. if $V[i] = 1$ then
12. if $(\text{viol} > 0)$ then $\varepsilon_i^* \leftarrow \varepsilon_i^* - \frac{1}{2^{\text{step}+1}}$ else $\varepsilon_i^* \leftarrow \varepsilon_i^* + \frac{1}{2^{\text{step}+1}}$
13. else then $\varepsilon_i^* \leftarrow 1$
14. return

Output: $\bar{\varepsilon}^* = \varepsilon^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

El procedimiento iterativo de búsqueda binaria anterior nos permite calcular una buena aproximación al verdadero valor del índice $\bar{\varepsilon}$ en un tiempo polinomial, a partir de un subconjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. A continuación presentamos el pseudocódigo de un nuevo procedimiento que no presenta las limitaciones anteriores. Esto es, es eficiente (es de tipo polinomial) y proporciona el valor exacto del índice de Afriat ε^* para cualquier serie finita de datos de demanda. En este procedimiento utilizamos el hecho de que toda la información preferencial de un consumidor está reflejada en su matriz de gasto. Suponiendo normalizados los precios, podemos afirmar que si $C \equiv (c_{ij})$ es la matriz de gasto asociada a una serie finita de datos de demanda, existe un c_{ij} menor o igual que uno tal que $\varepsilon_j = c_{ij}$, para todo $\bar{x}_j \in \tilde{\mathcal{D}}$. Nótese que si $\bar{x}_j \notin \tilde{\mathcal{D}}$, entonces $\varepsilon_j = 1$ para cada j . Este algoritmo permite encontrar el valor exacto del vector-índice $\bar{\varepsilon}$ sin necesidad de recorrer todos los ciclos de la relación de la preferencia revelada, siendo su tiempo de ejecución polinomial.

El procedimiento determina aquellas observaciones fuertemente inconsistentes con GARP y el exceso de gasto en las elecciones que son las causantes de las violaciones GARP, y almacena la información en la matriz de números reales $A = \mathfrak{R}((R^t \odot P^0) \odot C)$. A continuación, selecciona aquellos elementos de la matriz A distintos de cero y los almacena en un array dinámico $[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h]$. Posteriormente, hace una llamada a un procedimiento de ordenación, *procedure inverse quicksort*, que ordena los valores del array $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h]$ en orden decreciente. El algoritmo construye para estos valores las relaciones de preferencia revelada “relajadas” $R^0(\bar{\varepsilon}_k)$ y $R(\bar{\varepsilon}_k)$ para, a continuación contrastar $\text{GARP}(\bar{\varepsilon}_k)$ finalizando una vez que los datos satisfacen GARP.

Algorithm 17. Pseudo-code for computing generalised Afriat’s efficiency index

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. Set $k := 1$ and $\varepsilon_k \leftarrow 1$
3. for $i, j := 1$ to n do $C_{\varepsilon_k}[i, j] \leftarrow C[i, j]$
4. Construct R^0 y P^0 matrix and compute the transitive closure R of R^0
5. If [$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viola GARP]
6. for $i, j := 1$ to n do $A_1[i, j] \leftarrow R^t[i, j] \odot P^0[i, j]$ and $A_2[i, j] \leftarrow A_1 \odot C[i, j]$
7. procedure inconsistent subset with GARP
Output: for $i := 1$ to n $V[i] = 1$ if $\bar{x}_i \in \tilde{\mathcal{G}}$ and $V[i] = 0$, otherwise
8. for $i, j := 1$ to n do $A[i, j] \leftarrow A_2[i, j] \cdot V[i]$
9. Construct array $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h]^\dagger$ and procedure inverse quicksort
10. While [$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viole $\text{GARP}(\bar{\varepsilon}_k)$]
11. for $i := 1$ to n do $C_{\varepsilon_k}[i, i] \leftarrow \varepsilon_k \cdot C[i, i]$
12. Construct $R^0(\bar{\varepsilon}_k)$ y $R(\bar{\varepsilon}_k)$ matrices and check $\text{GARP}(\bar{\varepsilon}_k)$
13. $k := k + 1$
14. $\bar{\varepsilon} \leftarrow (\bar{\varepsilon}_k + \bar{\varepsilon}_{k-1})/2$
15. If $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viola $\text{GARP}(\bar{\varepsilon})$ then $\bar{\varepsilon}^* \leftarrow \bar{\varepsilon}_k$ else $\bar{\varepsilon}^* \leftarrow \bar{\varepsilon}_{k-1}$
16. return $\bar{\varepsilon}^*$

Output: $\bar{\varepsilon}^* = e^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

Nótese que la corrección y validez del procedimiento están completamente caracterizadas por la siguiente propiedad: para cualquier serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ se tiene que los datos satisfacen $\text{GARP}(\bar{\varepsilon}_*)$, donde $\bar{\varepsilon}_* = (\varepsilon_*, \dots, \varepsilon_*)$ y $\varepsilon_* = \min_{ij} c_{ij}$. El siguiente ejemplo permite ilustrar el funcionamiento de este procedimiento.

Ejemplo 2.4.5 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.11), y sea $\mathcal{D} = \{\bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ un subconjunto inconsistente con GARP. Entonces:

$$A_1 = R^t \odot P^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \mathfrak{R}(A_1) \odot C = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.91 & 0.00 \\ 0.67 & 0.00 & 0.85 & 0.95 \\ 0.60 & 0.00 & 0.80 & 0.00 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 0.00 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz real de tamaño n por n definida por $A[i, j] = A_2[i, j] \odot \text{VS}[i] \quad \forall i, j$, donde VS es el subconjunto inconsistente con GARP, output del procedure “inconsistent subset”. Nótese que $\text{VS}[i] = 1$ si $\bar{x}_i \in \mathcal{D}$ y $\text{VS}[i] = 0$, en caso contrario.

$$A = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.60 & 0.00 & 0.80 & 0.00 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 0.00 \end{pmatrix}$$

Recorriendo la matriz A y seleccionando aquellos valores distintos de cero construimos (paso 9 del algoritmo) el array dinámico

ε_k	1.00	0.6	0.80	0.40	0.70	0.75
-----------------	------	-----	------	------	------	------

La llamada al procedimiento *procedure inverse quicksort* ordena el array anterior de tal modo que $\varepsilon_r \geq \varepsilon_s \quad \forall r < s$ obteniendo (paso 9 de algoritmo) el siguiente array auxiliar:

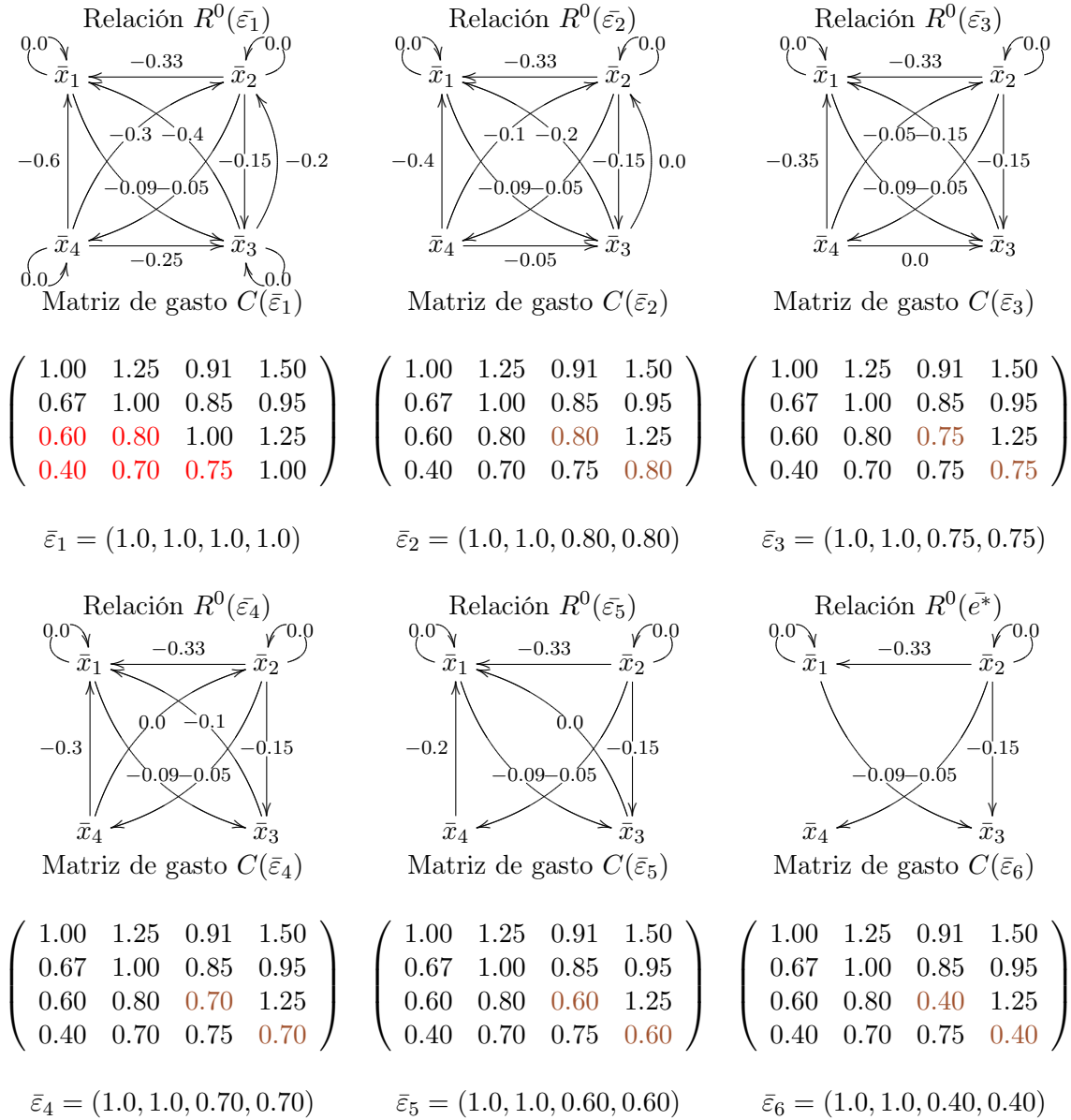
ε_k	1.00	0.80	0.75	0.70	0.6	0.40
-----------------	------	------	------	------	-----	------

que permite obtener el array

$\bar{\varepsilon}_k$	$\bar{\varepsilon}_1$	$\bar{\varepsilon}_2$	$\bar{\varepsilon}_3$	$\bar{\varepsilon}_4$	$\bar{\varepsilon}_5$	$\bar{\varepsilon}_6$
ε_{k_1}	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
ε_{k_2}	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
ε_{k_3}	1.00	0.80	0.75	0.70	0.60	0.40
ε_{k_4}	1.00	0.80	0.75	0.70	0.60	0.40

Como $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viola $\text{GARP}(\bar{\varepsilon}_1)$, el algoritmo va considerando (de manera ordenada) cada uno de estos índices como candidatos al verdadero valor del índice de Afriat. Una simple comprobación permite apreciar como $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viola $\text{GARP}(\bar{\varepsilon}_h)$ para $k = 2, \dots, 6$ mientras que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\varepsilon}_k)$ para $k = 6$. El bucle *while* (paso 10 del algoritmo) proporciona el valor de $k = 6$. A continuación considera el índice (paso 13) $\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_6 + \bar{\varepsilon}_5)/2 = (1, 1, 0.5, 0.5)$ y se contrasta $\text{GARP}(\bar{\varepsilon})$. Por construcción, si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ verificase $\text{GARP}(\bar{\varepsilon})$ entonces $\bar{\varepsilon}_5$ no

sería el límite superior de los niveles globales de eficiencia para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y, por lo tanto, $\bar{\varepsilon}^* = \bar{\varepsilon}_4$. Ahora bien, como $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ viola $\text{GARP}(\bar{\varepsilon})$ entonces $\bar{\varepsilon}^* = \bar{\varepsilon}_5 = (1, 1, 0.6, 0.6)$. La siguiente figura ilustra gráficamente este procedimiento¹²⁶.



¹²⁶Por razones de continuidad puede probarse que si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\varepsilon})$ entonces $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{v})$ para todo $\bar{\varepsilon}_k \leq \bar{v} < \bar{\varepsilon}_{k-1}$.

A lo largo de esta sección consideramos una aplicación multiforme $[\epsilon^*]$ formada por una familia $\{\epsilon_j^*\}_{j \in J}$ de aplicaciones ϵ_j^* definidas sobre \mathcal{F} que asignan a cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} en \mathcal{F} un subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}_j$ de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ inconsistente con GARP. A cada una de las aplicaciones de esta familia las llamaremos ramas o gérmenes-aplicación de la aplicación multiforme soporte $[\epsilon^*]$. Es importante volver a remarcar que si $(\mathcal{F}, [\xi])$ es una variedad de eficiencia cualquiera, entonces, para cada $j \in J$, el par $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_j^*})$ determina una estructura de eficiencia que está unívocamente determinada por el germen soporte ϵ_j^* y por la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi])$.

En lo sucesivo, para cada variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi])$ designaremos por $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_{vs}})$ [resp., $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_{vs}^*})$] al germen de eficiencia de $(\mathcal{F}, [\xi])$ unívocamente determinado por la aplicación soporte ϵ_{vs} [resp., ϵ_{vs}^*] que a cada serie finita de datos de demanda, \mathcal{D} , le asigna el subconjunto $\mathcal{VS}_{\mathcal{D}}$ [resp., $\mathcal{VS}_{\mathcal{D}}^*$] en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ formado por todas las observaciones inconsistentes (resp., fuertemente inconsistentes) con GARP. Denotaremos por $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_{\Psi}})$ a la estructura de eficiencia de $(\mathcal{F}, [\xi])$ fijada por la aplicación soporte ϵ_{Ψ} que a cada \mathcal{D} inconsistente con GARP le designa un subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon_{\Psi}}$ fuertemente inconsistente con GARP. Además, utilizaremos la notación $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_{\Phi}})$ [resp., $(\mathcal{F}, [\xi]_{\Phi_*})$] para denotar a la determinación de eficiencia de $(\mathcal{F}, [\xi])$ soportada por el germen-aplicación ϵ_{Φ} [resp. ϵ_{Φ_*}] tal que $\epsilon_{\Phi}(\mathcal{D}) = \tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon_{\Phi}} \in \Phi_{\mathcal{D}}$, con $\tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon_{\Phi_*}} \subsetneq \mathcal{VS}_{\mathcal{D}}$ [resp., con $\tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon_{\Phi}} \supsetneq \mathcal{VS}_{\mathcal{D}}$] para cada \mathcal{D} en \mathcal{F} . Finalmente, emplearemos la notación $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_{\mathfrak{R}}})$ [resp., $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_{\mathfrak{S}}})$] para designar a los gérmenes de eficiencia de $(\mathcal{F}, [\xi])$ soportados por la aplicación-soporte $\epsilon_{\mathfrak{R}}$ [resp., $\epsilon_{\mathfrak{S}}$] que asigna a cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} un subconjunto minimal $\tilde{\mathcal{D}}$ inconsistente (resp., fuertemente inconsistente) con GARP.

Cabe señalar que la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$ presentada en la sección 2.3 es el germen o determinación de eficiencia $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon_{vs}})$ de la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\epsilon])$, puesto que la aplicación soporte ϵ_{vs} asigna a cada \mathcal{D} en \mathcal{D} el subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ de partes de \mathcal{D} formado por todas las cestas demandadas inconsistentes con GARP. En consecuencia, el Teorema 2.3.2, junto con la construcción de la aplicación-índice $[\epsilon]$ garantizan la validez de los siguientes asertos.

Proposición 2.4.4 *La estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon_{\Phi}})$ describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$.*

Proposición 2.4.5 *La estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon_{vs}})$ describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$.*

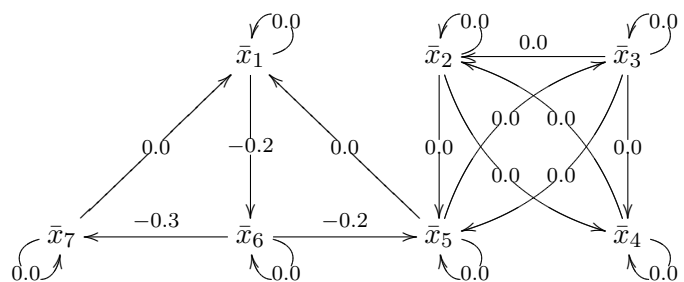
Por otra parte, merece la pena resaltar que las estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon_{vs}^*})$ y $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$ no son comparables en el sentido de que $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon_{vs}^*})$ no describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$, ni viceversa. Para demostrar que $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon_{vs}^*})$ no describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$, ni viceversa, proporcionamos dos series finitas de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y $\mathcal{D}_* = \{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n$ para las cuales $\mathbf{e}^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) > \bar{\epsilon} = [\epsilon]_{\epsilon_{vs}^*}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$ y $\bar{\epsilon} = [\epsilon]_{\epsilon_{vs}^*}(\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n) > \mathbf{e}^*(\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n)$ ¹²⁷.

¹²⁷Nótese que bastaría con encontrar una lista finita de datos de demanda observados $\{(\bar{q}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^m$ para la que $[\epsilon]_{\epsilon_{vs}^*}(\{(\bar{q}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^m) \not\geq \mathbf{e}^*(\{(\bar{q}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^m)$ y tampoco $\mathbf{e}^*(\{(\bar{q}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^m) \not\geq [\epsilon]_{\epsilon_{vs}^*}(\{(\bar{q}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^m)$.

Sean $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y $\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n$ dos series finitas de datos de demanda con matrices de coste asociadas $C_\alpha(\bar{I})$ y $C_{\alpha^*}(\bar{I})$, respectivamente. Veamos que $e^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) > [\varepsilon]_{\varepsilon_{v_s}^*}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$ para $C_\alpha(\bar{I})$, y que para la lista finita de datos observados con matriz de gasto $C_{\alpha^*}(\bar{I})$ se cumple $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon]_{\varepsilon_{v_s}^*}(\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n) > e^*(\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n)$. En efecto, un simple cálculo nos permite obtener $\bar{\varepsilon}^* = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ como vector-índice de Afriat para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y $\bar{\varepsilon}_{\varepsilon_{v_s}^*} = [\varepsilon]_{\varepsilon_{v_s}^*}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (0.8, 1, 1, 1, 1, 0.8, 1)$ como el vector-índice determinado por la determinación de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon_{v_s}^*})$ para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. En virtud de lo anterior, $e^*(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) > [\varepsilon]_{\varepsilon_{v_s}^*}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$, para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. El siguiente gráfico muestra el grafo dirigido que representa la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{I})$ y la matriz de gasto asociada $C_\alpha(\bar{I})$ para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$.

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.8 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.8 & 1.0 & 0.7 \\ 1.0 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 1.0 \end{pmatrix}$$

(a) Matriz de gasto $C_\alpha(\bar{I})$

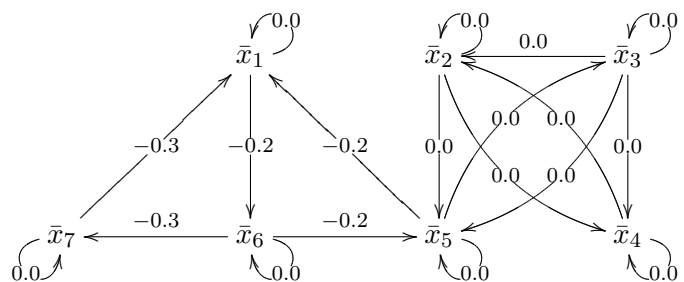


(b) Preferencia revelada $R^0(\bar{I})$

Por otra parte, para $\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n$ se cumple que $[\varepsilon]_{\varepsilon_{v_s}^*}(\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n) = (0.8, 1, 1, 1, 0.8, 0.8, 0.8)$ es el vector-índice asociado a la determinación de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon_{v_s}^*})$ para $\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n$. Además, obtenemos $e^*(\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n) = (0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8)$ como vector-índice de Afriat para $\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n$. Así pues, para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n$ tenemos $[\varepsilon]_{\varepsilon_{v_s}^*}(\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n) > e^*(\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n)$, lo que implica la afirmación. El siguiente gráfico muestra el grafo dirigido que representa la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{I})$ y la matriz de gasto asociada $C_{\alpha^*}(\bar{I})$ para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_{*t}, \bar{x}_{*t})\}_{t=1}^n$.

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.8 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 0.8 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.8 & 1.0 & 0.7 \\ 0.7 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 1.0 \end{pmatrix}$$

(a) Matriz de gasto $C_{\alpha^*}(\bar{I})$



(b) Preferencia revelada $R^0(\bar{I})$

El ejemplo anterior justifica la validez de los siguientes resultados¹²⁸.

Afirmación 2.4.1 *La estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon_{\mathbb{S}}^*})$ no describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, e^*) , ni viceversa.*

Afirmación 2.4.2 *La estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon_{\mathbb{S}}})$ no describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, e^*) , ni viceversa.*

Finalmente, como para toda serie finita de demanda \mathcal{D} y para cada $\tilde{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ con $\tilde{\mathcal{D}} \in \mathfrak{S}$ se cumple $\tilde{\mathcal{D}} \in \mathfrak{R}$, entonces las estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon_{\mathbb{R}}})$ y (\mathcal{F}, e^*) no son comparables en el sentido de “comportarse mejor o casi-mejor”. De lo anterior se desprenden los siguientes asertos.

Afirmación 2.4.3 *La estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon_{\mathbb{R}}})$ no describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, e^*) , ni viceversa.*

Afirmación 2.4.4 *La estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon_{\Phi^*}})$ no describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, e^*) , ni viceversa.*

Afirmación 2.4.5 *La estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\varepsilon_{\Psi}})$ no describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, e^*) , ni viceversa.*

Varian (1987, 1990) relaja la relación de preferencia revelada sobre el subconjunto formado por todos los lotes de bienes fuertemente inconsistentes¹²⁹ con GARP. La cuestión que subyace es la siguiente: ¿podemos generalizar la aproximación a la eficiencia en el consumo de Varian relajando la relación de preferencia revelada sobre la familia de los subconjuntos fuertemente inconsistentes con GARP? El siguiente ejemplo induce a pensar en la posibilidad de una respuesta afirmativa a la cuestión planteada, puesto que para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.12) es posible encontrar un vector-índice relajando sólo la relación de preferencia revelada en $\tilde{X}_4 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_6\}$. En efecto, si consideramos $\bar{\zeta} = (0.9, 1, 1, 1, 1, 0.7, 1)$ como vector-índice, entonces resulta inmediato probar que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\zeta}$) para todo $\bar{\xi} \in C_n$ con $\bar{\xi} \ll \bar{\zeta}$ y, en consecuencia, el vector-índice $\bar{\zeta}$ verifica la propiedad (2.27) para esta serie finita de datos de demanda. La Figura 2.25 muestra la relación de preferencia revelada asociada al vector-índice $\bar{\zeta} = (0.9, 1, 1, 1, 1, 0.7, 1)$.

Chalfant y Alston (1988) proponen utilizar un *índice de gasto* de –basado en el axioma débil de la preferencia revelada– para determinar el nivel de coherencia de las elecciones de consumo de un individuo. Años más tarde, Gross (1991) demuestra que el *índice de gasto* de Chalfant y Alston (1988) resulta inapropiado para cuantificar la magnitud de los cambios estructurales en

¹²⁸Nótese que para estos datos se tiene $e^*(\mathcal{D}) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) > [\varepsilon]_{\varepsilon_{\mathbb{S}}}(\mathcal{D}) = (0.8, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ y $[\varepsilon]_{\varepsilon_{\mathbb{S}}}(\mathcal{D}_*) = (0.8, 1, 1, 1, 1, 1, 1) > e^*(\mathcal{D}_*) = (0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8)$.

¹²⁹Nótese que $\bar{x}_j \in VS \Leftrightarrow m^+(\bar{p}_j, \bar{x}_j, R) < \bar{p}_j \bar{x}_j$. Esto es, para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ se dice que \bar{x}_j es fuertemente inconsistente con GARP si existe algún \bar{x}_i tal que $\bar{x}_i R \bar{x}_j$ y $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{x}_j \bar{x}_i$.

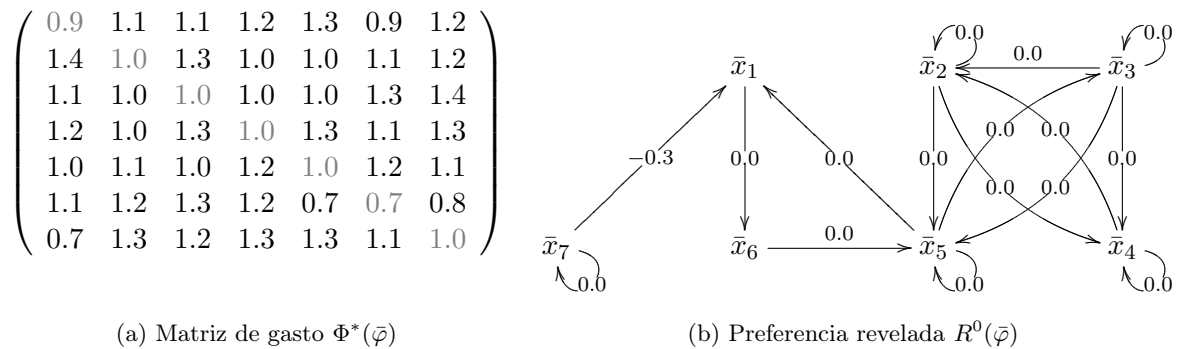


Figura 2.25: Generalización de la aproximación de Varian.

la preferencia revelada y se plantea si sería posible crear algún índice en el que la función de sobrecompensación reemplazase al índice de gasto¹³⁰. En aras a resolver este problema introducimos la siguiente definición a partir de la cual construimos una variedad de eficiencia, $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$, que generaliza la aproximación a la eficiencia en el consumo de Varian.

Definición 2.4.8 (Índice generalizado de Varian) Llamaremos índice generalizado de Varian a la aplicación $[\mathbf{i}]$ que asigna, a cualquier serie finita de observaciones de demanda, $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, la familia de vectores-índice $[\mathbf{i}](\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \{\bar{i}_{\epsilon_j^*} = (i_{1\epsilon_j^*}, \dots, i_{n\epsilon_j^*}) : j \in J\}$, donde para cada $j \in J$ el vector-índice $\bar{i}_{\epsilon_j^*} = (i_{t\epsilon_j^*})_{t=1}^n$ está definido por:

$$i_{t\epsilon_j^*} = \begin{cases} m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) & \text{si } \bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}_j \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad t \in \{1, \dots, n\} \quad (2.31)$$

donde para cada $j \in J$, $\tilde{\mathcal{D}}_j$ designa a la imagen por ϵ_j^* de \mathcal{D} y $m^+(\bar{p}, \bar{x}, R)$ la función de compensación de Samuelson.

Para cualquier rama o determinación ϵ^* de la aplicación multiforme $[\epsilon]$, la aplicación $[\mathbf{i}]_{\epsilon^*}$ asigna (fijado el germen-aplicación ϵ^*) la n-tupla de números reales $[\mathbf{i}]_{\epsilon^*}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$ definida por

$$i_t = \begin{cases} m^+(\bar{p}_t, \bar{x}_t, R) & \text{si } \bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

¹³⁰Gross (1991) afirma textualmente: “[...] Without disagreeing with their conclusion, I believe that the expenditure index is an inappropriate metric of the seriousness of violations of revealed preference [...] In conclusion, the expenditure index, while quite simple to compute, can lead to incorrect conclusions when testing for differences in tastes. In fairness to Chalfant and Alston, the expenditure index and the measure proposed here might yield similar answers for their data; thus the interpretation of their results is not in question. Nevertheless, it is vital that, under other circumstances and in future research, the more satisfactory metric based on the direct compensation function replace the expenditure index [...]”.

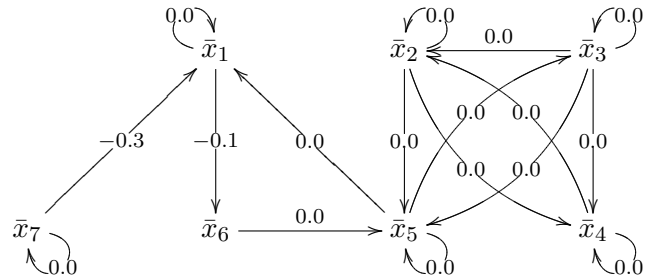
donde $\tilde{\mathcal{D}}$ es el subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ inconsistente con GARP imagen de \mathcal{D} por ϵ^* y $m^+(\bar{p}, \bar{x}, R)$ la función de compensación de Samuelson.

En el siguiente ejemplo calculamos este índice, para una mayor claridad.

Ejemplo 2.4.6 Sea $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ la serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \cdot \bar{x}_t = 1, \forall t$) con matriz de gasto (2.12), y sea ϵ_Φ la aplicación soporte que asigna el subconjunto $\tilde{\mathcal{D}} = \{\bar{x}_6\}$ para \mathcal{D} . Entonces, $[\mathbf{i}]_{\epsilon_\Phi}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (1, 1, 1, 1, 1, 0.7, 1) = \bar{\mathbf{i}}$ puesto que $m^+(\bar{p}_6, \bar{x}_6, R) = 0.7$ para estos datos. El siguiente gráfico ilustra la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\mathbf{i}})$ y su matriz de gasto asociada $C_{ij}(\bar{\mathbf{i}})$.

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 1.1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0.9 & 1.2 \\ 1.4 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 \\ 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.3 & 1.4 \\ 1.2 & 1.0 & 1.3 & 1.0 & 1.3 & 1.1 & 1.3 \\ 1.0 & 1.1 & 1.0 & 1.2 & 1.0 & 1.2 & 1.1 \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.2 & 0.7 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 & 1.3 & 1.3 & 1.1 & 1.0 \end{pmatrix}$$

(a) matriz de gasto $C_{ij}(\bar{\mathbf{i}})$



(b) Relación de Preferencia Revelada $R^0(\bar{\mathbf{i}})$

El siguiente teorema muestra que la aplicación multiforme $[\mathbf{i}]$ es una aplicación de eficiencia.

Teorema 2.4.2 $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ es una variedad de eficiencia.

Demostración: Será suficiente probar que fijado un germen-aplicación arbitrario $[\mathbf{i}]_{\epsilon^*}$ de la aplicación multiforme $[\mathbf{i}]$ se verifica que $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon^*})$ es una estructura de eficiencia. Veamos, pues, que $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon^*})$ es una estructura de eficiencia. Bastará probar, por definición de estructura de eficiencia, que para todo \mathcal{D} en \mathcal{F} si $i_{\mathcal{D}}$ designa la imagen de \mathcal{D} por el germen-aplicación $[\mathbf{i}]_{\epsilon^*}$ se verifica que \mathcal{D} satisface $GARP(\bar{\gamma})$ para todo $\bar{\gamma} \ll \bar{i}_{\mathcal{D}}$. Podemos suponer sin pérdida alguna de generalidad que \mathcal{D} designa a una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ inconsistente con GARP y $\bar{i}_{\mathcal{D}}$ a la n-tupla de números reales (i_1, \dots, i_n) imagen de \mathcal{D} por el germen-aplicación i_{ϵ^*} , es decir, para cada $t = 1, \dots, n$ se tiene que $i_t = m(\bar{p}_t, \bar{x}_t)$ si $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ y $i_t = 1$ en caso contrario, donde $\tilde{\mathcal{D}}$ es el conjunto imagen de \mathcal{D} por la aplicación ϵ^* , soporte del germen-aplicación $[\mathbf{i}]_{\epsilon^*}$. Entonces, para cada n-tupla de números reales $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ tal que $\bar{\gamma} \ll \bar{i}_{\mathcal{D}}$ se verifica que $\sim \bar{x}_t R^0(\bar{\gamma}_t) \bar{x}_s$ para todo $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ y para todo $\bar{x}_s \in \mathcal{D}$. Por otra parte, como $\mathcal{D} \setminus \tilde{\mathcal{D}}$ satisface el axioma GARP se tiene, por ser $\tilde{\mathcal{D}}$ inconsistente con GARP, que \mathcal{D} satisface $GARP(\bar{\gamma})$ para todo $\bar{\gamma} \in C_n$ tal que $\bar{\gamma} \ll \bar{i}_{\mathcal{D}}$, de donde se deduce que $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon^*})$ es una estructura de eficiencia, como queríamos demostrar. ■

En lo sucesivo, a la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ la llamaremos variedad de eficiencia de Varian puesto que la estructura de eficiencia de Varian, puesto que la estructura de eficiencia de Varian, $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$, coincide, por construcción, con el germen de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_{v.s}^*})$ determinado

unívocamente por la aplicación-soporte ϵ_{vs}^* que asigna a cada serie finita de datos de demanda, \mathcal{D} , el subconjunto formado por todas las observaciones fuertemente inconsistentes con GARP. De lo anterior se desprende el siguiente resultado que no precisa demostración puesto que ésta es inmediata¹³¹.

Proposición 2.4.6 *La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ es β^* -eficiente.* ■

Por otra parte, merece la pena reseñar que, en general, los gérmenes de eficiencia, $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_\Psi})$, de esta variedad no son α^* -eficientes¹³². El Ejemplo 2.4.4 garantiza, por tanto, la validez del siguiente aserto.

Proposición 2.4.7 *La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ no es fuertemente eficiente.* ■

La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ admite una construcción algorítmica. Para la obtención de cualquier vector-índice de esta familia –que llamaremos vector-índice de Varian generalizado– disponemos del siguiente algoritmo, del cual se ha facilitado su pseudocódigo, que permite obtener un conjunto de niveles de eficiencia de Varian en un tiempo de ejecución polinomial.

Algorithm 18. Pseudo-code for computing generalised Varian's index

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. for $j := 1$ to n do $e[j] \leftarrow 1$
3. for $i, j := 1$ to n if $C[i, i] \geq C[i, j]$ then $R^0[i, j] \leftarrow 1$ else $R^0[i, j] \leftarrow 0$
4. Compute the transitive closure R of R^0 and check for GARP
5. if $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ does not agree with GARP then
6. procedure inconsistent subset with GARP
 Output: for $j := 1$ to n $V[j] = 1$, if $\bar{x}_j \in \tilde{\mathcal{D}}$ and $V[j] = 0$, otherwise
7. for $j := 1$ to n If $(V[j] = 1)$ then $e[j] \leftarrow \min \left\{ \frac{C[j, i]}{C[j, j]} : \bar{x}_i R \bar{x}_j \right\}$
8. return

Output: Generalized Varian's index $\bar{e} = [e](\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

¹³¹La variedad de eficiencia de Varian, $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$, es, al menos, β^* -eficiente puesto que su germen de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_{vs}^*})$ es α^* -eficiente.

¹³²La Figura 2.29, que se encuentra al final de esta sección, ilustra para cada subconjunto fuertemente inconsistente con GARP, la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{i})$ para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.28). Esta figura, junto con el Ejemplo 2.4.6, nos permite inferir que si ϵ_Ψ designa a la ϵ^* -determinación que para cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} asigna un subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ fuertemente inconsistente con GARP distinto de VS se cumple que la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_\Psi})$ no es α^* -eficiente.

En la sección anterior presentamos un nuevo procedimiento para obtener el vector-índice de Varian. La novedad de este procedimiento es que permite obtener el vector-índice de Varian combinando diferentes operaciones elementales (suma, suma booleana, producto lógico, transposición, etc.) sobre los espacios de matrices. Una ligera modificación en el procedimiento de la sección 2.3 permite obtener un índice de Varian generalizado.

Si C designa a la matriz de gasto asociada a una serie finita de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, y \mathbf{P}^0 , \mathbf{R}^0 y \mathbf{R} a las matrices booleanas que representan, respectivamente, las relaciones de preferencia revelada P^0 , R^0 y R para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, entonces, para cada subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ fuertemente inconsistente con GARP en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$, el vector-índice de Varian generalizado se obtiene considerando el mínimo por filas de la matriz de números reales B definida por $B = A_1 + A_2$, donde A_1 designa la matriz cuadrada n por n definida por $A_1(i, j) = C(i, j) \cdot A(i, j)$ para todo i, j (esto es, $A_1 = C \odot A$), A_2 la matriz complemento de A en $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}), +, \odot, \cdot, {}^t, {}^c, O_n, I_n \rangle$ y, finalmente A es la matriz booleana cuadrada definida por: $A(i, j) = A^*(i, j) \cdot V(i)$ para todo i, j , donde $A^* = \mathbf{R}^t \odot \mathbf{P}^0$ y V es una matriz de tamaño n por 1 tal que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $V(i) = 1$ si $\bar{x}_i \in \tilde{\mathcal{D}}$ y $V(i) = 0$, en caso contrario¹³³.

El siguiente algoritmo nos permite construir, para cada serie finita de datos de demanda, \mathcal{D} , el índice de Varian generalizado asociado a un subconjunto, $\tilde{\mathcal{D}}$, inconsistente con GARP.

Algorithm 19. New algorithm for computing generalised Varian's index

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. for $j := 1$ to n do $e[j] \leftarrow 1$
3. construct booleans matrices R^0 and P^0
4. Compute the transitive closure R of R^0 and check GARP
5. procedure inconsistent subset $\tilde{\mathcal{D}}$ ($V[i]=0$ if and only if $\bar{x}_i \notin \tilde{\mathcal{D}}$)
6. for $i, j := 1$ to n do $A^*[i, j] \leftarrow R[j, i] \cdot P^0[i, j]$ and $A[i, j] \leftarrow A^*[i, j] \cdot V[i]$
7. for $i, j := 1$ to n if $(A[i, j] = 1)$ then $A_2[i, j] \leftarrow 0$ else $A_2[i, j] \leftarrow 1$
8. for $i, j := 1$ to n do $A_1[i, j] \leftarrow A[i, j] \cdot C[i, j]$ and $B[i, j] \leftarrow A_1[i, j] + A_2[i, j]$
9. for $j := 1$ to n do $e[j] \leftarrow \text{minval } B[j, 1 : n]$
10. return

Output: $\bar{i} = i(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

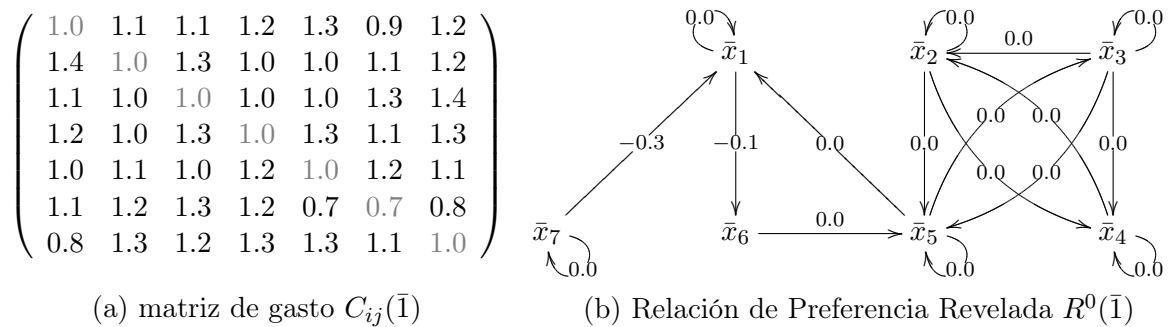
Ejemplo 2.4.7 Sea $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.11) y ε la aplicación soporte que asigna el subconjunto $\tilde{\mathcal{D}} = \{\bar{x}_3, \bar{x}_4\}$ (fuertemente incon-

¹³³Nótese que la matriz booleana A^* (de tamaño n por n) representa a las observaciones fuertemente inconsistentes con GARP.

sistente con GARP) para \mathcal{D} , entonces $[\bar{i}]_e(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (1, 1, 0.6, 0.4)$. El siguiente gráfico ilustra el proceso matricial de obtención de este vector-índice.

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{matriz de gasto } C \\ 1.00 & 1.25 & 0.91 & 1.50 \\ 0.67 & 1.00 & 0.85 & 0.95 \\ 0.60 & 0.80 & 1.00 & 1.25 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 1.00 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} R^0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} P^0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} R \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A(i, j) = A^*(i, j) \cdot V(i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_2 = A^c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 = \Re(A) \odot C \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.60 & 0.80 & 0.00 & 0.00 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 0.00 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} B = A_1 + \Re(A_2) \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 0.60 & 0.80 & 1.00 & 1.00 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 1.00 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{i} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Supongamos que \mathcal{D} es la serie finita de datos de demanda definida en (2.28). El siguiente gráfico ilustra esta generalización del concepto de eficiencia de Varian. La sección a) de la siguiente figura muestra que, en general, las estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, [i]_{e^*})$ de la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [i])$ no son, en general, α^* -eficientes. Sin embargo, $(\mathcal{F}, [i])$ es β^* -eficiente. En efecto, $(\mathcal{F}, [i]_{e_{vs}})$ representa, por definición, a la estructura de eficiencia de Varian (\mathcal{F}, i) y, por tanto, la afirmación anterior es lícita por ser (\mathcal{F}, i) una α^* -estructura de eficiencia. Este hecho también puede ser corroborado en la Figura 2.29 en la que se ilustra la variedad de eficiencia de Varian para los datos finitos de demanda con matriz de gasto (2.28).



La estructura de eficiencia de Varian, $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$, coincide, por construcción con el germen de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_{vs}^*})$ determinado unívocamente por la aplicación-soporte ϵ_{vs}^* . Así pues, la estructura de eficiencia de Varian, $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$, es una determinación de eficiencia de la variedad de eficiencia, $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$, que, por razones obvias llamaremos variedad de eficiencia de Varian¹³⁴. La variedad de eficiencia de Varian, $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$, es, al menos, β^* -eficiente puesto que su germen de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_{vs}^*})$ es α^* -eficiente. Sin embargo, $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ no es fuertemente eficiente puesto que, en general, los gérmenes de eficiencia, $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_\Psi})$, de esta variedad no son α^* -eficientes¹³⁵

Los siguientes resultados se deducen inmediatamente del teorema anterior y de las propiedades relativas a la minimalidad de los conjuntos inconsistentes con GARP.

Proposición 2.4.8 $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_\Psi})$ describe casi-mejor el comportamiento de un consumidor que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$.

Demostración: El Teorema 2.4.2 garantiza que $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_\Psi})$ es una estructura de eficiencia. Por el ejemplo anterior, será suficiente probar que para todo \mathcal{D} en \mathcal{F} se cumple que $\bar{i}_{\mathcal{D}} \geq \bar{i}_{\mathcal{D}}$ donde $\bar{i}_{\mathcal{D}}$ designa al vector-índice de Varian asociado a \mathcal{D} y $\bar{i}_{\mathcal{D}}$ a la tupla de números reales definida en (2.31) y determinada unívocamente por el germen-aplicación i_{ϵ_Ψ} . Supongamos que $\tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon_\Psi}$ designa al subconjunto imagen de \mathcal{D} por el germen-aplicación ϵ_Ψ . Entonces, por definición, se tiene que $\tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon_\Psi} \subseteq VS_{\mathcal{D}}$, donde $VS_{\mathcal{D}}$ es el conjunto formado por todas las observaciones de demanda fuertemente inconsistentes con GARP en \mathcal{D} , luego por (2.31) se sigue que $\bar{i}_{\mathcal{D}} \geq \bar{i}_{\mathcal{D}}$ para todo \mathcal{D} , como queríamos probar. ■

Proposición 2.4.9 $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_S})$ describe casi-mejor el comportamiento de un consumidor que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$.

Demostración: Para probar que $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_S})$ describe casi-mejor el comportamiento de un consumidor que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ bastará con ver, en virtud del Teorema 2.4.2 y del ejemplo anterior, que $\bar{i}_{\mathcal{D}} \geq \bar{i}_{\mathcal{D}}$ para todo \mathcal{D} donde $\bar{i}_{\mathcal{D}}$ designa al vector-índice de Varian asociado a \mathcal{D} y $\bar{i}_{\mathcal{D}}$ a la tupla de números reales definida en (2.31) y determinada unívocamente por el germen-aplicación $i_{\tilde{\epsilon}}$. Sea \mathcal{D} cualquier serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP y $\tilde{\mathcal{D}}$ el subconjunto imagen de \mathcal{D} por la aplicación soporte $\tilde{\epsilon}$. Si $\tilde{\mathcal{D}}$ es fuertemente inconsistente con GARP entonces, por la Proposición 2.4.2, el resultado es inmediato. En caso contrario, se tiene que o bien $\tilde{\mathcal{D}} \cap VS_{\mathcal{D}} = \emptyset$ o bien $\tilde{\mathcal{D}} \cap VS_{\mathcal{D}} \neq \emptyset$. En el primer caso, $m(\bar{p}, \bar{x}) = 1 \quad \forall (\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{D}$ y, por tanto, $\bar{i}_{\mathcal{D}} \geq \bar{i}_{\mathcal{D}}$. En el segundo caso, se tiene que $VS_{\mathcal{D}} \not\subseteq \tilde{\mathcal{D}}$, ya que en caso contrario $\tilde{\mathcal{D}}$ no sería minimal. En este caso, por (2.31) se sigue que $\bar{i}_{\mathcal{D}} \geq \bar{i}_{\mathcal{D}}$, lo que prueba el resultado. ■

¹³⁴Nótese que $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_{vs}^*})$ representa, por definición, a la estructura de eficiencia de Varian $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ y, por tanto, la afirmación anterior es lícita por ser $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ una α^* -estructura de eficiencia.

¹³⁵La Figura 2.29, que se encuentra al final de esta sección, ilustra para cada subconjunto fuertemente inconsistente con GARP, la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{i})$ para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ con matriz de gasto (2.28). Esta figura, junto con el Ejemplo 2.4.6, nos permite inferir que si ϵ_Ψ designa a la ϵ^* -determinación que para cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} asigna un subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ fuertemente inconsistente con GARP distinto de VS se cumple que la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}]_{\epsilon_\Psi})$ no es α^* -eficiente.

De los resultados anteriores se desprende que los gérmenes de eficiencia $(\mathcal{F}, [\bar{i}]_{\epsilon_{\mathbb{S}}})$, $(\mathcal{F}, [\bar{i}]_{\epsilon_{\mathbb{R}}})$ y $(\mathcal{F}, [\bar{i}]_{\epsilon_{\Phi_\star}})$ describen casi-mejor el comportamiento ante la demanda que la estructura de eficiencia de Varian, por construcción de la aplicación de eficiencia multiforme $[\bar{i}]$.

Del mismo modo que en virtud de la Definición 2.3.9 es posible comparar el comportamiento de la demanda entre los diferentes gérmenes de eficiencia que componen una determinada variedad de eficiencia, se hace necesario disponer de una nueva definición que permita comparar el comportamiento de la demanda entre diferentes variedades de eficiencia.

Definición 2.4.9 Sean $(\mathcal{F}, \{[\xi]_{\epsilon_j} : j \in J\})$ y $(\mathcal{F}, \{[\zeta]_{\epsilon_j} : j \in J\})$ dos variedades de eficiencia. Decimos que la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, \{[\xi]_{\epsilon_j} : j \in J\})$ describe:

1. casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \{[\zeta]_{\epsilon_j} : j \in J\})$, si para cada $\mathcal{D} = \{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$ y para cada $j \in J$ es cierto que $[\xi]_{\epsilon_j}(\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m) \geq [\zeta]_{\epsilon_j}(\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m)$, y para al menos un $j_\star \in J$ la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_{j_\star}})$ describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, [\zeta]_{\epsilon_{j_\star}})$
2. mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \{[\zeta]_{\epsilon_j} : j \in J\})$, si para cada $j \in J$ es cierto que $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_j})$ describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, [\zeta]_{\epsilon_j})$, y existe al menos un $j_\star \in J$ tal que $(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_{j_\star}})$ describe mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, [\zeta]_{\epsilon_{j_\star}})$.

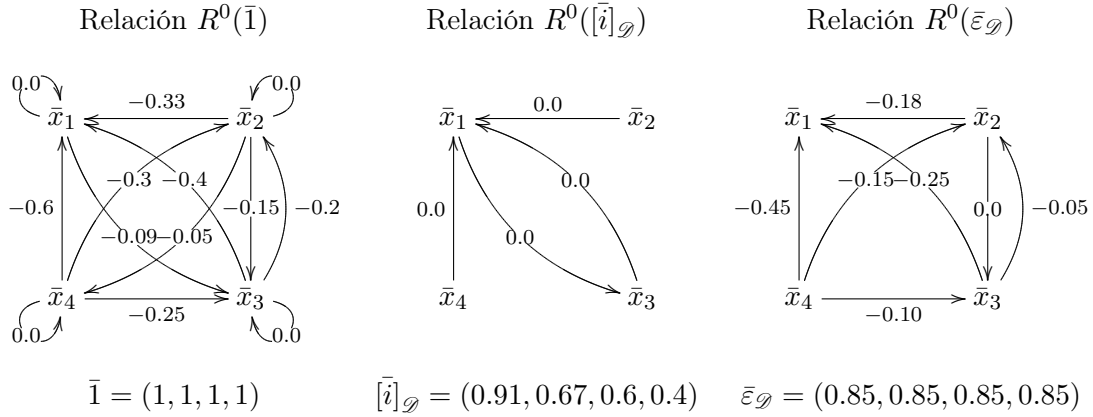
En virtud de la definición anterior es fácil ver que las variedades de eficiencia $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ y $(\mathcal{F}, [\bar{i}])$ no son comparables puesto que las estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon_{v_{s_\star}}})$ y $(\mathcal{F}, [\bar{i}]_{\epsilon_{v_{s_\star}}})$ soportadas por la aplicación $\epsilon_{v_{s_\star}}$ no son comparables, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4.8 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t$) con matriz de gasto:

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 1.25 & 0.91 & 1.50 \\ 0.67 & 1.00 & 0.85 & 0.95 \\ 0.60 & 0.80 & 1.00 & 1.25 \\ 0.40 & 0.70 & 0.75 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Entonces si denotamos por $\bar{\epsilon}_{\mathcal{D}}$ al vector-índice asociado a $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ y por $\bar{i}_{\mathcal{D}}$ al vector-índice asociado a $(\mathcal{F}, [\bar{i}])$ para $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, entonces $\bar{\epsilon}_{\mathcal{D}} = (0.85, 0.85, 0.85, 0.85) \not\geq \bar{i}_{\mathcal{D}} = (0.91, 0.67, 0.6, 0.4)$ y $\bar{i}_{\mathcal{D}} = (0.91, 0.67, 0.6, 0.4) \not\geq \bar{\epsilon}_{\mathcal{D}} = (0.85, 0.85, 0.85, 0.85)$. El siguiente gráfico ilustra las relaciones de preferencia revelada $R^0(\bar{i})$ y $R^0(\bar{\epsilon})$ para esta matriz de gasto¹³⁶.

¹³⁶Nótese que la Figura 2.28 y la Figura 2.29 –que ilustran respectivamente las variedades de eficiencia de Afriat y de Varian, respectivamente, para la matriz de gasto (2.28)– garantizan también la validez de esta afirmación.



Para finalizar esta sección, construimos una nueva variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$ que –como mostraremos a continuación– describirá simultáneamente casi-mejor el comportamiento de la demanda que las variedades de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ y $(\mathcal{F}, [i])$, respectivamente; además de permitir resolver el problema de la “máxima norma” planteado por Varian.

Definición 2.4.10 (Índice generalizado AMP) Llamaremos índice generalizado de eficiencia AMP a la aplicación $[\zeta]$ que asigna, a cualquier serie finita de observaciones de demanda, $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, la familia de vectores-índice $[\zeta](\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \{\bar{\zeta}_{e_j^*} = (\zeta_{1e_j^*}, \dots, \zeta_{ne_j^*}) : j \in J\}$, donde para cada $j \in J$ el vector-índice $\bar{\zeta}_{e_j^*} = (\zeta_{te_j^*})_{t=1}^n$ definido por:

$$\zeta_{te_j^*} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) = \emptyset \\ 1 + \min\{a_{ts}/\bar{x}_s \in \Gamma_{\tilde{\mathcal{D}}_j}(\bar{x}_t)\} & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall t \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.33)$$

donde $\Gamma_{\mathcal{D}}$ designa a la familia de aplicaciones $\Gamma_{\mathcal{D}_j} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D})$ definida por:

$$\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) = \begin{cases} \mathcal{X}_{jt} & \text{si } \bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}_j \\ \emptyset & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad \forall t \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.34)$$

donde para cada $j \in J$, $\tilde{\mathcal{D}}_j$ la imagen por e_j^* de \mathcal{D} y \mathcal{X}_{jt} denota el conjunto (posiblemente vacío) formado por todas las cestas de bienes \bar{x}_s para las cuales existe un ciclo \mathcal{C}_r con $\bar{x}_t, \bar{x}_s \in \mathcal{C}_r$ y $\Psi_{\mathcal{D}_j}(\bar{x}_t, \bar{x}_s) = d_r$; siendo $d_r = \max\{\Psi_{\tilde{\mathcal{D}}_j}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) : (\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E_{\tilde{\mathcal{D}}_j} \cap \mathcal{C}_r\}$ y $\Psi_{\tilde{\mathcal{D}}_j}$ la función peso dada por:

$$\Psi_{\tilde{\mathcal{D}}_j} : \begin{array}{ll} E_{\tilde{\mathcal{D}}_j} & \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ (\bar{x}_i, \bar{x}_j) & \mapsto \bar{p}_i \bar{x}_j - 1 = a_{ij}; \bar{x}_i \in \mathcal{D}_j \end{array}$$

Por construcción, la n-tupla de números reales $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ es un elemento del n-cubo unidad C_n . Por otra parte, resulta sencillo probar que para cada $\bar{x}_t \in \mathcal{D}$ con $\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) \neq \emptyset$, una condición necesaria y suficiente para que $\min\{a_{ts} : \bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\} = 0$ es que \bar{x}_t sea

inconsistente, pero no fuertemente inconsistente con GARP. Si \bar{x}_t no es inconsistente con GARP, entonces $\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) = \emptyset$ y, por tanto, $\zeta_t = 1$. A continuación, ilustramos con un ejemplo práctico el procedimiento anterior¹³⁷.

Ejemplo 2.4.9 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada ($\bar{p}_t \bar{x}_t = 1, \forall t \in \{1, \dots, n\}$) con matriz de gasto (2.11). Entonces, resulta sencillo comprobar que la aplicación de eficiencia de Afriat e^* asigna a la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ el vector-índice $e^* = (0.85, 0.85, 0.85, 0.85)$, mientras que la aplicación de eficiencia de Varian \bar{i} asigna el vector-índice $\bar{i} = (0.91, 0.67, 0.60, 0.40)$ para este conjunto de datos. La Figura 2.17 ilustra la matriz de gasto $\Phi^*(\bar{I})$ y la relación de preferencia revelada R^0 asociada a esta serie finita de datos de demanda.

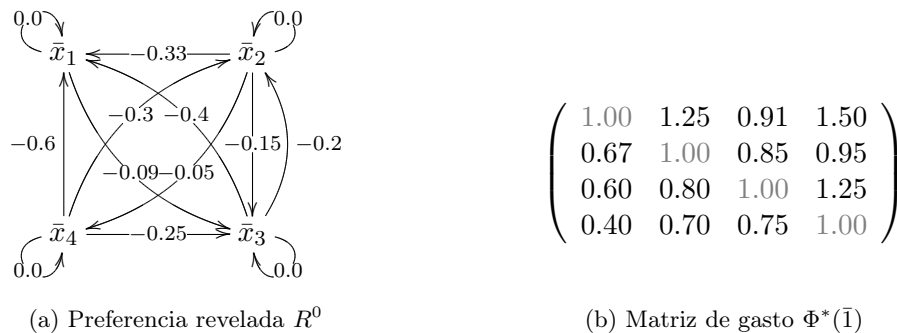


Figura 2.26: Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.

La sección (b) de la Figura 2.26 que ilustra el grafo dirigido $G = (V, E, \omega)$ que representa gráficamente a R^0 permite apreciar la existencia de los cinco ciclos no triviales, a partir de los cuales y mediante la aplicación multiforme Γ permite obtener $\bar{\zeta} = \zeta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

Ciclo $\mathcal{C}_1 := \{\bar{x}_4, \bar{x}_3, \bar{x}_2\}$	$d_1^* = \max[a_{43}, a_{32}] = -0.2$	$\bar{x}_2 \in \Gamma(\bar{x}_3)$	$\Gamma(\bar{x}_1) = \emptyset$
Ciclo $\mathcal{C}_2 := \{\bar{x}_1, \bar{x}_3\}$	$d_2^* = \max[a_{31}] = -0.4$	$\bar{x}_1 \in \Gamma(\bar{x}_3)$	$\Gamma(\bar{x}_2) = \emptyset$
Ciclo $\mathcal{C}_3 := \{\bar{x}_2, \bar{x}_3\}$	$d_3^* = \max[a_{32}] = -0.2$	$\bar{x}_2 \in \Gamma(\bar{x}_3)$	$\Gamma(\bar{x}_3) = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$
Ciclo $\mathcal{C}_4 := \{\bar{x}_2, \bar{x}_4\}$	$d_4^* = \max[a_{42}] = -0.3$	$\bar{x}_2 \in \Gamma(\bar{x}_4)$	$\Gamma(\bar{x}_4) = \{\bar{x}_2\}$
Ciclo $\mathcal{C}_5 := \{\bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_1\}$	$d_5^* = \max[a_{32}] = -0.2$	$\bar{x}_2 \in \Gamma(\bar{x}_3)$	

Entonces, por (2.33) se tiene $\bar{\zeta} = \zeta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = (1, 1, 0.6, 0.7)$. El siguiente gráfico ilustra la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\zeta})$ y la matriz de gasto $\Phi^*(\bar{\zeta})$ asociada con $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$.

Sea ζ la aplicación-índice que asigna a cada serie de m observaciones de demanda el vector-índice $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ definido en (2.33). Formalmente hablando, $\zeta(\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m) = \bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$, para cada $\{(\bar{q}_t, \bar{y}_t)\}_{t=1}^m$. En el siguiente teorema probaremos que la aplicación-índice ζ es eficiente o, equivalentemente, que (\mathcal{F}, ζ) es una estructura de eficiencia.

¹³⁷Diremos que \bar{x}_t es inconsistente con GARP si existe un \bar{x}_s tal que $\bar{x}_s \in RP(\bar{x}_t)$ y $\bar{x}_t R^0 \bar{x}_s$ o si $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{x}_t P^0 \bar{x}_s$. Diremos que \bar{x}_t es fuertemente inconsistente con GARP si existe un \bar{x}_s tal que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$ y $\bar{x}_t P^0 \bar{x}_s$.

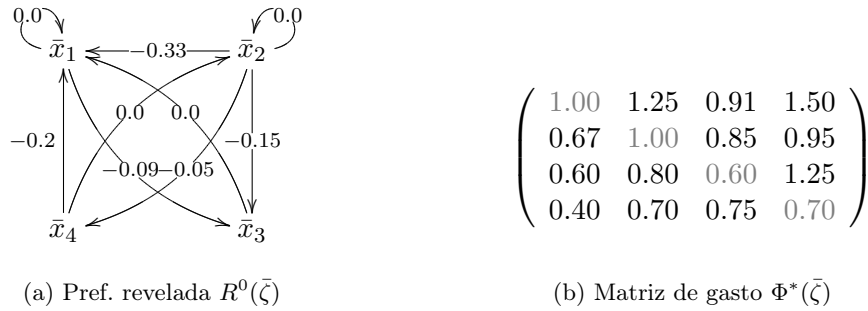


Figura 2.27: Estructura preferencial de un conjunto de datos de demanda violando GARP.

Teorema 2.4.3 $(\mathcal{F}, [\zeta])$ es una variedad de eficiencia de eficiencia

Demostración: Sea ϵ^* la aplicación soporte del germen-aplicación $[\zeta]_{\epsilon^*}$ que asigna a cada \mathcal{D} en \mathcal{F} un subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ inconsistente con GARP. Para probar que $(\mathcal{F}, [\zeta])$ es una variedad de eficiencia de eficiencia será suficiente probar que $(\mathcal{F}, [\zeta]_{\epsilon^*})$ es una estructura de eficiencia para todo germen-aplicación $[\zeta]_{\epsilon^*}$ de la aplicación multiforme $[\zeta]$. Esto es, que para cada serie finita de datos de demanda $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ en \mathcal{F} se cumple:

$$\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n \text{ satisface GARP}(\bar{\gamma}) \text{ para todo } \bar{\gamma} \text{ en } C_n \text{ con } \zeta_{\epsilon^*}(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n) = \bar{\zeta} \gg \bar{\gamma}$$

En virtud del Ejemplo 2.4.9, para demostrar que $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\gamma})$ será suficiente probar que $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$ para todo $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ puesto que $\Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\gamma}} = \bigcup \Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}}$ y la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\gamma})$ si y solamente si $\Sigma^{\bar{\gamma}} = \emptyset$. Veamos, pues, que para cada $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ se cumple que $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$. Para ello, y con objeto de facilitar la prueba, es conveniente expresar el vector-índice $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ en función de una lista finita $\{\bar{\zeta}^t\}_{t=1}^n$ de n-tuplas de números reales del n-cubo unidad. Para todo $\bar{x}_t \in \mathcal{D}$ tal que $\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) \neq \emptyset$ se considera la n-tupla de números reales $\bar{\zeta}^t = (\zeta_1^t, \dots, \zeta_n^t)$ definida por:

$$\zeta_j^t = \begin{cases} 1 + \min\{a_{ts}/\bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\} & \text{si } j = t \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por construcción, si $\bar{\zeta}^t = (1, \dots, 1)$ para todo $\bar{x}_t \notin \tilde{\mathcal{D}}$ se cumple $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}^1 \odot \bar{\zeta}^2 \odot \dots \odot \bar{\zeta}^n$ y, por tanto, $\bar{\zeta} \leq \bar{\zeta}^t$ para todo $t \in \{1, \dots, n\}$. Así pues, para todo $\bar{\gamma}$ en C_n con $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$ se cumple que $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}^t$ para todo $t \in \{1, \dots, n\}$. Sea \mathcal{C}_r un ciclo cualquiera en $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\zeta}^t} = \{ \mathcal{C} \in \Sigma_{\mathcal{D}}/\bar{x}_t, \bar{x}_s \in \mathcal{C} \text{ para algún } \bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) \}$, si $d_r^* > \min\{a_{ts}/\bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\}$ es claro que para todo $\bar{x}_k \in \mathcal{C}_r$ se cumple $\bar{x}_k R(\bar{\zeta}^t) \bar{x}_t$ y $\sim \bar{x}_t R(\bar{\zeta}^t) \bar{x}_k$ y, por lo tanto, $\mathcal{C}_r \notin \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\zeta}^t}$ y, por tanto, $\mathcal{C}_r \notin \Sigma_{\mathcal{D}}^{\bar{\gamma}}$. Si $\mathcal{C}_r \in \Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\zeta}^t}$ es tal que $d_r^* = \min\{a_{ts}/\bar{x}_s \in \Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t)\}$, entonces se verifica que $\bar{x}_i R(\bar{\zeta}^t) \bar{x}_j$ y $\bar{x}_j R(\bar{\zeta}^t) \bar{x}_i$, para cualesquiera $\bar{x}_i, \bar{x}_j \in \mathcal{C}_r$. En particular, $\bar{x}_t R(\bar{\zeta}^t) \bar{x}_s$, $\bar{x}_s R(\bar{\zeta}^t) \bar{x}_t$ y, además, $\bar{\zeta}^t \bar{p}_t \bar{x}_t = \bar{p}_t \bar{x}_s$. Por otra parte, como $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$ se tiene, por definición de ζ que $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}^t$

para todo $\bar{x}_t \in \mathcal{D}$ tal que $\Gamma_{\mathcal{D}}(\bar{x}_t) \neq \emptyset$, luego para cada $\bar{x}_s \in \Gamma(\bar{x}_t)$ se cumple que $\gamma_t \bar{p}_t \bar{x}_t < \bar{p}_t \bar{x}_s$, de donde se deduce de manera inmediata que $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$ para todo $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$. De lo anterior se desprende, de manera inmediata, que para toda n-tupla de números reales $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ con $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$ y $\forall t \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $\Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \emptyset$ y, en consecuencia que $\bigcup \Sigma_{\bar{x}_t, \tilde{\mathcal{D}}}^{\bar{\gamma}} = \Sigma^{\bar{\gamma}} = \emptyset$, lo cual implica que $\gamma_j \bar{p}_j \bar{x}_j < \bar{p}_j \bar{x}_i$ para todo par de observaciones i, j tales que $\bar{x}_j R(\bar{\gamma}) \bar{x}_i$ y, por tanto, la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP($\bar{\gamma}$) para todo $\bar{\gamma}$ del n-cubo unidad con $\bar{\gamma} \ll \bar{\zeta}$, lo que completa la demostración. ■

La Figura 2.30, que aparece representada al final de la sección, ilustra la relación de preferencia revelada R^0 – para cada vector-índice $\bar{\zeta}$ asociado a la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$ – para la serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.28). Las diferentes secciones de la Figura 2.30 ilustran la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\zeta}_{\mathcal{D}})$ asociada a la serie finita de datos de demanda \mathcal{D} definida en (2.28) para cada uno de los diferentes vectores-índice $\bar{\zeta}_{\mathcal{D}}$ determinados unívocamente por las diferentes ramificaciones o gérmenes de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta]_{\epsilon^*})$ de la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$. De la Figura 2.30 se desprenden inmediatamente los siguientes resultados.

Proposición 2.4.10 *La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$ no es β_{\star} -eficiente.*

Corolario 2.4.2 *La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$ no es fuertemente eficiente.*

La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$ admite una construcción algorítmica. El Algoritmo 20 que aparece ilustrado al final de esta sección permite la construcción del vector-índice $\bar{\zeta} = [\zeta]_{\epsilon^*}(\mathcal{D})$, asociado a la determinación de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta]_{\epsilon^*})$, para cada serie finita de datos de demanda, \mathcal{D} , normalizada y para cada subconjunto inconsistente con GARP $\tilde{\mathcal{D}}_{\epsilon^*}$ soportado por la aplicación ϵ_{\star} .

A continuación, examinaremos las relaciones existentes entre la variedad de eficiencia de Varian, $(\mathcal{F}, [i])$, la variedad de eficiencia de Afriat, $(\mathcal{F}, [\epsilon])$, y la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$. El Ejemplo 2.4.4 nos permite afirmar que las variedades de eficiencia $(\mathcal{F}, [i])$, $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ y $(\mathcal{F}, [\zeta])$ son distintas dos a dos y, además, que $(\mathcal{F}, [i])$ y $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ no son comparables según la Definición 2.4.9. Para ello, basta sólo observar las secciones b), c) y d) de la Figura 2.28 –que representa a la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ para estos datos–, (2.29) –que representa a la variedad β_{\star} -eficiente $(\mathcal{F}, [i])$ y (2.30) –que ilustra gráficamente la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$ para la lista finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.28). Cabe, pues, preguntarse si la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$ describe casi-mejor el comportamiento de un consumidor que $(\mathcal{F}, [i])$ y $(\mathcal{F}, [\epsilon])$. La respuesta (afirmativa) son los siguientes teoremas.

Teorema 2.4.4 *$(\mathcal{F}, [\zeta])$ describe casi-mejor el comportamiento de un consumidor que $(\mathcal{F}, [i])$.*

Demostración: Para demostrar que $(\mathcal{F}, [\zeta])$ describe casi-mejor el comportamiento de un consumidor que $(\mathcal{F}, [i])$ es suficiente probar, en virtud del ejemplo anterior, que para todo \mathcal{D} en \mathcal{F} y para todo subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ de partes de \mathcal{D} inconsistente con GARP se verifica que

$\bar{\zeta}_{\mathcal{D}} \geq \bar{i}_{\mathcal{D}}$, donde por $\bar{i}_{\mathcal{D}}$ y $\bar{\zeta}_{\mathcal{D}}$ designamos a las tuplas de números reales definidas en (2.31) y (2.34) determinadas unívocamente por $(\mathcal{F}, [\zeta]_{\epsilon^*})$ y $(\mathcal{F}, [i]_{\epsilon^*})$ respectivamente y $\tilde{\mathcal{D}}$ es el conjunto imagen de \mathcal{D} por la aplicación ϵ^* , soporte de los gérmenes de eficiencia $[\zeta]_{\epsilon^*}$ y $[i]_{\epsilon^*}$. Supongamos que \mathcal{D} es la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ normalizada y $\bar{\zeta}_{\mathcal{D}} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ y $\bar{i}_{\mathcal{D}} = (i_1, \dots, i_n)$ las n-tuplas de números reales definidas en (2.31) y (2.34) respectivamente. Para demostrar el teorema, bastará probar que para todo $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ se verifica que $\zeta_t \geq i_t$. El resultado es inmediato si $\Gamma(\bar{x}_t) = \emptyset$. Queda por demostrar que $\zeta_t \geq i_t$ para todo $\bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}$ tal que $\Gamma(\bar{x}_t) \neq \emptyset$. Pero esto se sigue con facilidad de lo siguiente: para todo $\bar{x}_s \in \mathcal{D}$ tal que $\bar{x}_s \in \Gamma(\bar{x}_t)$ se tiene por (2.34) que $\bar{x}_s R \bar{x}_t$. Por tanto, $\{\bar{x}_s \in \mathcal{D} : \bar{x}_s \in \Gamma(\bar{x}_t)\} \subseteq \{\bar{x}_s \in \mathcal{D} : \bar{x}_s R \bar{x}_t\}$. Entonces, si $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ es la matriz real definida por $a_{ij} = \bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$ se tiene que $\min\{a_{ts} : \bar{x}_s R \bar{x}_t\} \leq \min\{a_{ts} : \bar{x}_s \in \Gamma(\bar{x}_t)\}$, lo que implica que $\zeta_t \leq 1 + \min\{a_{ts} : \bar{x}_s R \bar{x}_t\}$. Ahora bien, por ser \mathcal{D} una serie finita de datos de demanda normalizada se tiene que $\min\{\bar{p}_t \bar{x}_s : \bar{x}_s R \bar{x}_t\} = 1 + \min\{a_{ts} : \bar{x}_s R \bar{x}_t\}$, luego $\zeta_t \geq m(\bar{p}_t, \bar{x}_t)$ para todo \bar{x}_t tal que $\Gamma(\bar{x}_t) \neq \emptyset$, lo que completa la demostración. ■

De manera análoga a la demostración anterior se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.4.5 $(\mathcal{F}, [\zeta])$ describe casi-mejor el comportamiento de un consumidor que $(\mathcal{F}, [\epsilon])$.

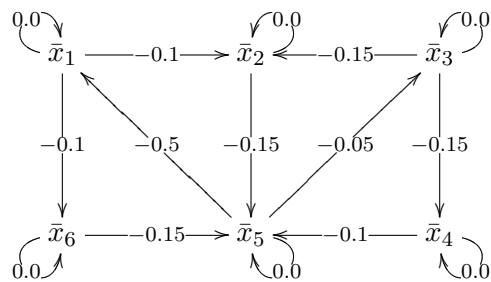
Demostración: En virtud del ejemplo anterior, basta probar que para cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} en \mathcal{F} y para todo subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ de partes de \mathcal{D} inconsistente con GARP se verifica que $\bar{\zeta}_{\mathcal{D}} \geq \bar{\epsilon}_{\mathcal{D}}$, donde $\bar{\epsilon}_{\mathcal{D}}$ y $\bar{\zeta}_{\mathcal{D}}$ designan a las tuplas de números reales definidas en (2.31) y (2.29) determinadas unívocamente por $(\mathcal{F}, [\zeta]_{\epsilon^*})$ y $(\mathcal{F}, [\epsilon]_{\epsilon^*})$ respectivamente y $\tilde{\mathcal{D}}$ es el conjunto imagen de \mathcal{D} por la aplicación ϵ^* , soporte de los gérmenes de eficiencia $[\zeta]_{\epsilon^*}$ y $[\epsilon]_{\epsilon^*}$. Pero esto se sigue con facilidad de lo siguiente: sea \mathcal{D} cualquier serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ normalizada y $\bar{\zeta}_{\mathcal{D}} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ y $\bar{\epsilon}_{\mathcal{D}} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ las n-tuplas de números reales definidas en (2.31) y (2.29), respectivamente. Entonces, es claro que $\epsilon^* = \min\{\zeta_t : \bar{x}_t \in \tilde{\mathcal{D}}\}$, lo que prueba el resultado. ■

Observación 2.4.3 Las α^* -estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$, $(\mathcal{F}, \mathbf{\vartheta})$ –que admitían una construcción algorítmica– y las α^* -estructuras asociadas a los procedimientos “recursivos matriciales” min-max, max-min y min-min admiten una generalización en términos de variedades de eficiencia. Nótese que podríamos estar hablando entonces de las variedades de eficiencia $(\mathcal{F}, [\mathbf{v}])$, $(\mathcal{F}, [\mathbf{\vartheta}])$ y de las variedades de eficiencia min-max, max-min y min-min. Merece la pena resaltar lo siguiente: (1) estas variedades de eficiencia son β^* -eficientes, por construcción; (2) la variedad de eficiencia min-min está contenida dentro de la variedad de eficiencia de Varian; (3) la variedad de eficiencia de Varian $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$ describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que la variedad de eficiencia min-min, por construcción. Finalmente, señalar que no se han introducido estas variedades de eficiencia en este estudio por diversas razones: en primer lugar porque aunque describen casi-mejor el comportamiento de la demanda que la variedad de eficiencia de Varian $(\mathcal{F}, [\mathbf{i}])$, no son comparables en el sentido dado en la Definición 2.4.9 con la variedad de eficiencia de Afriat $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ y, en segundo lugar porque no permiten resolver el

problema de la “máxima norma”. La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$, describe, por construcción, casi-mejor el comportamiento de la demanda que estas variedades de eficiencia.

Una de las cuestiones que falta por resolver se refiere a la existencia de un vector-índice que resuelva el problema de “máxima norma” planteado por Varian. Sea \mathcal{D} cualquier serie finita de datos de demanda (de tamaño n). Entonces, para cada aplicación multiforme de eficiencia $[\psi]$ se puede construir, a partir de $\Phi_{\mathcal{D}}$, una familia $(\mathcal{D}, \Phi_{\mathcal{D}}, \Lambda_{\mathcal{D}, [\psi]})$ de elementos de eficiencia $(\mathcal{D}, \tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\psi}_{\tilde{\mathcal{D}}})$, en adelante haz de eficiencia soportado por la aplicación multiforme $[\psi]$, donde $\tilde{\psi}_{\tilde{\mathcal{D}}}$ es la n -tupla de números reales determinada unívocamente por la aplicación de eficiencia $[\psi]$ y por el subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Nótese que, por construcción, si $[\zeta]$ es la aplicación multiforme de eficiencia definida en (2.34), entonces el vector-perturbación de “máxima norma” es, para cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} inconsistente con GARP, un elemento del haz de eficiencia $(\mathcal{D}, \Phi_{\mathcal{D}}, \Lambda_{\mathcal{D}, [\zeta]})$. Este hecho sugiere pensar que el vector-índice de “máxima norma” se encuentra entre la familia de vectores-índices determinados por la familia de aplicaciones-soporte que asignan un conjunto-soporte minimal inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Sin embargo, esta afirmación no es cierta, como mostramos a continuación.

Ejemplo 2.4.10 Sea $\mathcal{D} = \{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda cuya matriz de gasto viene dada por (2.35). Veamos que, efectivamente, el vector-índice $\bar{\zeta}$ solución de (2.26) para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es un elemento del haz de eficiencia $(\mathcal{D}, \Phi_{\mathcal{D}}, \Lambda_{\mathcal{D}, [\zeta]})$ que está soportado por el subconjunto $\tilde{\mathcal{D}} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_5\}$ no minimal. Obsérvese que $\tilde{\mathcal{D}}_* = \{\bar{x}_5\} \in \Psi$ y, por tanto, $\tilde{\mathcal{D}} \notin \mathfrak{S}$ puesto que $\tilde{\mathcal{D}}_* \subsetneq \tilde{\mathcal{D}}$.



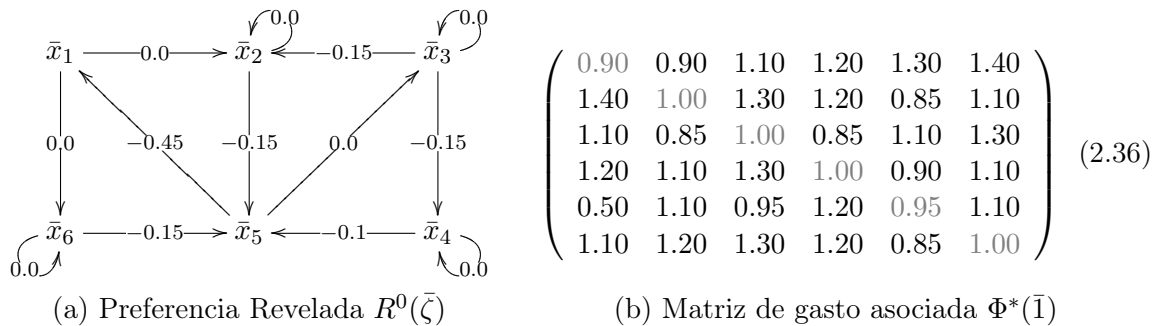
(a) Preferencia Revelada $R^0(\bar{I})$

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.90 & 1.10 & 1.20 & 1.30 & 1.40 \\ 1.40 & 1.00 & 1.30 & 1.20 & 0.85 & 1.10 \\ 1.10 & 0.85 & 1.00 & 0.85 & 1.10 & 1.30 \\ 1.20 & 1.10 & 1.30 & 1.00 & 0.90 & 1.10 \\ 0.50 & 1.10 & 0.95 & 1.20 & 1.00 & 1.10 \\ 1.10 & 1.20 & 1.30 & 1.20 & 0.85 & 1.00 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

(b) Matriz de gasto asociada $\Phi^*(\bar{I})$

Esta serie finita de datos de demanda es inconsistente con GARP, dado que existen cuatro ciclos incoherentes con GARP en la relación de la preferencia revelada. En la sección a) de la siguiente figura se ilustra su relación de preferencia revelada. En esta figura también se puede apreciar los subconjuntos de cestas demandadas $\tilde{\mathcal{D}}_1 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_3\}$, $\tilde{\mathcal{D}}_2 = \{\bar{x}_5\}$, $\tilde{\mathcal{D}}_3 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4\}$, $\tilde{\mathcal{D}}_4 = \{\bar{x}_2, \bar{x}_4, \bar{x}_6\}$, $\tilde{\mathcal{D}}_5 = \{\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_6\}$ son minimales e inconsistentes con GARP, mientras que es claro el subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ de datos de demanda formado por las observaciones 1, 5 es inconsistente con GARP, pero no minimal. Un simple cálculo nos permi-

te obtener $\bar{\zeta}_{\tilde{\mathcal{D}}_1} = (0.9, 1, 0.85, 1, 1, 1)$, $\bar{\zeta}_{\tilde{\mathcal{D}}_2} = (1, 1, 1, 1, 0.5, 1)$, $\bar{\zeta}_{\tilde{\mathcal{D}}_3} = (0.9, 0.85, 1, 0.9, 1, 1)$, $\bar{\zeta}_{\tilde{\mathcal{D}}_4} = (1, 0.85, 1, 0.9, 1, 0.85)$ y $\bar{\zeta}_{\tilde{\mathcal{D}}_5} = (1, 0.85, 0.85, 1, 1, 0.85)$, como los vectores-índices asociados a $[\zeta]$ para cada uno de estos subconjuntos minimales inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP. Por (2.30) se tiene que $d_1^* = -0.1$, $d_2^* = -0.1$, $d_3^* = -0.05$ y $d_4^* = -0.05$, entonces por (2.34) se tiene que $\Gamma(\bar{x}_1) = \{\bar{x}_2, \bar{x}_6\}$, $\Gamma(\bar{x}_5) = \{\bar{x}_3\}$ y $\Gamma(\bar{x}_i) = \emptyset$ $i = 2, 3, 4, 6$. Entonces, en virtud de (2.33), se obtiene $\bar{\zeta} = (0.9, 1, 1, 1, 0.95, 1)$ como vector-índice. Es fácil comprobar que $\bar{\zeta} = (0.9, 1, 1, 1, 0.95, 1)$ es el vector-índice de “máxima norma”. La sección b) de la siguiente figura muestra la relación de preferencia revelada asociada a este vector-índice.



Para finalizar un par de observaciones. En primer lugar, señalar que el problema de encontrar para cada serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP la familia formada por todos los subconjuntos inconsistentes con GARP es de complejidad exponencial, de donde se puede deducir fácilmente la NP-completitud de este problema. En consecuencia, encontrar para cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} y para cada aplicación multiforme $[\rho]$ de eficiencia el haz de eficiencia $(\mathcal{D}, \Phi_{\mathcal{D}}, \Lambda_{\mathcal{D}, [\rho]})$ es un problema NP-completo y, por tanto, insoluble algorítmicamente en el sentido más débil de la lógica matemática puesto que para conjuntos de datos de tamaño elevado este procedimiento sería en la actualidad impráctico y poco útil. De lo anterior se deduce que en la práctica resulta útil fijar una estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta]_{\epsilon_j})$ soportada por cualquier germen-aplicación ϵ^* que asigne a cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} inconsistente con GARP un subconjunto minimal $\tilde{\mathcal{D}}$ inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Conviene señalar, además, que todas las variedades de eficiencia introducidas en esta sección se construyen de forma algorítmica y, por tanto, son calculables.

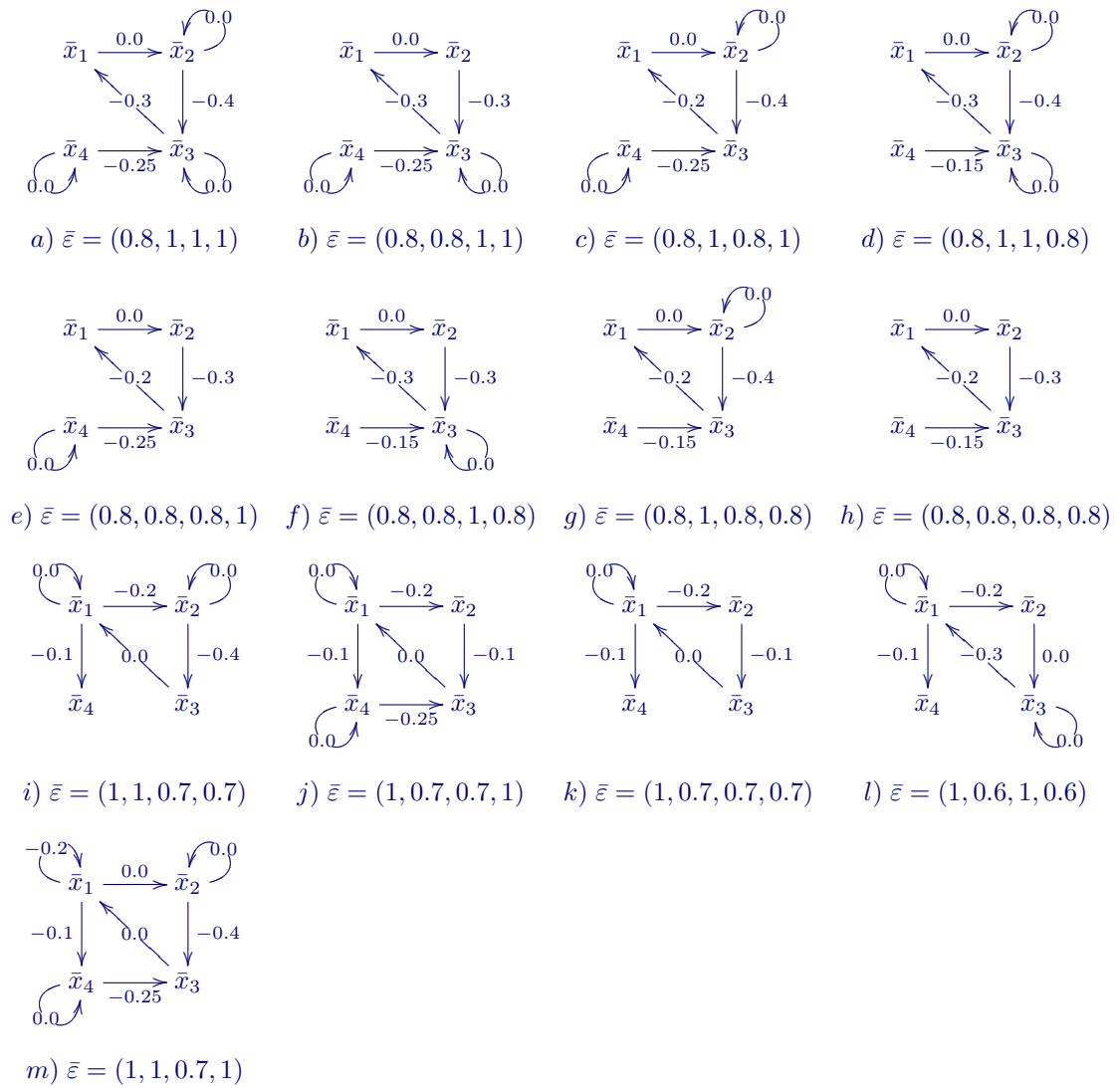


Figura 2.28: Variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$.

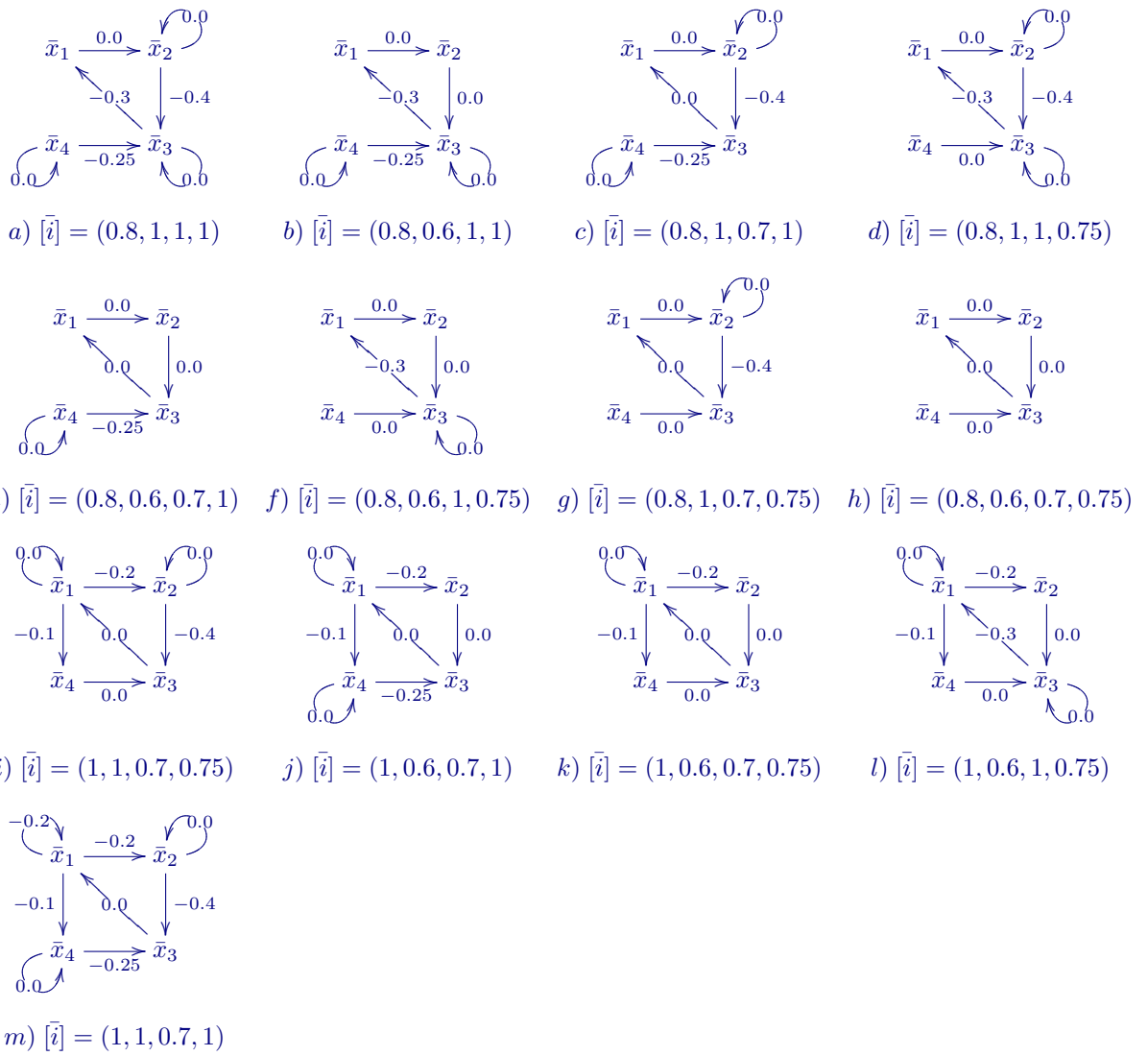


Figura 2.29: Variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [i])$.

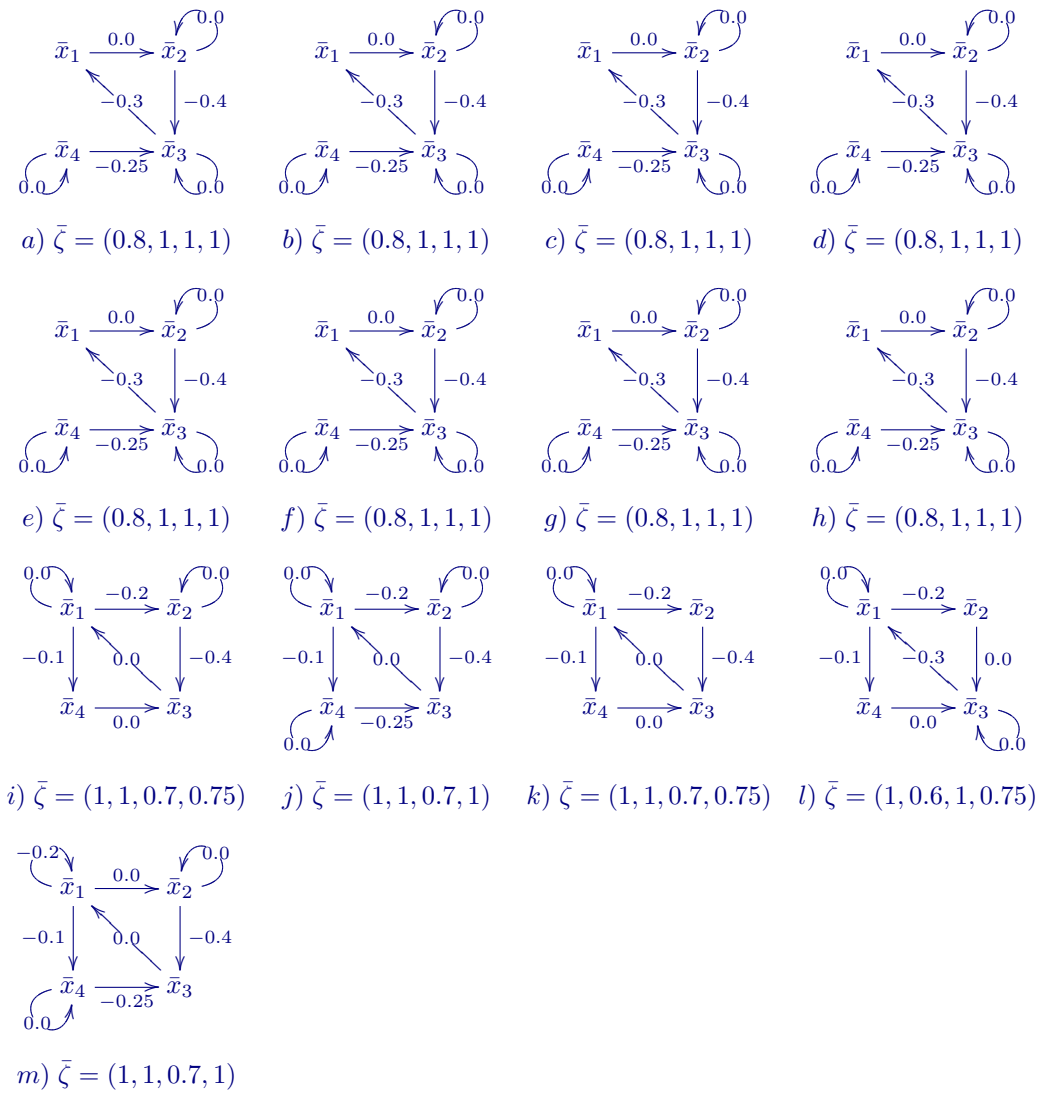


Figura 2.30: Variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$.

Algorithm 20. Pseudo-code for computing AMP index

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. for $i, j := 1$ to n do $a[i, j] \leftarrow c[i, j] - c[i, i]$; $R^0[i, j] \leftarrow 0$; $P^0[i, j] \leftarrow 0$
3. for $i, j := 1$ to n do
4. if ($c[i, j] > c[i, i]$) then $P^0[i, j] \leftarrow 1$; $R^0[i, j] \leftarrow 1$
5. else if ($c[i, j] = c[i, i]$) then $R^0[i, j] \leftarrow 1$
6. Compute the transitive closure matrix R of R^0 and check GARP
7. If $[\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ doesn't satisfies GARP] then
8. call procedure inconsistent subset
9. call procedure algorithm's Johnson (1975) and this data file
10. for $i := 1$ to $nciclos$ do
11. $s \leftarrow 1$; $T(1:nnode) \leftarrow 0$; $k(1:nnode) \leftarrow 0$; $long \leftarrow 0$; $d \leftarrow 0$
12. read in this data file h , $(k(j), j=1, h)$
13. for $j := 1$ to $h-1$ do
14. If $(k(j) \neq 0 \text{ and } k(j+1) \neq 0)$ then if $j \in \tilde{\mathcal{D}}$ do
15. $T(s) \leftarrow a[k(j), k(j+1)]$; $b[i, s] \leftarrow k(j)$; $b[i, s+1] \leftarrow k(j+1)$; $s=s+1$
16. If $(k(h) \neq 0 \text{ and } h \in \tilde{\mathcal{D}})$ then $T(s) \leftarrow a[k(h), k(1)]$; $b[i, s] \leftarrow k(h)$; $b[i, s+1] \leftarrow k(1)$
17. for $i := 1$ to s do $long \leftarrow long + T(i)$
18. If $(long < 0)$ then do
19. compute $d = \maxval T(1:s)$
20. for all indices $j \leq s$ such that $T(j) = d$ do
21. if ($j < s$) then $F[p, 1] \leftarrow b[i, j]$; $F[p, 2] \leftarrow b[i, j+1]$; $p = p + 1$
22. else if ($j = s$) then $F[p, 1] \leftarrow b[i, s]$; $F[p, 2] \leftarrow b[i, 1]$; $p = p + 1$
23. $O[1:nnode, 1:p] \leftarrow 0$; $n(1:nnode) \leftarrow 1$
24. for $i := 1$ to $nnode$
25. for $j := 1$ to p do
26. if ($F(j, 1) = i$) then $O[i, n(i)] \leftarrow a[F(j, 1), F(j, 2)]$; $n(i) \leftarrow n(i) + 1$
27. for $i := 1$ to $nnode$ do
28. if ($\minval O[i, 1:p] = 0$) then $\zeta(i) \leftarrow 1$ else $\zeta(i) \leftarrow 1 + \maxval O[i, 1:n(i)]$
29. return

Output: $\bar{\zeta} = \zeta(\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n)$.

Figura 2.31: Índice generalizado AMP.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An Extension of the Classical Method. *International Economic Review*, Vol. 14, págs. 460-472.
- [2] Chalfant, J. y J. Alston (1988) Accounting for Changes in Tastes. *Journal of Political Economy*, Vol. 21, págs. 391-410.
- [3] Gross, J. (1991) On Expenditure Indices in Revealed Preference tests. *Journal of Political Economy*, Vol. 98, págs. 416-419.
- [4] Varian, H. (1987) On Goodness-of-Fit of Revealed Preference Conditions. CREST Working Paper. Department of Economics. University of Michigan.
- [5] Varian, H. (1990) Goodness-of-Fit in Optimizing Models. *Journal of Econometrics*, Vol. 46, págs. 125-140.
- [6] Varian, H. (1993) Goodness-of-Fit for Revealed Preference Tests. Working Paper. University of Michigan.

2.5. Consideraciones estocásticas en la teoría de la demanda

En esta sección presentamos dos estadísticos que nos permitirán realizar un contraste de hipótesis no-paramétrico –basado en una chi-cuadrado– para contrastar estadísticamente si las inconsistencias (con la hipótesis de la maximización de la utilidad) presentes en los datos son de carácter estructural o, por el contrario, están ocasionadas por la existencia de pequeños errores de medida o de naturaleza estocástica. Además, realizamos un experimento de Monte Carlo para mostrar cómo el test de Tsur (1989) rechaza, en algunas ocasiones, GARP cuando esta violación ha sido producida por la existencia de un pequeño error de medida o de naturaleza estocástica.

Es de sobra conocido que las aplicaciones no paramétricas de la teoría clásica de la demanda no están exentas de errores de medida y/o de naturaleza estocástica que pueden ser la causa de la aparición de inconsistencias en los datos de demanda observados y que éstos no procedan de una conducta maximizadora. Si una serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, no satisface el axioma GARP, se puede construir una perturbación mínima del conjunto de datos, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t, e_t)\}_{t=1}^n$, satisfaciendo $\text{GARP}(\bar{e})$. Si esta perturbación es “razonablemente pequeña” se puede concluir que los datos de demanda han sido generados desde la optimización y que las inconsistencias presentes en el conjunto de datos de demanda están ocasionadas por la existencia de pequeños errores de medida o de naturaleza estocástica. En caso contrario, las violaciones son de carácter estructural. Varian (1985) propone un contraste de hipótesis basado en un test chi-cuadrado para contrastar la significatividad estadística de una violación de la hipótesis de la maximización de la utilidad y así determinar la magnitud que se considera “razonablemente pequeña”. Por su parte, Tsur (1989) describe un test estadístico similar al proporcionado por Varian (1985) que precisa disponer de un conjunto de índices de eficiencia, $(e_t)_{t=1}^n$, satisfaciendo $\text{GARP}(\bar{e})$.

En esta sección presentamos dos estadísticos, basados en el procedimiento de Tsur, que nos permitirán contrastar la significatividad estadística de una violación GARP. Además, realizaremos un experimento de Monte Carlo para probar cómo el test planteado por Tsur rechaza, en algunas ocasiones, GARP cuando esta violación ha sido producida por la existencia de un pequeño error de medida o de naturaleza estocástica y que, además, nos permitirá colegir que en la mayoría de las situaciones prácticas nuestras medidas de eficiencia describirán mejor el comportamiento optimizador de un consumidor que la medida de eficiencia planteada por Varian.

El modelo de optimización del consumidor impone algunas restricciones a la conducta observable. Estas condiciones son importantes, al menos, por dos razones. En primer lugar, porque permiten contrastar la hipótesis de la maximización de la utilidad. Si los datos no satisfacen las restricciones teóricas, generalmente no se utilizará este modelo para describir la conducta optimizadora de un consumidor. En segundo lugar, porque las condiciones permiten estimar con mayor precisión los parámetros del modelo. Si los datos no rechazan las restricciones teóricas impuestas por la optimización, es posible que se quiera volver a estimar el modelo de tal manera que las estimaciones deban satisfacer las restricciones que implica la optimización. Desde los trabajos de Samuelson (1938) y Houthakker (1950), enmarcados dentro de la teoría de la preferencia revelada, han sido numerosos los autores que han desarrollado multitud de tests no paramétricos para contrastar si los datos son consistentes con algún modelo optimizador: Afriat (1967, 1972, 1976, 1977, 1981), Diewert (1973), Diewert y Parkan (1985), Varian (1982, 1983), Yatchew (1985), etc. La mayoría de estos tests son no estadísticos, no imponen ningún tipo de restricción a los datos observados y son contrastes “exactos” de la optimización que no incorporan ningún error de medida o de naturaleza estocástica que pueden provocar la aparición de inconsistencias en el comportamiento observado de un consumidor individual¹³⁸. Los datos se supone que se toman sin ningún tipo de error, así que estos tests son contrastes “exactos” (de la maximización de la utilidad, de la maximización del beneficio, etc.) del particular modelo de elección: los datos satisfacen las restricciones teóricas, o no. Así pues, si un conjunto de datos de demanda es inconsistente con la teoría neoclásica de la demanda, entonces resulta natural preguntarse si las inconsistencias presentes en los datos se deben a que las decisiones de consumo de un individuo no proceden de un comportamiento optimizador o, por el contrario, son consecuencia de la existencia de errores de medida en los datos observados.

En el primer capítulo se ha mostrado la equivalencia entre contrastar las diferentes condiciones algebraicas de la preferencia revelada y un cierto problema de programación lineal¹³⁹. Diewert (1973) fue el primer autor en mostrar la existencia de un procedimiento alternativo, basado en un cierto problema de programación lineal, tanto para contrastar en la práctica las desigualdades de Afriat como para encontrar una solución. Este autor añadió variables holgura negativas (S_n^{ij}) y positivas (S_p^{ij}), y minimizó la suma de las variables holgura negativas como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n S_n^{ij} \\ &\text{sujeto a} \\ &\phi_j - \phi_i - \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j) + S_p^{ij} - S_n^{ij} = 0 \quad \text{para todos } i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i, j \leq n \quad (2.37) \\ &S_n^{ij} \geq 0, \quad S_p^{ij} \geq 0, \quad \text{para todos } i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i, j \leq n \\ &\lambda_i > 0 \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

¹³⁸Una excepción la constituye el axioma de la racionalidad estocástica. Véase McFadden y Richter (1970, 1991), para más detalles.

¹³⁹Diewert (1973) construye un problema de programación lineal que permite caracterizar la consistencia de las decisiones de consumo de un individuo. Además, cuando este problema es factible, construye de manera explícita una solución del mismo que permite computar la función de utilidad generada por la función de demanda del conjunto de datos observados.

La solución de este problema de programación lineal es determinística (no estocástica) y requiere resolver un sistema de $2n^2$ variables (n variables para ϕ_i y λ_i y $n(n-1)$ variables tanto para S_n^{ij} como para S_p^{ij}), lo cual es bastante complejo desde un punto de vista estrictamente computacional¹⁴⁰.

Fleissig y Whitney (2003) diseñan un nuevo procedimiento que permite determinar la cantidad mínima del ajuste requerido para que los datos verifiquen las desigualdades de Afriat: $\phi_i \leq \phi_j + \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j) \leq 0$ para todo i, j . Estos autores minimizan la variable holgura máxima, modificando la función objetivo del problema de programación lineal original de Diewert (1973):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } Sn \\ & \text{sujeto a} \\ & \phi_i - \phi_j - \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j) - Sn \leq 0 \quad \text{para todos } i, j \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i, j \leq n \\ & \lambda_i > 0, Sn \geq 0 \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N} \text{ con } 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (2.38)$$

Este problema de programación lineal requiere resolver un sistema con $2n + 1$ variables (n variables para ϕ_i y λ_i y Sn). Si designamos por Sn_{\max} al máximo de la función objetivo de (2.38), es fácil probar que los datos, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, son consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad si y solamente si $Sn_{\max} = 0$. Años más tarde, Fleissig y Whitney (2005, pág. 357) muestran que cuando los datos presentan algún tipo de error de medida y/o de naturaleza estocástica, la solución óptima del problema de programación lineal –que caracteriza la hipótesis de la maximización de la utilidad– está acotada superiormente por una variable que depende de los parámetros de la solución óptima (sin ningún tipo de error) de este problema de programación lineal¹⁴¹. Esto es, si $\{(\bar{p}_t^*, \bar{x}_t^*)\}_{t=1}^n$ ha sido generada por un agente maximizador de la utilidad y $\phi_1^*, \dots, \phi_n^*; \lambda_1^*, \dots, \lambda_n^* > 0$ son los números de Afriat asociados a este conjunto de datos de demanda, entonces

$$Sn_{\max} \leq \text{Max}[-\lambda_j^* \bar{p}_j^* (\bar{e}_i - \bar{e}_j)]$$

donde λ_j^* son las soluciones óptimas de las desigualdades de Afriat cuando los datos no presentan ningún tipo de error de medida, \bar{p}_j^* los vectores de precios sin errores de medida y \bar{e}_j es el vector de los errores de medida definido por $\bar{x}_j = \bar{x}_j^* + \bar{e}_j$ para toda observación j . Si los errores son conocidos se puede contrastar fácilmente si los datos observados (con errores) satisfacen GARP. Para ello, se generaría en primer lugar un sistema de demanda para, a continuación, introducir los errores en las cantidades demandadas y resolver el problema de programación lineal (2.38)

¹⁴⁰Nótese que si para todo par de observaciones i, j se tiene $S_n^{ij} = 0$, entonces la función objetivo Z es igual a cero y, en este caso, los datos observados, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, satisfacen GARP. En caso contrario; es decir, si existe un $S_n^{ij} > 0$, los datos serían inconsistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Nótese que mientras que el procedimiento de Varian (1982) cuenta el número de violaciones, la magnitud de cualquier variable holgura no negativa S_n^{ij} proporciona información sobre el grado de la violación del conjunto de datos con la hipótesis del comportamiento maximizador de la utilidad.

¹⁴¹Como se ha señalado en repetidas ocasiones a lo largo de esta memoria, aunque los datos hubiesen podido haber sido generados por un agente maximizador de la utilidad, los datos se observan habitualmente con algún error de medida.

para calcular el valor del estadístico SnMax buscado. Fleissig y Whitney (2005) muestran que la proporción de conjuntos de datos con SnMax = 0 disminuye¹⁴² cuando aumentan los errores de medida. Fleisig y Whitney (2003) proponen comparar el valor de SnMax observado con una distribución simulada para $Max[-\lambda_j^* \bar{p}_j(\bar{e}_i - \bar{e}_j)]$. El econométra genera conjuntos de errores de medida aleatorios para simular esta distribución. Así, si el valor del estadístico SnMax es menor que el percentil α , se rechaza la hipótesis nula de la maximización de la utilidad.

En las aplicaciones empíricas el econométra no conoce la existencia de errores en los datos. Entonces si observa violaciones GARP con SnMax > 0, ¿cómo puede determinar si las violaciones GARP son el resultado de un error aleatorio y/o de naturaleza estocástica, o de algún otro tipo? Fleissig y Whitney (2005) desarrollan¹⁴³ dos procedimientos no paramétricos para contrastar la significatividad estadística de las violaciones (del axioma generalizado) de la preferencia revelada detectadas por los test estándar no estocásticos de las desigualdades de Afriat (1967) y del axioma GARP. Para ello, evalúan los tests utilizando conjuntos de datos simulados consistentes con la maximización de la utilidad a los que les añaden un error de medida en las cantidades demandadas. Estos autores plantean el siguiente contraste de hipótesis unilateral para contrastar la significatividad estadística de las violaciones GARP:

$$\begin{aligned} H_0 : \text{Snmax}^* &= 0 && \text{(los datos satisfacen GARP)} \\ H_1 : \text{Snmax}^* &> 0 && \text{(los datos no satisfacen GARP)} \end{aligned}$$

donde Snmax* designa la solución de las desigualdades de Afriat cuando los datos están observados sin ningún tipo de error. La significatividad estadística del contraste de hipótesis anterior nos permitirá cuantificar la magnitud de las inconsistencias presentes en los datos. Para obtener una distribución empírica (distribución muestral) de este estadístico¹⁴⁴ Snmax, Fleissig y Whitney (2003) utilizan técnicas bootstrapping similares a las empleadas por Gross (1995) y por Fleissig y Whitney (2003) en estudios anteriores¹⁴⁵. El procedimiento es el siguiente: en primer lugar se tratan las cantidades observadas como los verdaderos valores, a continuación se añaden los errores de medida y, finalmente, utilizando el procedimiento de Varian, se comprueba si SnMax es cero (no violaciones) o positivo (una o más violaciones). Repitiendo el proceso nume-

¹⁴²Sin embargo, tras la realización del correspondiente experimento de Monte Carlo, estos autores señalan (2005, pág. 358) que los errores de medida no siempre causan violaciones GARP.

¹⁴³Estos autores muestran cómo las variables holgura del problema de programación lineal original de Diewert (1973) permiten evaluar la significatividad estadística de las violaciones del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada.

¹⁴⁴Un estadístico es una transformación de una variable aleatoria multidimensional (X_1, \dots, X_n) y, por tanto, será una variable aleatoria que hereda una distribución en el muestreo.

¹⁴⁵La técnica del bootstrapping se usa para obtener una descripción de las propiedades en el muestreo de los estimadores empíricos usando la muestra $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de datos propiamente, más que amplios resultados teóricos. Supongamos que $\hat{\theta}_n$ es un estimador de un vector de parámetros θ basado en una muestra. Una aproximación a las propiedades del estadístico $\hat{\theta}_n$ se puede obtener estudiando una muestra de estimadores de la técnica del bootstrapping $\hat{\theta}_n(b)_m, b = 1, \dots, B$, obtenidos con muestras de m observaciones, con reemplazamiento, de X y volviendo a calcular $\hat{\theta}_n$ en cada muestra. Esta técnica fue desarrollada por Efron (1979, 1982) y, en los últimos años, ha ido apareciendo cada vez con una mayor frecuencia en la literatura de la econometría aplicada. Véase Veall (1987, 1992), Vinod (1993), Vinod y Raj (1994).

rosas veces es posible construir un intervalo de confianza para el nivel de confianza del $(1 - \alpha \%)$ desde los percentiles de la distribución empírica. El econométra aceptará la hipótesis nula si el porcentaje de los conjuntos de datos que son consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad es inferior al $\alpha \%$. Las ventajas de este procedimiento es que computacionalmente es bastante simple porque utiliza el algoritmo de Varian (que es eficiente) y se pueden realizar numerosas simulaciones que para asegurar la convergencia a la función generadora de los datos.

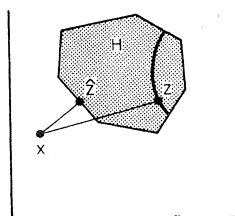


Figura 2.32: Test no paramétrico.

Utilizando una aproximación diferente, Varian (1985) ofrece un método que es, en principio, capaz de cuantificar la magnitud de la violación desde el modelo de optimización. Este procedimiento puede ser interpretado en términos del marco estadístico tradicional del contraste de hipótesis. Se ha mostrado en Varian (1982) que el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada (GARP) es una condición necesaria y suficiente para que el comportamiento observado del consumidor sea compatible con el comportamiento de la minimización del gasto¹⁴⁶. Si los datos no satisfacen GARP, ¿a qué puede ser debido? La respuesta parece depender de la magnitud de la violación. Si los datos violan GARP por solamente una cantidad pequeña, podríamos estar tentados a atribuir esta violación a un error de medida y aceptar la hipótesis de la

maximización de la utilidad. El problema aquí es ofrecer un contenido específico a las palabras “magnitud de la violación” y si es posible expresar esta discusión en el lenguaje formal de los habituales contrastes de hipótesis estadísticos. Supóngase que la demanda observada para el factor k en la observación i , x_{ik} , está relacionada con el verdadero factor de demanda de la siguiente manera:

$$x_{ik} = z_{ik} + \epsilon_{ik} \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, l$$

donde ϵ_{ik} es un término aleatorio. Supóngase¹⁴⁷, además, que $\{\epsilon_i : i = 1, \dots, n\}$ es una secuencia de variables aleatorias normales de media cero y de varianza σ^2 independientes e idénticamente distribuidas. La hipótesis nula viene expresada como:

$$H_0 : \text{los datos } (\bar{p}_i, \bar{x}_i) \text{ satisfacen GARP}$$

¹⁴⁶Supongamos que se tienen un conjunto de observaciones sobre los precios de los factores \bar{p}_i y las demandas de los factores \bar{x}_i para un consumidor particular. Si existen n observaciones, esta condición exige que se verifiquen n^2 desigualdades: $\phi_j \leq \phi_i + \lambda_i \bar{p}_i (\bar{x}_j - \bar{x}_i)$ para $i, j = 1, \dots, n$. Esta condición es fácil de contrastar, pero algo más difícil de interpretar.

¹⁴⁷Por supuesto que son posibles otras especificaciones estocásticas, pero esta elección sería un inconveniente adicional para nuestro análisis.

Será conveniente pensar en la matriz de observaciones (x_{ik}) como en un vector con ln componentes que será denotado por X . Aquí, el ortante no negativo de \mathbb{R}^{ln} es el conjunto de todos los posibles datos. El conjunto de los datos consistentes con la hipótesis nula es entonces ese subconjunto H de \mathbb{R}^{ln} que satisface el axioma GARP. Las elecciones observadas, X , no es un elemento de este conjunto; pero bajo la hipótesis nula, las elecciones verdaderas Z si son un elemento de H . La Figura 2.32, que aparece ilustrada en Varian (1985), describe esta situación. Entonces, ¿cómo podemos contrastar de manera conveniente la hipótesis nula? Existen varias aproximaciones que podrían ser consideradas. Si disponemos de observaciones sobre las elecciones de un consumidor \bar{x}_i cuando los precios son \bar{p}_i , una condición necesaria y suficiente para que los datos sean consistentes con el comportamiento optimizador es que existan $2n$ números ϕ_1, \dots, ϕ_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ satisfaciendo las desigualdades de Afriat:

$$\phi_i \leq \phi_j + \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j) \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.39)$$

Así, H será la región de \mathbb{R}^{nk} donde el sistema (2.39) es factible.

Merece la pena reseñar que el cómputo de H es bastante difícil desde el punto de vista computacional; más aún que resolver la integral múltiple. Una vez determinado H , como el vector Z se distribuye según una distribución normal multidimensional con función de densidad $f(Z)$ podríamos integrar la función de densidad $f(Z)$ sobre H para calcular la probabilidad de que H_0 se cumpla. Sin embargo, este procedimiento no se rige por el espíritu de la inferencia estadística clásica, ya que generalmente se suele considerar la distribución de los datos observados supuesto H_0 cierta, no la distribución de los datos verdaderos dadas las observaciones. En consecuencia, para contrastar la hipótesis nula, H_0 , lo natural será examinar el tamaño de las diferencias entre lo que es observado y lo que es esperado. Es decir, si suponemos que se pudieran observar (de algún modo) los datos verdaderos (z_{ik}) , se puede demostrar que bajo la hipótesis nula H_0 , el estadístico

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (z_{ik} - x_{ik})^2 / \sigma^2$$

sigue una distribución chi-cuadrado. Así que es posible encontrar un p-valor¹⁴⁸ o valor crítico C_α para cualquier nivel de significación α deseado. Es claro que si $T > C_\alpha$, rechazaríamos la hipótesis nula. El problema es, por supuesto, que el estadístico T no es observable. Sin embargo, se puede calcular una cota inferior observable de T que nos permitirá aplicar el procedimiento anterior. Consideremos el siguiente problema de programación cuadrática

$$S = \min \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\zeta_{ik} - x_{ik})^2 / \sigma^2$$

¹⁴⁸El menor nivel de significación al que puede aceptarse una hipótesis nula se denomina valor crítico o p-valor del contraste

sujeto a

$$\phi_i \leq \phi_j + \lambda_j \bar{p}_j (\zeta_i - \zeta_j) \quad i, j = 1, \dots, n$$

Bajo la hipótesis nula; es decir, cuando la hipótesis nula es cierta, existe un conjunto de variables $(\lambda_j, \phi_j, \zeta_j)$ que satisface las restricciones; así que la solución al anterior problema de minimización será una cota apropiada al deseado test estadístico. Así, rechazaremos la hipótesis nula si $S > C_\alpha$ cuando estemos convencidos de que también $T > C_\alpha$. De lo anterior se desprende¹⁴⁹ que el Error del Tipo I será menor que α . En este sentido, el test es bastante conservativo. Obsérvese que la clave del procedimiento anterior es utilizar el problema de programación cuadrática para derivar una cota sobre una variable no observable¹⁵⁰.

Una ventaja posterior de este método es que actualmente construye la perturbación de los datos que satisfacen la minimización del gasto. Existe una buena interpretación geométrica del test propuesto que se describe en la Figura 2.32. Aquí la distancia euclídea entre X y Z es una suma de cuadrados de los residuos y está, obviamente, acotada por la distancia mínima de X a H . Sin embargo, y a pesar de estas observaciones, existen diferentes características desagradables en el test anterior. La mayor dificultad radica en el hecho de que se debe especificar una varianza conocida, o bien utilizar un estimador del error de la varianza; en cualquier caso esto es mucho menos cuestionable que la práctica habitual de sumergir el modelo en una determinada forma funcional específica¹⁵¹. Como antes, sea C_α el p-valor o valor crítico para el test propuesto y S el valor de nuestra función objetivo. Entonces $S = R/\sigma^2$, donde σ^2 es la 'verdadera' varianza del término error y R la suma de los cuadrados de los residuos. Nosotros estamos proponiendo rechazar la hipótesis nula cuando $S > C_\alpha$; esto es, cuando $\sigma^2 < R/C_\alpha$, siendo $\bar{\sigma}^2 = R/C_\alpha$ el p-valor o valor crítico de σ^2 y $\bar{\sigma}$ su raíz cuadrada positiva. Nótese que $\bar{\sigma}$ es fácilmente calculable una vez que se ha hallado la solución al problema de programación cuadrática. Si $\bar{\sigma}$ es mucho más pequeño que nuestras opiniones a priori relativas a la precisión con la cual estos datos han sido medidos, podemos aceptar la hipótesis de la maximización de la utilidad.

Observación 2.5.1 *Otra aproximación a esta clase de tests está basada en la estimación máximo verosímil restringida. Dadas algunas observaciones (\bar{x}_{ik}) y la especificación de un término error, podemos escribir la función de verosimilitud*

$$\log L = mn \log(2\pi)/2 - mn \log(\sigma) - \sum \sum (z_{ik} - x_{ik})^2 / 2\sigma^2$$

¹⁴⁹Es el error que se puede cometer al rechazar la hipótesis nula H_0 cuando ésta es cierta; es decir, $p(H_1/H_0 \text{ cierta}) = \alpha$.

¹⁵⁰Según Varian (1985, pág. 483, nota al pie núm. 2) esta idea ya fue utilizada con anterioridad en la literatura estadística, en el proceso de obtención de las cotas inferior y superior del estadístico de Durbin-Watson.

¹⁵¹Conviene señalar que la estimación habitual de los errores de la varianza son correctas sólo desde la hipótesis de una determinada forma funcional, que a menudo se elige de manera totalmente arbitraria. Nótese que incluso si no somos capaces de estimar el error de la varianza como en los modelos paramétricos, todavía podemos derivar cotas sobre el error de la varianza que es necesario para rechazar la hipótesis sostenida del comportamiento maximizador.

donde (z_{ik}) y σ^2 son parámetros a estimar. Bajo la hipótesis nula, $Z = (z_{ik})$ es un elemento de H , así que es posible considerar la estimación máximo verosímil restringida derivada de la maximización. El estimador asociado para σ^2 es:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\hat{z}_{ik} - x_{ik})^2 / mn$$

Así los “valores fijos” (\hat{z}_{ik}) son un estimador máximo verosímil de los valores verdaderos desconocidos. Sin embargo, Varian no es capaz de afirmar si es posible establecer propiedades útiles para estos estimadores. Después de todo estaremos estimando más parámetros que observaciones disponibles. Supongamos, finalmente, que disponemos de alguna forma paramétrica para la tecnología o preferencias de un individuo. A partir de la tecnología o de las preferencias de un individuo podemos derivar formas funcionales para la demanda de factores o sistemas de demanda. Entonces, bajo la hipótesis nula del comportamiento optimizador los verdaderos datos verificarán la relación paramétrica:

$$z_{ik} = f_k(p_i, x_k, \beta) \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$$

si existen los parámetros desconocidos, el conjunto de todos los Z que satisfacen esta relación será generalmente una variable aleatoria b -dimensional en \mathbb{R}^{ln} que denotaremos por M . Como Z satisface por hipótesis las condiciones derivadas de la optimización, la variedad M debe ser un subconjunto de H . La aproximación tradicional a la estimación paramétrica con restricciones envuelve la maximización de la función de verosimilitud sobre la variedad M . Esto simplemente significa que nosotros encontramos algunos valores (z_{ik}) en M que maximizan la función de verosimilitud sobre la variedad M . Los valores asociados de β son los estimadores máximo verosímiles de los parámetros desconocidos. El estimador máximo verosímil para σ^2 es justamente la suma de los residuos al cuadrado dividido por ln . Estos estimadores son análogos a los obtenidos mediante la aproximación no paramétrica anterior. La única diferencia radica en que mientras antes maximizamos la verosimilitud sobre una variable aleatoria mn -dimensional H , ahora se hace lo propio sobre una variedad b -dimensional M . A pesar de esta similitud las propiedades estadísticas de los estimadores pueden ser bastante diferentes.

Tsur (1989) –inspirándose en los trabajos de Varian– desarrolla un test estadístico basado en la aproximación de eficiencia planteada por Afriat (1972) y Varian (1987) que permite contrastar la significatividad estadística de las violaciones del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada. Supongamos que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda inconsistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad que presenta errores de medida o de carácter estocástico y, supongamos, además, que $\{(\bar{p}_t^*, \bar{x}_t^*)\}_{t=1}^n$ es la verdadera serie finita de datos de demanda generada desde un comportamiento optimizador tal que $x_{ij} = x_{ij}^* v_{ij}$ y $p_{ij} = p_{ij}^* w_{ij}$ para todo bien i y situación presupuestaria j , donde $V \equiv (v_{ij}) \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$ y $W \equiv (w_{ij}) \in \mathcal{M}_{k \times n}(\mathbb{R})$ son n variables aleatorias k -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidas según una distribución logarítmico-normal de parámetros $0, \sigma_v$ y $0, \sigma_w$, respectivamente.

Para todo $\rho > 0$, se considera $\Gamma_n(\rho) = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^n : \sum_{t=1}^n [u_t - c_t]^2/n \leq \rho\}$, donde $c_t = \log(\bar{p}_t \bar{x}_t)$. Nótese que para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ se cumple:

- (i) si $\Gamma_n(\rho')$ satisface $GARP(\bar{e})$, entonces para todo $\rho^* > \rho'$ es cierto que $\Gamma_n(\rho^*)$ satisface $GARP(\bar{e})$.
- (ii) si $\Gamma_n(\rho')$ no satisface $GARP(\bar{e})$ entonces $\Gamma_n(\rho^*)$ no satisface $GARP(\bar{e})$, para todo $\rho^* \leq \rho'$.

Por otra parte, como para cada n-tupla de números reales $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ del n-cubo unidad C_n se le puede asignar un vector $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi_j = \exp(u_j - c_j)$ para todo j , podemos ofrecer la siguiente definición¹⁵².

Definición 2.5.1 $\Gamma_n(\rho)$ satisface $GARP(\bar{e})$ si existe un $\bar{u} \in \Gamma_n(\rho)$ tal que la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $GARP(\bar{e})$.

Sea $\bar{\varepsilon}$ una variable aleatoria n-dimensional cuyo término general ε_t definido por $\varepsilon_t = \log(\frac{\bar{p}_t \bar{x}_t}{\bar{p}_t^* \bar{x}_t^*})$ es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de parámetros 0 y $\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_w^2$ y sea $\rho_n = \min\{\rho : \Gamma_n(\rho) \text{ satisface } GARP(\bar{e})\}$. A partir de la definición anterior, se puede determinar la magnitud de los errores de medida o de naturaleza estocástica asociados a la serie finita de datos de demanda y colegir si las violaciones GARP están ocasionadas por la existencia de errores de medida o de naturaleza estocástica. En efecto, nótese que $\Gamma_n(s_n^2)$ satisface $GARP(\bar{e})$ si $\rho_n \leq s_n^2 = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2/n$ [v. Tsur (1989, pág. 361-362)]. En este caso, los datos satisfacen GARP de manera estructural y, por tanto, las inconsistencias están ocasionadas por la existencia de pequeños errores de medida o de naturaleza estocástica. En vista de lo anterior, se puede plantear el siguiente contraste de hipótesis:

$H_0 : \rho_n \leq s_n^2$ “La estructura verdadera del conjunto de datos satisface GARP”.

$H_1 : \rho_n > s_n^2$ “La estructura verdadera del conjunto de datos viola GARP”.

Para contrastar si la violación GARP está ocasionada por la existencia de errores de medida o de naturaleza estocástica, Tsur (1989, pág. 361) considera la hipótesis simple $H_{00} : \rho_n = s_n^2$ que está claramente contenida en H_0 . El estadístico $\bar{\sigma} = \frac{n\hat{\rho}_n}{\chi_n^2(\alpha)}$, donde $\hat{\rho}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(\varepsilon_t)^2$ y $\chi_n^2(\alpha)$ es tal que $Pr(\chi_n^2 \geq \chi_n^2(\alpha)) = \alpha$, permite (para cualquier nivel de significación α) contrastar si los datos proceden o no de una conducta optimizadora de un individuo. Al nivel de significación α se rechaza H_0 si $\hat{\sigma}^2 < \bar{\sigma}^2$, donde $\hat{\sigma}^2$ designa a la cuasi-varianza muestral de σ^2 . Cuando se conoce σ^2 a priori, se rechazará H_0 (al nivel de significación $\alpha\%$) si $n\hat{\rho}_n/\sigma^2 < \chi_n^2(\alpha)$. Nótese, en primer lugar, que rechazar H_{00} en favor de la hipótesis alternativa $\rho_n > s_n^2$ implica rechazar

¹⁵²Para todo $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ existe un vector-índice $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ en el n-cubo estándar unidad C_n tal que $u_{*j} = e_j c_{*j}$, donde u_{*j} designa al gasto asociado al conjunto presupuestario perturbado por e_j en la situación presupuestaria j-ésima y c_{*j} representa la componente j-ésima del vector de gasto; esto es, designa al gasto realizado por un consumidor en la situación presupuestaria j-ésima. Así, si $u_j = \ln(u_{*j})$ y $c_j = \ln(c_{*j})$ para cada j , es cierto que $\xi_j = \exp(u_j - c_j)$.

cualquier otra hipótesis simple contenida en H_0 . En segundo lugar, bajo la hipótesis nula H_{00} es cierto que $n\rho_n \sim \sigma^2\chi_n^2$.

En virtud del procedimiento anterior, para cada conjunto de niveles de eficiencia $(\theta_t)_{t=1}^n$ tal que la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface $\text{GARP}(\bar{\theta})$ es posible construir un estadístico $\hat{\theta}_n$ definido por $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(\theta_t)^2$ de tal modo que se rechaza H_0 (al nivel de significación α) si $n\hat{\rho}_n/\sigma^2 < \chi_n^2(\alpha)$, supuesto conocido σ^2 a priori. Por otra parte, es claro que encontrar un ρ_n tal que $\rho_n = \min\{\rho : \Gamma_n(\rho) \text{ satisface } \text{GARP}(\bar{\epsilon})\}$ equivale a encontrar un conjunto de niveles de eficiencia $(\xi_t)_{t=1}^n$ de máxima norma y, como además es cierto que la verdadera estructura de la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface GARP si y solamente si $\rho_n > s_n^2$, puede ocurrir que $n\hat{\rho}_n/\sigma^2 > \chi_n^2(\alpha)$ y, sin embargo, que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ verifique GARP de manera estructural; esto es, que la hipótesis nula sea cierta. Esto solo sucede si el conjunto de niveles de eficiencia de Varian, $(i_t)_{t=1}^n$, no es la “perturbación mínima” y, además, somos capaces de encontrar un vector-índice $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ en el cubo unidad C_n de máxima norma para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ tal que $n\hat{\xi}_n/\sigma^2 \leq \chi_n^2(\alpha)$, donde $\hat{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(\xi_t)^2$.

A partir de las estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, v) y (\mathcal{F}, ϑ) , podemos construir para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ inconsistente con GARP dos estadísticos $\bar{\sigma}_v^2$ y $\bar{\sigma}_\vartheta^2$ definidos por:

$$\bar{\sigma}_v^2 = \frac{n\hat{\xi}_n}{\chi_n^2(\alpha)} \quad \text{y} \quad \bar{\sigma}_\vartheta^2 = \frac{n\hat{\phi}_n}{\chi_n^2(\alpha)}, \quad (2.40)$$

Estos estadísticos nos permiten contrastar la significatividad estadística de una violación del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada, donde

$$\hat{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(v_t)^2 \quad \text{y} \quad \hat{\phi}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(\vartheta_t)^2, \quad (2.41)$$

Es fácil comprobar que $\hat{\xi}_n, \hat{\phi}_n \leq \hat{\rho}_n$, para toda serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. En consecuencia, los estadísticos $\bar{\sigma}_v^2$ y $\bar{\sigma}_\vartheta^2$ son en teoría más eficientes que $\bar{\sigma}^2$ y nos permitirán detectar casos de violaciones significativas del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada que no es capaz de detectar el procedimiento de Tsur.

A continuación, analizaremos la significatividad estadística de las violaciones GARP mediante la elaboración de un modelo de microsimulación¹⁵³. En este experimento de Monte Carlo mostraremos como el test de Tsur establece en diferentes situaciones que la violación GARP es

¹⁵³Los modelos de microsimulación son instrumentos de análisis económico que permiten anticipar (análisis ex-ante) y estimar los efectos que pueden tener los cambios en el diseño y en el modo de ejecución de la política económica mediante la realización de experimentos de Monte Carlo y simulaciones cuyos resultados pudieran extrapolarse a poblaciones más amplias. Para más detalles, véase el monográfico núm. 68 de *Cuadernos Económicos del I.C.E.*, el cual es un compendio de métodos que se utilizan para evaluar ex-ante los efectos de eventuales políticas y que permite ofrecer una visión general de la utilización de las técnicas de simulación en la resolución de una gran diversidad de problemas económicos que son susceptibles de ser resueltos con estas técnicas.

estructural; mientras que si utilizamos nuestros índices de eficiencia concluimos que la verdadera estructura de datos satisface GARP y que los errores se deben a la existencia de pequeños errores de medida o de naturaleza estocástica.

En el diseño de todo proceso de microsimulación consistente con la teoría neoclásica de la demanda disponemos de dos alternativas posibles. La primera alternativa consiste en especificar directamente la forma funcional de las funciones de demanda Marshallianas derivadas de las condiciones de primer orden de la maximización de la utilidad. Una segunda vía de obtención de sistemas de demanda consiste en utilizar aproximaciones a las funciones de utilidad (directa o indirecta) o de gasto en lugar de formas algebraicas específicas. En principio, los únicos requerimientos exigidos a estas formas funcionales son que, en primer lugar, deben poseer suficientes parámetros como para que puedan considerarse una aproximación adecuada a la verdadera función de utilidad o gasto; y, en segundo lugar, que dicha aproximación propuesta debe ser consistente con la maximización de la utilidad¹⁵⁴. Este modo de proceder ha dado lugar al uso de las denominadas formas funcionales flexibles, entre las que cabe destacar las que proceden de las aproximaciones de Taylor como el modelo TRANSLOG, propuesto por Christensen, Jorgenson y Lau (1975), y el modelo Almost Ideal Demand System (AIDS), propuesto por Deaton (1980).

En este experimento de Monte Carlo mostraremos cómo el test planteado por Tsur rechaza, en algunas ocasiones, GARP cuando en realidad las violaciones GARP no son de carácter estructural sino que se deben a la existencia de pequeños errores de medida o de naturaleza estocástica. Este experimento de Monte Carlo nos permitirá, además, colegir que en la mayoría de las situaciones prácticas los conjuntos de niveles de eficiencia $(v_t)_{t=1}^n$ y $(\vartheta_t)_{t=1}^n$ asociados a las α^* -estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, v) y (\mathcal{F}, ϑ) , respectivamente, describen mejor el comportamiento de la demanda que el conjunto de niveles de eficiencia, $(i_t)_{t=1}^n$, de Varian. Para poder llevar a cabo el experimento de Monte Carlo se ha realizado el diseño de un software `PROGRAM MONTECARLO EXPERIMENT GARP.F90` en el lenguaje de programación de alto nivel FORTRAN 90. En este software el usuario tiene la posibilidad de elegir qué forma funcional de la demanda (con y sin errores estocásticos o de medida) desea utilizar en la simulación. Las opciones que el programa le facilita son las siguientes: (1) RANDOM COBB-DOUGLAS DEMAND; (2) RANDOM CES UTILITY DEMAND; (3) RANDOM EXPENDITURE LINEAR DEMAND; (4) RANDOM CONSTANT ELASTICITY DEMAND; (5) RANDOM COBB-DOUGLAS DEMAND WITH ERROR TERM; (6) RANDOM CES UTILITY DEMAND WITH ERROR TERM; (7) RANDOM EXPENDITURE LINEAR DEMAND WITH ERROR TERM y (8) RANDOM CONSTANT ELASTICITY DEMAND WITH ERROR TERM. Una vez seleccionada la correspondiente forma funcional de la demanda, se generan internamente en el ordenador una sucesión de números aleatorios uniforme-

¹⁵⁴Un requisito es que dicha aproximación satisfaga las condiciones de integrabilidad. Tal como derivaron Hurwicz y Uzawa (1971), es necesario (para que se satisfagan las condiciones necesarias y suficientes) que la matriz de Slutsky sea simétrica y semidefinida negativa. Esta exigencia debe complementarse con unas buenas propiedades de la familia de aproximaciones utilizada.

mente distribuidos, mediante un generador (RNGs) de (pseudo) números aleatorios¹⁵⁵. El objetivo de los generadores de (pseudo) números aleatorios (RNGs) será implementar una imitación del concepto matemático de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en el intervalo $(0,1)$. El método más utilizado en los estudios de Monte Carlo para simular (pseudo) números aleatorios está basado en la relación de recurrencia determinística¹⁵⁶

$$z_i = (a_1 z_{i-1} + \dots + a_k z_{i-k} + c) \bmod(m), \quad u_i = z_i/m \text{ para todo } i \geq 0$$

donde el modulo m y el orden k de la ecuación de recurrencia son números enteros y los coeficientes a_i 's pertenecen a $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$, si bien se decidió utilizar el generador de pseudo números aleatorios **Mersenne-Twister** por poseer unas características idóneas para simular una sucesión de números aleatorios, la cual permita imitar una sucesión de extracciones independientes realizadas desde una distribución $U(0,1)$. Este generador de pseudo números aleatorios, que posee un período de $2^{19937} - 1$, ha sido diseñado por Matsumoto, M. y T. Nishimura (1998). En el experimento de Monte Carlo se utilizó el modulo **MODULE MERSENNE TWISTER GENERATOR 19937** cuyo código en FORTRAN 90 fue facilitado por los autores para fines académicos y de investigación al ponerlo de libre acceso en su web para estos fines.

Observación 2.5.2 *Los softwares comerciales utilizan los generadores de congruencia lineal (LCG) y los generadores recursivos múltiples (MRG) como procesos de generación de datos de (pseudo) números aleatorios. L'Ecuyer (1998, 1999) emplea diferentes tests estadísticos empíricos para contrastar la hipótesis nula (H_0 : "los u_i son i.i.d $U(0,1)$ ") y poder realizar así una evaluación de los principales RNGs comerciales (Excel, Java, Visual Basic, LCG16807, etc.). Este autor encuentra que los RNGs de los softwares comerciales son problemáticos y, por tanto, sugiere utilizar el generador de (pseudo) números aleatorios¹⁵⁷ **MRG32k3a** –propuesto por L'Ecuyer (1999)– o el generador **Mersenne-Twister** –propuesto por Matsumoto y Nishimura (1998)– que posee un período de $2^{19937} - 1$. Como consecuencia de ello, se optó por utilizar (en los diferentes experimentos de Monte Carlo de esta memoria) el generador de **Mersenne-Twister**, como generador de (pseudo) números aleatorios de una distribución $U(0,1)$. Para más detalles sobre los procesos de generación de datos, sobre la generación de (pseudo) números aleatorios que siguen una distribución uniforme o sobre la generación de (pseudo) números aleatorios (distribución no uniforme) véanse los siguientes conceptos del glosario: generador uniforme de (pseudo) números aleatorios, generador de números aleatorios (distribuciones no*

¹⁵⁵Es ampliamente sabido que existen numerosos generadores de (pseudo) números aleatorios que permiten simular secuencias de valores que simulan una variable aleatoria $U(0,1)$, entre los que cabe destacar a los siguientes: generador de congruencias aditivas, generador múltiple recursivo, generador congruencial multiplicativo, generador congruencial lineal, generador de Fibonacci, generador de desplazamiento de bits, etc.

¹⁵⁶Nótese que si se eligen de manera adecuada los parámetros a , c y m y su valor inicial o semilla Z_0 , la sucesión $\{u_i\}_{i \geq 0}$ de pseudo números aleatorios generados a partir del RNGs congruencial lineal $z_i = (az_{i-1} + c) \bmod m$, $u_i = z_i/m$ para todo $i \geq 0$ se comporta como una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $U(0,1)$.

¹⁵⁷El generador de (pseudo) números aleatorios **MRG32k3a** ha sido propuesto por L'Ecuyer (1999). Combina dos MRGs de orden 3 y su período está próximo a 2^{191} .

uniformes), generador congruencial lineal, generador múltiple recursivo, generador de desplazamiento de bits, etc.

Como cualquier generador de (pseudo) números aleatorios requiere disponer de un valor inicial o semilla (**seed**) –a partir del cual se genera la secuencia de (pseudo) números aleatorios–, el programa realiza una llamada **CALL** al subprograma **SUBROUTINE OBTENER SEED** para obtener el valor inicial o semilla de nuestro generador de pseudo números aleatorios que estamos utilizando en el proceso de simulación. Este valor inicial es distinto de cada proceso y depende del tiempo actual de la compiladora y que sea ligeramente diferente para cada milésima de segundo. El tiempo actual lo obtenemos a partir de una llamada a un subprograma **CALL SUBROUTINE DATE AND TIME** que nos proporciona la hora de la computadora¹⁵⁸. De esta manera estamos considerando un valor inicial o semilla (**seed**) que depende del tiempo actual de la compiladora y que es ligeramente diferente para cada milésima de segundo. Una vez obtenido el (**seed**), se procede a llamar (varias veces) a la subrutina que genera números aleatorios con el objeto de procesar otro diferente **seed** o valor inicial; en nuestro caso, **MODULE MERSENNE TWISTER GENERATOR 19937**.

Una vez obtenida una gran secuencia $\{u_i\}_{i \geq 0}$ de valores $U(0, 1)$ es el momento de transformarlos en secuencias de valores que simulan ser cadenas de valores extraídos de una distribución de probabilidad especificada, para poder llevar a cabo el proceso de microsimulación deseado. Para cada simulación efectuado en nuestro experimento de Monte Carlo el programa calcula –mediante una llamada a las subrutinas **SUBROUTINE COBB DOUGLAS**, **SUBROUTINE CES UTILITY DEMAND**, **SUBROUTINE EXPENDITURE LINEAR DEMAND** o **SUBROUTINE ALMOST IDEAL DEMAND SYSTEM**– las cantidades demandadas (en virtud de la opción seleccionada en la interfaz del programa) para cada una de las situaciones presupuestarias consideradas. Supongamos, por ejemplo, que hemos decidido utilizar la función de utilidad de demanda Cobb-Douglas para simular las cantidades demandadas (sin ningún tipo de error) en nuestro experimento de Monte Carlo. La subrutina **SUBROUTINE COBB DOUGLAS** genera la siguiente función de demanda de tipo Cobb-Douglas:

$$U(\bar{x}) = \prod_{i=1}^8 x_i^{\alpha_i} \text{ con } \sum_{i=1}^8 \alpha_i = 1$$

la cual proporciona funciones de demanda Marshallianas

$$x_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \left(\frac{m_j}{p_{ij}} \right) \text{ para } i = 1, \dots, 8; j = 1, \dots, n$$

¹⁵⁸Nótese que si lo que queremos es realizar una comparativa entre diferentes métodos estadísticos a partir de diferentes simulaciones, la mejor opción sería fijar de antemano el valor inicial o semilla a partir del cual se genera la secuencia de los pseudonúmeros aleatorios utilizados en la experimentación por el método de Monte Carlo.

donde los α_{ij} constituyen los elementos de una matriz aleatoria¹⁵⁹ de tamaño $n = 20$ por $k = 8$ (20 situaciones presupuestarias y 8 bienes) cuyos elementos siguen una distribución uniforme $U(0, 1)$ y, además, $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\}$. Los precios fueron simulados inicialmente a partir de una matriz de Slutsky para aumentar la sensibilidad del test GARP¹⁶⁰. En este experimento de Monte Carlo se han introducido los errores de medida en los precios y cantidades demandadas a partir de una distribución logarítmico-normal. Los errores estocásticos en las cantidades demandadas se introducen multiplicando para cada situación presupuestaria j -ésima ($j = 1, \dots, n$) las cestas demandadas maximizadoras de la utilidad (x_{ij} para $i = 1, \dots, n - 1$) por v_{ij} . Esto es equivalente a suponer que el consumidor maximiza la función de utilidad

$$U(x) = \prod_{i=1}^7 x_i^{\alpha_i(1+\epsilon_i)} \cdot x_8^{\alpha_8^*}$$

donde $\alpha_8^* = 1 - \sum_{j=1}^7 \alpha_j(1 + \epsilon_j)$. Por otra parte, los errores estocásticos en los precios se obtienen multiplicando los precios de cada uno de los bienes (en cada una de las situaciones presupuestarias) de la matriz de Slutsky por una cantidad estocástica que sigue una distribución lognormal. Esto es, los precios y cantidades demandadas con los términos error han sido introducidos de manera multiplicativa de tal modo que $x_{ij} = x_{ij}^* v_{ij}$ y $p_{ij} = p_{ij}^* w_{ij}$, para todo bien i y situación presupuestaria j . Para obtener las distribuciones de errores de los precios y de las cantidades demandadas –que se distribuyen según una **log-normal**– simulamos en el subprograma **SUBROUTINE NORMAL 01** una secuencia de valores que siguen una distribución $N(0, 1)$, a partir del algoritmo de Box-Mueller (1958). Nótese que resulta inmediato generar de manera inmediata la distribución lognormal de los errores de las cantidades demandadas y de los precios, a partir de los datos simulados que se distribuyen según una distribución normal. A continuación, el programa calcula la matriz de gasto perturbada $C_{ij} \equiv (c_{ij})$ ($c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j, \forall i, j$) asociada a $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, construye la relación de preferencia revelada R^0 (mediante una llamada al subprograma **SUBROUTINE RELACION P0**), determina la clausura transitiva de R^0 (**SUBROUTINE CLAUSURA TRANSITIVA**) y contrasta GARP, mediante una llamada a la subrutina **SUBROUTINE CHEQUEO GARP**. En caso afirmativo; i.e., si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface el axioma GARP, el algoritmo vuelve al paso 2. En caso contrario, el algoritmo realiza una llamada a las subrutinas **SUBROUTINE VARIAN'S INDEX**, **SUBROUTINE AMP I** y **SUBROUTINE AMP II**, donde se calculan los vectores índice $(v_t)_{t=1}^n, (\vartheta_t)_{t=1}^n$ e $(i_t)_{t=1}^n$ para $\{(\bar{p}_t^*, \bar{x}_t^*)\}_{t=1}^n$. A continuación, construye los valores de los estadísticos $\bar{\sigma}_v^2, \bar{\sigma}_\vartheta^2$ y $\bar{\sigma}^2$ asociados respectivamente a los conjuntos de niveles de eficiencia $(v_t)_{t=1}^n, (\vartheta_t)_{t=1}^n$ e $(i_t)_{t=1}^n$, respectivamente y se realiza (para analizar la significatividad estadística de las violaciones GARP) el correspondiente contraste de hipótesis. Para ello, el programa principal realiza una llamada a los subprogramas **SUBROUTINE INVERSA CHI SQUARED** y **SUBROUTINE CHI SQUARED** que computa la función de distribución de una función

¹⁵⁹Nótese que, para la función de utilidad de tipo Cobb-Douglas, los parámetros “preferenciales” α_{ij} también representan (para cada situación presupuestaria j -ésima) el porcentaje de gasto para cada bien ($p_{ij} x_{ij} / \bar{p}_j \bar{x}_j$).

¹⁶⁰Para cuestiones relacionadas con la sensibilidad y la fiabilidad de los test de la preferencia revelada véase la sección 3.3 de esta memoria.

χ^2 de n grados de libertad¹⁶¹. El procedimiento simula la construcción de una variable aleatoria n -dimensional $\bar{\varepsilon}$ cuyo término general ε_t definido por $\varepsilon_t = \log(\bar{p}_t \bar{x}_t / \bar{p}_t^* \bar{x}_t^*)$ es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de parámetros 0 y $\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_w^2$. Como la introducción de los errores estocásticos está siendo controlada en todo momento en nuestra experimentación de Monte Carlo sabemos en todo momento el valor de la perturbación de los errores el cálculo de su media y de su varianza σ^2 es directo y, en consecuencia, podemos realizar el contraste de hipótesis estadístico¹⁶²

$$\begin{aligned} H_0 : n\hat{\psi}_n/\sigma^2 &< \chi_n^2(\alpha) && \text{Los errores son de medida o de naturaleza estocástica.} \\ H_1 : n\hat{\psi}_n/\sigma^2 &\geq \chi_n^2(\alpha) && \text{Los errores son de carácter estructural.} \end{aligned}$$

para cada estadístico $\hat{\psi}_n = \hat{\rho}_n, \hat{\xi}_n, \hat{\phi}_n$ considerado y para cada nivel de confianza $(1 - \alpha \%)$ con $\alpha = 0.01, \dots, 0.1$. El programa almacena los resultados obtenidos y repite todo el proceso en la siguiente simulación. El proceso anterior se puede resumir como sigue:

1. Simulación de `nsim*comp*n` números aleatorios que se comportan como una sucesión de variables aleatorias independientes¹⁶³ con distribución $U(0,1)$. Esta secuencia de (pseudo) números aleatorios ha sido generada por el generador de (pseudo) números aleatorios de Mersenne-Twister.
2. Simulación por el procedimiento de Slutsky de las matrices aleatorias de precios $\theta \equiv (p_{ij}^*) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ y de gasto $m \equiv (m_j) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ derivadas a partir de una matriz aleatoria $\Omega \equiv (\omega_{ij}) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ formadas por n variables aleatorias k -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidas según una distribución normal tipificada.
3. Simulación de una matriz aleatoria, $\alpha \equiv (\alpha_{ij}) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ formada por n variables aleatorias k -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidas por una uniforme en $(0, 1)$ satisfaciendo:

$$\alpha_{ij} \hookrightarrow U(0, 1), \quad \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\}.$$

¹⁶¹La unidad de programa `SUBROUTINE CHI SQUARED` precisa de una llamada a la función `FUNCTION gammad(x,p)`.

¹⁶²Al estar controlando de antemano la generación de las variables aleatorias conocemos exactamente el valor de σ^2 . Bastará calcular la varianza de la secuencia $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$. Las sentencias `media=sum(epsil)/nnode` y `varianza=sum((epsil-media)**2)/n` determinan para cada simulación el valor exacto de σ^2 , donde `epsil(j)=log(vacoste(j,j))-log(coste(j,j))`, para todo j .

¹⁶³En las `nsim=4500` simulaciones del experimento de Monte Carlo se simulan matrices aleatorias formadas por n variables aleatorias k -dimensionales cuyos elementos son (pseudo) números aleatorios que se comportan como una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $U(0,1)$.

4. Simulación de dos matrices aleatorias $W \equiv (w_{ij})_{ij}$ y $V \equiv (v_{ij})_{ij}$ formadas por n variables aleatorias k -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidas según una distribución lognormal.
5. Generación de las funciones de demanda Marshallianas x_{ij}^* sin ningún error de medida¹⁶⁴. Los datos así generados son consistentes con GARP.
6. Generación de las funciones de demanda Marshallianas con errores de medida. Obtenemos estas funciones de demanda multiplicando x_1, \dots, x_k (las cestas demandadas en este experimento de Monte Carlo constan de 8 componentes) por un número aleatorio v_i que se distribuye según una distribución lognormal de tal modo que

$$x_{ij}(\text{error de medida}) = x_{ij}^* \cdot v_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\}$$

7. Generación de los conjuntos presupuestarios perturbados. Obtenemos la perturbación multiplicando los precios simulados p_1^*, \dots, p_k^* por un número aleatorio que se distribuye según una distribución lognormal de tal modo que

$$p_{ij}(\text{error de medida}) = p_{ij}^* \cdot v_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\}$$

8. Comprobación del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ construir los conjuntos de niveles de eficiencia $(i_t)_{t=1}^n$, $(v_t)_{t=1}^n$ y $(\vartheta_t)_{t=1}^n$ asociados a las estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, i) , (\mathcal{F}, v) y (\mathcal{F}, ϑ) , respectivamente.
9. Contrastar estadísticamente la significatividad de la violación GARP y analizar las relaciones existentes entre las diferentes medidas de eficiencia.
10. Repetir el proceso.

Observación 2.5.3 *Es ampliamente conocido que entre las formas flexibles de la demanda más utilizadas en la microeconomía empírica (microeconometría) destacan las que proceden de aproximaciones de Taylor, de las que destacan las formas Translog, propuesto por Christensen, Jorgenson y Lau (1975), y el modelo Sistema de Demanda Casi Ideal (AIDS) debido a sus buenas propiedades, suficientemente descritas en el trabajo original de Deaton (1980) tales como la flexibilidad, tanto en la respuesta de los precios como de la renta. Si el usuario de la aplicación informática PROGRAM MONTECARLO EXPERIMENT GARP.F90 hubiese decidido generar los datos a partir del modelo Almost Ideal Demand System (AIDS), la única diferencia radica en la llamada CALL (en el paso del algoritmo) a la subrutina SUBROUTINE ALMOST IDEAL DEMAND SYSTEM que permite obtener las cantidades demandadas –para cada situación presupuestaria considerada– generadas por la forma funcional flexible de la demanda del modelo AIDS (Almost Ideal Demand*

¹⁶⁴La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t^*, \bar{x}_t^*)\}_{t=1}^n$ (sin errores) verifica el axioma GARP.

System). Para obtener las funciones de demanda del modelo AIDS partimos de una función de gasto logarítmica:

$$\text{Log } C(u, p^*) = A(p^*) + uB(p^*)$$

donde u es el nivel de utilidad, p el vector de precios y $A(p)$ y $B(p)$ las siguientes funciones de precios:

$$A(p) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^K \alpha_i \ln(p_i^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \gamma_{ij} \ln(p_i^*) \ln(p_j^*)$$

$$B(p^*) = \beta_0 \prod_i p_i^{*\beta_i}$$

de forma que sustituyendo en las ecuaciones anteriores, las proporciones de gasto, w_i , se derivan, aplicando el lema de Hotelling, de las condiciones necesarias de la minimización de la función de coste:

$$\frac{\partial \ln C}{\partial \ln p_i^*} = w_i \quad \forall i = 1, \dots, K$$

por lo que es posible expresar las proporciones de gasto en cada uno de los bienes en función de los precios y del nivel de utilidad. Después de sustituir el nivel de utilidad, u , obtenemos las siguientes ecuaciones de demanda:

$$x_i^* = \frac{m}{p_i^*} \left(\alpha_i + \sum_{k=1}^K \gamma_{ik} \ln(p_k^*) + \beta_i (\ln(m) - P) \right) \quad (2.42)$$

donde p_i^* es el precio del bien i , m es la renta (gasto total) y P es el índice de precios definido como:

$$P = \alpha_0 + \sum_{i=1}^K \alpha_i \ln(p_i^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \gamma_{ij} \ln(p_i^*) \ln(p_j^*)$$

En el proceso de simulación del modelo AIDS, aparte de las restricciones paramétricas que han de cumplirse obligatoriamente debido a la condición de agregación:

$$\sum_{i=1}^K \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^K \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^K \gamma_{ij} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, K \quad (2.43)$$

la teoría económica impone sobre las funciones de demanda las propiedades de homogeneidad y simetría, las cuales implican las siguientes restricciones adicionales sobre los parámetros del sistema:

$$\sum_{j=1}^K \gamma_{ij} = 0, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, K \quad (2.44)$$

Para simular las funciones de demanda del modelo AIDS, se construyen, en primer lugar, dos matrices aleatorias, $\alpha \in M_{K \times n}(\mathbb{R})$ y $\epsilon \in M_{K \times n}(\mathbb{R})$, formadas por n variables aleatorias K -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidas satisfaciendo:

$$\alpha_{ij} \hookrightarrow U(0, 1), \quad \delta_{ij} \hookrightarrow U(0, 1), \quad \sum_{i=1}^K \alpha_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^K \delta_{ij} = 1 \quad \forall i, j$$

En segundo lugar, se construye una matriz aleatoria, $\gamma \in M_{K \times K}(\mathbb{R})$, formada por K variables aleatorias K -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidas verificando:

$$\gamma_{ij} \hookrightarrow N(0, 1) \quad \forall j \geq i, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \sum_{i=1}^K \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^K \gamma_{ij} = 0, \quad \forall i, j$$

Sea $\alpha_j^* = \ln(m_j) - \sum_{i=1}^K \alpha_{ij} \ln(p_{ij}^*) - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K \gamma_{rs} \ln(p_{rj}^*) \ln(p_{sj}^*) - \epsilon_j$, donde $\epsilon_j \hookrightarrow \text{Log } N(0, 1)$ para todo $j = 1, \dots, n$. Finalmente construye una matriz aleatoria, $\beta \in M_{K \times n}(\mathbb{R})$, formada por n variables aleatorias K -dimensionales. El elemento ij -ésimo, β_{ij} , de la matriz β se define de la siguiente manera:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\ln(m_j) - P_j} \cdot \left((1 - \delta_{ij})(-\alpha_{ij} - \sum_{k=1}^K \alpha_{ik} \ln(p_{kj}^*)) + \delta_{ij}(1 - \alpha_{ij} - \sum_{k=1}^K \alpha_{ik} \ln(p_{kj}^*)) \right) & i < K \\ - \sum_{i=1}^{K-1} \beta_{ij} & i = K \end{cases}$$

Así, la cantidad demandada del bien i -ésimo en la situación presupuestaria j viene dada por

$$x_{ij} = \frac{m_j}{p_{ij}} \left(\alpha_{ij} + \sum_{k=1}^K \gamma_{ik} \ln(p_{kj}) + \beta_{ij}(\ln(m_j) - P_j) \right) \quad (2.45)$$

donde $P_j = \alpha_j^* + \sum_{i=1}^K \alpha_{ij} \ln(p_{ij}) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K \gamma_{rs} \ln(p_{rj}) \ln(p_{sj})$ es el vector de índices de precios¹⁶⁵.

En este caso, los conjuntos de datos (que tienen todos $h = 8$ bienes y $n = 20$ observaciones) se generarían a partir de los siguientes pasos:

1. Simulación de matrices aleatorias formadas por n variables aleatorias k -dimensionales formadas por (pseudo) números aleatorios que se comportan como una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $U(0,1)$.
2. Simulación de las matrices aleatorias de precios $\theta \equiv (p_{ij}^*) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ y de gasto $m \equiv (m_j) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ derivadas a partir de una matriz aleatoria $\Omega \equiv (\omega_{ij}) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$

¹⁶⁵Existe una versión más usada que simplifica el modelo anterior substituyendo el índice de precios translog, $\ln(P)$, por la aproximación $\ln(P) = \sum_i w_i \ln(p_i)$, expresión ésta última que no contiene parámetros, haciendo que el sistema resultante sea lineal.

formadas por n variables aleatorias k -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidas según una distribución normal tipificada y del procedimiento de Slutsky.

3. Simulación de dos matrices aleatorias, $\alpha \equiv (\alpha_{ij}) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ y $\delta \equiv (\delta_{ij}) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$, formadas por n variables aleatorias k -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidas por una uniforme en $(0, 1)$ satisfaciendo:

$$\alpha_{ij} \hookrightarrow U(0, 1), \quad \delta_{ij} \hookrightarrow U(0, 1), \quad \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^k \delta_{ij} = 1 \quad \forall i, j.$$

4. Simulación de una matriz aleatoria $\gamma \equiv (\gamma_{ij}) \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ formada por k variables aleatorias k -dimensionales, independientes e idénticamente distribuidas verificando:

$$\gamma_{ij} \hookrightarrow N(0, 1) \quad \forall j \geq i, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \sum_{i=1}^k \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij} = 0, \quad \forall i, j$$

5. Simulación de una matriz aleatoria, $\beta \equiv (\beta_{ij}) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$, formada por n variables aleatorias k -dimensionales tal que:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\log(m_j) - P_j} \cdot \left(\delta_{ij} - \alpha_{ij} - \sum_{h=1}^k \alpha_{ih} \log(p_{hj}^*) \right) & \text{si } i = 1, \dots, k-1 \quad \forall j \\ - \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{ij} & \text{si } i = k \quad \forall j \end{cases}$$

Los pasos anteriores permiten simular las siguientes restricciones de agregación, homogeneidad y simetría:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^k \beta_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^k \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^k \gamma_{ij} = 0, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, k \quad (2.46)$$

6. Simulación de dos vectores aleatorios $\epsilon \equiv (\epsilon_j) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha^* \equiv (\alpha_j^*) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ satisfaciendo:

$$\epsilon_j \hookrightarrow \text{Log } N(0, 1), \quad \alpha_j^* = \log(m_j) - \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \log(p_{ij}^*) - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \gamma_{rs} \log(p_{rj}^*) \log(p_{sj}^*) - \epsilon_j \quad \forall i, j$$

En este modelo, si m_j es la renta monetaria de la situación presupuestaria j , p_{ij}^* el precio del bien i en el escenario j y P_j es el índice de precios definido como:

$$P_j = \alpha_j^* + \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \log(p_{ij}^*) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \gamma_{rs} \log(p_{rj}^*) \log(p_{sj}^*)$$

se tiene,

$$x_{ij}^* = \frac{m_j}{p_{ij}^*} \left(\alpha_{ij} + \sum_{k=1}^K \gamma_{ik} \log(p_{kj}^*) + \beta_{ij} (\log(m_j) - P_j) \right), \quad (2.47)$$

como función de demanda del bien i en la situación presupuestaria j .

8. Simulación de dos matrices aleatorias, $V \equiv (v_{ij}) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ y $W \equiv (w_{ij}) \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ formadas por n variables aleatorias k -dimensionales independientes e idénticamente distribuidas tal que:

$$v_{ij} \hookrightarrow \log N(0, \sigma_v^2), \quad w_{ij} \hookrightarrow \log N(0, \sigma_w^2) \quad \forall i, j$$

9. Contrastar del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ construir las estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, i) , (\mathcal{F}, v) y (\mathcal{F}, ϑ) , contrastar estadísticamente la significatividad de la violación GARP y analizar las relaciones existentes entre las diferentes medidas de eficiencia.

10. Repetir el proceso.

La Tabla 2.1, que ilustra los resultados del experimento de Monte Carlo efectuado, muestra cómo los errores de naturaleza estocástica introducidos en las cantidades demandadas y precios hacen que los datos perturbados se encuentren alejados de la optimización¹⁶⁶.

Número simulaciones: 4500 (20 observaciones de demanda con 8 componentes)		
Promedio del índice de Afriat: 0.562		
Promedio violaciones GARP: 130.567		
Porcentaje simulaciones violando GARP: 100.00 %		
Porcentaje simulaciones con $\bar{\vartheta} > \bar{v}$: 1.82 %		
Porcentaje simulaciones con $\bar{\vartheta} \not> \bar{v} \wedge \bar{\vartheta} \not= \bar{v}$: 98.18 %		
Índice	Norma Euclídea	Porcentaje de simulaciones con
	Porcentaje	$\ \bar{\xi}\ > \ \bar{i}\$
$\bar{\vartheta}$	3.721796885	100.00 %
\bar{v}	3.421927808	99.966 %
\bar{i}	2.876508201	—
\bar{e}^*	2.514185107	25.044 %

Tabla 2.1: Resultados del experimento de Monte Carlo.

¹⁶⁶Obsérvese que el 100 % de los conjuntos de datos simulados violan GARP; mientras que el promedio del índice de Afriat y de violaciones GARP es 0.562 y 130.567 respectivamente.

La Tabla 2.1 también permite inferir que en la mayoría de las situaciones se verifica que $\bar{\vartheta} > \bar{i}$ y $\bar{v} > \bar{i}$. Obsérvese que en el 99.96 % de los conjuntos de datos simulados es cierto que $\|\bar{v}\| > \|\bar{i}\|$, lo cual implica que en el 99.96 % de las simulaciones efectuadas el vector-índice asociado a la α^* -estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) ofrece una mejor bondad del ajuste del conjunto de datos de demanda con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Los resultados son aún más rotundos si comparamos los conjuntos de niveles de eficiencia $(\vartheta_t)_{t=1}^n$ e $(i_t)_{t=1}^n$ asociados a las α^* -estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) y (\mathcal{F}, i) . Obsérvese que en el 100 % de las simulaciones efectuadas se cumple $\|\bar{\vartheta}\| > \|\bar{i}\|$, lo cual implica que el vector-índice $\bar{\vartheta}$ asociado a la α^* -estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ϑ) describe mejor (dentro del conjunto de datos simulados) el comportamiento de la demanda que el vector-índice de Varian. De lo anterior se desprende que en el 100 % de las simulaciones efectuadas el vector-índice de Varian no es maximal.

Los resultados anteriores, junto con los ofrecidos en el estudio realizado en la sección 2.3 con los datos coleccionados por Mattei (2000), muestran que cuando el comportamiento observado está muy próximo a uno optimizador el índice de Varian describe razonablemente bien el comportamiento de la demanda; mientras que cuando dicho comportamiento está alejado de la optimización el índice de Varian no resulta apropiado para describir el comportamiento de la demanda. Nótese que en el 100 % de los casos –para el conjunto de niveles de eficiencia $(\vartheta)_{t=1}^n$ – y en el 99.956 % de las situaciones –para el conjunto de niveles de eficiencia $(v)_{t=1}^n$ – el conjunto de niveles de eficiencia de Varian $(i)_{t=1}^n$ no proporciona para cada $t = 1, \dots, n$ el porcentaje mínimo de dinero que se le permite derrochar a un consumidor para que sus decisiones sean consistentes con la teoría neoclásica de la demanda con lo que, al contrario de lo reflejado por Varian (2006), no se puede interpretar en la práctica el conjunto de niveles de eficiencia $(i)_{t=1}^n$ como la perturbación mínima de los datos para que éstos verifiquen el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada. Por otra parte, cabe destacar que en el 98.18 % de las simulaciones efectuadas $\bar{\vartheta} \not\prec \bar{v}$ y $\bar{v} \not\prec \bar{\vartheta}$ lo que garantiza que, en general, los vectores-índice asociados a las α^* -estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, v) y (\mathcal{F}, ϑ) no son comparables en el sentido Pareto y justifica la afirmación de la sección 2.3 donde mostramos que (\mathcal{F}, v) y (\mathcal{F}, ϑ) no son comparables según la Definición 2.3.9. Los resultados permiten también inferir que las estructuras de eficiencia de Varian (\mathcal{F}, i) y de Afriat (\mathcal{F}, e^*) no son comparables puesto que en el 25.044 % de las ocasiones $\|\bar{e}^*\| > \|\bar{i}\|$, mientras que en el 74.956 % se obtiene que $\|\bar{i}\| > \|\bar{e}^*\|$. Finalmente, los datos reflejados en las Tablas ?? y 2.3 muestran la existencia de cuatro conjuntos de datos para los cuales se cumple $n\hat{\xi}_n/\sigma^2 < \chi_n^2(\alpha)$, $n\hat{\phi}_n/\sigma^2 < \chi_n^2(\alpha)$ y $n\hat{\rho}_n/\sigma^2 \geq \chi_n^2(\alpha)$; i.e., los estadísticos $\hat{\xi}_n$ y $\hat{\phi}_n$ satisfacen la hipótesis nula (\mathbf{H}_0 : Los datos de demanda verifican GARP) mientras que con el estadístico $\hat{\rho}_n$ se concluye que los datos de demanda no verifican GARP y que las violaciones presentes en los datos no se derivan de la existencia de pequeños errores de medida o de naturaleza estocástica sino que las inconsistencias presentes en los datos son de carácter estructural; esto es, $\hat{\rho}_n$ satisface la hipótesis alternativa (\mathbf{H}_1 : Los datos de demanda no verifican GARP).

Para finalizar, tres observaciones. En primer lugar, señalar que en el 1.82 % de las simulaciones efectuadas hemos encontrado que $\bar{v} > \bar{v}$, mientras que en ningún caso ocurre que $\bar{v} \geq \bar{v}$. El hecho de que nunca haya ocurrido que $\bar{v} \geq \bar{v}$ es consecuencia de las características inherentes a las α^* -estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y $(\mathcal{F}, \boldsymbol{\vartheta})$. Nótese que –como señalamos en la sección 2.3 de esta memoria– la α^* -estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ admite una construcción algorítmica a partir de un procedimiento matricial de tipo max mientras que la construcción algorítmica de la α^* -estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \boldsymbol{\vartheta})$ admite un procedimiento recursivo matricial de tipo max-max. Sin embargo, merece la pena señalar que esto no implica en ningún caso que el conjunto de niveles de eficiencia $(v_t)_{t=1}^n$ asociado a $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ describa mejor la bondad del ajuste del modelo de optimización que el conjunto de niveles de eficiencia $(v_t)_{t=1}^n$ asociado a $(\mathcal{F}, \boldsymbol{\vartheta})$ para cualquier serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. En segundo lugar, merece la pena resaltar que –en virtud de la construcción del test estadístico de Tsur (1989)– podríamos utilizar los vectores índices asociados a cada una de las estructuras o variedades de eficiencia estudiadas en las secciones 2.3 y 2.4 de esta memoria. Nótese que, por ejemplo, el vector-índice $\bar{\zeta}$ solución del problema de maximización (3.7) proporcionará un estadístico $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(\zeta_t)^2$ más idóneo que $\hat{\xi}_n$ o $\hat{\phi}_n$ para este este contraste de hipótesis. Como el vector índice de máxima norma es un elemento del haz de eficiencia $(\mathcal{D}, \Phi_{\mathcal{D}}, [\bar{\zeta}])$, este vector-índice proporcionaría el estadístico idóneo para llevar a cabo este contraste de hipótesis y poder precisar si los errores aparecidos en los datos son errores de medida o estocásticos o, por el contrario, son estructurales.

Finalmente, y en relación con las razones que se pueden presentar en contra de este procedimiento cabe destacar que dado que este procedimiento (basado en el procedimiento de Tsur; 1989) presenta las mismas características inherentes que el procedimiento de Varian (1985) las réplicas que se pueden hacer de ellas son exactamente las mismas que las réplicas que proporcionó Varian en *The Journal of Econometrics*. Varian (1985, pág. 457) señala que la necesidad de tener que especificar el error de la varianza no hace que este contraste de hipótesis carezca de interés¹⁶⁷. Ante la observación de que el test no es fiable como consecuencia de que rechazar la hipótesis nula no implica necesariamente que los datos hayan sido generados por una conducta optimizadora, Varian (1985, pág. 456) señala que esto no invalida la potencia del contraste puesto que el

¹⁶⁷Varian (1985) expresa textualmente: “[...] *The fact that one needs to specify the error variance effectively renders this approach worthless. I think not. Rather than speculate on this point, it is worth considering the particular example presented above. Does anyone really believe that the factor demand data described in table 1 were measured with a standard error of less than 0.05 percent? If not, the procedures outlined above indicate that the departures from cost minimizing behavior depicted in that table are not statistically significant. This seems to me to be a perfectly satisfactory statement. Furthermore, specifying the likely magnitude of the measurement error seems to me to be much less difficult a task than specifying a plausible functional form for a production function, as is required in the conventional approach [...]*

[...] *And of course, one may be able to construct plausible estimates or bounds on the error variance by the other means. One obvious choice is to use the standard errors that are generated by parametric methods. Moreover, Epstein and Yatchew (1984) have suggested a method of estimating σ that is consistent under certain hypothesis about the family of functional forms that could have generated the data. If the Epstein-Yatchew method works well in small samples, it may eliminate this objection entirely [...]*”

mismo problema lo presentan los tests estadísticos paramétricos¹⁶⁸. Varian también señala que no existe ningún tipo de incongruencia al criticar la utilización de la aproximación paramétrica en el análisis de la bondad del ajuste y, al mismo tiempo, especificar las perturbaciones de las ecuaciones de demanda. Varian (1985, pág. 457) argumenta que encontrar la especificación de un término error normal es mucho menos difícil que especificar una forma funcional para la tecnología y la demanda; y, además, que en la aproximación econométrica tendríamos que especificar tanto una forma funcional de la demanda como de la distribución de los errores y es, por lo tanto más restrictiva¹⁶⁹. Finalmente, ante la objeción de que sería deseable disponer de una medida que analizase la potencia del test estadístico, señalar que sí sería deseable¹⁷⁰. Pero, dado que la potencia de un test estadístico depende de la hipótesis alternativa habría que buscar alguna hipótesis alternativa razonable y la distribución de los errores para así poder determinar la probabilidad que el test supuesto debería satisfacer¹⁷¹. Pensamos, pues, que el camino idóneo para ello sería la simulación de Monte Carlo; debido a la dificultad de poder encontrar una solución analítica.

¹⁶⁸Varian (1985) manifiesta literalmente lo siguiente: “[...] *Simply because you fail to reject the null hypothesis doesn't mean that the data were generated by optimization. Of course not. If we fail to reject the null hypothesis then we have simply stated that the observed departures from the model are not extremely unlikely given the null hypothesis. That is exactly what is done in ordinary statistical hypothesis testing [...]*”.

¹⁶⁹Varian (1985) literalmente afirma: “[...] *It is difficult to argue that we know enough to specify the way disturbances enter the demand equations and can specify a parametric form of the distribution while at the same time arguing that we do not know enough to specify the form for the demand system. I find the specification of a Normal error term much less difficult than the specification of a particular parametric form for technology or demand. In any event parametric studies usually require a specification of both the functional form of the demand relationship and the parametric form of the distribution [...]*”

¹⁷⁰La potencia de un test estadístico depende de la hipótesis alternativa. Dada alguna hipótesis alternativa razonable y la distribución de los errores sería posible determinar la probabilidad que el test supuesto debería satisfacer. Esto debería realizarse mediante simulaciones de Monte Carlo, dada la dificultad de encontrar una solución analítica.

¹⁷¹Varian (1985, pág. 456) literalmente afirma: “[...] *It would be useful to have a measure of the power of this test. Absolutely. But of course the power of a test depends on the specific alternative hypothesis. Given some reasonable alternative and the distribution of the errors it would be possible to compute the probability that the proposed test would be satisfied. This would almost certainly have to be done by Monte Carlo methods, since I see little hope of an analytic solution. However, by way of comparison, let me note that it is quite rare one sees power reported in parametric econometric studies [...]*”.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1967) The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 67-77.
- [2] Afriat, S. (1972) Efficiency Estimates of Production Functions *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 568-598.
- [3] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An extension of the classical method. *International Economic Review*, Vol. 14, págs. 460-472.
- [4] Afriat, S. (1976) *Combinatorial Theory of Demand*. London: Input-Output Publishing Company.
- [5] Afriat, S. (1977) *The Price Index*, London: Cambridge University Press.
- [6] Afriat, S. (1981) On the Constructibility of Consistent Price Indices Between Several Periods Simultaneously, en *Essays in Theory and Measurement of Demand: 30 en honor of Sir Richard Stone, Angus Deaton (ed.)*. Cambridge: Cambridge University Press, págs. 133-61.
- [7] Box, G. y M. Muller (1958) A Note on the Generation of Random Normal Deviates. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 26, págs. 610-611.
- [8] Christensen, L.; Jorgenson, D. y L. Lau (1975) Transcendental Logarithmic Utility Functions. *American Economic Review*, Vol. 65, págs. 367-383.
- [9] Deaton, A. (1980) An Almost Ideal Demand System. *American Economic Review*, Vol. 70, págs. 312-326.
- [10] Diewert, E. (1973) Afriat and Revealed Preference Theory. *Review of Economic Studies*, Vol. 40, págs. 419-426.
- [11] Diewert, E. y C. Parkan (1985) Tests for the Consistency of Consumer Data. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 127-147.
- [12] Efron, B. (1979) Bootstrapping Methods: Another Look at the Jackknife. *Annals of Statistics*, Vol. 7, págs. 1-26.
- [13] Efron, B. (1982) The Jackknife, the Bootstrap, and other Resampling Plans. *Society of Industrial and Applied Mathematics CBMS-NSF Monographs*, 38.
- [14] Epstein, L. y A. Yatchew (1984) Non-Parametric Hypothesis Testing Procedures and Applications to Demand Analysis. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 149-169.
- [15] Fleissig, A. y G. Whitney (2003) A New PC-Based Test for Varian's Weak Separability Conditions. *Journal of Business y Economic Statistics*, Vol. 21, págs. 133-44.

- [16] Fleissig, A. y G. Whitney (2005) Testing for the Significance of Violations of Afriat's Inequalities. *Journal of Business y Economic Statistics*, vol. 23, págs. 355-362.
- [17] Gross, J. (1991) On expenditure Indices in Revealed Preference tests. *Journal of Political Economy*, Vol. 98, págs. 416-419.
- [18] Gross, J. (1995) Testing Data for Consistency with Revealed Preference. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 77, págs. 701-710.
- [19] Houthakker, H. (1950) Revealed Preference and the Utility Function. *Economica*, Vol. 17, págs. 159-174.
- [20] Hurwicz L. y H. Uzawa (1971) On the Integrability of Demand Functions. En *Preferences, Utility and Demand*, Cap. 6, J. Chipman, L. Hurwicz and, H. Sonnenschein (eds.). New York: Harcourt Brace, Jovanovich.
- [21] L'Ecuyer, P. (1998) Random Number Generation, en *The Handbook of Simulation*, Jerry Banks (ed.). Wiley, New York.
- [22] L'Ecuyer, P. (1999) Good Parameter Sets for Combined Multiple Recursive Random Number Generators. *Operations Research*, Vol. 47, págs. 159-164.
- [23] Mattei, A. (2000) Full-Scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data. *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 43, págs. 487-497.
- [24] Matsumoto, M. y T. Nishimura (1998) Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudorandom Number Generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, Vol. 8, págs. 3-30.
- [25] McFadden, D. y M. Richter (1970) Stochastic Rationality and Revealed Stochastic Preference. Department of Economics, University of California, Berkeley, mimeo.
- [26] McFadden, D. y M. Richter (1991) Stochastic Rationality and Revealed Stochastic Preference. En *Preferences, uncertainty, and optimality: Essays in honor of Leo Hurwicz, Chipman, J. y D. McFadden y M. Richter* (eds.), Westview Press, Boulder, Colorado, págs. 151-86.
- [27] Samuelson, P. (1938) A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior. *Economica*, Vol. 5, págs. 353-354.
- [28] Tsur, Y. (1989) On Testing for Revealed Preference Conditions. *Economics Letters*, Vol. 31, págs. 359-362.
- [29] Varian, H. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50, págs. 945-971.

-
- [30] Varian, H. (1983) Nonparametric Tests of Consumer Behavior. *Review of Economic Studies*, Vol. 50, págs. 99-110.
- [31] Varian, H. (1985) Non-Parametric Analysis of Optimizing Behavior with Measurement Error. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 445-458.
- [32] Varian, H. (1987) On Goodness-of-Fit of Revealed Preference Conditions. CREST Working Paper. Department of Economics. University of Michigan.
- [33] Varian, H. (1990) Goodness-of-Fit in Optimizing Models. *Journal of Econometrics*, Vol. 46, págs. 125-140.
- [34] Varian, H. (2006) Revealed preferences. In *Samuelsonian Economics and the 21st Century*, Michael Szenberg (ed.). Oxford University Press, págs. 99-115.
- [35] Veall, M. (1987) Bootstrapping the Probability Distribution of Peak Electricity Demand. *International Economic Review*, Vol. 28, págs. 203-212.
- [36] Veall, M. (1992) Bootstrapping the Process of Model Selection: An Econometric Example. *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 7, págs. 93-99.
- [37] Vinod, H. (1993) Bootstrap, Jackknife, Resampling and Simulation: Applications in Econometrics, en Maddala, G., C. Rao, and H. Vinod, eds., *Handbook of Statistics: Econometrics*, Vol II., Capítulo 11, G. Maddala, G. Rao y H. Vinod (eds.). Amsterdam: North Holland.
- [38] Vinod, H. y B. Raj (1994) Economic Issues in Bell System Divestiture: A Bootstrap Application. *Applied Statistics (Journal of the Royal Statistical Society, Series C)*, Vol. 37, págs. 251-261.
- [39] Yatchew, A. (1985) A Note on Nonparametric Tests of Consumer Behavior. *Economic Letters*, Vol. 18, págs. 45-48.

Número simulaciones efectuadas: 4500			
Simulación número: 1			
Varianza de s_n^2 : 0.292559554244			
Alpha	Contraste \bar{i}	Contraste \bar{j}	Contraste \bar{v}
0.990	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.980	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.970	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.960	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.950	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.940	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.930	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.920	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.910	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.900	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
Nodo	$\bar{i} \in \mathbb{R}_{++}^n$	$\bar{j} \in \mathbb{R}_{++}^n$	$\bar{v} \in \mathbb{R}_{++}^n$
1	0.746372918661064	1.000000000000000	0.746372918661064
2	0.548619670848276	0.988949437493396	0.988949437493396
3	0.988949437493396	0.988949437493396	0.988949437493396
4	0.237117512279353	1.000000000000000	0.488826300423365
5	0.423343873749521	0.925446804817458	0.925446804817458
6	0.473087785515489	0.949624032457679	0.720828947792429
7	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000
8	0.367875158146352	0.651833967458570	0.743180641454785
9	0.375896383873785	0.732824154673414	0.732824154673414
10	0.730812838520917	1.000000000000000	0.829183564668373
11	0.543078265163195	0.872392832042683	0.950856169759096
12	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000
13	0.407845894042871	0.741073698916742	0.848881525838188
14	0.200114946450582	1.000000000000000	0.496002987491359
15	0.361125677322796	1.000000000000000	0.881221900215651
16	0.505978299234834	0.832553702195725	0.832553702195725
17	0.377030125464230	0.867036202026342	0.734417521864102
18	0.505475938759170	0.902001842258804	0.760534621739010
19	0.590680481098601	1.000000000000000	0.590680481098601
20	0.253223127509166	0.804674931941533	0.569931519675583
Simulación número: 2			
Varianza de s_n^2 : 0.438428387761			
Alpha	Contraste \bar{i}	Contraste \bar{j}	Contraste \bar{v}
0.990	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.980	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.970	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.960	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.950	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.940	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.930	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.920	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.910	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
0.900	RECHAZO H0	ACEPTO H0	ACEPTO H0
Nodo	$\bar{i} \in \mathbb{R}_{++}^n$	$\bar{j} \in \mathbb{R}_{++}^n$	$\bar{v} \in \mathbb{R}_{++}^n$
1	0.226652002922128	0.313576092525245	0.619707726533760
2	0.412230167024489	0.500023558233193	0.698959546642331
3	0.525358759953658	0.787219431827058	0.787219431827058
4	0.395305599742160	0.490792738070027	0.712502633894360
5	0.267117276223768	0.327545066064975	0.609353848858906
6	0.143039274833534	1.000000000000000	0.361207602535791
7	0.670466535260493	0.670466535260493	0.670466535260493
8	0.445042282857961	0.539741959705949	0.445042282857961
9	0.413253597966781	0.632691389864073	0.644431442344238
10	0.605474032062857	0.713347917535063	0.713347917535063
11	0.462258479229614	0.585175257952711	0.754770185485692
12	0.648890998490627	0.865035839663206	0.648890998490627
13	0.198690636891022	0.321152809337506	0.607841950979915
14	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000
15	0.930710320068852	0.930710320068852	0.930710320068852
16	0.295597134309104	0.811186643915137	0.526793330579160
17	0.345355946353473	0.554386190971769	0.554386190971769
18	0.332632295603641	0.332632295603641	0.332632295603641
19	0.597432271677966	0.693552485447650	0.693552485447650
20	0.622170857283206	0.622170857283206	0.651591347015238

Tabla 2.2: Significatividad estadística de las violaciones GARP.

				Número simulaciones efectuadas: 4500
				Simulación número: 3
				Varianza de s_n^2 : 0.321371507958
Alpha	Contraste \bar{i}	Contraste \bar{d}	Contraste \bar{v}	
0.990	RECHAZO H0	ACEPTO H0	RECHAZO H0	
0.980	RECHAZO H0	ACEPTO H0	RECHAZO H0	
0.970	RECHAZO H0	ACEPTO H0	RECHAZO H0	
0.960	RECHAZO H0	ACEPTO H0	RECHAZO H0	
0.950	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.940	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.930	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.920	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.910	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.900	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
Nodo	$\bar{i} \in \mathbb{R}_{++}^n$	$\bar{d} \in \mathbb{R}_{++}^n$	$\bar{v} \in \mathbb{R}_{++}^n$	
1	0.433290773518992	0.745991004242755	0.745991004242755	
2	0.324176706750521	0.650805965544489	0.650805965544489	
3	0.511196474146590	1.000000000000000	0.605748622058047	
4	0.768312390906259	0.768312390906259	0.768312390906259	
5	0.255519156810854	1.000000000000000	0.510462095698263	
6	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000	
7	0.310156531129205	0.489212969963249	0.310156531129205	
8	0.749768521148870	0.749768521148870	0.749768521148870	
9	0.339596578956411	1.000000000000000	0.828628306326523	
10	0.649405115204605	0.770951464909237	0.770245479425627	
11	0.405126856294579	0.566331465803535	0.686166114002398	
12	0.566331465803535	0.566331465803535	0.686166114002398	
13	0.692850250909606	0.699322074103411	0.699322074103411	
14	0.503553099294286	1.000000000000000	0.918773803174507	
15	0.640626936126256	0.798978076088468	0.830239604955799	
16	0.271696589856158	1.000000000000000	0.391798340267770	
17	0.363201934709700	0.671380168914649	0.752504002539205	
18	1.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000	
19	0.510360277258155	0.817878482221329	0.510360277258155	
20	0.649432474659877	0.997695701861064	0.726725030305023	
				Simulación número: 8
				Varianza de s_n^2 : 0.646510333333
Alpha	Contraste \bar{i}	Contraste \bar{d}	Contraste \bar{v}	
0.990	RECHAZO H0	ACEPTO H0	RECHAZO H0	
0.980	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.970	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.960	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.950	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.940	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.930	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.920	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.910	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
0.900	RECHAZO H0	RECHAZO H0	RECHAZO H0	
Nodo	$\bar{i} \in \mathbb{R}_{++}^n$	$\bar{d} \in \mathbb{R}_{++}^n$	$\bar{v} \in \mathbb{R}_{++}^n$	
1	0.970906183714263	0.970906183714263	0.970906183714263	
2	0.128118828327640	1.000000000000000	0.426608089803047	
3	0.611688994080303	1.000000000000000	0.611688994080303	
4	0.317948968752731	0.715185454178553	0.797226530773484	
5	0.917171484433908	0.917171484433908	0.917171484433908	
6	0.836718352275370	0.836718352275370	0.836718352275370	
7	0.628068623117281	0.737158206992544	0.790378220345406	
8	0.303654084446706	0.578122901654776	0.698545125058761	
9	0.514583671204375	0.778325148710783	0.811711058712952	
10	0.393980738191552	0.494020963912165	0.453072059937592	
11	0.217573005334063	0.390867720171549	0.509851111612662	
12	0.427319114023078	0.91434335041607	0.615919233512416	
13	0.215395290588186	0.561693411641259	0.451687788368097	
14	0.508268721015402	0.636596592073869	0.706819081924300	
15	0.457399528406310	0.807561752908765	0.807561752908765	
16	0.153518718368835	0.608555103879677	0.608572069858695	
17	0.963622536172133	0.963622536172133	0.963622536172133	
18	0.244741640615116	0.794307821926132	0.855598628081907	
19	0.397188900924372	1.000000000000000	0.674645172595201	
20	0.184793872578890	1.000000000000000	0.644269076292727	

Tabla 2.3: Significatividad estadística de las violaciones GARP.

Conclusiones y líneas de investigación futuras

En este capítulo hemos analizado y extendido la aproximación no paramétrica a la eficiencia en el consumo. Comenzamos el capítulo presentando una revisión histórica a los principales trabajos y estudios que han abordado la eficiencia en el consumo desde una perspectiva no paramétrica, entre los que cabe destacar los trabajos de Afriat (1972, 1973), Varian (1985, 1987, 1990), Gross (1991, 1995, 1996), Houtmann y Maks (1985) y Swofford y Withney (1987) entre otros.

En la sección 2.2 caracterizamos a las observaciones de demanda que son inconsistentes con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada, a los subconjuntos inconsistentes con GARP y proporcionamos un procedimiento exacto para la obtención de un subconjunto maximal (de cardinal máximo) consistente con el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada, respondiendo así a las preguntas formuladas por Gross (1991) en *The Journal of Political Economy*, Gross (1995) en *The Review of Economics and Statistics* y por Gross y Kaiser (1996) en *The Journal of Business and Economic Statistics*. En la Definición 2.2.2 hemos introducido los conceptos de cesta demandada inconsistente y fuertemente inconsistente con GARP –que nos permitirán responder a la pregunta planteada por Gross (1991) en *The Journal of Political Economy*¹⁷²– y presentamos dos procedimientos eficientes (algoritmos 5 y 6) que permiten obtener –en un tiempo de ejecución inferior a $\mathcal{O}(n^3)$ – los subconjuntos \mathcal{VS} y VS formados por todas las observaciones inconsistentes y fuertemente inconsistentes con GARP. En la Definición 2.2.3 hemos introducido dos nuevos conceptos: subconjunto inconsistente y fuertemente inconsistentes con GARP y hemos mostrado (Afirmación 2.2.1) que el subconjunto \mathcal{VS} (resp., VS) es inconsistente (resp., fuertemente inconsistente) con GARP. En la Proposición 2.2.2 caracterizamos a esta clase de subconjuntos que, como es de sobra conocido, ofrecen una medida natural de la bondad del ajuste del modelo de optimización del consumidor. A continuación, resolveremos el problema de encontrar para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto minimal (de cardinal mínimo) inconsistente con GARP planteado por Gross (1991) en *The Journal of Political Economy* y por Gross (1995) en *The Review of Economic and Statistics*. En la Definición 2.2.4 introducimos el concepto de subconjunto minimal inconsistente (resp., fuertemente inconsistente) con GARP y mostramos –Ejemplo 2.2.1– que, en general, los conjuntos \mathcal{VS} y VS no son minimales. En el Teorema 2.2.1 probamos la existencia de subconjuntos minimales inconsistentes (resp., fuertemente inconsistentes) con GARP para serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP. Una característica importante de este teorema es que su demostración (basada en el Lema de Zorn) nos permite diseñar diferentes procedimientos de complejidad polinomial, y por tanto eficientes, para la construcción de subconjuntos maximales

¹⁷²Clearly his discussion begs the question. Which observations are violations and which are consistent in the example?. Véase Gross (1991, pág. 418), para más detalles.

consistentes con GARP. Con objeto de poder caracterizar a los subconjuntos inconsistentes (resp., inconsistentes con GARP) introducimos –Definición 2.2.5– el concepto de redundancia, el cual también será fundamental en el diseño de diferentes procedimientos eficientes para calcular subconjuntos maximales consistentes con GARP. En la Proposición 2.2.3 y 2.2.4 ofrecemos una caracterización de los subconjuntos minimales inconsistentes (resp., fuertemente inconsistentes) con GARP. Dado que nuestro objetivo es encontrar –para cada serie finita de datos de demanda inconsistente con GARP– un subconjunto consistente de cardinal máximo introducimos –Definición 2.2.6– el concepto de subconjunto óptimo inconsistente¹⁷³ (resp., fuertemente inconsistente) con GARP. En el Ejemplo 2.2.2 mostramos la no unicidad de los subconjuntos óptimos, mientras que en el Ejemplo 2.5 mostramos que la minimalidad no implica la optimalidad. En la Proposición 2.2.5 caracterizamos la optimalidad en términos de la minimalidad y una propiedad adicional. En el Teorema 2.2.2 probamos la existencia de subconjuntos óptimos inconsistentes (resp., fuertemente inconsistentes) con GARP. En los Teoremas 2.2.4 y 2.2.5 proporcionamos condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP sea óptimo. También proporcionamos un procedimiento exacto (algoritmo 7) que para encontrar un subconjunto óptimo inconsistente (resp., fuertemente inconsistente) con GARP. El Teorema 2.2.6 garantiza la corrección de dicho procedimiento. Finalizaremos la sección ilustrando –Ejemplo 2.2.4– el procedimiento anterior y exponiendo los diferentes procedimientos que nos permitirán encontrar –en un tiempo de ejecución polinomial– subconjuntos maximales consistentes con GARP.

En la sección 2.3 hemos abordado la aproximación no paramétrica a la eficiencia en el consumo de Afriat (1972, 1973) y Varian (1987, 1990). En los Ejemplos 2.3.4 y 2.3.5 mostramos que los datos de demanda observados no tienen por qué no tienen por qué ser necesariamente consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad al nivel global de eficiencia e^* –i.e., verificar $\text{GARP}(\bar{e}^*)$ –, incluso si $e^* = 1$. El Ejemplo 2.3.4 prueba también que la aproximación de Afriat proporciona un vector-índice maximal. A continuación, proporcionamos un procedimiento (algoritmo 9) eficiente que no presenta las limitaciones de los procedimientos anteriores existentes en la literatura económica: es eficiente (es de tipo polinomial) y proporciona el valor exacto del índice de Afriat e^* para cualquier serie finita de datos de demanda. Posteriormente, introducimos la aproximación a la eficiencia en el consumo de Varian (1987, 1990) y presentamos el pseudocódigo de dos procedimientos eficientes (algoritmos 10 y 11) para obtener el conjunto de “niveles de eficiencia” de Varian definido en (2.3.5). En el segundo procedimiento obtenemos el vector-índice $\bar{i} = (i_1, \dots, i_n)$ de Varian (o conjunto de niveles de eficiencia $(i_t)_{t=1}^n$) combinando diferentes operaciones elementales (suma, suma booleana, producto lógico, trasposición, etc.) sobre los espacios de matrices (booleanas y reales) cuadradas y, además, ofrecemos una interpretación en términos económicos del conjunto de niveles de eficiencia de Afriat. Si bien creemos que el vector-índice de Varian presenta unas propiedades muy deseables mostramos –en el Ejemplo 2.3.7– que el vector-índice de Varian no permite determinar, en ocasiones, la perturbación mínima de los datos para que éstos sean consistentes con GARP, lo cual contra-

¹⁷³En la Proposición 2.2.2 mostramos que el problema de encontrar un subconjunto maximal de observaciones de demanda consistentes con GARP es equivalente a hallar un subconjunto minimal inconsistente con GARP.

dice en cierta medida la afirmación de Varian (2006) en la que interpreta a $(i_t)_{t=1}^n$ como la “perturbación mínima” de los datos observados¹⁷⁴. Este hecho sugiere la búsqueda de nuevas medidas más eficientes de la bondad del ajuste del modelo de la maximización de la utilidad lo que conlleva la presentación de unos nuevos conceptos como los siguientes: aplicación-índice –Definición 2.3.6–, aplicación-índice eficiente y fuertemente eficiente –Definición 2.3.7–, estructura de eficiencia –Definición 2.3.8 y α^* -estructura de eficiencia –Definición 2.3.8– o estructura fuertemente eficiente. La Proposición 2.3.3 y la Proposición 2.3.8 muestran que bajo estos nuevos conceptos las aproximaciones de Afriat (1972) y Varian (1987, 1990) son dos ejemplos de estructura de eficiencia; estructuras que, obviamente, denominamos estructuras de eficiencia de Afriat $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$ y de Varian $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$, respectivamente. La Proposición 2.3.8 prueba que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$ es una α^* -estructura de eficiencia. Por su parte, la Proposición 2.3.3 junto con el Ejemplo 2.3.4 y el Ejemplo 2.3.5 prueban que $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$ es eficiente pero no fuertemente eficiente. En el Ejemplo 2.3.8 mostramos que en ocasiones el vector-índice de Varian no es maximal. Con objeto de poder comparar la calidad de las diferentes estructuras de eficiencia (resp., aplicaciones-índices) en la búsqueda de vectores-índices mejores en el sentido de Pareto que el vector-índice de Varian introducimos en la Definición 2.3.9 los conceptos de describir casi-mejor y describir mejor el comportamiento de la demanda. En la Proposición 2.3.9 caracterizamos a las series finitas de datos de demanda para las cuales es posible encontrar un mejor un vector-índice que proporcione un mejor ajuste de los datos que el vector-índice de Varian. En el Ejemplo 2.3.8 –que hemos construido a partir de las hipótesis de la Proposición 2.3.9– mostramos la imposibilidad de encontrar α^* -estructuras de eficiencia que describan mejor el comportamiento de un consumidor que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$. Por lo tanto, sólo podremos encontrar α^* -estructuras de eficiencia casi-mejores que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$. Así pues, presentamos dos nuevas estructuras de eficiencia que describen casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$. Así pues, presentamos dos nuevas α^* -estructuras de eficiencia que describen casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$. La Definición 2.3.10 permite construir (algoritmo 12) una α^* -estructura de eficiencia computable. En el Teorema 2.3.3 garantizamos la finitud y la corrección de este procedimiento y establecemos que $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ es una α^* -estructura de eficiencia. Por su parte, en el Teorema 2.3.3 probamos –junto con el Ejemplo 2.3.9– que $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$. Por su parte, en la Definición 2.3.12 presentamos un nuevo procedimiento de asignación de índices. Este procedimiento –que también admite una construcción algorítmica (algoritmo 13)– nos permitirá definir la α^* -estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{\vartheta})$. El Teorema 2.3.4 establece que $(\mathcal{F}, \mathbf{\vartheta})$ es una α^* -estructura de eficiencia. Por su parte, el Teorema 2.3.6 junto con el Ejemplo 2.3.9 garantiza que $(\mathcal{F}, \mathbf{\vartheta})$ describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, \mathbf{i})$. A continuación presentamos el Ejemplo 2.3.9 para mostrar que estas nuevas α^* -estructuras de eficiencia no son comparables. Este mismo ejemplo prueba que las α^* -estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$ y $(\mathcal{F}, \mathbf{\vartheta})$ no son comparables con la estructura de eficiencia $(\mathcal{F}, \mathbf{e}^*)$ de Afriat. Finalizamos la sección mostrando, en primer lugar, que la aproximación a la eficiencia en el consumo

¹⁷⁴Varian (1990) suggests defining i_t separately for each observation and then finding those i_t that are as close as possible to 1 (in some norm). I interpret these i_t as a “minimal perturbation”. They can be interpreted as error terms and thus be used to give a statistical interpretation to the goodness-of-fit measure [v. Varian (2006)].

de Varian también puede ser interpretada en términos de los costes de ineficiencia, dado que la única diferencia entre ambas aproximaciones a la eficiencia en el consumo reside en que Varian (1987, 1990) considera para cada observación j un coste de ineficiencia distinto $0 \leq w_j \leq 1$, mientras que Afriat (1973) considera el mismo coste de ineficiencia w^* para todas las observaciones de demanda y proporcionando dos nuevas estructuras de eficiencia. Como la intención de Afriat era “relajar” la relación de la preferencia revelada –introduciendo un índice global de eficiencia en todas las observaciones– con objeto de “romper” todos los ciclos existentes en dicha relación nos preguntamos si sería factible “relajar” la relación de preferencia revelada solamente en aquellas observaciones inconsistentes con GARP, puesto que estas observaciones son las causantes de las inconsistencias presentes en los datos. Como consecuencia de lo anterior, presentamos una nueva estructura de eficiencia que denotamos por $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$ que describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que la estructura de eficiencia de Afriat. En el Teorema 2.3.2 probamos este resultado. Finalizamos la sección introduciendo una nueva estructura de eficiencia (\mathcal{F}, ζ) que describe simultáneamente casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, i) y $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$. En el Teorema 2.3.7) y en el Teorema 2.3.8 probamos la validez de estos resultados.

En la sección 2.4 hemos generalizado la aproximación de la eficiencia en el consumo de Afriat y de Varian en varias direcciones y ofrecemos la solución a las preguntas formuladas por Gross (1991) en el *The Journal of Political Economy* y por Varian (1990) en *The Journal of Econometrics*. Comenzamos la sección probando –Proposición 2.4.1– que para cualquier serie finita de datos de demanda es posible encontrar una familia finita de índices (o vectores-índice) relajando la relación de preferencia revelada sobre las familias Φ (resp., Ψ) formadas por los subconjuntos inconsistentes (resp., fuertemente inconsistentes) con GARP. Lo anterior nos sugirió introducir los conceptos siguientes: aplicación-índice multiforme –Definición 2.4.1–; aplicación-índice multiforme eficiente, fuertemente eficiente y β^* -eficiente –Definición 2.4.2–; germen de eficiencia –Definición 2.4.4–; variedad de eficiencia, variedad fuertemente eficiente y variedad β^* -eficiente –definición intuitiva (Definición 2.4.3) y formal (Definición 2.4.5)–, los cuales permiten generalizar los conceptos de aplicación-índice, aplicación-índice eficiente, estructura de eficiencia, etc. introducidos en la sección 2.3. Hablando desde la intuición, una variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\xi])$ representa a la familia $\{(\mathcal{F}, [\xi]_{\epsilon_j^*})\}_{j \in J}$ de estructuras de eficiencia determinadas unívocamente por una aplicación multiforme soporte. Estas estructuras de eficiencia son los gérmenes o determinaciones de eficiencia de la variedad $(\mathcal{F}, [\xi])$.

Con el objetivo de generalizar la aproximación a la eficiencia de Afriat construimos un procedimiento –ecuaciones (2.29)-(2.30)– para cuantificar en términos económicos la mínima cantidad de dinero –común a todas las observaciones de cualquier subconjunto inconsistente con GARP– que se le permite “derrochar” a un individuo para que sus elecciones sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad. Este procedimiento –ilustrado en los Ejemplos 2.4.2 y 2.4.3– permite la construcción de una aplicación-índice multiforme $[\epsilon]$. En el Teorema 2.4.1 mostramos que la aplicación-índice $[\epsilon]$ es una aplicación multiforme de eficiencia; i.e., $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ es una variedad de eficiencia. La variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\epsilon])$ –a la que hemos denominado

(por cuestiones obvias) variedad de eficiencia de Afriat– es maximal dentro de las variedades de eficiencia que consideran un índice global común en todas las observaciones de cada subconjunto inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Así, $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ permite cuantificar el porcentaje mínimo de dinero que se le permite derrochar a un consumidor en todas las observaciones de cada subconjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ (determinado unívocamente por la aplicación multiforme soporte $[\varepsilon]$) inconsistente con GARP para eliminar todas las inconsistencias con la teoría neoclásica de la demanda. La matriz de gasto (2.28) del Ejemplo 2.4.4 nos permite inferir que la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ no es β^* -eficiente y, por lo tanto, tampoco fuertemente eficiente. Por otra parte, como la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ es computable presentamos dos procedimientos (algoritmos 14 y 15) que nos permiten hallar en un tiempo polinomial el vector-índice $\bar{\varepsilon}$ para cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} en \mathcal{F} y para cada $\tilde{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ inconsistente o fuertemente inconsistente con GARP. Mostramos además que las estructuras de eficiencia (\mathcal{F}, e^*) y $(\mathcal{F}, \epsilon^*)$ son gérmenes de eficiencia de la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$. Finalmente, mostramos –Proposiciones 2.4.4 y 2.4.5– que las estructuras de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\epsilon_{\Phi}})$ y $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\epsilon_{vs}})$ describen casi-mejor el comportamiento de la demanda que (\mathcal{F}, e^*) y, por otra parte, que los gérmenes de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\epsilon_{vs}^*})$, $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\epsilon_{\mathbb{S}}})$, $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\epsilon_{\mathbb{R}}})$, $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\epsilon_{\Phi^*}})$ y $(\mathcal{F}, [\varepsilon]_{\epsilon_{\Psi}})$ de la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ no describen casi-mejor el comportamiento de la demanda que la estructura de eficiencia de Afriat (\mathcal{F}, e^*) , ni viceversa.

En aras a resolver uno de los problemas más importantes en el estudio no paramétrico de la eficiencia en el consumo que fue planteado por J. Gross (1991) en *The Journal of Political Economy* introducimos una nueva variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [i])$, construida a partir de la función de sobrecompensación de Samuelson¹⁷⁵. La ecuación (2.31) proporciona un procedimiento para definir la aplicación multiforme de eficiencia $[i]$, que tiene como uno de sus gérmenes a la aplicación de eficiencia i de Varian, definida. Por esta razón, a la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [i])$ la hemos denominado variedad de eficiencia de Varian; puesto que generaliza la aproximación a la eficiencia en el consumo de Varian. En el Teorema 2.4.2 hemos probado que $(\mathcal{F}, [i])$ es una variedad de eficiencia. Además, como la estructura de eficiencia de Varian (\mathcal{F}, i) es el germen de eficiencia de $(\mathcal{F}, [i]_{vs})$, la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [i])$ es β^* -eficiente, en virtud de la Proposición 2.3.8. Por otra parte, y dado que $(\mathcal{F}, [i])$ es computable –i.e., admite una construcción algorítmica– presentamos un procedimiento (algoritmo 16) para calcular un vector cualquiera de la familia de vectores-índice determinados por la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [i])$. Finalmente, introducimos la Proposición (2.4.8) y la Proposición 2.4.9 para mostrar que los gérmenes de eficiencia $(\mathcal{F}, [i]_{\epsilon_{\Psi}})$ y $(\mathcal{F}, [i]_{\epsilon_{\mathbb{S}}})$ de la variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [i])$ describen casi-mejor comportamiento ante la demanda que la estructura de eficiencia de Varian (\mathcal{F}, i) , por construcción de la aplicación de eficiencia multiforme $[i]$. Nótese que a pesar de que $(\mathcal{F}, [i])$ resuelve completamente el problema planteado por Gross (1991) en *The Journal of Political Economy*, no permite resolver el problema de la máxima norma de Varian (1990) en *The Journal of Econometrics*: encontrar para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ un conjunto

¹⁷⁵In conclusion, the expenditure index, while quite simple to compute, can lead to incorrect conclusions when testing for differences in tastes [...] It is vital that, under other circumstances and in future research, the more satisfactory metric based on the direct compensation function replace the expenditure index [v. Gross (1991)].

de índices de eficiencia $(e_t)_{t=1}^n$ solución del siguiente problema de optimización:

$$\max_{(e_t)} \sum_{t=1}^n (e_t)^2 \text{ s.a. } R(\bar{e}) \text{ verifique el axioma GARP} \quad (2.48)$$

A continuación presentamos la Definición 2.4.9 con objeto de poder comparar el comportamiento de la demanda entre diferentes variedades de eficiencia. En el Ejemplo 2.4.8 mostramos que las variedades de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ y $(\mathcal{F}, [i])$ no son comparables; i.e., ni $(\mathcal{F}, [i])$ describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$, ni viceversa. Finalizamos la sección introduciendo una nueva variedad de eficiencia $(\mathcal{F}, [\zeta])$ que describirá simultáneamente casi-mejor el comportamiento de la demanda que las variedades de eficiencia $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ y $(\mathcal{F}, [i])$, respectivamente; además de permitir resolver el problema de la “máxima norma” planteado por Varian. Las ecuaciones (2.34) y (2.33) permiten construir una aplicación-índice $[\zeta]$. En el Teorema 2.4.3 mostramos que la aplicación-índice $[\zeta]$ es una aplicación multiforme de eficiencia, lo cual implica que $(\mathcal{F}, [\zeta])$ es una variedad de eficiencia. La serie finita de datos de demanda con matriz de gasto (2.28) muestra que $(\mathcal{F}, [\zeta])$ no es β_* -eficiente y, por lo tanto, tampoco es fuertemente eficiente. Finalmente, en los Teoremas 2.4.4 y 2.4.5 mostramos que $(\mathcal{F}, [\zeta])$ describe casi-mejor el comportamiento de la demanda que $(\mathcal{F}, [\varepsilon])$ y $(\mathcal{F}, [i])$ respectivamente. Por construcción, esta variedad de eficiencia nos permitirá resolver el problema de la “máxima norma” planteado por Varian (1990) en *The Journal of Econometrics* dado que si $[\zeta]$ es la aplicación multiforme de eficiencia definida en (2.34), es claro que para cada serie finita de datos de demanda \mathcal{D} inconsistente con GARP, el vector-perturbación de “máxima norma” es un elemento del haz de eficiencia $(\mathcal{D}, \Phi_{\mathcal{D}}, \Lambda_{\mathcal{D}, [\zeta]})$. El Ejemplo 2.4.10 prueba que este problema es NP-completo.

En la sección 2.5 hemos definido dos estadísticos, basados en las nuevas medidas de eficiencia y en el procedimiento de Tsur, para contrastar la significatividad estadística de una violación GARP. Finalmente, hemos diseñado un software PROGRAM MONTECARLO EXPERIMENT GARP.F90 en el lenguaje de programación FORTRAN 90 a partir del cual hemos realizado un experimento de Monte Carlo para probar cómo el test planteado por Tsur rechaza, en algunas ocasiones, GARP cuando esta violación ha sido producida por la existencia de un pequeño error de medida o de naturaleza estocástica, concluyendo además que el estadístico idóneo para la elaboración de dicho contraste de hipótesis es $\bar{\sigma}^2 = \frac{n\hat{\zeta}_n}{\chi_n^2(\alpha)}$, donde $\hat{\zeta}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \log(\zeta_t)^2$ y $(\zeta_t)_{t=1}^n$ es el conjunto de niveles de eficiencia solución del problema de optimización de la máxima norma que hemos resuelto en la sección 2.4. Para finalizar, señalar que estos procedimientos pueden utilizarse en un futuro para analizar la eficiencia en la teoría de la producción desde una perspectiva no paramétrica puesto que los diferentes procedimientos presentados en este capítulo para analizar la bondad del ajuste son también válidos en la aproximación no paramétrica a la teoría de la producción puesto que los modelos de optimización que aceptan la ineficiencia se obtienen mediante la introducción de un parámetro global e (o conjunto de parámetros $(e_t)_{t=1}^n$, entre cero y uno, con el requisito de que cualquier elección tiene una eficiencia de al menos e). De esta forma nuestras investigaciones en un futuro próximo estarán encaminadas a proponer diferentes

índices de eficiencia en la teoría de la producción e intentar extender los trabajos de Afriat (1972), Varian (1984) y Chavas y Cox (1990).

Análisis Empírico de la Teoría Pura del Consumidor

Los modelos de optimización imponen ciertas condiciones sobre la conducta observada. Contrastar en la práctica una hipótesis económica puede realizarse desde dos aproximaciones distintas: una aproximación paramétrica y otra no paramétrica, basada en la teoría de la preferencia revelada. La aproximación paramétrica requiere, dentro del ámbito de la teoría clásica de la demanda, especificar una forma funcional para la función de utilidad, derivar el conjunto asociado de funciones de demanda, proceder –con la ayuda del conjunto de las elecciones de consumo– a la estimación de los parámetros desconocidos y, finalmente, comprobar si estos parámetros estimados satisfacen las condiciones de integrabilidad. Esta aproximación, que requiere sumergir los datos observados en un contexto paramétrico, presenta desventajas similares a la estimación de los parámetros desconocidos en un modelo paramétrico; las conclusiones dependerán de las especificaciones paramétricas utilizadas. A diferencia del análisis econométrico de la demanda, la preferencia revelada proporciona un procedimiento sistemático para determinar si un conjunto de datos de observaciones precio-cantidades es consistente con algún índice de utilidad. Esta aproximación, permitirá rechazar o aceptar dicha hipótesis sin necesidad de sumergir el modelo en un contexto paramétrico ni imponer, por tanto, ningún tipo de restricción al conjunto de datos observados. La hipótesis se rechaza si se viola al menos una de las restricciones del conjunto de restricciones no paramétricas que la caracterizan; en caso contrario, la hipótesis se acepta. Así pues, la preferencia revelada permite caracterizar la consistencia (con algún índice de utilidad) de las decisiones de consumo de un individuo cualquiera (no necesariamente un *homoeconomicus*), a partir de los datos observados.

Uno de los principales objetivos de la teoría de la preferencia revelada es proporcionar una alternativa lógica equivalente a la convencional que resulte operativa en el estudio empírico de la

conducta del comportamiento del consumidor. En este capítulo abordaremos la cuestión sobre cómo se puede utilizar la teoría de la preferencia revelada para analizar el comportamiento de un consumidor, por tres razones, principalmente. En primer lugar porque, como bien señaló Samuelson en “A Brief Survey for Post-Keynesian Development”, la primera tarea del economista consiste en descubrir correctamente la realidad exterior: una descripción válida carente de explicaciones más profundas vale mil veces más que una explicación inteligente de hechos inexistentes. En segundo lugar, porque la estructura de las preferencias del consumidor es un fenómeno complejo que merece una investigación mayor de la que hasta ahora se ha realizado. Finalmente, porque creemos que los economistas debemos comenzar a explorar los métodos que utilizan los datos recogidos en el mercado, esto es, mediante la preferencia revelada. Los resultados de un análisis empírico semejante podrían proporcionar premisas acerca de la forma de las funciones de utilidad más detalladas que las utilizadas habitualmente en el análisis deductivo, y llevarían, por tanto, a conclusiones más específicas.

Este capítulo ha sido diseñado con objeto de proporcionar una aportación modesta al desarrollo de métodos que sean útiles para describir sistemática y correctamente la estructura de la revelada y mostrar esta teoría como un instrumento operativo del proceso de elección de un individuo. La estructura del capítulo es la siguiente: en la sección 3.1 realizamos un breve análisis de los principales test no-paramétricos de la optimización que permiten caracterizar la racionalidad de un individuo y presentamos, además, una revisión sobre cómo la teoría de la preferencia revelada se ha utilizado con una gran variedad de tipos de datos¹ para analizar la racionalidad de un individuo. En la sección 3.2 utilizaremos el isomorfismo existente entre las relaciones binarias y las matrices booleanas (cuando el conjunto de opciones es finito) para tratar computacionalmente la estructura preferencial de un consumidor y modelizar tanto los diferentes axiomas de preferencia revelada como los principales índices de eficiencia presentados en el segundo capítulo de esta memoria que permiten analizar la bondad del ajuste de los modelos de optimización a partir de un número finito de observaciones. En presentamos el marco teórico del análisis de la sensibilidad de los diferentes tests no paramétricos de la preferencia revelada utilizados en el estudio empírico del comportamiento de un consumidor y generalizamos de manera natural los diferentes modelos clásicos de comportamiento aleatorio de un consumidor que nos permitirán evaluar de manera más precisa la sensibilidad de los diferentes tests no paramétricos en cualquier estudio no paramétrico de la demanda. Es imprescindible analizar tanto la estructura de los datos observados como la potencia del test, pues estos son elementos que proporcionarán al investigador una valiosa información sobre las propiedades de la regla de decisión. Finalmente, y dado que la interpretación experimental² de la teoría de la preferencia revelada es consistente con la metodología positivista de las contribuciones for-

¹Véanse los trabajos de Barnett, Fisher y Sertelis (1992), Choi y Sosin (1992), Drake (1997), Drake y Chrystal (1994), Fleissig, Hall y Seater (2000), Harbaugh y Krause (2001), Patterson (1991) y Turnbull y Chang (1998) entre otros.

²En la teoría neoclásica de la demanda del consumidor se requieren unas condiciones ideales que difícilmente se encuentran en la realidad económica. En un laboratorio se pueden crear unas condiciones muy próximas a aquellas condiciones ideales del modelo teórico del comportamiento optimizador del consumidor.

muladas por Afriat (1967, 1972), Houthakker (1950), Samuelson (1938) y Varian (1982, 1983a, 1983b, 1984, 1985) en sus artículos seminales, en la sección 3.5 presentamos los resultados de dos experimentos económicos diseñados para mostrar en la práctica la aplicabilidad y operativa empíricas de la teoría de la preferencia revelada, además de para analizar la racionalidad de un individuo a partir de las elecciones efectuadas por los agentes que participaron en las pruebas experimentales.

3.1. Antecedentes históricos

La teoría clásica de la demanda tiene por objeto estudiar la estructura de las elecciones de consumo realizadas por un consumidor racional cuando éste se enfrenta con diversos precios y rentas monetarias. El enfoque de la preferencia revelada de Samuelson (1948), Houthakker (1950), Afriat (1967) y Varian (1982) postula la racionalidad de la conducta de un consumidor directamente en términos de ciertas condiciones algebraicas, conocidas como condiciones de preferencia revelada, derivadas de la función de demanda. En su versión reducida, la teoría de la preferencia revelada se limita a un conjunto de datos observables de precios y cantidades demandadas en un contexto competitivo, intentando descubrir todas las implicaciones empíricas de la hipótesis de consistencia del individuo. Esta teoría gira en torno a unas hipótesis o reglas de conducta –el axioma fuerte o el axioma generalizado– que se presentan como condiciones de consistencia razonables con el comportamiento optimizador del consumidor individual. Y, a diferencia del enfoque de Pareto-Slutsky-Arrow, ofrece un procedimiento inmediato para derivar muchas de las desigualdades finitas de carácter fundamental (del tipo de números índices), cuya infracción supondría una refutación definitiva de la hipótesis de consistencia.

En la práctica suele ser conveniente contrastar las condiciones que implican los modelos de optimización por, al menos, por dos razones. En primer lugar, porque si los datos no satisfacen las restricciones teóricas³ que implica un modelo de optimización, no es aconsejable utilizar este modelo para describir la conducta observada. En segundo lugar, porque el hecho de determinar si los datos son consistentes, o no, con la teoría económica nos permite estimar con mayor precisión los parámetros del modelo analizado. Si no se rechazan las restricciones teóricas impuestas por la optimización, es posible que queramos volver a estimar nuestro modelo de tal manera que las estimaciones deban satisfacer las restricciones que implica la optimización. Si la hipótesis de partida es verdadera, el conjunto de estimaciones (restringidas) de los parámetros estimados será, por lo general, más eficiente. Contrastar en la práctica una hipótesis económica puede realizarse desde dos aproximaciones distintas: paramétrica (econométrica) y no paramétrica.

En el ámbito de la teoría clásica de la demanda, la aproximación econométrica requiere especificar una forma funcional para la función de utilidad, derivar el conjunto asociado de funciones de demanda, proceder –con la ayuda del conjunto de datos observados– a la estimación de los parámetros desconocidos y, finalmente, comprobar si estos parámetros estimados satisfacen las condiciones de integrabilidad. Esta aproximación presenta desventajas similares a la estimación de los parámetros desconocidos en un modelo paramétrico; las conclusiones dependerán de las especificaciones paramétricas utilizadas y, por consiguiente, los procedimientos paramétricos no son muy eficaces para determinar si un consumidor presenta (o ha presentado) un comportamiento optimizador.

³Las inconsistencias parecen ser importantes para el análisis positivo, ya que pequeñas desviaciones desde la optimización pueden tener graves efectos en la asignación de recursos [Thaler (1992)].

A diferencia del análisis econométrico de la demanda, la teoría de la preferencia revelada proporciona un procedimiento sistemático para determinar si un conjunto finito de observaciones precio-cantidades es consistente con la maximización de la preferencia (convexa, estrictamente convexa, homotética, separable, débilmente separable, etc.), sin necesidad de imponer ninguna forma funcional específica a los datos observados. La teoría de la preferencia revelada presta especial énfasis a las inferencias que se pueden realizar cuando la clase de conjuntos admisibles factibles está formada por un número finito, fijo, de conjuntos presupuestarios y postula la consistencia de los datos observados con algún modelo de elección a partir de unos contrastes “exactos” de la optimización que determinan las correspondientes condiciones necesarias y suficientes para la coherencia de los datos con el modelo de optimización. Bajo esta versión los economistas se enfrentan a un conjunto finito de observaciones precio-cantidades y se plantean analizar la consistencia del conjunto de datos observados con algún índice de utilidad. Así, esta teoría postula la racionalidad de la conducta de un consumidor directamente en términos de ciertas condiciones algebraicas, conocidas como condiciones de preferencia revelada, derivadas de la función de demanda.

Los test no paramétricos del modelo de maximización de la utilidad permiten rechazar o aceptar la hipótesis de la maximización de la utilidad sin necesidad de sumergir el modelo en un contexto paramétrico ni de establecer ninguna especificación ad hoc de la forma funcional de la función de demanda⁴. En este tipo de pruebas la hipótesis se rechaza si se viola al menos una de las restricciones del conjunto de restricciones no paramétricas que la caracterizan; en caso contrario, la hipótesis se acepta. Los orígenes del uso de los contrastes no paramétricos para determinar las posibles inconsistencias en el conjunto de elecciones de consumo se remonta a Samuelson (1938) y Houthakker (1950). Desde entonces, numerosos autores han probado diversos resultados que han permitido la obtención de la equivalencia lógica entre la teoría de la preferencia revelada y la teoría convencional de la conducta del consumidor y han diseñado multitud de tests no paramétricos que permiten contrastar la consistencia de un conjunto de datos de demanda con la conducta optimizadora de un individuo para una función de utilidad sin necesidad de establecer especificaciones ad hoc de formas funcionales sobre las funciones de demanda. Los trabajos más importantes fueron debidos a Afriat (1967, 1973, 1976, 1977 y 1981).

Afriat (1967) estableció tres nuevas condiciones algebraicas equivalentes: la consistencia cíclica, la consistencia en multiplicadores y la consistencia en multiplicadores y niveles, generalizaciones del Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada y muestra que estas condiciones algebraicas caracterizan la existencia de una función de utilidad continua, cóncava, no saciada y monótona

⁴Los tests no paramétricos se se pueden clasificar en dos grupos: aquellos que imponen que el conjunto de datos observados debe cumplir alguna condición algebraica y aquellos que establecen la consistencia del conjunto de datos en base a la existencia de solución de un cierto problema de programación lineal. Estos test no incorporan ningún error de medida ni de naturaleza estocástica. Una excepción es el axioma de la racionalidad estocástica. Véase McFadden y Richter (1970, 1990).

que racionaliza la conducta observada⁵. Si los datos corresponden a diferentes individuos, las condiciones del teorema de Afriat pueden utilizarse para contrastar la existencia de una función de utilidad común a todos ellos. Este teorema establece que los datos han podido haber sido generados desde el proceso de maximización de una función de utilidad no saciada (condición (i) del Teorema 1.3.2) si y solamente si los datos satisfacen el conjunto de condiciones algebraicas establecidas en la condición 1.24.

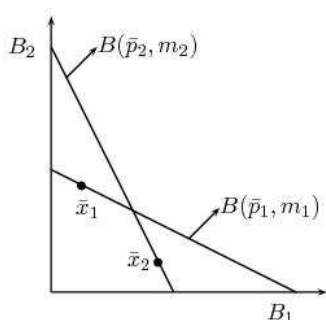


Figura 3.1: Datos violando GARP.

La Figura 3.1 ilustra dos observaciones que no satisfacen la propiedad de la *consistencia cíclica*. En estas observaciones, $\bar{p}_1 \bar{x}_2 < \bar{p}_1 \bar{x}_1$ y $\bar{p}_2 \bar{x}_1 < \bar{p}_2 \bar{x}_2$. Este teorema también establece que una condición equivalente a la *consistencia cíclica* es que se puedan encontrar $2n$ números $\lambda_j > 0$ y u_j ($j = 1, \dots, n$) satisfaciendo las desigualdades descritas en 1.25, desigualdades conocidas como las desigualdades de Afriat. Por ejemplo, en el ejemplo anterior es clara la imposibilidad de encontrar $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y u_1, u_2 satisfaciendo 1.25. Como $\bar{p}_1(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) < 0$ y $\bar{p}_1(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) < 0$, si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ entonces por 1.25 se tiene $u_1 - u_2 < 0$ y $u_2 - u_1 < 0$. Finalmente, la equivalencia entre las condiciones (i) y (iv) del teorema 1.3.2 implica que si uno puede encontrar una función de utilidad que racionaliza los datos, entonces es también posible encontrar una función de utilidad monótona, continua, no saciada y cóncava que los racionaliza.

En “*Afriat and Revealed Preference Theory*”, Diewert (1973) proporcionó una aproximación más accesible a la contribución de Afriat. Paralelamente en el tiempo, Koo presenta en 1971 el trabajo titulado “*Revealed Preference-A Structural Analysis*” que tiene por finalidad dejar indicado un aspecto de la preferencia revelada que ha sido notoriamente desatendido en su desarrollo: su aplicabilidad y operativización empíricas. Es cierto que Houthakker había señalado un campo de aplicación especialmente adecuado para la teoría: la investigación sobre la comparación y los cambios de las preferencias de los consumidores. Pero parece haber sido Koo el único autor en perseguir una elaboración sistemática de esa indicación.

Los trabajos de Afriat (1967), Diewert (1973) y Koo (1971) hicieron que Varian, principal responsable del desarrollo reciente y la popularización de la versión reducida de la teoría de la preferencia revelada, se interesase en cómo hacer operativa dicha teoría⁶. Durante los años posteriores, Varian trabajó en la reformulación de la propiedad de “consistencia cíclica” de Afriat

⁵El Teorema de Afriat establece que la propiedad de la “consistencia cíclica” es necesaria y suficiente para que un conjunto finito de datos de demanda haya sido generado por una función de utilidad no saciada, monótona, continua y cóncava representa las preferencias de un consumidor maximizador de la utilidad.

⁶Varian (2005) señala textualmente: “[...] In 1977, during a visit to Berkeley, Andreu Mas-Collel pointed me to Diewert (1973)’s exposition of Afriat’s analysis, which seemed to me to be a more promising basis for empirical analysis. Diewert (1973) in turn led to Afriat (1967). I corresponded with Afriat during this period, and he was kind enough to send me a package of his writing on the subject. His monograph Afriat (1987) offered the clearest exposition of his work in this area, though, as I discovered, it was not quite explicit enough to be programmed into a computer [...]”.

para que la teoría de la preferencia revelada fuese más favorable al análisis computacional⁷. Varian (1982) presenta una condición algebraica alternativa a la *consistencia cíclica*, el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada (GARP) que agota la lista de restricciones impuestas por el modelo de maximización. En el mismo trabajo, desarrolla un algoritmo para contrastar las hipótesis del Teorema de Afriat y construir explícitamente la función de utilidad que genera la conducta observada de la unidad económica. A raíz de estos trabajos numerosos autores han utilizado esta aproximación en diferentes áreas de la Microeconomía para contrastar si los datos de demanda son consistentes con algún índice de utilidad o han sido generados desde una función de utilidad que satisface ciertas restricciones.

Numerosos autores han diseñado diferentes de tests no paramétricos de la optimización que permiten contrastar la consistencia de un conjunto de datos de demanda con algún índice de utilidad. Afriat (1967, 1972, 1973, 1981), Diewert (1973), Diewert y Parkan (1985) y Varian (1983a) proporcionan tests para la consistencia de los datos de demanda con las funciones de utilidad aditivamente separable, débilmente separables y homotéticas. Matzkin y Richter (1991) proporcionan un test para contrastar si los datos han sido generados por una función de utilidad no saciada, continua, estrictamente monótona y estrictamente cóncava; y Chiappori y Rochet (1987) desarrollan un test para la concavidad estricta y para la diferenciabilidad de clase C^∞ de la función de utilidad. Para proporcionar un ejemplo de una de estas condiciones, las condiciones algebraicas desarrolladas por Chiappori y Rochet son que (i) para toda sucesión $\{i, j, k, \dots, r, l\}$ en $\{1, \dots, n\}$,

$$[\bar{p}_j \bar{x}_i \leq \bar{m}_j, \bar{p}_k \bar{x}_j \leq \bar{m}_k, \dots, \bar{p}_l \bar{x}_r \leq \bar{m}_l] \implies [m_i < \bar{p}_i \bar{x}_i], \text{ y}$$

(ii) para todos i, j $[\bar{x}_i = \bar{x}_j] \implies [\bar{p}_i = \alpha \bar{p}_j \text{ para algún } \alpha > 0]$. Yatchew (1985) extiende las condiciones para la consistencia al caso donde el conjunto de elección está formado por una unión finita de conjuntos convexos. Además, a lo largo de la literatura económica se han desarrollado diferentes tests no paramétricos para la hipótesis de la minimización del coste y de la maximización del beneficio⁸. Supongamos, por ejemplo, que $\{(\bar{y}_t, \bar{p}_t)\}_{t=1}^n$ es un conjunto de observaciones sobre un vector de inputs y outputs, \bar{y} , y un vector de los correspondientes precios, \bar{p} . Entonces, uno de los resultados en los anteriores artículos es que $\{(\bar{y}_t, \bar{p}_t)\}_{t=1}^n$ es consistente con la maximización del beneficio si para todos i, j $\bar{p}_i \bar{y}_i \geq \bar{p}_j \bar{y}_j$ [v. Hanoch y Rothschild (1972)]. Algunos de los anteriores tests ya han sido utilizados en diferentes aplicaciones empíricas⁹. Las restricciones no paramétricas también han sido desarrolladas para contrastar la eficiencia de las tecnologías de producción. Recientemente, se han desarrollado restricciones no paramétricas

⁷Varian (2005) manifiesta: “[...] *I worked on reformulating Afriat’s argument in a way that would be directly amenable to computer analysis. While doing this, I recognized that Afriat’s condition of cyclical consistency was basically equivalent to Strong Axiom. Of course, in retrospect this had to be true since both cyclical consistency and SARP were necessary and sufficient conditions for utility maximization. Even though the proof was quite straightforward, this was a big help to my understanding since it pulled together the quite different approaches of Afriat and Houthakker [...]*”.

⁸Véase Afriat (1972), Diewert y Parkan (1979), Hanoch y Rothschild (1972) y Varian (1984), para más detalles.

⁹Véase Landsburg (1981), McDonald y Manser (1984) y Manser y McDonald (1988).

que caracterizan los datos generados por otros modelos diferentes al problema de optimización de un individuo. Chiappori (1988) desarrolló un test para la optimalidad de Pareto del conjunto de asignaciones de consumo en una economía doméstica utilizando datos sobre el consumo agregado y la oferta de trabajo de cada miembro de la unidad familiar. Brown y Matzkin (1993) desarrollaron un test para el modelo de equilibrio general, usando datos de precios de mercado, dotaciones agregadas, riquezas reales y tasas de beneficio de los consumidores; Varian (1983b) desarrolla un test para el modelo del comportamiento de un inversor, etc.

Finalmente, conviene hacer referencia a un tema que frecuentemente aparece en la teoría del consumidor, y es el de la posibilidad de representar en forma secuencial el problema global a que se enfrenta el consumidor utilizando la denominada “presupuestación multietápica”. A pesar de que en numerosos estudios empíricos de la demanda se parte del supuesto de que el proceso de asignación de recursos se ha llevado a cabo de forma multietápica, este supuesto no debe ser considerado de antemano como cierto, debido a los resultados contradictorios existentes en la literatura económica. Por tanto, en ocasiones, puede resultar interesante contrastar la separabilidad de las preferencias a partir de los datos de demanda observados. Esto es, cabe preguntarse si éstos han sido generados por un proceso de decisión de un consumidor multietápico; o, equivalentemente, si éstos han sido generados por una función de utilidad que verifique el supuesto de la separabilidad débil de las preferencias¹⁰. La condición necesaria para la separabilidad débil es que los subconjuntos de datos verifiquen GARP porque cada observación sobre \bar{y} debe resolver el problema

$$\max v(\bar{y}) \quad s.a. \quad \bar{q}_i \bar{y} \leq \bar{q}_i \bar{y}_i \quad (3.1)$$

La aproximación econométrica requiere suponer que los datos de demanda han sido generados directamente a partir de alguna función de utilidad específica o considerar alguna forma funcional flexible de la demanda¹¹. Sin embargo, esta aproximación no parece ser la más adecuada pues, como señalan Fleissig y Whitney (2003, pág. 134), existen evidencias de cómo las principales formas funcionales flexibles de la demanda no permiten detectar la separabilidad débil, incluso cuando los datos de demanda han sido generados a partir de una función de utilidad separable. Por su parte, como hemos señalado anteriormente, la aproximación no paramétrica no precisa imponer ningún tipo de restricción a los datos observados ni sumergir el modelo en un contexto paramétrico. Dentro de este contexto no paramétrico, diversos autores, entre los que cabe destacar a Afriat (1970, 1972), Varian (1983), Swofford y Whitney (1994) y Fleissig y Whitney (2003), han proporcionado nuevos métodos para evaluar las condiciones de separabilidad a partir de la teoría de la preferencia revelada. Quizás las condiciones necesarias y suficientes más conocidas para contrastar en la práctica la separabilidad débil se derivan del

¹⁰Una función de utilidad $u(\bar{x})$ es débilmente separable en los bienes \bar{y} si existe una función $v(\bar{y})$ y otra función $u^*(\bar{x}, v(\bar{y}))$, la cual es continua, monótona y estrictamente creciente en $v(\bar{y})$, tal que $u(\bar{x}, \bar{y}) \equiv u^*(\bar{x}, v(\bar{y}))$.

¹¹En Barnett y Choi (1989) y Diewert y Wales (1995) se puede encontrar una revisión de los principales test paramétricos (existentes en la literatura económica) que permiten analizar la separabilidad débil de las preferencias.

trabajo de Varian (1983) en el cual se prueba que una condición necesaria y suficiente¹² para que un conjunto finito de datos de demanda observados, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, haya sido generado por una función de utilidad débilmente separable, cóncava, monótona, continua y no saciada que racionaliza los datos es que existan $2n$ números $u_j, v_j, \lambda_j > 0, \mu_j > 0$ satisfaciendo el siguiente sistema de desigualdades lineales para $i, j = 1, \dots, n$:

$$u_i \leq u_j + \lambda_j \bar{p}_j (\bar{x}_i - \bar{x}_j) + (\lambda_j / \mu_j) (v_i - v_j) \quad (3.2)$$

$$v_i \leq v_j + \mu_j (y_i - y_j) \quad (3.3)$$

o, equivalentemente, si se cumple la siguiente condición: los datos (\bar{q}_t, \bar{y}_t) y $(\bar{p}_t, 1/\mu_t; \bar{x}_t, v_t)$ satisfacen GARP para alguna elección de (v_t, μ_t) que satisfice las desigualdades de Afriat. Esta condición equivale a evaluar GARP con $1/\mu_t$ como grupo de precios índice y v_t como el grupo de índices de cantidades para los bienes separables \bar{y} . En consecuencia, para determinar si los datos han sido generados desde una preferencia débilmente separable, bastará probar que el sistema (3.2)-(3.3) formado por $2n(n-1)$ ecuaciones –la mitad de ellas no lineales– es factible o, equivalentemente, encontrar un grupo de bienes \bar{y} satisfaciendo la condición anterior.

Varian (1982) diseña un programa, NONPAR, escrito en el lenguaje de programación FORTRAN77 para poder contrastar en la práctica la separabilidad débil de la preferencia. El procedimiento está basado en esta última condición y, como consecuencia de las restricciones computacionales, el programa NONPAR contrasta las condiciones suficientes, pero no las necesarias para la separabilidad débil¹³. Por otra parte, merece la pena resaltar que, tras evaluar el software NONPAR, Barnett y Choi (1989) encontraron fallos en la detección de la separabilidad; incluso cuando los datos habían sido generados desde una función Cobb-Douglas sin ningún error de medida. Fleissig y Whitney (2003, pág. 135) señalan que el hecho de que el NONPAR no detecte correctamente la separabilidad puede que esté ocasionado por la manera en que los v_t y los μ_t están calculados. Estos autores proporcionan un procedimiento alternativo para obtener estimaciones correctas para los v_t y los μ_t que sean consistentes con la teoría económica y que, en consecuencia, se puedan utilizar para contrastar la separabilidad débil de las preferencias. Para ello, sugieren encontrar un buen estimador de la función de utilidad de agregación $v(\bar{y})$ a partir de un número índice superlativo que se postula como una aproximación a la función de agregación¹⁴. Así, un natural punto de partida es utilizar un índice superlativo para obtener estimaciones para v_t y un correspondiente rango para μ_t que satisfaga las condiciones de Afriat. Sin embargo, esto no soluciona la cuestión debido a la posible existencia de errores en las aproximaciones de orden superior a tres a la función de agregación. Para solventar esta cuestión, Fleissig y Whitney (2003) emplean el índice de Törnqvist, la aproximación en tiempo

¹²Otra caracterización equivalente es la siguiente: los datos (\bar{q}_t, \bar{y}_t) y $(\bar{p}_t, 1/\mu_t; \bar{x}_t, v_t)$ satisfacen GARP para alguna elección de (v_t, μ_t) que satisfice las desigualdades de Afriat. Esta condición equivale a evaluar GARP con $1/\mu_t$ como grupo de precios índice y v_t como el grupo de índices de cantidades para los bienes separables \bar{y} .

¹³Véase Gross (1995), Fleissig y Whitney (2003), para más detalles.

¹⁴En algunos artículos realmente muy destacables, Diewert (1976, 1978) muestra que emplear un número índice estadístico equivale a utilizar una particular función de agregación. Este autor define un número índice como superlativo si proporciona una aproximación de segundo orden a la función de agregación desconocida.

discreto al índice Divisia, como índice superlativo para estimar el índice agrupado de cantidades porque, además de ser un índice superlativo, puede derivarse desde un proceso de optimización restringida¹⁵. Para finalizar esta breve reseña sobre la separabilidad débil, señalar que en Afriat (1987, págs. 149-151) se pueden encontrar las condiciones algebraicas del tipo de la preferencia revelada, necesarias y suficientes para la separabilidad débil, la separabilidad y la separabilidad aditivas de las preferencias de un consumidor.

La teoría de la preferencia revelada se ha utilizado con diferentes tipos de datos: series temporales, datos de panel¹⁶ y datos experimentales. Diversos autores, entre los que cabe destacar a Landsburg (1981), Varian (1982), Banker y Maindiratta (1988) y Chavas y Cox (1990) entre otros, han utilizado la teoría de la preferencia revelada para analizar cambios estructurales en la demanda agregada. En economía aplicada, el modo natural de estudiar las respuestas de la demanda a cambios hipotéticos de política económica o tecnología es trabajar con estimaciones de funciones paramétricas de demanda, funciones éstas que, en general, no se derivan de la maximización de la utilidad [v. Deaton y Muelbauer (1980)]. Por tanto, contrastar (a partir de la preferencia revelada) la consistencia de los datos agregados de demanda con la teoría neoclásica de la demanda suele ser, en primer lugar, un paso previo a la estimación econométrica y, en segundo lugar, necesario dado que, como señala Thaler (1992), pequeñas desviaciones desde la optimización pueden tener graves efectos en la asignación de recursos. Landsburg (1981) y Varian (1982), utilizando datos procedentes de series temporales, examinaron la existencia de cambios estructurales en el tiempo de los patrones de consumo. Por otra parte, Banker y Maindiratta (1988) y Chavas y Cox (1990), entre otros, también han empleado esta aproximación para estudiar el comportamiento empresarial. Cabe señalar que cuando se está modelizando el comportamiento de un consumidor, los modelos agregados de series temporales parten de la consideración de un agente representativo al que se asimilan las observaciones agregadas. Es una creencia corriente el que la agregación a menudo oculta características interesantes del problema analizado debido a que los modelos agregados de series temporales parten de la consideración de un agente representativo al que se asimilan las observaciones agregadas. Por esta razón, algunos autores señalan que, a pesar de que en numerosos trabajos se han utilizado datos agregados para estudiar empíricamente el comportamiento de un consumidor, esta aproximación resulta inapropiada para estudiar el comportamiento de un consumidor¹⁷. Estos autores sugieren utilizar datos sobre las características y las decisiones de las unidades familiares (datos de panel), puesto que estas observaciones suelen ser las que más se aproximan al nivel al que han sido formuladas las teorías en las que se basa el modelo neoclásico de un consumidor¹⁸. Así,

¹⁵Véanse los trabajos de Barnett (1978) y Barnett, Fisher y Sertelis (1992), Diewert (1976,1978) y Fleissig y Whitney (2003, pág. 136, teorema 1) para más detalles.

¹⁶Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

¹⁷Durante los últimos años 70 y principios de los años 80 existió un considerable interés dentro de la comunidad científica en estimar funciones agregadas de la demanda del consumidor. Véanse, por ejemplo, los trabajos de Christensen, Lars, Jorgensen y Lau (1975) y Deaton (1983), entre otros.

¹⁸Houthakker y Taylor (1970, pág. 200) afirman: “[...] *we have to look one difficulty firmly in the face, and pass on, following the proverbial Scottish preacher’s example. The theory of the dynamic preference ordering given here is strictly in terms of a single individual, yet we apply it to entire countries [...]*”.

los datos de panel son más adecuados (para analizar el comportamiento de un consumidor) que las series temporales de demanda agregada por evitar los problemas de agregación y facilitar el seguimiento del comportamiento individual en el tiempo¹⁹

A lo largo de los años 80 se desarrolló dentro de la comunidad científica un creciente interés en utilizar los datos de panel en los estudios económicos y fundamentalmente en los estudios econométricos del comportamiento de un consumidor. Según la evidencia existente en la literatura parece ser que Koo ha sido el primer autor en llevar a cabo un análisis empírico de la demanda desde una perspectiva no paramétrica. Koo (1963) publica el primer estudio empírico del comportamiento de un consumidor (utilizando la teoría de la preferencia revelada como herramienta) que emplea datos sobre las características y las decisiones de las unidades familiares procedentes de un panel completo de hogares para contrastar la racionalidad de las decisiones de consumo de las economías domésticas con el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada. Este autor utilizó un conjunto de datos de panel procedentes de un panel completo de hogares formado por una muestra de 250 familias de la ciudad de Michigan para los que disponía de información trimestral de la configuración de gasto de la demanda de productos alimenticios. Durante el período que transcurre entre los años 1951 y 1958 estas familias anotaban semanalmente en un diario los precios, las cantidades consumidas y el gasto realizado para cada bien de consumo adquirido para el consumo doméstico en cada una de las semanas de ese período. Mossin (1972), en un estudio similar, contrasta empíricamente la el modelo neoclásico de la teoría de la demanda a partir de un conjunto de datos de panel (que refleja, en la información de venta, la composición del consumo de los consumidores daneses) formado por 52 observaciones temporales sobre una muestra de 97 unidades individuales para analizar la racionalidad del conjunto de elecciones de consumo de un consumidor con el Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada. El conjunto de datos de panel utilizado en la comprobación empírica del axioma débil y del Axioma Fuerte de la Preferencia Revelada fue seleccionado a partir de un muestreo estratificado del conjunto de elecciones de consumo original, de tal modo que Mossin considera un conjunto homogéneo de 49 consumidores daneses para realizar la comprobación empírica. Mattei (1994) analiza la racionalidad de un consumidor a partir de un conjunto de datos de panel de bienes no duraderos (procedentes de la Oficina Federal Suiza de Estadística) durante el período que transcurre entre 1975 y 1987. El conjunto de datos empleados por este autor –formado por 52 observaciones temporales y con un nivel de desagregación de 188 bienes homogéneos– está muy próximo a cumplir todas las hipótesis clásicas del modelo optimizador de la utilidad. Famulari (1995) utilizó datos de panel²⁰ para analizar el efecto que las características demográficas tienen sobre la demanda. Esta autora encontró que las familias con similares características demográficas tienen similares patrones de comportamiento frente al consumo y, además, las decisiones de consumo de estos hogares son esencialmente consistentes con las

¹⁹Deaton y Muellbauer (1980) señalan textualmente: “[...] *if...*, as is frequently the case, the data are available only for aggregates of households, there are no obvious grounds why the theory, formulated for individual households, should be directly applicable [...]”.

²⁰Este tipo de datos permite analizar y estimar la influencia de diferentes variables socio-demográficas en los patrones de consumo de un individuo.

diferentes condiciones algebraicas de la preferencia revelada. Más recientemente, otros autores entre los que cabe destacar a Manser y McDonald (1988), Famulari (1995) o Dowrick y Quiggin (1994, 1997) han utilizado este tipo de datos para analizar, a partir de la teoría de la preferencia revelada, el comportamiento de un consumidor.

Paralelamente, se llevaron a cabo diferentes estudios experimentales sobre el comportamiento de un consumidor. La Economía Experimental permite reproducir las condiciones ideales de la teoría clásica de la demanda y obtener, al mismo tiempo, una elevada fiabilidad de los diferentes tests de preferencia revelada que permiten analizar la racionalidad y cuantificar el grado de coherencia de las decisiones de consumo efectuadas por un individuo, dado que en un laboratorio se pueden crear las condiciones ideales que propugna esta teoría. Mediante el uso de experimentos controlados podemos tener una elevada fiabilidad de los diferentes tests no paramétricos o condiciones de consistencia y al mismo tiempo reproducir todas las hipótesis teóricas. Como consecuencia de ello, una interpretación experimental de la teoría de la preferencia revelada es consistente con la metodología positivista de las contribuciones formuladas por Samuelson (1938, 1948), Houthakker (1950) y Afriat (1967) en sus artículos seminales. Battalio et. al. (1973) fueron los primeros autores en señalar la necesidad de controlar las condiciones de obtención de los datos necesarios para estudiar el comportamiento racional de un consumidor debido a que en la teoría clásica de la demanda se requieren unas condiciones ideales que difícilmente se van a encontrar en la realidad económica y a que los datos de panel presentan una serie de problemas²¹ y limitaciones que pueden ocasionar que los resultados obtenidos sean sesgados. Battalio et. al. (1973) simularon en el laboratorio una economía fiduciaria para realizar su estudio experimental sobre la racionalidad de un consumidor. Los psicólogos del Hospital Psiquiátrico del Estado de Islip desarrollaron una economía fiduciaria por razones terapéuticas. Las observaciones de las decisiones de consumo se realizaron sobre tres grupos de bienes por el espacio de 7 semanas. Durante este período, cambiaron de forma notable los precios de los productos con el objeto de incrementar el número de intersecciones de los diferentes conjuntos presupuestarios. El comportamiento de la mitad de los 38 pacientes fue inconsistente con la teoría neoclásica del consumidor. Los errores en la obtención de los datos y la naturaleza de los pacientes disminuyeron la importancia de este interesante experimento. Cox (1989) examinó los mismos datos y amplió más el análisis en varias direcciones. En 1997 se realizó la primera aproximación experimental a la teoría pura de la conducta del consumidor en un entorno controlado. Sippel (1997) diseñó dos experimentos con bienes de consumo reales para analizar la racionalidad de las decisiones de consumo de un individuo en un entorno controlado. Los participantes en el experimento eran estudiantes de Economía o Derecho a los que se les pagó

²¹Uno de los problemas fundamentales es el de los errores de medida, especialmente en variables financieras, que son endémicos en las encuestas (en tanto que los agentes tienen un incentivo a no responder o a dar respuestas falsas de forma sistemática; sobre este punto véase, por ejemplo, Bowden (1989) y se ven acentuados en los paneles como consecuencia de las entrevistas repetidas a los mismos individuos. Otro problema serio es la existencia de una posible variación de las preferencias del consumidor en el tiempo, debido a la necesidad de tener datos de la misma familia a lo largo de varios meses o años, y el de la falta de representatividad de la muestra tras una serie de períodos debido a la imposibilidad de encontrar los mismos individuos o a las negativas a responder.

25 DM por participar en un laboratorio experimental donde tuvieron que elegir entre 8 bienes en 10 situaciones diferentes de precios. Una de las situaciones fue dibujada y consumida en el acto. En el primer experimento el 58.3% de los participantes fueron consistentes con GARP y el (1-11/12)% violaron SARP. En un segundo experimento Sippel implementó una matriz de compensación de Slutsky para cambiar los precios de los productos. En este caso el 73.3% de los participantes violaron SARP y el 63.3% violaron GARP. Kagel y Roth (1995) exponen varios estudios que examinan el comportamiento animal; mientras que Mattei (2000) –en un trabajo similar al realizado por Sippel– encontró que el 25%, el 44% y el 32% de los participantes en sus experimentos mostraron una incoherencia en sus decisiones de consumo. Trabajos similares han sido llevados a cabo por Harbaugh, Krause y Berry (2001), Andreoni y Miller (2002). Estos autores analizan la racionalidad en los niños y el comportamiento altruista en un experimento de bienes públicos.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1967) The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*, Vol. 8(1), págs. 67-77.
- [2] Afriat, S. (1970) The Theory of International Comparisons of Real Income and Prices. En *International Comparisons of Prices and Output, Proceedings of the Conference at York University, Toronto, 1970*, D. Daly (eds.). National Bureau of Economic Research, *Studies in Income and Wealth*, Vol. 37, New York, 1972. (Capítulo I, 13-84).
- [3] Afriat, S. (1972) Efficiency Estimates of Production Functions *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 568-598.
- [4] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An Extension of the Classical Method. *International Economic Review*, Vol. 14(2), págs. 460-72.
- [5] Afriat, S. (1976) *Combinatorial Theory of Demand*. London: Input-Output Publishing Company.
- [6] Afriat, S. (1977) *The Price Index*, London: Cambridge University Press.
- [7] Afriat, S. (1981) On the Constructibility of Consistent Price Indices Between Several Periods Simultaneously. In *Essays in Theory and Measurement of Demand: 30 in honour of Sir Richard Stone*, Angus Deaton (ed.). Cambridge University Press, págs. 133-61.
- [8] Afriat, S. (1987) *Logic of Choice and Economic Theory*. Oxford: Clarendon Press.
- [9] Andreoni, J. y J. Miller (2002) Giving According to GARP: An Experimental Test of the Consistency of Preferences for Altruism. *Econometrica*, Vol. 70(2), págs. 737-753.

-
- [10] Banker, R. y Maindiratta, A. (1988) Nonparametric Analysis of Technical and Allocative Efficiencies in Production. *Econometrica*, Vol. 56, págs. 1315-1332.
- [11] Barnett, W. (1978) The user cost of money. *Economics Letters*, Vol. 1, págs. 145-149.
- [12] Barnett, W. y Choi, S. (1989) A Monte Carlo study of tests of blockwise weak separability. *Journal of Business and Economics Statistics*, Vol. 7, págs. 363-77.
- [13] Barnett, W., Fisher, D., y A. Serletis (1992) Consumer Theory and the Demand for Money. *Journal of Economic Literature*, Vol. 4, págs. 2086-2119.
- [14] Battalio, R.C. et al. (1973) A Test of Consumer Demand Theory Using Observations of Individual Consumer Purchases. *Western Economic Journal*, Vol. 11, págs. 411-428.
- [15] Brown, D. y R. Matzkin (1996) Testable Restrictions on the Equilibrium Manifold. *Econometrica*, Vol. 64, págs. 1249-1262.
- [16] Chavas, J. y T. Cox (1990) A Non-Parametric Analysis of Productivity: the Case of U.S. and Japanese Manufacturing, Vol. 80(3), págs. 450-464.
- [17] Chiappori, P. y J. Rochet (1987) Revealed Preferences and Differentiable Demand. *Econometrica*, Vol. 55(3), págs. 687-691.
- [18] Chiappori, P. (1988) Rational Household Labor Supply. *Econometrica*, Vol. 56(1), págs. 63-89.
- [19] Christensen, L., Jorgenson, D. y Lau, L. (1975) Transcendental Logarithmic Utility Functions. *American Economic Review*, Vol. 65, págs. 367-383.
- [20] Cox, J.C. (1989) On Testing the Utility Hypothesis. Technical Report, University of Arizona.
- [21] Deaton, A. y Muelbauer (1980) An Almost Ideal Demand System. *American Economic Review*, Vol. 70(3), págs. 312-326.
- [22] Deaton, A. (1983) Demand Analysis. In *Hanbook on Econometrics*, Vol. III, Cap. 30, Z. Griliches y M. Intrilligator (ed.). JAI Press, Greenwich, CT, págs. 1768-1840.
- [23] Diewert, E. (1973) Afriat and Revealed Preference Theory. *Review of Economic Studies*, Vol. 40, págs. 419-426.
- [24] Diewert, E. (1976) Exact and Superlative Indexes. *Journal of Econometrics*, Vol. 4, págs. 115-145.
- [25] Diewert, E. (1978) Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation. *Econometrica*, Vol. 46, págs. 883-900.

- [26] Diewert, E. y C. Parkan (1979) Linear Programming Tests of Regulatory Conditions for Production Functions. Working Paper 79-01, University of British Columbia.
- [27] Diewert, E. y C. Parkan (1985) Tests for the Consistency of Consumer Data. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 127-147.
- [28] Diewert, E. y T. Wales (1995) Flexible Functional Forms and tests of Homogeneous Separability. *Journal of Econometrics*, Vol. 67, págs. 259-302.
- [29] Dowrick, S. y J. Quiggin (1994) International Comparisons of Living Standards and Tastes: A Revealed-Preference Analysis. *The American Economic Review*, Vol. 84(1), págs. 332-341.
- [30] Dowrick, S. y J. Quiggin (1997) True Measures of GDP and Convergence. *The American Economic Review*, Vol. 87(1), págs. 41-64.
- [31] Famulari, M. (1995) A Household-Based, Nonparametric Test of Demand Theory. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 77, págs. 372-383.
- [32] Fleissig, A. y G. Whitney (2003) A New PC-Based Test for Varian's Weak Separability Conditions. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 21(1), págs. 133-44.
- [33] Gross, J. (1995) Testing Data for Consistency with Revealed Preference. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 77(4), págs. 701-710.
- [34] Hanoch, G. y M. Rothschild (1972) Testing the Assumptions of Production Theory: A Nonparametric Approach. *Journal of Political Economy*, Vol. 8, págs. 256-272.
- [35] Harbaugh, W.; Krause K. y T. Berry (2001) GARP for Kids: On the Development of Rational Choice Behavior. *American Economic Review*, Vol. 91(5), págs. 1539-1545.
- [36] Houthakker, H. (1950) Revealed Preference and the Utility Function. *Economica*, Vol. 17, págs. 159-174.
- [37] Houthakker, H. y L. Taylor (1970) *Consumer Demand in the United States: Analyses and Projections*, 2ª edición ampliada, Cambridge: Harvard University Press.
- [38] Kagel, J. y A. Roth (1995) *The Handbook of Experimental Economics*. Princeton, Princeton University Press.
- [39] Koo, A. (1963) An Empirical Test of Revealed Preference Theory. *Econometrica*, Vol. 31(4), págs. 646-664.
- [40] Koo, A. (1971) Revealed Preference-A Structural Analysis. *Econometrica*, Vol. 39(1), págs. 89-97. [Spanish Translation: Preferencia revelada: un análisis estructural. *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 381-398.]

- [41] Landsburg, S. (1981) Taste Change in the United Kingdom, 1900-1955. *Journal of Political Economy*, Vol. 89(11), págs. 92-104.
- [42] Manser, M. y R. McDonald (1988) An Analysis of Substitution Bias in Measuring Inflation 1959-85. *Econometrica*, Vol. 56, págs. 909-930.
- [43] Mattei, A. (1994) La Coherence des Choix des Cosommateurs Suisses. *Revue Suisse d'Economie Politique et de Statistique*, Vol. 30, págs. 3-20.
- [44] Mattei, A. (2000) Full-Scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data. *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 43, págs. 487-497.
- [45] Matzkin, R. y Richter, M. (1991) Testing Strictly Concave Rationality. *Journal of Economic Theory*, Vol. 53, págs. 287-303.
- [46] McFadden, D. y M. Richter (1970) Stochastic Rationality and Revealed Stochastic Preference. Department of Economics, University of California, Berkeley, mimeo.
- [47] McFadden, D. y M. Richter (1991) Stochastic Rationality and Revealed Stochastic Preference. In *Preferences, Uncertainty and Rationality*, J. Chipman, D. McFadden y M.K. Richter (eds.). Westview Press, págs. 161-186.
- [48] Mossin, A. (1972) A Mean Demand Function and Individual Demand Functions Confronted with the Weak and Strong Axioms of Revealed Preference. *Econometrica*, Vol. 40, págs. 177-192.
- [49] Pollack, R. (1990) Distinguished Fellow: Houthakker's Contributions to Economics *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 4(2), págs. 141-156.
- [50] Samuelson, P. (1938) A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior. *Economica N.S.*, Vol. 5, págs. 353-354.
- [51] Samuelson, Paul A. (1948) Consumption Theory in Terms of Revealed Preference. *Economica*, Vol. 15, págs. 243-253.
- [52] Samuelson, P. (1950) The Problem of Integrability in Utility Theory. *Economica S.N.*, Vol. 17, págs. 355-385.
- [53] Sippel, R. (1997) An Experiment on the Pure Theory of Consumer's Behaviour. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1431-1444.
- [54] Swofford, J. y Whitney, G. (1994) A revealed preference test for weakly separable utility maximization with incomplete adjustment. *Journal of Econometrics*, Vol. 60, págs. 235-49.
- [55] Thaler, R. (1992) *Quasi Rational Economics*, Russell Sage Foundation, New York.

-
- [56] Varian, H. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50(4), págs. 945-971.
- [57] Varian, H. (1983a) Nonparametric Test of Models of Consumer Behavior. *Review of Economic Studies*, Vol. 50, págs. 99-110.
- [58] Varian, H. (1983b) Nonparametric Tests of Models of Investor Behavior. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18(3), págs. 269-278.
- [59] Varian, H. (1984) The Nonparametric Approach to Production Analysis. *Econometrica*, Vol. 52(3), págs. 579-597.
- [60] Varian, H. (2005) Revealed preferences. In *Samuelsonian Economics and the 21st Century*, Michael Szenberg (ed.). Oxford University Press, págs. 99-115.
- [61] Yatchew, A. (1985) A Note on Nonparametric Tests of Consumer Behavior. *Economic Letters*, Vol. 18, págs. 45-48.

3.2. Operatividad de la teoría de la preferencia revelada

El hilo conductor del desarrollo de la teoría de la preferencia revelada ha sido la obtención de la equivalencia lógica entre esta teoría y la teoría convencional de la conducta del consumidor²². Uno de los objetivos expresamente perseguidos por la preferencia revelada es –tal y como señaló Houthakker (1950)– intentar proporcionar una visión unificada de la conducta del consumidor que, al mismo tiempo, resulte operativa en el estudio empírico de la conducta del consumidor. Es innegable que la preferencia revelada ofrece, y sobre todo ofrecía en los tiempos de su introducción, cierto atractivo fundado en características bien definidas²³.

En la literatura económica son numerosos –como hemos mostrado en la sección anterior– los trabajos donde se presentan los resultados que establecen esta equivalencia lógica y los que desarrollan diferentes tests no paramétricos que permiten analizar la consistencia de los datos con algún índice de utilidad. Sin embargo, y a pesar de los numerosos trabajos donde se ha utilizado la teoría de la preferencia revelada en la teoría clásica de la demanda, existe un aspecto de la preferencia revelada que ha sido notoriamente desatendido en su desarrollo: su aplicabilidad y operativización empírica; a pesar de que ya desde sus orígenes, Houthakker había señalado que la investigación sobre la comparación y los cambios de las preferencias de los consumidores constituye un campo de aplicación especialmente adecuado para esta teoría y de que en numerosos trabajos empíricos del comportamiento de un consumidor. Según la evidencia existente en la literatura, parece ser los artículos de Koo (1963, 1971), junto con las réplicas realizadas por Dobell (1965) y Uebe (1972), y los trabajos de Varian (1982) y Wakker (1997) los únicos estudios que analizan este aspecto y donde se realiza una aproximación a la cuestión de la operatividad de la teoría de la preferencia revelada. Esta sección tiene por finalidad proporcionar una metodología sobre la aplicabilidad y operativización empírica de la teoría de la preferencia revelada.

En esta sección realizamos una aproximación sistemática a la operatividad de la teoría de la preferencia revelada a partir del isomorfismo existente entre la relación de preferencia revelada asociada a un conjunto finito de datos de demanda, las matrices booleanas y los grafos dirigidos finitos que nos permiten trabajar computacionalmente con dicha relación. Analizaremos la consistencia de los datos a partir de las matrices booleanas y los grafos dirigidos, proporcionaremos dos nuevas medidas globales de eficiencia –que permiten analizar la bondad del ajuste del modelo de la maximización de la utilidad– y, finalmente, mostramos cómo estas técnicas pueden ser empleadas para el análisis de la racionalidad y eficiencia en los modelos clásicos de la teoría de la producción.

²²Merece especial mención el artículo de Samuelson (1938) titulado “A Note on the Pure Theory of Consumer’s Behavior”, donde se presenta la primera formulación de la teoría y las motivaciones y objetivos a que responde y se pretenden satisfacer con ella.

²³La Preferencia Revelada gira en torno a unas hipótesis o reglas de conducta –el Axioma Débil, el Axioma Fuerte o el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada– que se presentan como condiciones de consistencia mínima y razonables en relación con el comportamiento de las elecciones efectuadas por un agente económico.

La teoría pura del comportamiento del consumidor tiene por objeto estudiar la estructura de las elecciones de consumo realizadas por un consumidor racional cuando éste se enfrenta con diversos precios y rentas. Las matrices booleanas y los grafos dirigidos nos permitirán interpretar y analizar la estructura de las elecciones de consumo realizadas por un individuo cuando éste se enfrenta con diversos precios y rentas²⁴. Para analizar la estructura preferencial de un individuo tendremos en cuenta el isomorfismo existente entre las relaciones binarias y las matrices booleanas cuando el conjunto de opciones es finito. Gracias al isomorfismo existente entre las relaciones binarias y las matrices booleanas cuando el conjunto de opciones es finito, el análisis de la coherencia y de la estructura de las elecciones efectuadas por un agente económico podrá llevarse a cabo de forma computacional mediante las matrices booleanas y los grafos dirigidos asociados a la relación de preferencia revelada determinada por una serie finita de datos de demanda. A continuación, pasamos a considerar el álgebra de las matrices booleanas, herramienta fundamental en el estudio empírico del comportamiento de un consumidor²⁵.

El profesor Rodríguez-Palmero (1997) muestra cómo el álgebra de las matrices booleanas constituye una herramienta fundamental en el estudio empírico del comportamiento de un consumidor. A partir del álgebra de Boole $\langle \{0, 1\}, +, \cdot, ^c \rangle$, cuyas operaciones vienen dadas en las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

	^c
1	0
0	1

se define el álgebra de matrices booleanas $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}), +, \odot, \cdot, ^t, ^c, O_n, I_n \rangle$, donde $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}) \rangle$ es el conjunto de matrices cuadradas de orden n sobre $\{0, 1\}$ y las operaciones entre matrices booleanas se definen como sigue:

$$\text{suma: } (M + N)[i, j] = M[i, j] + N[i, j],$$

$$\text{producto lógico: } (M \odot N)[i, j] = M[i, j] \cdot N[i, j],$$

$$\text{producto: } (M \cdot N)[i, j] = \sum_{k=1}^n M[i, k] \cdot N[k, j],$$

$$\text{trasposición: } M^t[i, j] = M[j, i],$$

$$\text{complemento: } M^c[i, j] = (M[i, j])^c,$$

$$\text{matriz nula: } O_n,$$

$$\text{matriz identidad: } I_n.$$

El siguiente resultado pone de manifiesto la existencia de un isomorfismo entre el álgebra de las matrices booleanas con las operaciones descritas y el álgebra de las relaciones binarias

²⁴La matriz $M \in \mathcal{M}(\{0, 1\})$ es una aplicación $M : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ de forma que $M[i, j]$ es el elemento de M situado en la fila i y en la columna j .

²⁵Véase Álgebra Booleana en el Glosario Terminológico, para más detalles.

definidas sobre un conjunto finito de opciones²⁶. La siguiente proposición, formulada y probada por Rodríguez-Palmero (1997), muestra que si denotamos por $\mathcal{R}(X)$ al conjunto de relaciones binarias sobre cualquier conjunto finito de opciones $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, entonces la aplicación ϕ definida sobre $\mathcal{R}(X)$ que asigna a cada relación binaria T su matriz booleana asociada M_T es un isomorfismo entre las álgebras $\langle \mathcal{R}(X), \cup, \cap, \circ, ^{-1}, ^c, \emptyset, \Delta \rangle$ y $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}), +, \odot, \cdot, ^t, ^c, O_n, I_n \rangle$.

Proposición 3.2.1 *Sea $\mathcal{R}(X)$ el conjunto de relaciones binarias sobre $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$. La aplicación $\phi : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{M}(\{0, 1\})$, definida por $\phi(T) = M_T$, con*

$$M_T(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x}_i T \bar{x}_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es un isomorfismo entre las álgebras $\langle \mathcal{R}(X), \cup, \cap, \circ, ^{-1}, ^c, \emptyset, \Delta \rangle$ y $\langle \mathcal{M}(\{0, 1\}), +, \odot, \cdot, ^t, ^c, O_n, I_n \rangle$.

Demostración: Si S y T son dos relaciones binarias sobre X tales que $M_S = M_T$, entonces $\bar{x}_i S \bar{x}_j \Leftrightarrow M_S[i, j] = 1 \Leftrightarrow M_T[i, j] = 1 \Leftrightarrow \bar{x}_i T \bar{x}_j$, es decir, $S = T$; por otra parte, dada una matriz booleana $M \in \mathcal{M}(\{0, 1\})$, se tiene que $M = M_S$, con S la relación binaria sobre X definida por $\bar{x}_i S \bar{x}_j \Leftrightarrow M[i, j] = 1$. ■

Del isomorfismo entre relaciones binarias y matrices booleanas se tienen las siguientes propiedades²⁷ para cualquier par de relaciones binarias S y T sobre X :

$$\begin{aligned} M_{S \cup T} &= M_S + M_T, & M_{S \cap T} &= M_S \odot M_T, & M_{S \circ T} &= M_S \cdot M_T, \\ M_{S^{-1}} &= M_S^t, & M_{S^c} &= M_S^c, & M_{\emptyset} &= O_n, & M_{\Delta} &= I_n. \end{aligned}$$

Además, también es posible caracterizar la relación de inclusión entre relaciones binarias. Este hecho aparece demostrado en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1 *Si S y T son dos relaciones binarias sobre $X = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, entonces:*

$$S \subseteq T \Leftrightarrow M_S + M_T = M_T \Leftrightarrow M_S \odot M_T = M_S$$

Demostración: Este resultado se deduce inmediatamente a partir del isomorfismo existente entre las matrices booleanas y las relaciones binarias y de la equivalencia entre las condiciones $S \subseteq T$, $S \cup T = T$ y $S \cap T = S$. ■

En virtud de la correspondencia biunívoca entre las matrices booleanas y los grafos dirigidos finitos, las relaciones binarias definidas sobre conjuntos finitos de opciones pueden representarse, a su vez, de forma biunívoca mediante grafos dirigidos finitos²⁸. Esta representación es realmente

²⁶El profesor Rodríguez Palmero, en una excelente investigación caracterizó en términos de matrices booleanas las preferencias k-acíclicas, k-transitivas, pseudotransitivas, acíclicas, los órdenes de intervalo, los semiórdenes, etc. en aras de describir la capacidad limitada de los individuos para percibir y juzgar las opciones. Para más detalles véase Rodríguez-Palmero (1997) y Rodríguez-Palmero et. al. (1998).

²⁷Véase Rodríguez-Palmero (1997), para más detalles.

²⁸Véase Definición 1.4.1.

útil tanto para tratar computacionalmente las diferentes relaciones de preferencia revelada (R^0 , S , P^0 , R , H , etc.) asociadas a una serie finita de datos de demanda como para analizar la bondad del ajuste de los datos observados. Para poder trabajar computacionalmente con los grafos dirigidos se precisa disponer de una representación de éstos. Una representación común, y realmente útil cuando el grafo es denso o completo²⁹, es la matriz de adyacencia.

Definición 3.2.1 Una matriz de adyacencia de un grafo dirigido (V, E) es una matriz booleana T de tamaño $n \times n$ tal que $T[i, j] = 1$ si y sólo si G tiene una arista del nodo i al nodo j .

La matriz de adyacencia, M_T , es una representación del grafo dirigido $G = (V, E)$ asociado a una relación binaria T que permite trabajar computacionalmente con dicha relación binaria³⁰. En el contexto en el que nos hallamos, si designamos por S a la relación de preferencia revelada directa y M_S a su matriz booleana asociada, entonces es claro que $M_S[i, j] = 1$ si y solamente si $\bar{x}_i \neq \bar{x}_j$ y el consumidor revela que prefiere \bar{x}_i frente a \bar{x}_j ; esto es, si $\bar{x}_i S \bar{x}_j$. La Figura 3.2 muestra la estructura de la relación de preferencia revelada directa asociada a un conjunto finito de datos de demanda de tamaño seis. La sección (a) de la Figura 3.2 muestra en el espacio de consumo bidimensional $\Omega = \mathbb{R}_+^2$ un conjunto finito de tamaño 6 de hiperplanos presupuestarios y las cestas de bienes demandados por un individuo en esas situaciones de precio-renta mientras que la sección (b) ilustra la matriz booleana M_S que representa a la relación de preferencia revelada directa asociada a este conjunto finito de datos observados. Finalmente, la sección (c) muestra el grafo dirigido que representa gráficamente la relación de preferencia revelada.

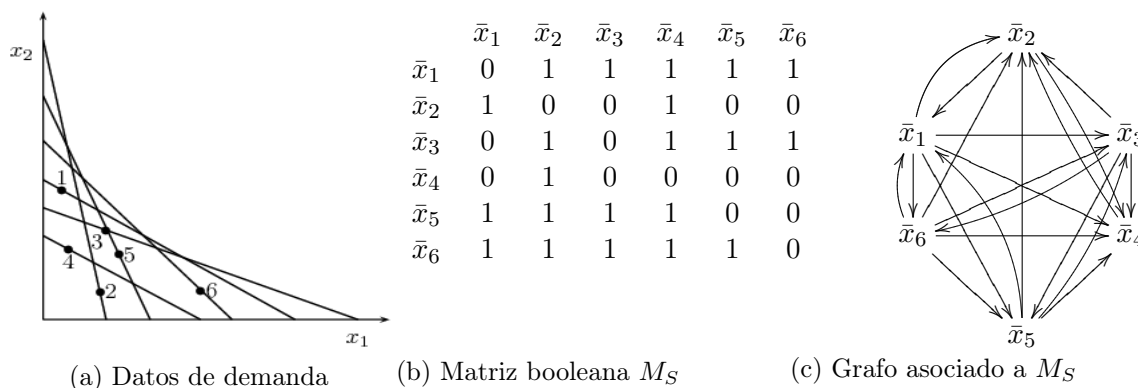


Figura 3.2: Estructura de un conjunto finito de datos de demanda.

La principal desventaja de la representación de un grafo a través de su matriz booleana asociada (matriz de adyacencia) es que dicha representación es poco eficiente cuando el grafo es disperso³¹. La lista de adyacencia es una representación más conveniente para este tipo de gra-

²⁹Véase Definición 1.4.1, para más detalles.

³⁰La matriz de adyacencia depende del orden en que sean considerados los vértices del grafo G . Si permutamos los vértices, obtendremos una matriz $M_T' = AM_T A^{-1}$. Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

³¹Véase Definición 1.4.2.

fos³². Nótese que si el grafo es disperso su representación mediante una matriz de adyacencia tiene una complejidad espacial de $\Theta(n^2)$, mientras que la representación a través de listas de adyacencia es $\Theta(n + e)$, donde n es el número de vértices y e el número de aristas del grafo³³.

En el primer capítulo de esta memoria hemos mostrado que el axioma GARP equivale a la factibilidad de un cierto problema de programación lineal o a la ausencia de ciclos de longitud negativa³⁴ en el grafo dirigido $G = (V, E, \omega)$ que representa a la relación de preferencia revelada directa R^0 , donde ω es la función de peso definida en (1.60). Para contrastar GARP en la práctica se precisa determinar la relación de preferencia revelada indirecta R , introducida en la literatura económica por primera vez por Hugh Rose en 1957.

Observación 3.2.1 *En la literatura económica, diversos autores³⁵ han caracterizado la propiedad de la “consistencia cíclica” de Afriat en términos de los coeficientes de un cierto problema de programación lineal. El elevado número de variables y de restricciones (2n variables y n² restricciones, la mitad de ellas no lineales) hacen que este problema de programación lineal sea computacionalmente casi inabordable en la práctica. Para solventar esta cuestión, Varian (1982) propone una nueva condición algebraica de consistencia, el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada (GARP), que se postula como una condición necesaria y suficiente para que un conjunto finito datos de demanda haya sido generado por un consumidor optimizador. La principal razón de esta nueva caracterización de la racionalidad puede radicar –como señala Varian (1982, pág. 948)– en su facilidad de cálculo. Sin embargo, merece la pena resaltar que, en virtud de la Proposición 1.4.2, bastará con comprobar la ausencia de ciclos de longitud negativa de su grafo dirigido asociado; cuestión ésta que puede realizarse en un tiempo de ejecución proporcional a $\mathcal{O}(ne)$, donde n es el número de datos de demanda y e su número de aristas. En la literatura computacional pueden encontrarse diferentes algoritmos que permiten contrastar la presencia de ciclos de longitud negativa en un grafo dirigido finito. Estos algoritmos, que combinan estrategias de distancias mínimas y de detección de ciclos, permiten contrastar³⁶ la presencia de ciclos de longitud negativa en un grafo dirigido finito en un tiempo de ejecución inferior a $\mathcal{O}(n^3)$, que es el tiempo de ejecución del algoritmo que utiliza Varian para contrastar GARP.*

La preferencia revelada indirecta, R , que aparece implícitamente definida en Houthakker (1950), recoge toda la información relativa a la estructura preferencial de un consumidor contenida en sus observaciones de demanda. Nótese que \bar{x}_i se revela preferida a \bar{x}_j , $\bar{x}_i R \bar{x}_j$, si y solamente si existe una sucesión (posiblemente vacía) tal que $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_1} R^0 \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_k} R^0 \bar{x}_j$; esto es, si y solamente si existe un camino $\bar{x}_i \xrightarrow{*} \bar{x}_j$ conectando \bar{x}_i con \bar{x}_j . Así pues, en virtud de la

³²Una lista de adyacencia de un vértice v es una lista que contiene a todos los vértices del grafo que son adyacentes desde v . Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

³³Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

³⁴Véase Proposición 1.4.2.

³⁵Véase Diewert (1973), Diewert y Parkan (1978, 1985), y Scarf, Todd y Fostel (2003), para más detalles.

³⁶Véase Bellman (1958), Ford y Fulkerson (1962) y Pallottino (1984), para más detalles.

correspondencia biyectiva entre las relaciones binarias y los grafos dirigidos, se dice que un consumidor revela que prefiere (directa o indirectamente) la cesta \bar{x}_i frente a \bar{x}_j , y se denota por $\bar{x}_i R \bar{x}_j$, si en el grafo dirigido $G = (V, E)$ que representa la estructura de la relación de preferencia revelada R existe un camino $\bar{x}_i \xrightarrow{*} \bar{x}_j$ conectando \bar{x}_i con \bar{x}_j . La Figura 3.3 muestra la relación de preferencia revelada directa asociada a un conjunto finito de datos de demanda³⁷ en el espacio de consumo 3-dimensional. En la Figura 3.3, $((\bar{x}_2, \bar{x}_3), (\bar{x}_3, \bar{x}_4))$ es un camino simple, $((\bar{x}_1, \bar{x}_2), (\bar{x}_2, \bar{x}_4), (\bar{x}_4, \bar{x}_1))$ es un ciclo simple y (\bar{x}_1, \bar{x}_1) es un lazo.

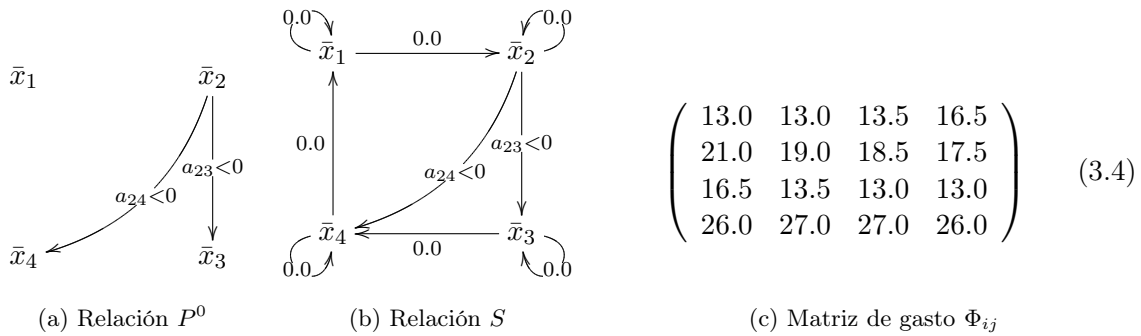


Figura 3.3: Camino simple en un grafo dirigido.

De la propia definición de R y H se desprende que la relación de preferencia revelada indirecta R (resp. H) es la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada directa R^0 (resp. S). Así pues, para obtener la relación de preferencia revelada (indirecta) R (resp. H) asociada a un conjunto finito de datos de demanda bastará con hallar la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada directa R^0 (resp. S). En términos técnicos, la clausura transitiva de cualquier relación binaria se define como sigue:

Definición 3.2.2 Sea \succeq una relación binaria definida sobre un conjunto finito de opciones X . Se define la clausura transitiva de \succeq como $\bar{x} \succcurlyeq \bar{y}$ si y sólo si existe una (posible vacía) sucesión $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \in X$ tal que $\bar{x} \succeq \bar{x}_1 \succeq \bar{x}_2 \succeq \dots \bar{x}_n \succeq \bar{y}$.

En virtud de la correspondencia biunívoca existente entre las relaciones binarias y los grafos dirigidos, calcular la clausura transitiva de cualquier relación binaria equivale a calcular la clausura transitiva del grafo dirigido que representa a esta relación binaria.

Definición 3.2.3 La clausura transitiva de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo $G^+ = (V, E^+)$ tal que E^+ contiene una arista (v, w) si G contiene un camino no nulo $u \xrightarrow{*} w$. El tamaño

³⁷La matriz de gasto (3.4) se ha obtenido a partir de la siguiente lista de vectores de precios y cantidades demandadas del espacio de consumo $\Omega = \mathbb{R}_+^3$ y del espacio de precios $\mathbb{P} = \mathbb{R}_{++}^3$ respectivamente: $\bar{x}_1 = (8, 1, 8)$, $\bar{x}_2 = (5, 5, 6)$, $\bar{x}_3 = (5, 6, 5)$, $\bar{x}_4 = (8, 8, 1)$, $\bar{p}_1 = (1, 1, 0.5)$, $\bar{p}_2 = (1, 1, 1.5)$, $\bar{p}_3 = (1, 0.5, 1)$ y $\bar{p}_4 = (1, 2, 2)$. Los datos muestran que WARP \nRightarrow SARP, Weak GARP \nRightarrow GARP y que Aciclicidad de $P^0 \nRightarrow$ GARP.

de la clausura transitiva se denota por m^+ . El conjunto sucesor de un vértice v es el conjunto $Succ(v) = \{w \mid (v, w) \in E^+\}$; es decir, el conjunto de todos los vértices que pueden ser alcanzados desde el vértice v vía caminos no nulos. El conjunto predecesor de un vértice v es el conjunto $Pred(v) = \{w \mid (w, v) \in E^+\}$; es decir, el conjunto de todos los vértices que alcanzan al vértice v vía caminos no nulos.

La Figura 3.4 muestra el grafo dirigido $G = (V, E)$ que representa a la relación R^0 para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y su grafo $G^+ = (V, E^+)$ que representa a la relación de preferencia revelada indirecta R para este conjunto de datos.

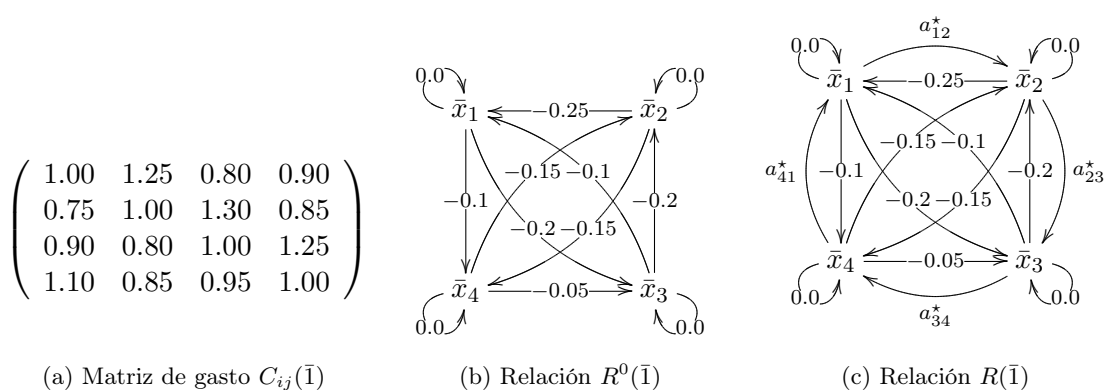


Figura 3.4: Clausura transitiva de la preferencia revelada.

En la literatura económica, diversos autores entre los que cabe destacar a Koo (1963, 1965), Dobell (1965) y Uebe (1972) utilizan algoritmos basados en la multiplicación de matrices booleanas para calcular la clausura transitiva de una relación de preferencia. Koo (1963) y Dobell (1965) sugieren multiplicar la matriz booleana B asociada a la relación de preferencia revelada directa hasta que $B^n = B^{n+1}$. Sin embargo, este procedimiento es ineficiente³⁸. Uebe (1972) propone calcular la matriz B^+ mediante el siguiente procedimiento iterativo de complejidad computacional $\mathcal{O}(n(n-1)(n-2))$.

$$B[i, j] = \max [B[i, j], B[i, k] \cdot B[k, j]] \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} \text{ tal que } i \neq j \neq k \quad (3.5)$$

Varian (1982, pág. 969-972) introduce en la literatura económica – en un apéndice técnico – el algoritmo de Warshall (1962) de complejidad computacional $\mathcal{O}(n^3)$ para calcular la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada directa R^0 . Este autor ofrece una interpretación del algoritmo de Warshall en términos de un “problema de mínimo coste” y proporciona el código de la implementación de este algoritmo en el lenguaje de programación de alto nivel

³⁸Asumiendo que la multiplicación ordinaria de matrices tiene una complejidad computacional del orden $\mathcal{O}(n^{2.376})$, el algoritmo propuesto por Koo y Dobell calcula la clausura transitiva de una relación de preferencia en $\mathcal{O}(n^{3.376})$, dado que se puede necesitar -en el peor de los casos- realizar un número n de multiplicaciones para obtener la clausura transitiva.

Fortran 77. Varian (1982, pág. 972) emplea la sentencia de control GO TO en la implementación de la subrutina del algoritmo de Warshall, a pesar del rechazo hacia esta sentencia de control conflictiva por parte de la comunidad académica y científica. En consecuencia, y dado que tanto los investigadores como los académicos sugieren utilizar sentencias de control alternativas a la sentencia GO TO, presentamos (a modo simplemente ilustrativo) el pseudocódigo del algoritmo de Warshall (1962) sin esta sentencia de control conflictiva.

Algorithm 19. Pseudo-code for transitive closure (Warshall, 1962)

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

```

1. begin
2. for  $i, j := 1$  to  $n$  do  $H[i, j] := S[i, j]$ 
3. for  $k := 1$  to  $n$  do
4.   for  $i := 1$  to  $n$  do
5.     if  $i \neq k$  and  $H[i, k] = \text{true}$  then
6.       for  $j := 1$  to  $n$  do  $H[i, j] := H[i, j] \vee H[k, j]$ 
7. return
```

Output: Transitive closure of a binary relation.

Observación 3.2.2 *La clausura transitiva de una relación binaria admite una interpretación muy sencilla en términos matriciales. Es importante señalar que la multiplicación de matrices booleanas y el cálculo de la clausura transitiva de una relación binaria están íntimamente relacionados. Si B es la matriz booleana asociada a una relación binaria \succeq definida sobre un conjunto finito de opciones. Entonces B^2 es otra matriz booleana de tamaño $n \times n$ tal que $B^2[i, j] = 1$ si y sólo si existe una observación i_1 tal que $\bar{x}_i \succeq \bar{x}_{i_1} \succeq \bar{x}_j$. En el caso general, B^k es una matriz booleana de tamaño $n \times n$ tal que $B^k[i, j] = 1$ si existen i_1, \dots, i_{k-1} tales que $\bar{x}_i \succeq \bar{x}_{i_1} \succeq \dots \succeq \bar{x}_{i_{k-1}} \succeq \bar{x}_j$. Una consecuencia inmediata de la definición de clausura transitiva es que la matriz $B^+ = B \vee B^2 \vee \dots \vee B^n$ representa la clausura transitiva de una relación binaria \succeq con matriz booleana B asociada.*

Observación 3.2.3 *En la literatura computacional pueden encontrarse diferentes algoritmos eficientes (basados en la multiplicación de matrices, en la detección de las componentes fuertemente conexas del grafo dirigido asociado a la relación de preferencia, algoritmos híbridos,...) que permiten calcular la clausura transitiva de cualquier relación binaria en un tiempo de ejecución inferior al exhibido por el algoritmo de Warshall. Así, por ejemplo, autores como Furman (1970), Munro (1971) y Coopermith y Winograd (1987), entre otros, han proporcionado algoritmos eficientes que permiten computar la clausura transitiva de cualquier relación binaria definida sobre un número finito de opciones. Furman (1970) muestra cómo la matriz booleana*

B^+ se puede calcular en $\mathcal{O}(\log n)$ iteraciones usando la siguiente fórmula iterativa

$$B_{k+1} = B_k \vee B_k^2 \quad (3.6)$$

Así, asumiendo que la multiplicación³⁹ ordinaria de matrices tiene una complejidad computacional del orden $\mathcal{O}(n^\alpha)$, el algoritmo de Furham calcula la clausura transitiva de una relación de preferencia en $\mathcal{O}(n^\alpha \log n)$. Coopermith y Winograd (1987) muestran que $\alpha \leq 2.376$. Finalmente, y dado que calcular la clausura transitiva de cualquier relación binaria equivale a calcular la clausura transitiva del grafo dirigido que representa a esta relación binaria diversos autores entre los que cabe destacar a Purdom (1970), Munro (1972), Eve y Kurki-Suonio (1977), Ebert (1981), Schmitz (1983) y Ioannidis (1986, 1988) han presentado en el ámbito de la literatura computacional diferentes algoritmos y procedimientos para calcular la clausura transitiva de un grafo dirigido. Para un análisis más exhaustivo de los diferentes procedimientos existentes en la literatura computacional que permiten calcular la clausura transitiva de cualquier relación binaria, véase Nuutila (1994, 1995).

A partir de la clausura transitiva se pueden diseñar sencillos procedimientos para contrastar en la práctica la consistencia de un conjunto finito de datos de demanda con los diferentes axiomas de preferencia revelada (SARP, GARP, HARP, RARP,...) que caracterizan el comportamiento racional de un consumidor en el ámbito de la teoría clásica de la demanda. Así, por ejemplo, si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda y \mathbf{P}^0 , \mathbf{R}^0 y \mathbf{R} las matrices booleanas que representan a las relaciones de preferencia revelada P^0 , R^0 y R , respectivamente, para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es cierto que $\mathbf{R}^t \odot \mathbf{P}^0 = \mathbf{O}_n$ (resp., $\mathbf{R}^t \odot \mathbf{R}^0 = \mathbf{O}_n$) si y solamente si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP (resp., SARP). Por otra parte, merece la pena resaltar que para contrastar si un conjunto finito de datos de demanda satisface GARP bastará, en virtud de la Proposición 1.4.2, con comprobar la ausencia de ciclos de longitud negativa en su grafo dirigido asociado que representa a dicha relación; cuestión ésta que puede realizarse en un tiempo de ejecución proporcional a $\mathcal{O}(ne)$, donde n es el número de datos de demanda y e el número de aristas del grafo⁴⁰. La siguiente proposición proporciona una nueva caracterización, en términos de la relación de preferencia revelada directa S , de la propiedad del axioma GARP.

³⁹Nótese que $A \wedge B$ se puede calcular multiplicando las matrices A y B sobre el anillo de enteros módulo $n+1$ y normalizando las entradas distintas de cero a unos.

⁴⁰Para más detalles, véanse los trabajos de Goldberg y Radzik (1993, 1995).

Proposición 3.2.2 *La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP si, y solamente si, para todo par de observaciones i, j se cumple: $\bar{x}_i H \bar{x}_j$, entonces $\bar{p}_j \bar{x}_j \leq \bar{p}_j \bar{x}_i$.*

Demostración: Supongamos que la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface GARP, entonces para todo par de observaciones i, j si $\bar{x}_i H \bar{x}_j$ se cumple (por ser H una subrelación de R) que $\bar{x}_i R \bar{x}_j$ y, en consecuencia, $\bar{p}_j \bar{x}_j \leq \bar{p}_j \bar{x}_i$. Recíprocamente, supongamos que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface GARP, entonces existen dos observaciones i, j tales que $\bar{x}_i R \bar{x}_j$ y $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_j \bar{x}_i$. Esto es, existen $\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_k}$ no necesariamente distintas tales que $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_{i_1} \wedge \bar{x}_{i_1} R^0 \bar{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \bar{x}_{i_{k-1}} R^0 \bar{x}_{i_k}$ y, además, $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_j \bar{x}_i$. Como $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_j \bar{x}_i$ se cumple que $\bar{x}_j P^0 \bar{x}_i$ y, por tanto, $\bar{x}_j S \bar{x}_i$. Consideremos las cestas demandadas \bar{x}_i y \bar{x}_{i_1} . Entonces puede ocurrir: (i) $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_j \bar{x}_{i_1}$ si $\bar{x}_i = \bar{x}_{i_1}$; (ii) $\bar{x}_i S \bar{x}_{i_1}$ y $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_j \bar{x}_i$ si $\bar{x}_i \neq \bar{x}_{i_1}$. Consideremos a continuación las cestas demandadas \bar{x}_{i_1} y \bar{x}_{i_2} . Entonces caben dos posibilidades: (i) si $\bar{x}_{i_1} = \bar{x}_{i_2}$ se tiene que $\bar{x}_i S \bar{x}_{i_2}$ si $\bar{x}_i \neq \bar{x}_{i_1}$ y $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_j \bar{x}_{i_2}$ si $\bar{x}_i = \bar{x}_{i_1}$; (ii) si $\bar{x}_{i_1} \neq \bar{x}_{i_2}$, entonces $\bar{x}_{i_1} S \bar{x}_{i_2}$. Repitiendo el proceso, y puesto que el tamaño de la serie finita de datos de demanda es finito, es posible encontrar una secuencia $\bar{x}_{i_1^*}, \dots, \bar{x}_{i_k^*}$ tales que $\bar{x}_i R^0 \bar{x}_{i_1^*} \wedge \bar{x}_{i_1^*} R^0 \bar{x}_{i_2^*} \wedge \dots \wedge \bar{x}_{i_{k-1}^*} R^0 \bar{x}_j$ y, además, $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_j \bar{x}_i$. Esto es, $\bar{x}_i H \bar{x}_j$ y $\bar{p}_j \bar{x}_j > \bar{p}_j \bar{x}_i$, lo que contradice la hipótesis de partida y completa la demostración. ■

La proposición anterior muestra que para todo ciclo de longitud negativa (en el cual por lo menos existen dos nodos \bar{x}_i y \bar{x}_j iguales) en el grafo $G = (V, E)$ que representa la relación de preferencia revelada directa, existe en S un subciclo propio de longitud negativa⁴¹. En consecuencia, en ocasiones, desde un punto de vista estrictamente operativo, puede resultar interesante trabajar con la relación de preferencia revelada S se desean hallar –como medida de eficiencia de las decisiones de consumo de un individuo– todos los ciclos incoherentes con GARP o qué observaciones pertenecen a cada ciclo.

A partir de la relación de preferencia revelada directa S es posible determinar el conjunto formado por todas las observaciones inconsistentes o fuertemente inconsistentes con GARP, así como obtener todas las estructuras y variedades de eficiencia presentadas en el capítulo 2 de esta memoria y que permiten analizar la bondad del ajuste del modelo de la maximización de la utilidad. A modo de ejemplo presentamos el siguiente algoritmo de complejidad computacional $\mathcal{O}(\max\{n^2, t(n)\})$ que permite hallar, a partir de la relación de preferencia revelada S , el conjunto formado por todas las observaciones fuertemente inconsistentes con GARP en un tiempo polinomial⁴².

⁴¹Sea X un conjunto cualquiera, \succeq una relación binaria definida sobre X y C un ciclo de la relación binaria \succeq definida sobre X . Se dice que $C' \subseteq X$ es un subciclo propio de C si C' es un ciclo de la relación binaria \succeq y, además, $C' \subsetneq C$. Un ciclo C se dice que es minimal, simple o irreducible si no posee subciclos propios.

⁴²Nótese que si $t(n)$ es el tiempo de ejecución del algoritmo empleado en el cómputo de la clausura transitiva de la relación de preferencia revelada directa y tol la tolerancia empleada en el problema, entonces, el algoritmo anterior requiere $\mathcal{O}(\max\{n^2, t(n)\log_2(1/tol)\})$ operaciones para obtener el conjunto de índices de ineficiencia. Por tanto, $\mathcal{O}(\max\{n^2, t(n)\})$ es la complejidad computacional de este algoritmo.

Algorithm 20. Pseudo-code for computing strongly inconsistent subsets with GARP**Input:** Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. Construct boolean matrices S and P^0
3. for $i, j := 1$ to n do $H[i, j] := S[i, j]$; if $(P^0[i, j] = \text{true})$ then $C[i, j] := -1$
4. for $k := 1$ to n do
5. for $i := 1$ to n do
6. if $(i \neq k \text{ and } H[i, k] = \text{true})$ then
7. for $j := 1$ to n do
8. $H[i, j] \leftarrow H[i, j] \vee H[k, j]$
9. if $(H[i, j] = \text{true})$ then $C[i, j] = \min[C[i, j], C[i, k] + C[k, j]]$
10. for $i, j := 1$ to n do
11. if $(H[i, j] = \text{true} \text{ and } S[j, i] = \text{true})$ then
12. if $(C[i, j] < 0 \text{ or } P^0[j, i] = \text{true})$ then $A[j] := \text{true}$
13. return

Output: Set strongly inconsistent with GARP.

La aproximación no-paramétrica a la eficiencia en el consumo está basada en la introducción de un parámetro global, e , o un conjunto de parámetros, $(e_t)_{t=1}^n$, entre cero y uno, con el requisito de que cada observación tiene al menos un “nivel de eficiencia”, e_t , que además de ofrecer una interpretación económica de las inconsistencias presentes en los datos permiten colegir (sin necesidad de sumergir el modelo en un contexto paramétrico) si un consumidor ha presentado un “comportamiento casi optimizador”. Si la serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, viola el axioma GARP, se puede construir una “perturbación” mínima del conjunto de datos $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t, e_t)\}_{t=1}^n$ satisfaciendo GARP(\bar{e}), donde por $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ designamos a una n -tupla de números reales en el n -cubo estándar unidad C_n . Si esta “perturbación” es “razonablemente pequeña” se puede concluir que el conjunto de datos de demanda procede de un comportamiento optimizador y que la violación se debe a la existencia de algún pequeño error de medida o de naturaleza estocástica. En caso contrario, las inconsistencias presentes en los datos serían de carácter estructural. Así pues, el objetivo será encontrar, para cada serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, un conjunto de índices de eficiencia, $(e_t)_{t=1}^n$, solución del siguiente problema de optimización:

$$\max_{(e_t)} \sum_{t=1}^n (e_t)^2 \quad \text{s.a.} \quad R(\bar{e}) \text{ verifique GARP}, \quad (3.7)$$

donde $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$. La solución de este problema de optimización será la perturbación mínima (considerando la norma usual en \mathbb{R}^l) que se debe de considerar en cada observación

de demanda para que dicho conjunto de datos de demanda GARP(\bar{e}). Nótese que resolver (3.7) equivale a encontrar la solución del problema de minimización:

$$\min_{(e_t)} \sum_{t=1}^n (1 - e_t)^2 \quad s.a. \quad R(\bar{e}) \text{ verifique GARP} \quad (3.8)$$

La pregunta que surge a continuación es la siguiente: ¿cómo se “perturban” los datos para conseguir que éstos sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad? Para cada serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ y para cada n-tupla números reales $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ del n-cubo estándar unidad, sea $C^*(\bar{e}) \equiv (C_{ij}^*(\bar{e}))_{i,j \in \mathbb{N}}$ la matriz definida por: $C_{ij}^*(\bar{e}) = \bar{p}_i \bar{x}_j$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$ y $C_{ii}^*(\bar{e}) = e_i \bar{p}_i \bar{x}_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. En lo sucesivo, designaremos por $C^*(\bar{e})$ a la matriz de gasto asociada a la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t, e_t)\}_{t=1}^n$. Nótese que la relación de preferencia revelada “relajada” $R^0(\bar{e})$ se construye a partir de $C^*(\bar{e})$. Esta matriz se obtiene modificando únicamente los elementos de la diagonal principal en la matriz de gasto original⁴³ asociada a la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. La Figura 3.5 ilustra la matriz de gasto original C y perturbada $C_{ij}^*(\bar{e})$ por un vector-índice $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ para una serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Nótese que, en virtud del teorema 2.3.1, una condición necesaria y suficiente para que la serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, verifique el axioma GARP(\bar{e}) es que exista una función de utilidad $u_e(\cdot)$ continua, no saciada, cóncava y monótona que genere $C^*(\bar{e})$ para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \bar{x}_1 & \bar{p}_1 \bar{x}_2 & \cdots & \bar{p}_1 \bar{x}_n \\ \bar{p}_2 \bar{x}_1 & \bar{p}_2 \bar{x}_2 & \cdots & \bar{p}_2 \bar{x}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_n \bar{x}_1 & \bar{p}_n \bar{x}_2 & \cdots & \bar{p}_n \bar{x}_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_1 \bar{p}_1 \bar{x}_1 & \bar{p}_1 \bar{x}_2 & \cdots & \bar{p}_1 \bar{x}_n \\ \bar{p}_2 \bar{x}_1 & e_2 \bar{p}_2 \bar{x}_2 & \cdots & \bar{p}_2 \bar{x}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_n \bar{x}_1 & \bar{p}_n \bar{x}_2 & \cdots & e_n \bar{p}_n \bar{x}_n \end{pmatrix} \\ \text{(a) Matriz de gasto original } C_{ij}^*(\bar{1}) & \text{(b) Matriz de gasto perturbada } C^*(\bar{e}) \end{array}$$

Figura 3.5: Relación $R^0(\bar{e})$ y matriz de gasto $C^*(\bar{e})$.

En virtud del isomorfismo existente entre el álgebra de las matrices booleanas y los grafos dirigidos finitos, es posible representar gráficamente esta aproximación de eficiencia en términos “geométricos”. A partir de la matriz de gasto perturbada $C^*(\bar{e})$ es posible construir el network $G_e = (V, E_e, \omega_e)$ que representa la estructura de la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{e})$. Nótese que $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E_e$ si y solamente si $\bar{x}_i R^0(\bar{e}) \bar{x}_j$; esto es, si y solamente si se cumple $e_i \bar{p}_i \bar{x}_i \geq \bar{p}_i \bar{x}_j$.

⁴³Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda, entonces $C^*(\bar{1})$ es la matriz de gasto original asociada a $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Por tanto, $C_{ij}^*(\bar{1}) = \bar{p}_i \bar{x}_j$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Sobre el conjunto E_e formado por las aristas del grafo G_e se define la función peso ω_e por:

$$\begin{aligned} \omega_e : E_e &\longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ (\bar{x}_i, \bar{x}_j) &\longrightarrow \omega_e(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \bar{p}_i(\bar{x}_j - e_i\bar{x}_i)/\bar{p}_i\bar{x}_i = a'_{ij} \end{aligned}$$

Es claro que multiplicar por e_i el gasto realizado en la observación i equivale a sumar la cantidad positiva $w_i = 1 - e_i$ entre cero y uno a las aristas de los nodos \bar{x}_j adyacentes⁴⁴ desde \bar{x}_i en el grafo $G = (V, E, \omega)$ que representa R^0 para la serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Por otra parte, es importante resaltar, además, que desde un punto de vista estrictamente geométrico lo que se pretende al introducir un conjunto de “niveles de eficiencia”, $(e_t)_{t=1}^n$, es destruir los “ciclos problemáticos” en el grafo $G_e = (V, E_e, \omega_e)$ que representa la estructura de la relación de preferencia revelada “relajada” con el objetivo de que el conjunto de datos “perturbado” $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t, e_t)\}_{t=1}^n$ sea consistente con el modelo de optimización. Así pues, se trata de encontrar un e_i “apropiado” para cada observación i con el objetivo de anular o eliminar en $G_e = (V, E_e, \omega_e)$ alguna o algunas de las aristas que “salen” de \bar{x}_i y romper, por tanto, los ciclos “problemáticos”⁴⁵. Supongamos, por ejemplo, que $G_e = (V, E_e, \omega_e)$ designa al grafo que representa la estructura de la relación de preferencia revelada “perturbada”, $R^0(\bar{e})$, para la serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, entonces es claro que $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E_e$ si y solamente si \bar{x}_i se revela directamente preferida a \bar{x}_j bajo el nivel de eficiencia e_i ; esto es, si $e_i\bar{p}_i\bar{x}_i \geq \bar{p}_i\bar{x}_j$ o, equivalentemente, si $\bar{x}_i R^0(e_i)\bar{x}_j$. En consecuencia,

$$e_i\bar{p}_i\bar{x}_i \geq \bar{p}_i\bar{x}_j \Leftrightarrow \bar{p}_i\bar{x}_j - e_i\bar{p}_i\bar{x}_i \leq 0 \Leftrightarrow \bar{p}_i\bar{x}_j - \bar{p}_i\bar{x}_i + (1 - e_i)\bar{p}_i\bar{x}_i \leq 0 \Leftrightarrow a'_{ij} = a_{ij} + w_i \leq 0,$$

donde $w_i = 1 - e_i$, y, además, $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \notin E_e \Leftrightarrow w_i > |a_{ij}|, \forall i, j$. En virtud de lo anterior, multiplicar por e_i el gasto realizado en la situación presupuestaria i -ésima equivale a sumar la cantidad positiva $w_i = 1 - e_i$ a las aristas que “salen” de \bar{x}_i en el grafo dirigido $G = (V, E, \omega)$ que representa R^0 para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, supuesto los datos normalizados. De lo anterior se deduce que el objetivo consiste (desde un punto de vista estrictamente “geométrico”) en encontrar un e_i “apropiado” para cada observación de demanda \bar{x}_i con el objetivo de anular o eliminar –en el grafo dirigido que representa la relación de preferencia revelada original– alguna o algunas de las aristas que “salen” de \bar{x}_i y romper, por tanto, los ciclos “problemáticos” que contienen a esta observación⁴⁶. Veamos el siguiente ejemplo.

⁴⁴Nótese que \bar{x}_j es adyacente desde \bar{x}_i , y se denota $\bar{x}_j \in \text{AdjFrom}(\bar{x}_i)$, si (\bar{x}_i, \bar{x}_j) es una arista del grafo. En el contexto en el que nos hallamos $\bar{x}_j \in \text{AdjFrom}(\bar{x}_i)$ si y solamente si el consumidor revela directamente que prefiere \bar{x}_i frente a \bar{x}_i .

⁴⁵Como $R^0(\bar{e})$ es una subrelación de R^0 se cumple $\bar{x}_i R^0(e_i)\bar{x}_j \Rightarrow \bar{x}_i R^0\bar{x}_j$ y, en consecuencia, que $\sim \bar{x}_i R^0\bar{x}_j \Rightarrow \sim \bar{x}_i R^0(e_i)\bar{x}_j$; esto es, si $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \notin E$ entonces $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \notin E_e$. Por otra parte, si suponemos los datos normalizados ($\bar{p}_t\bar{x}_t = 1, \forall t \in \{1, \dots, n\}$), para cada $0 \leq e_i \leq 1$ se cumple que $\bar{p}_i\bar{x}_j > e_i \Rightarrow (\bar{x}_i, \bar{x}_j) \notin E_e$; esto es, si $\bar{p}_i\bar{x}_j > e_i$ entonces $\sim \bar{x}_i R^0(e_i)\bar{x}_j$, y recíprocamente. Nótese que $\bar{x}_i R^0(e_i)\bar{x}_j \Leftrightarrow |\bar{p}_i(\bar{x}_j - \bar{x}_i)| = |\bar{p}_i\bar{x}_j - 1| > w_i$, donde $w_i = 1 - e_i$. En consecuencia, $\bar{x}_i R^0(e_i)\bar{x}_j \Leftrightarrow 1 - \bar{p}_i\bar{x}_j > w_i \Leftrightarrow \bar{p}_i\bar{x}_j < 1 - w_i$.

⁴⁶El procedimiento de Varian (1990) sólo “relaja” la relación de preferencia revelada en las cestas demandadas fuertemente inconsistentes con GARP, mientras que la aproximación de Afriat (1973) “relaja” la relación de preferencia revelada en todas las observaciones.

Ejemplo 3.2.1 Sea $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ una serie finita de datos de demanda normalizada cuya matriz de gasto $C = (c_{ij})$ ($c_{ij} = \bar{p}_i \bar{x}_j, \forall i, j$) viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.9 & 1.1 & 0.9 \\ 1.2 & 1.0 & 0.6 & 1.1 \\ 0.7 & 1.1 & 1.0 & 1.2 \\ 1.3 & 1.2 & 0.8 & 1.0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Un simple cálculo permite afirmar que $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ no satisface GARP dado que $\bar{x}_1 R^0 \bar{x}_2$, $\bar{x}_2 R^0 \bar{x}_3$ y $\bar{x}_3 P^0 \bar{x}_1$. La sección (a) de la Figura 3.6 ilustra el grafo dirigido $G = (V, E, \omega)$ que representa a R^0 para esta matriz de gasto. Sea $\bar{\nu}$ el vector-índice definido por $\bar{\nu} = (1, 1, 0.6, 1)$, y sea $G_\nu = (V, E_\nu, \omega_\nu)$ el grafo dirigido que representa $R^0(\bar{\nu})$ para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$. Como $\nu_3 = 0.6$, estamos sumando la cantidad positiva 0.4 a todas las aristas que “salen” de la cesta demandada \bar{x}_3 en $G = (V, E, \omega)$ y, por tanto, eliminando los dos *ciclos incoherentes con GARP* (formados por las observaciones 1, 2, 3 y 1, 4, 3 respectivamente) existentes en la relación de preferencia revelada original. La Figura 3.6 ilustra también los grafos dirigidos que representan a las estructuras de preferencia revelada original y perturbada respectivamente por los vectores-índice de Afriat y Varian, respectivamente⁴⁷.

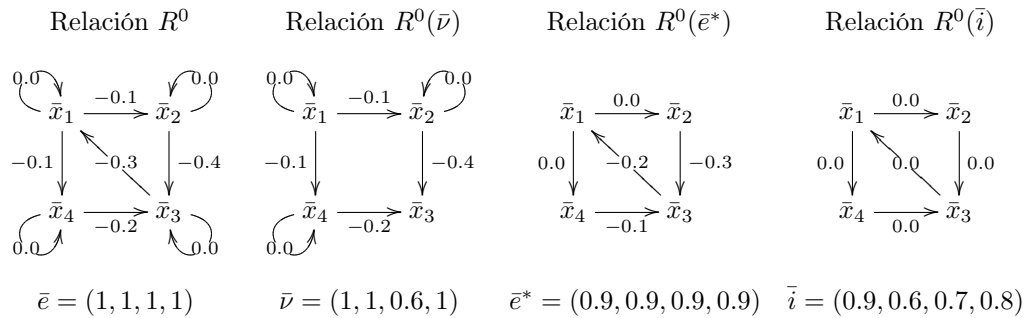


Figura 3.6: Índices de eficiencia vs. grafos dirigidos.

En la sección 2.2 resolvimos el problema de “subracionalización” de encontrar para cada serie finita de datos de demanda un subconjunto maximal (de cardinal máximo) consistente con GARP. Además presentamos diferentes procedimientos aproximativos que permitían calcular en un tiempo polinomial un subconjunto maximal (no necesariamente de cardinal máximo) consistente con GARP. Merece la pena resaltar que –en virtud del isomorfismo existente entre las relaciones de preferencia definidas sobre un conjunto finito de opciones y los grafos dirigidos

⁴⁷Esta figura muestra, además, que el índice crítico de coste de eficiencia de Afriat e^* no garantiza la compatibilidad, al nivel de eficiencia e^* , entre los datos observados y la utilidad. Obsérvese cómo para todo $\zeta \in [0, e^*]$; esto es, para todo $\bar{\zeta} \ll \bar{e}^*$ se verifica que la relación de preferencia revelada $R^0(\bar{\zeta})$ es acíclica y, por tanto, los datos observados satisfacen $SARP(\bar{\zeta})$ y son consistentes (de manera estricta) al nivel global de eficiencia ζ con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

finitos— el problema de encontrar un subconjunto maximal (de cardinal máximo) de datos consistente con alguna de las condiciones algebraicas del tipo “preferencia revelada” (SARP, GARP, RARP, HARP, etc.) que caracterizan la racionalidad de un agente económico está estrechamente relacionado con el problema de encontrar un feedback vertex set de peso mínimo, (**MFVS**), mientras que el problema de encontrar un conjunto de niveles de eficiencia $(e_t)_{t=1}^n$ está relacionado con el problema de encontrar un feedback arc set de peso mínimo, (**MFAS**), en un grafo⁴⁸. Esta clase de problemas desempeñan un papel importante en la teoría de la optimización combinatoria y fueron formulados inicialmente en el área del diseño de circuitos combinatorios⁴⁹. Otras aplicaciones del problema se encuentran en los sistemas operativos para la asignación de recursos que impiden los mecanismos de bloqueo mutuo (o deadlocks), en la inteligencia artificial o en la inferencia bayesiana⁵⁰.

Definición 3.2.4 Sea $G = (V, E, w)$ un grafo dirigido con funciones de peso z y w no negativas definidas sobre los nodos y las aristas respectivamente. El problema de hallar el mínimo feedback arc set y el mínimo feedback vertex set se puede enunciar como sigue:

- (i) **MFAS**. Dado un grafo dirigido $G = (V, E, w)$ con una función de peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida sobre las aristas, el problema de hallar el mínimo feedback arc set consiste en encontrar un subconjunto de aristas $E' \subseteq E$ de peso mínimo de tal modo que el grafo resultante $G = (V, E \setminus E')$ sea acíclico.
- (ii) **MFVS**. Dado un grafo dirigido $G = (V, E, w)$ con una función de peso positiva (no negativa) definida sobre sus vértices $z : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, resolver el problema del “minimum feedback vertex set problem” equivale a encontrar un subconjunto de vértices de peso mínimo $V' \subseteq V$ tal que V' contiene al menos un vértice para cada ciclo dirigido de G .

De la definición anterior se desprende que el clásico problema de teoría de grafos **MFVS** equivale a encontrar un *feedback vertex set* de cardinal mínimo en el grafo (dirigido) que representa dicha relación mientras que (**MFAS**) equivale a encontrar un *feedback arc set* de peso mínimo. Los problemas MFAS y MFVS son NP-completos.

Por otra parte, es importante remarcar que las condiciones algebraicas de preferencia revelada se pueden dividir en dos tipos: aquellas condiciones que caracterizan la consistencia estricta mediante la aciclicidad de la relación de preferencia revelada, de su parte asimétrica, de la relación

⁴⁸Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con una función de peso no negativa $z : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida sobre sus vértices, un feedback vertex set (**FVS**) es un subconjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que el grafo dirigido $G' = (V', E)$ es acíclico. Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido con una función de peso no negativa definida sobre sus aristas $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, un feedback arc set (**FAS**) es un subconjunto de aristas $E' \subseteq E$ tal que el grafo dirigido $G' = (V, E \setminus E')$ es acíclico. En adelante denotaremos los pesos de los conjuntos feedback de nodos V' y de aristas E' con $w(E') = \sum_{(x_i, x_j) \in E'} w(x_i, x_j)$ y $z(V') = \sum_{v \in V'} z(v)$ respectivamente.

⁴⁹Véanse los trabajos de Bar-Yehuda et. al. (1998), Demetrescu y Finocchi (2003) y Flood (1990), para más detalles.

⁵⁰Véanse los trabajos de Caragiannis, Kaklamanis y Kanellopoulos (2001), Festa, Pardalos y Resende (1999), para más detalles.

de revelación homotética, etc. y las que caracterizan la consistencia en términos de la solución de un cierto problema de programación lineal factible o, equivalentemente, en términos de la ausencia de ciclos de “longitud negativa” en el grafo asociado que representa a dicha relación: por ejemplo, GARP o HARP. En el primer caso, encontrar un subconjunto maximal (de cardinal máximo) de datos consistente con la caracterización de consistencia (SARP, RARP, etc.) equivale a encontrar un *feedback vertex set* (FVS) de cardinal mínimo en el grafo dirigido que representa a dicha relación. En el segundo caso, el problema se reduce a encontrar el menor número de observaciones tal que el subgrafo $G' = (V \setminus V', E)$ no posea ciclos de “longitud negativa”. De manera similar, la resolución del problema de optimización (3.7) está estrechamente relacionado con el problema de encontrar un *feedback arc set* de peso mínimo en el grafo dirigido que representa dicha relación tal que el grafo dirigido resultante de eliminar este conjunto de aristas sea acíclico. Si se considera la relación de preferencia revelada perturbada R_e^0 determinada por el conjunto de “índices de eficiencia”, $(e_t)_{t=1}^n$, es evidente que el grafo dirigido perturbado $G' = (V, E \setminus E')$ no tendrá ciclos de longitud negativa y que como consecuencia de ello, el conjunto de elecciones de consumo satisface $GARP(e)$. Así, la gran mayoría de los índices de eficiencia que permiten analizar la bondad del ajuste de los modelos de optimización desde una perspectiva no paramétrica están estrechamente relacionados con la resolución de los clásicos problemas de teoría de grafos *minimum feedback vertex set problem* (MFVS) y *minimum feedback arc set problem* (MFAS), que aparecen con frecuencia en numerosos ámbitos relacionados con la ciencia y la ingeniería. En el contexto en el que nos hallamos, si $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ es una serie finita de datos de demanda y $G = (V, E, w)$ el grafo dirigido que representa a la preferencia revelada directa, los problemas anteriores admiten la siguiente definición:

Definición 3.2.5 *Sea $G = (V, E, w)$ el grafo dirigido que representa a la preferencia revelada directa con funciones de peso z y w definidas sobre los nodos y las aristas respectivamente. En el contexto en el que nos hallamos (consistencia de los datos con la hipótesis de la maximización de la utilidad) los problemas de hallar el mínimo feedback arc set y el mínimo feedback vertex set se pueden enunciar como sigue:*

- (i) *MFAS. Dado un grafo dirigido $G = (V, E, w)$ con una función de peso $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$ definida sobre las aristas, el problema de hallar el mínimo feedback arc set consiste en encontrar un conjunto de aristas $E' \subseteq E$ de peso máximo de tal modo que el grafo resultante $G = (V, E \setminus E')$ no presente ciclos incoherentes con GARP.*
- (ii) *MFVS. Dado un grafo dirigido $G = (V, E, w)$ con una función peso $z : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida sobre los nodos, el problema de hallar el mínimo feedback vertex set consiste en encontrar un subconjunto de nodos $V' \subseteq V$ de peso mínimo tal que V' contiene al menos un vértice para cada ciclo de G incoherente con GARP.*

Para las condiciones algebraicas de la preferencia revelada tipo (SARP, HARP, etc.) caracterizadas por la aciclicidad⁵¹ de la relación de la preferencia revelada, estos problemas están

⁵¹Una relación binaria \succeq definida sobre un conjunto de opciones X se dice que es acíclica si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x_1, \dots, x_n \in X$: $x_1 \succeq x_2 \succeq \dots \succeq x_n$ implica que $x_n \succeq x_1$ es falso. Una relación binaria \succeq sobre un

completamente resueltos en la literatura computacional por lo que su análisis carece de interés. Sin embargo, cuando la condición algebraica de la preferencia revelada está caracterizada por la aciclicidad débil, y no por la aciclicidad, como ocurre con los axiomas de la preferencia revelada GARP, HARP, SCA, etc. el problema no es tan sencillo y merece un estudio detallado.

En la sección 2.2 caracterizamos completamente los feedbacks vertex sets y resolvimos el problema MFVS. De manera análoga, la solución del problema MFAS es una pequeña variante del problema clásico en teoría de grafos; simplemente hay que considerar los ciclos incoherentes con GARP en vez de todos los ciclos existentes en la relación de preferencia revelada⁵². Es importante señalar que estas aproximaciones a la eficiencia en el consumo que no tienen ninguna interpretación económica, del mismo modo que no lo tienen las diferentes medidas de eficiencia existentes en la literatura económica [Chalfant y Alston (1988), Famulari (1996), McMillan y Amoako-Tuffour (1988), Swofford y Withney (1987, 1988), entre otros.] que únicamente comparan el número de violaciones GARP (resp., SARP) con el máximo número posible. No hemos introducido en esta memoria estas medidas de eficiencia por no hacer la memoria mucho más extensa. Finalmente, señalar que para finalizar esta breve exposición hemos decidido abordar diferentes cuestiones relacionadas con la aciclicidad, puesto que la aciclicidad de la preferencia revelada (resp. de su parte asimétrica o de la preferencia revelada homotética) es una condición necesaria y suficiente para que un conjunto finito de datos de demanda sea racionalizable por una preferencia continua, cóncava, no saciada y monótona (resp. cuasilineal o continua, cóncava, no saciada, monótona y homotética). Además, presentamos una nueva medida global de la bondad del ajuste del modelo de optimización –a partir del número de ciclos incoherentes con GARP– y proporcionamos una nueva medida de eficiencia global que nos permitirá comparar la bondad del ajuste entre diferentes series finitas de datos de demanda.

Observación 3.2.4 *En la teoría normativa de la decisión se ha identificado la presencia de ciclos en las preferencias con la incoherencia. Por lo tanto, la aciclicidad de las preferencias caracteriza la coherencia estricta de las elecciones efectuadas por un agente económico. En el ámbito de la teoría normativa de la elección, Rodríguez-Palmero (1997) introduce dos nuevas clases de relaciones de preferencia: las k -aciclicas y las k -transitivas a partir de las cuales es posible tratar analíticamente una gran variedad de comportamientos humanos que se enmarcan*

conjunto finito de opciones $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tiene ciclos de orden $m \in \mathbb{N}$ si y solo si existen $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $x_1 \succeq x_2 \wedge x_2 \succeq x_3 \wedge \dots \wedge x_{m-1} \succeq x_m \wedge x_m \succeq x_1$.

⁵²Nótese así mismo que si consideramos $w(E') = \sum_{(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E} w(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ como peso del conjunto *feedback arc set problem* del grafo $G = (V, E)$ que representa la relación de preferencia revelada para $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ donde $w(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = |a_{ij}|$, $\forall i, j$ bastaría con resolver el problema MFAS para $G = (V, E)$ puesto que para todo ciclo \mathcal{C} de R^0 que no sea incoherente con GARP se cumple $w(\mathcal{C}) = \sum_{(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in \mathcal{C}} w(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = 0$. Por lo tanto, el único interés radica en considerar un peso estrictamente positivo para cada una de las aristas del grafo que representa el grafo de la relación de la preferencia revelada. Nótese que en la relación de preferencia revelada S , si $w(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = 1$, $\forall (\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in E$, entonces podemos definir una medida global de la bondad del ajuste λ^* definida por: $\lambda^* = \frac{n(n-1)-w(E')}{n(n-1)}$ para un MFAS E' .

en lo que se denomina modelos de racionalidad limitada⁵³ que exigen la ausencia parcial o total de ciclos en las preferencias.

Estudiar la existencia de los ciclos en la relación de preferencia revelada es fundamental⁵⁴ para analizar la estructura preferencial de un consumidor por dos razones, fundamentalmente: (1) porque los principales axiomas de racionalización (GARP, SARP, HARP, RARP, etc.) –que tienen una gran relevancia desde el punto de vista empírico– están completamente caracterizados por la aciclicidad o la “aciclicidad débil” de la relación de la preferencia revelada⁵⁵ y (2) porque los ciclos (o el número de ciclos) proporcionan, en cierto sentido, una medida de la incoherencia de las decisiones de consumo de un individuo y porque determinar exactamente los ciclos existentes en la relación de preferencia revelada y las observaciones que se ven envueltas en cada ciclo puede ser de utilidad tanto para explicar el comportamiento de un consumidor como para poder ofrecer una explicación sobre la posible inconsistencia en las elecciones efectuadas. Como consecuencia de lo anterior parece natural plantearse la siguiente pregunta: ¿cómo podemos determinar en la práctica la aciclicidad de una relación de preferencia? Además, si la estructura preferencial no es acíclica, ¿podemos identificar el número de ciclos, el tamaño de cada uno y las observaciones que los componen?

Los ciclos son interesantes, porque miden en cierto sentido el número de inconsistencias con que cuenta una relación. A tal fin necesitaremos un procedimiento para comprobar si existen ciclos en la estructura de preferencias y, en caso afirmativo, identificaremos el número de ciclos y la dimensión de cada uno. Designemos por B a una matriz cuadrada de Boole de orden n ($n \geq 2$) que representa a la relación de preferencia \succeq definida sobre un conjunto finito de opciones. Se dice que la matriz B es convergente (en sus potencias) si y sólo si existe una potencia B^n en la sucesión $\{B^k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) tal que $B^n = B^{n+1}$. Es claro que una matriz de Boole, convergente y cuadrada, de orden n ($n \geq 2$), debe tener valores límites y converger a uno de los siguientes tipos de matrices: (i) la matriz nula (todos los elementos son nulos); (ii) la matriz universal (todos los elementos son unitarios), o (iii) una matriz de ceros y unos. Es obvio que si la estructura de preferencias (dígrafo) no tiene ciclos, habrá algún valor de k correspondiente a la sucesión (paso) más larga del dígrafo, tal que $B^k = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{0}$ denota a la matriz nula. Se dice que tal matriz es nilpotente. En general, el elemento $B^k[i, j]$ de B^k es igual a uno si y solamente si existen

⁵³La noción de racionalidad limitada, establecida por Simon para reflejar comportamientos reales en la toma de decisiones desviados de los modelos convencionales, ha sido profusamente estudiada a lo largo de la literatura económica por numerosos autores [v. Kahnemann y Tversky (1982), Rodríguez-Palmero (1997), Shafir y Tversky (1995) y Simon (1972) entre otros.] con objeto de analizar las anomalías existentes en la toma de decisiones.

⁵⁴En la teoría clásica de la demanda parece ser (según la evidencia existente en la literatura) que Koo (1972) fue el primer autor en señalar la necesidad de estudiar los ciclos existentes en la relación de preferencia revelada para analizar la estructura preferencial del conjunto de elecciones de consumo efectuadas por un individuo. Este autor propone (como una primera aproximación) considerar las sucesivas potencias de la matriz booleana asociada a la relación de preferencia revelada y la matriz alcanzable inducida a partir de la matriz que representa la relación de preferencia revelada directa.

⁵⁵Nótese que para saber si un conjunto finito de datos de demanda observados puede ser racionalizado por una preferencia bastará probar la aciclicidad o la “aciclicidad débil” de los principales conceptos de revelación

i_1, \dots, i_{k-1} tales que $\bar{x}_i \succeq \bar{x}_{i_1} \succeq \dots \succeq \bar{x}_{i_{k-1}} \succeq \bar{x}_j$. Es decir, si existe un camino de longitud k entre el nodo i y el nodo j en el grafo dirigido correspondiente $G = (V, E)$ que representa a dicha relación de preferencia. En efecto, si existe un camino de longitud k en $G = (V, E)$ entre las observaciones i y j , existen i_1, \dots, i_{k-1} tales que $\bar{x}_i \succeq \bar{x}_{i_1} \succeq \dots \succeq \bar{x}_{i_{k-1}} \succeq \bar{x}_j$, entonces $B[i, i_1] = B[i_1, i_2] = \dots = B[i_{k-1}, j] = 1$, y el producto de estos términos es igual a la unidad. Pero, como este producto $B[i, i_1] \cdot B[i_1, i_2] \cdot \dots \cdot B[i_{k-1}, j]$ es uno de los términos de la suma booleana que da lugar al elemento $B^k[i, j]$ se tiene que $B^k[i, j] = 1$. Recíprocamente, si un elemento de B^k es igual a uno, quiere decir que se corresponde con una camino de longitud k ; de hecho, $B[i, i_1] \cdot B[i_1, i_2] \cdot \dots \cdot B[i_{k-1}, j] = 0$ implica que hay por lo menos un $B[i_k, i_{k+1}]$ igual a cero, lo cual quiere decir que $i_k \not\rightarrow i_{k+1}$.

Observación 3.2.5 *En la teoría clásica de la demanda (según la evidencia existente en la literatura) Dobell (1965) fue el primer autor en caracterizar la aciclicidad de una relación de preferencia definida sobre un conjunto finito de opciones en términos de su matriz booleana. Este autor demostró que la nilpotencia de la matriz booleana asociada a una relación binaria es una condición necesaria para que ésta sea acíclica⁵⁶. Años más tarde, el profesor Rodríguez-Palmero ofreció diferentes caracterizaciones y condiciones suficientes para las relaciones de preferencia acíclicas y las k -aciclicas definidas sobre un conjunto finito de opciones, caracterizaciones que nos permitirán también conocer la existencia de ciclos de cualquier “tamaño” en la relación de preferencia revelada. Además, caracterizó la aciclicidad de una relación de preferencia a partir de ciertas propiedades relativas a su matriz booleana como la asimetría de su clausura transitiva o su nilpotencia⁵⁷. Véase la Tesis Doctoral del Profesor Rodríguez-Palmero (1997, págs. 163-165) para más detalles sobre esta cuestión.*

Examinando la matriz alcanzable B^+ (que representa la matriz clausura transitiva inducida a partir de una matriz de preferencias) puede decirse inmediatamente si hay o no ciclos que empiecen y terminen en el nodo i , según que el elemento diagonal $B^+[i, i]$ sea o no igual a la unidad⁵⁸. Sin embargo, no es evidente conocer, a partir de B o de su clausura transitiva B^+ , cuántos ciclos hay, cual es el tamaño de cada uno o qué observaciones forman parte de cada ciclo. En una primera aproximación cabe pensar en construir la relación de equivalencia E cuya matriz asociada viene dada por: $E[i, j] = B^+[i, j] \cdot B^+[j, i]$, $\forall i, j$. Sin embargo, y a pesar de que

⁵⁶Otros autores como Marimont (1960) y Koo (1972) establecen diferentes condiciones para garantizar la nilpotencia de una matriz booleana. Estos autores muestran que una matriz booleana es nilpotente si tanto cada submatriz principal tiene al menos una fila de ceros o una columna de ceros o si dicha matriz es triangular superior. Una matriz booleana B de orden n se dice que es nilpotente si $B^n = 0_n$.

⁵⁷Una relación binaria \succeq sobre X se dice que es asimétrica si, para todo $x, y \in X$, $x \succeq y$ implica que $y \succeq x$ es falso. Nótese que una relación de equivalencia \succeq definida sobre un conjunto finito de opciones X es una relación reflexiva, simétrica y transitiva; esto es, para toda terna $x, y, z \in X$ se tiene que $x \succeq x$; si $x \succeq y$, entonces $y \succeq x$, y $x \succeq y$ e $y \succeq z$, se sigue que $x \succeq z$.

⁵⁸En una primera aproximación, Koo (1972) propone construir la relación de equivalencia E definida por: $\bar{x}_i E \bar{x}_j$ si y solamente si $\bar{x}_i H \bar{x}_j$ y $\bar{x}_j H \bar{x}_i$. Para obtener la matriz booleana E bastará con multiplicar la matriz booleana asociada a la relación de preferencia revelada indirecta H por su matriz traspuesta (para todo par de observaciones i, j se cumple $E[i, j] = H[i, j] \cdot H[j, i]$).

todo ciclo de la relación de preferencia revelada está contenido en alguna *clase de equivalencia*, la matriz E no facilita información sobre los ciclos, ni sobre los subciclos existentes dentro de un ciclo⁵⁹.

Observación 3.2.6 *En términos de la teoría de grafos, estas clases de equivalencia son las componentes fuertemente conexas del grafo dirigido que representa a la relación binaria. Para calcular la matriz E bastará con multiplicar la matriz booleana asociada a la relación de preferencia revelada indirecta por su matriz traspuesta (para todo par de observaciones i, j se cumple $E[i, j] = B^+[i, j] \cdot B^+[j, i]$), si bien cabe señalar la existencia en la literatura computacional de diferentes procedimientos basados en el algoritmo de Tarjan (1971) que permiten calcular las componentes fuertemente conexas del grafo dirigido que representa a una relación binaria definida sobre un conjunto finito de opciones de tamaño n en un tiempo de ejecución inferior a $\mathcal{O}(n^3)$.*

Es inmediato comprobar que una relación binaria asociada a un conjunto finito de alternativas es acíclica si y solamente si su matriz booleana asociada es nilpotente o, equivalentemente si su clausura transitiva es asimétrica⁶⁰. Sin embargo, desde un punto de vista operativo, probar la aciclicidad de una relación de preferencia contrastando la nilpotencia de su matriz booleana asociada resulta poco eficiente, dado que este proceso requiere realizar n multiplicaciones de matrices, por lo que resulta necesario disponer de procedimientos alternativos que permitan resolver de manera más eficiente este problema⁶¹. En el ámbito de la matemática computacional y de la teoría de grafos se han desarrollado diversos procedimientos alternativos para contrastar la aciclicidad de una relación binaria. La teoría de grafos proporciona algoritmos eficientes que permiten contrastar la aciclicidad de una relación de preferencia sin necesidad de determinar la nilpotencia de su matriz booleana asociada o la asimetría de la clausura transitiva de la relación. Una pequeña modificación en el clásico algoritmo de teoría de grafos dirigidos “Depth First Search” (DFS) de *búsqueda en profundidad* permite analizar la aciclicidad de una relación binaria en un tiempo de $\mathcal{O}(n + e)$. Este algoritmo, permite procesar de manera recursiva cada uno de los nodos de un grafo dirigido, y contrastar, en un tiempo de ejecución proporcional a $\mathcal{O}(n + e)$, la aciclicidad de la relación de preferencia revelada⁶². Sin embargo, no permite detectar todos los ciclos existentes en una relación binaria. En el ámbito de la teoría de grafos dirigidos, numerosos autores, entre los que cabe destacar a Johnson (1975), Tiernan (1970), Weinblatt (1972), Tarjan (1972) y Ehrenfeuch, Fostick y Osterweil (1973) han diseñado diferentes proce-

⁵⁹Véase Koo (1971, págs. 95-96), para más detalles.

⁶⁰Véase Rodríguez-Palmero (1997), para más detalles.

⁶¹Nótese que contrastar la nilpotencia de una matriz booleana o contrastar la asimetría de su clausura transitiva requieren un tiempo de ejecución proporcional a $\mathcal{O}(n^{\alpha+1})$ y $\mathcal{O}(h(n))$ respectivamente, donde $t(n)$ designa la complejidad computacional del algoritmo utilizado en el cálculo de la clausura transitiva, $\alpha \leq 2.376$ y $h(n) = \min\{n^2, t(n)\}$.

⁶²En los últimos años se han desarrollado otros procedimientos heurísticos y probabilísticos que permiten contrastar (en un tiempo de ejecución inferior a cualquiera de los algoritmos clásicos) la aciclicidad de una relación de preferencia sin necesidad de comprobar la nilpotencia de su matriz booleana ni contrastar la asimetría de su clausura transitiva. Véase Bender y Ron (2001), para más detalles.

dimientos que permiten detectar todos los ciclos existentes en un grafo dirigido⁶³. Entre todos estos procedimientos, quizás el más conocido sea el algoritmo enumerativo de Johnson (1975) que además de eliminar todas las deficiencias de los diferentes procedimientos propuestos por Tiernan (1970), Weinblatt (1972), Tarjan (1972) y Ehrenfeuch et. al. (1973) permite encontrar todos los ciclos existentes en cualquier relación binaria definida sobre un conjunto finito de opciones en un tiempo de ejecución proporcional a $\mathcal{O}((n+e) \cdot (c+1))$, donde c designa al número máximo posible de ciclos, n al número de datos de demanda y e al número de aristas del grafo dirigido que representa la relación de preferencia revelada directa asociada al conjunto de datos de demanda.

Una serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, es consistente con GARP si la relación de preferencia revelada directa, R^0 , no posee ciclos de longitud negativa. Por tanto, el número de ciclos de longitud negativa en la relación de preferencia revelada permite medir el grado de coherencia de las decisiones de consumo de un individuo. Una ligera modificación en el algoritmo de Johnson nos permite calcular todos los ciclos incoherentes con GARP existentes en la relación de la preferencia revelada⁶⁴.

Algorithm 21. Pseudo-code for computing cycles number of negative length

Input: Una serie una finita datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

1. begin
2. for $i, j := 1$ to n if $(C[i, i] \geq C[i, j] \text{ and } \bar{x}_i \neq \bar{x}_j)$ then $S[i, j] := true$
3. procedure Johnson's Algorithm
 - for each simple cycle \mathcal{C} in $G = (V, E)$ do
 4. for each $(v, w) \in E \cap \mathcal{C}$ do $long \leftarrow long + A[v, w]$
 5. if $(long < 0)$ then $print(\mathcal{C}); negcycle \leftarrow negcycle + 1$
6. return

Output: Cycles number of negativa length.

⁶³El número de ciclos posibles en una relación de preferencia definida sobre un conjunto finito de n alternativas es igual a $\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{n-j+1} (n-1)!$.

⁶⁴En el programa [NONPARAMETRIC DEMAND.F90](#) tenemos este algoritmo implementado, al igual que el algoritmo siguiente que nos permite obtener el número de ciclos minimales incoherentes con GARP. Este algoritmo detecta, en primer lugar, las componentes fuertemente conexas no triviales. Posteriormente, construye – mediante el procedimiento de búsqueda en profundidad– caminos elementales desde un nodo cualquiera v permite detectar todos los ciclos de longitud negativa existentes dentro de cada una de las componentes fuertemente conexas encontradas en la relación de preferencia revelada directa S . Para evitar que se dupliquen los ciclos, al igual que realiza Johnson (1975) se considera un array de carácter lógico para “bloquear” a todo vértice $w \in Comp(v)$ cuando éste se añade a un camino elemental desde v , dado que un mismo nodo no puede ser utilizado más de una vez en un mismo camino.

Este algoritmo anterior permite determinar, en un tiempo de ejecución de $\mathcal{O}((n+e) \cdot (c+1))$, todos los ciclos de longitud negativa existentes en la relación de preferencia revelada. Debido al elevado tiempo de ejecución de este problema, resulta necesario disponer de un procedimiento eficiente que permita determinar en un tiempo razonable una cota inferior del número de ciclos de longitud negativa, además de contrastar la consistencia de una serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, con la teoría neoclásica de la demanda.

El número de ciclos minimales de longitud negativa, κ^* , constituye una cota inferior del número de ciclos de longitud negativa (ciclos incoherentes con GARP) existentes en la relación de preferencia revelada. Una serie finita de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, satisface GARP (resp. SARP) si y sólo si el número de ciclos minimales de longitud negativa en la relación de preferencia revelada (resp. el número de ciclos minimales existentes en la relación binaria S) es cero. El siguiente algoritmo calcula, en un tiempo de ejecución de $\mathcal{O}(n+e)$, todos los ciclos minimales de longitud negativa existentes en la relación de preferencia revelada.

Algorithm 22. Pseudo-code for computing negative length minimal cycles

Input: Cost matrix associated with $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$

```

1. begin
2. Construction boolean matrix  $S$ ; cyclefound:=false; negcycle:=0
3. for  $i, j := 1$  to  $n$  do  $A[i, j] = C[i, j] - C[i, i]$ 
4. for each  $v \in V$  do order(v):=0
5. procedure recursive visit(v)
6.   for each  $v \in V$  if (order(v)=0) then
7.     count:=count+1; order(v):=count; push(v,stack); nstack:=nstack+1
8.   for each  $w \in V$  such that  $(v, w) \in E$  do
9.     if (order(w)=0) then
10.      push(w,stack); nstack:=nstack+1; visit(w)
11.    else
12.      cyclefound:=true; lower:=order(w)
13.      While [lower  $\leq$  nstack] do
14.        for each  $v \in$  stack such that  $order(v) \geq$  lower do push(v,C)
15.        for each  $(v, w) \in E \cap C$  do long:=long+A[i, j]
16.        if (long < 0) then print(C); negcycle:=negcycle+1
17. return
```

Output: Número de ciclos minimales incoherentes con GARP.

El algoritmo anterior es una variante del algoritmo de recorrido en profundidad o *Depth First Search* (DFS) que admite una implementación simple en forma recursiva, utilizando globalmente un contador y un vector de enteros para marcar las observaciones ya visitados y almacenar el orden de recorrido. Si algunas observaciones de consumo quedan sin visitar, el algoritmo selecciona una de ellas como nuevo punto de partida repite el proceso hasta que todos los nodos se hayan visitado⁶⁵.

A partir del número de ciclos minimales incoherentes con GARP es posible definir el siguiente índice de eficiencia:

$$\theta^* = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{n-j+1} (n-1)! - \kappa^*}{\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{n-j+1} (n-1)!}$$

donde κ^* es el número de ciclos minimales de longitud negativa del grafo dirigido que representa a la relación de preferencia revelada directa. Este índice es una medida global de la bondad del ajuste que mide el grado de incoherencia de las decisiones de consumo de un individuo. Nótese que $\theta^* \in [0, 1]$, y, además, que existe una correlación positiva entre el θ^* y el grado de eficiencia; esto es, un consumidor será más eficiente (resp., menos eficiente) cuanto mayor (resp., cuanto menor) sea el valor de θ^* , y recíprocamente. Nótese que si la serie de datos de demanda, $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$, satisface GARP entonces $\theta^* = 1$.

Por otra parte, merece la pena destacar que en cualquier análisis empírico del comportamiento de un consumidor, no sólo se debe analizar la consistencia de las decisiones de consumo sino que además deberá estudiarse la relación existente entre los diferentes lotes o cestas de bienes demandados por el consumidor ante las diversas situaciones presupuestarias. Supongamos que para una economía doméstica sólo se observan lotes de bienes de consumo que no son comparables a ningún otro, entonces es claro que la matriz booleana asociada a la relación de preferencia revelada directa es la matriz nula. En este caso, las observaciones serían formalmente consistentes con la teoría neoclásica de la demanda pero poco podríamos decir sobre la estructura preferencial de esta economía doméstica. Lo anterior sugiere: (1) analizar la fiabilidad de los diferentes tests de la preferencia revelada y, (2) introducir las siguientes definiciones de la teoría de grafos clásica que serán de vital importancia para conocer (en virtud de la correspondencia biunívoca existente entre la matriz booleana asociada a la relación de preferencia revelada y los grafos dirigidos) las interconexiones existentes entre las diferentes cestas de bienes demandadas por un individuo, cuestión ésta que puede llevarse a cabo teniendo en cuenta algunas definiciones de la teoría clásica de grafos dirigidos.

⁶⁵En el software `NONPARAMETRIC DEMAND.F90` que hemos diseñado tenemos implementados los subprogramas `SUBROUTINE EXISTENCIA DE CICLOS`, `SUBROUTINE CICLOS Y SUBROUTINE NEGATIVA` que permiten calcular el número de ciclos minimales de longitud negativa y todos los ciclos de longitud negativa existentes en la relación de la preferencia revelada asociada a un conjunto finito cualquiera de observaciones de demanda.

Definición 3.2.6 Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido asociado a una relación de preferencia. Se dice que G es fuertemente conexo si $\forall u, v \in V$, v es alcanzable desde u ; esto es, $\forall u, v \in V$ existe un camino que conecta los nodos u y v .

De la definición anterior se desprende que el grafo dirigido (V, E^+) , que representa la relación de preferencia revelada indirecta, es fuertemente conexo si y solamente si todas las cestas demandadas son comparables. Para cuantificar la influencia de las observaciones de demanda en la estructura preferencial de un individuo resulta conveniente calcular el grado de entrada o de salida para cada uno de los nodos del grafo dirigido, procedimiento que requiere un tiempo de ejecución inferior a $\mathcal{O}(n^3)$ donde n es el tamaño del conjunto de datos de demanda.

Para finalizar, cabe señalar que los diferentes procedimientos presentados en el ámbito de la teoría clásica de la demanda para analizar la bondad del ajuste de los modelos de optimización son también válidos en la aproximación no paramétrica a la teoría de la producción. En efecto, los modelos de optimización que aceptan la ineficiencia se obtienen mediante la introducción de un parámetro global e (o conjunto de parámetros $(e_t)_{t=1}^n$) entre cero y uno, con el requisito de que cualquier elección tenga una eficiencia de al menos e . Como para cualquier función de producción dada es posible determinar (por definición) el máximo output $f(x)$ para todos los inputs x tecnológicamente factibles, si se conociera (de antemano) la función de producción, ésta podría utilizarse para determinar $e = y/f(x)$ como medida de eficiencia de la actividad (x, y) , donde $0 \leq e \leq 1$ ya que necesariamente $y \leq f(x)$. A este índice lo designamos bajo el nombre de eficiencia técnica. Numerosos autores han abordado la cuestión de analizar la eficiencia de las decisiones productivas en la empresa desde una perspectiva no paramétrica⁶⁶. De manera similar a lo que sucede en la teoría clásica de la demanda nuestro punto de partida⁶⁷ será una lista, $\{p_t, x_t, y_t\}_{t=1}^n$, de datos observados. Si una actividad, (x, y) , ha sido observada donde los inputs x se utilizan para producir un único output y , entonces se sabe que el output y es factible con los inputs x . Sin más información no se puede saber si se podría haber producido un output mayor. Por consiguiente, no existe ninguna manera de juzgar de antemano la eficiencia de la actividad desde los inputs utilizados. La aproximación de von Neumann permite representar el conjunto de posibilidades de producción a partir de una colección finita de actividades sobre la base de un modelo, considerando su clausura con respecto al modelo. Así, si $f(\cdot)$ es la función de producción determinada por este conjunto de posibilidades de producción, el índice $e_t = y_t/f(x_t)$ es una cota superior para la eficiencia de la actividad (x_t, y_t) . Este índice proporciona –de manera análoga a lo que ocurre en la teoría del consumidor– una medida de la bondad del ajuste del correspondiente modelo de optimización⁶⁸. En consecuencia, como toda relación

⁶⁶Véanse los trabajos de Afriat (1972), Chavas y Cox (1990), Farrell y Fieldhouse (1962), Geiss (1969, 1971) y Hanoch y Rothschild (1972), entre otros.

⁶⁷Los econométricos determinan a partir de los datos observados una función de producción $f(\cdot)$ mediante la estimación de los parámetros de algún modelo. El resultado es más un predictor estadístico del output desde los inputs dados que una valoración real del output máximo posible y como tal no es un instrumento adecuado para medir la eficiencia, dado que las conclusiones dependen excesivamente de la forma funcional específica utilizada.

⁶⁸Nótese que la cantidad $(1 - e_t)$ puede interpretarse como la diferencia relativa (medida en términos de coste de producción relativos) entre la observación t y la hipótesis de optimización.

binaria definida sobre un conjunto finito de opciones $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ puede ser representada por un grafo dirigido finito, los procedimientos anteriores de eficiencia pueden ser generalizados de manera natural para estudiar la eficiencia y los cambios tecnológicos en la tecnología empresarial, cuestión ésta que dejamos abierta para posteriores estudios. Nótese que sobre toda lista de datos observados $\{p_t, x_t, y_t\}_{t=1}^n$ se puede definir una relación de preferencia revelada y, a partir de esta relación, caracterizar los axiomas de revelación y los axiomas de revelación homotética de la tecnología que están representados por la aciclicidad (o la ausencia de ciclos de “longitud negativa”) de la relación de preferencia revelada o de la revelación homotética.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1972) Efficiency Estimates of Production Functions *International Economic Review*, Vol. 8, págs. 568-598.
- [2] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An Extension of the Classical Method. *International Economic Review*, Vol. 14(2), págs. 460-472.
- [3] Afriat, S. (1987) *Logic of Choice and Economic Theory*. Oxford: Clarendon Press.
- [4] Bar-Yehuda, R., Geiger, D., Naor, J., Roth, R. (1998) Approximation Algorithms for the Feedback Vertex Set Problem with Applications to Constraint Satisfaction and Bayesian Inference, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 27, págs. 942-959.
- [5] Bellman, R. (1958) On a Routing Problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 16(1), págs. 87-90.
- [6] Caragiannis, C. Kaklamanis and Kanellopoulos, P. (2001) New bounds on the size of the minimum feedback vertex set in meshes and butterflies. *Information Processing Letters*, Vol. 83(5), págs. 275-280.
- [7] Chalfant, J. y J. Alston (1988) Accounting for Changes in Tastes. *Journal of Political Economy*, Vol. 21, págs. 391-410.
- [8] Chavas, J. y T. Cox (1990) A Non-Parametric Analysis of Productivity: the Case of U.S. and Japanese Manufacturing, Vol. 80(3), págs. 450-464.
- [9] Coopersmith, D. y S. Winegrad (1987) Matrix Multiplication Via Arithmetic Progression. In *Proceedings of the 19th ACM Symposium on Theory of Computing*, págs. 1-6.
- [10] Demetrescu, C. y I. Finocchi (2003) Combinatorial Algorithms for Feedback Problems in Directed Graphs. *Information Processing Letters*, Vol. 86, págs. 129-136.
- [11] Diewert, E. (1973) Afriat and Revealed Preference theory. *Review of Economic Studies*, Vol. 40, págs. 419-426.

- [12] Diewert, E. y C. Parkan (1978) Test for Consistency of Consumer Data and Nonparametric Index Numbers. Working Paper 78-27. University of British Columbia, Vancouver.
- [13] Diewert, E. y C. Parkan (1985) Tests for the Consistency of Consumer Data. *Journal of Econometrics*, Vol. 30, págs. 127-147.
- [14] Dobell, A. (1965) A Comment on A.Y.C. Koo's. An Empirical Test of Revealed Preference Theory. *Econometrica*, Vol. 33(2), págs. 451-455.
- [15] Ebert, J. (1981) A Sensitive Transitive Closure Algorithm. *Information Processing Letters*, Vol. 12, págs. 255-258.
- [16] Ehrenfeucht, A.; Fosdick, L. y L. Osterweil (1973) An Algorithm for Finding the Elementary Circuits of a Directed Graph. Tech. Rep. CU-CS-024-23. Dept. of Computer Sci., University of Colorado.
- [17] Eve, J. y Kurki-Suonio (1977) On Computing the Transitive Closure of a Relation. *Acta Informatica*, Vol. 8, págs. 303-314.
- [18] Famulari, M. (1996) A Household-Based, Nonparametric Test of Demand Theory. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 77, págs. 372-382.
- [19] Farrell, M. y Fieldhouse, M. (1962) Estimating Efficient Production under Increasing Return to Scale. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 125, págs. 252-67.
- [20] Festa, P.; Pardalos, P. and Resende, M. (1999) Feedback Set Problems, in "Handbook of Combinatorial Optimization", D.Z. Du & P.M. Pardalos, Eds. Vol. 4, Kluwer Academic Publishers, págs. 209-258.
- [21] Flood, M. (1990) Exact and heuristic algorithms for the weighted feedback arc set problem: A special case of the skewsymmetric quadratic assignment problem. *Networks*, Vol. 20, págs. 1-23.
- [22] Ford, L. y D. Fulkerson (1962) *Flows in Networks*. Princeton University Press.
- [23] Furman, M. (1970) Application of a Method of Fast Multiplication of Matrices in the Problem of Finding the Transitive Closure of a Graph. *Soviet Math. Dokl.*, Vol. 11(5), págs. 1252-1252.
- [24] Rodríguez-Palmero, C. et. al. (1998) Un estudio empírico de la coherencia. *Revista de Economía Aplicada*, Vol. 17(6), págs. 53-79.
- [25] Geiss, C. (1971) Computations of Critical Efficiencies and the Extension of Farrell's Method in Production Analysis. Department of Economics, University of North Carolina at Chapel Hill, mimeographed. Presented at the Summer Meeting of the Econometric Society, Boulder, Colorado, September, 1971.

- [26] Goldberg, A. y T. Radzik (1993) A Heuristic Improvement of the Bellman-Ford Algorithm. *Applied Mathematics Letters*, Vol. 6, págs. 3-6.
- [27] Goldberg, A. (1995) Scaling Algorithms for the Shortest Paths Problem. *SIAM Journal of Computing*, Vol. 24, págs. 494-504.
- [28] Hanoch, G. y M. Rothschild (1972) Testing the Assumptions of Production Theory: A Nonparametric Approach. *Journal of Political Economy*, Vol. 8, págs. 256-272.
- [29] Houthakker, H. (1950) Revealed Preference and the Utility Function. *Economica*, Vol. 17, págs. 159-174.
- [30] Ioannidis, Y. (1986) On the Computation of the Transitive Closure of Relational Operators. In *Proceedings of the 12th International VLDB Conference*, págs. 403-411.
- [31] Ioannidis, Y. y R. Ramakrishnan (1988) Efficient Transitive Closure Algorithms. In *Proceedings of the 14th VLDB Conference*, págs. 335-346.
- [32] Johnson, D. (1975) Finding All the Elementary Circuits of a Directed Graph. *SIAM J. Comput*, Vol. 4(1), págs. 77-84.
- [33] Kahneman, D. y Tversky, A. (1982) The psychology of preferences. *Scientific American*, Vol. 246, págs. 160-173.
- [34] Koo, A. (1963) An Empirical Test of Revealed Preference theory. *Econometrica*, Vol. 31(4), págs. 646-664.
- [35] Koo, A. (1965) Reply. *Econometrica*, Vol. 33(2), págs. 456-458.
- [36] Koo, A. (1971) Revealed Preference-A Structural Analysis. *Econometrica*, Vol. 39(1), págs. 89-97.
- [37] Koo, A. y G. Hasenkamp (1972) Structure of Revealed Preference: Some Preliminary Evidence. *Journal of Political Economy*, Vol. 80, págs. 724-744.
- [38] Marimont, R. (1960) Applications of Graphs and Boolean Matrices to Computer Programming. *SIAM Review*, Vol. 2(4), págs. 259-268.
- [39] McMillan, M. y J. Amoako-Tuffour (1988) An Examination of Preferences for Local Public Sector Options. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 70(1), págs. 45-54.
- [40] Munro, I. (1971) Efficient Determination of the Transitive Closure of a Directed Graph. *Information Processing Letters*, Vol. 1(2), págs. 56-58.
- [41] Nuutila, U. y E. Soisalon-Soininen (1994) On Finding the Strongly Connected Components in a Directed Graph. *Information Processing Letters*, Vol. 49, págs. 9-14.

- [42] Nuutila, E. (1995) Efficient Transitive Closure Computation in Large Digraphs. Acta Polytechnica Scandinavica, Mathematics and Computing in Engineering Series No. 74. Finnish Academy of Technology, Helsinki.
- [43] Pallottino, S. (1984) Shortest-path Methods: Complexity, Interrelations and New Propositions. Networks, Vol. 14, 257-267.
- [44] Purdom, P. (1970) A Transitive Closure Algorithm, BIT, Vol. 10, págs. 76-94.
- [45] Rodríguez-Palmero, C. (1997) Estudio de varias clases de estructuras preferenciales. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, 1997.
- [46] Samuelson, P. (1938) A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior. Economica, Vol. 5, págs. 353-354.
- [47] Scarf, H.; Fostel, A. y M. Todd (2004) Two New Proofs of Afriat's Theorem. Economic Theory, Vol. 24(1), págs. 211-219.
- [48] Schmitz, L. (1983) An Improved Transitive Closure Algorithm. Computing, Vol. 30, págs. 359-371.
- [49] Simon, H. (1972) Theories of Bounded Rationality. Decision and Organization. C.B. McGuire y R. Radner. North Holland, Amsterdam, págs. 161-176.
- [50] Swofford, J. y G. Whitney (1987) Nonparametric Tests of Utility Maximization and Weak Separability for Consumption, Leisure and Money. Review of Economics and Statistics, Vol. 69(3), págs. 458-64.
- [51] Swofford, J. y G. Whitney (1988) A Comparison of Non-Parametric Tests of Weak Separability for Annual and Quaterly Data on Consumption, Leisure and Money. Journal of Business and Statistics, Vol. 6, págs. 241-246.
- [52] Tarjan, R. (1972) Depth First Search and Linear Graph Algorithms. SIAM Journal of Computing, Vol. 1(2), págs. 146-160.
- [53] Tarjan, R. (1973) Enumeration of the Elementary Circuits of a Directed Graph. SIAM J. Comput., Vol. 2, págs. 211-216.
- [54] Tiernan, J. (1970) An Efficient Search Algorithm to Find the Elementary Circuits of a Graph. Comm. ACM, Vol. 13, págs. 722-726.
- [55] Tversky, A. y D. Kahnemann (1981) The Framming of Decisions and the Psychology of Choice. Science, Vol. 211, págs. 453-458.
- [56] Uebe, G. (1972) A Note on Anthony Y.C. Koo 'Revealed Preference- A Structural Analysis'. Econometrica, Vol. 40(4), págs. 771.

-
- [57] Varian, H. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50(4), págs. 945-971.
- [58] Varian H. (1984) The Nonparametric Approach to Production Analysis. *Econometrica*, Vol. 52(3), págs. 579-597.
- [59] Varian, H. (1987) On Goodness-of-Fit of Revealed Preference Conditions. CREST Working Paper. Department of Economics. University of Michigan.
- [60] Varian, H. (1990) Goodness-of-Fit in Optimizing Models. *Journal of Econometrics*, Vol. 46, págs. 125-140.
- [61] Wakker, P. (1989) A Graph-Theoretic Approach to Revealed Preference. *Methodology and Science*, Vol. 22, págs. 53-66.
- [62] Warren, H. (1975) A modification of the Warshall Algorithm for the Transitive Closure of Binary Relations. *Communications of the ACM*, Vol. 18(4), págs. 218-220.
- [63] Warshall, S. (1962) A Theorem on Boolean Matrices. *Journal of the American Association of Computing Machinery*, Vol. 9(1), págs. 11-12.
- [64] Weinblatt, H. (1972) A New Algorithm for Finding the Simple Cycles of a Finite Directed Graph. *J. Assoc. Comput. Match.*, Vol. 19, págs. 43-56.

3.3. La fiabilidad de los test no paramétricos GARP

En esta sección analizamos la potencia de los test de la preferencia revelada y generalizamos, de manera natural, los modelos clásicos de comportamiento aleatorio de un consumidor de Battalio, Dwyer y Kagel (1987). Los nuevos test aquí presentados nos permitirán evaluar de manera más precisa la sensibilidad de los diferentes tests no paramétricos en cualquier estudio no paramétrico de la demanda y, por lo tanto, resultan muy útiles en el diseño experimental⁶⁹. En esta sección, también realizamos un experimento de Monte Carlo para probar que nuestros modelos de comportamiento aleatorio presentan una fiabilidad superior a la exhibida por los tradicionales test de Bronars (1987) y los modelos de comportamiento aleatorio de Battalio, Dwyer y Kagel (1987).

Una de las herramientas más elegantes para contrastar la teoría del comportamiento optimizador es la preferencia revelada. Varian (1982, 1983a, 1983b, 1984, 1985) presentó la claridad y la elegancia de esta teoría en una serie de documentos notables, basados en trabajos anteriores de Afriat (1967, 1973), Houthakker (1950) y, por supuesto, de Samuelson (1938). Como herramienta de diagnóstico, los tests de la preferencia revelada nos permiten analizar si los datos individuales o colectivos de un agente económico se ajustan a los modelos económicos de la optimización que rigen la conducta de un consumidor racional. Estos tests no paramétricos de la optimización permiten aceptar la hipótesis nula (los datos han sido generados por un proceso de maximización de la preferencia) si se satisfacen todas las restricciones no paramétricas que caracterizan la conducta del agente optimizador; en caso contrario, la hipótesis se rechaza. Nótese que, al igual que sucede con los contrastes de hipótesis clásicos estadísticos, al aceptar la hipótesis nula, no estamos asegurando necesariamente que los datos disponibles proporcionan suficiente evidencia para aceptar la hipótesis de la maximización de la utilidad. Esto es, simplemente estaríamos afirmando que los datos disponibles no proporcionan suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula.

En cualquier regla de decisión existe una cierta probabilidad de llegar a una conclusión errónea. Siempre pueden cometerse dos tipos de errores: rechazar la hipótesis nula siendo cierta (Tipo I) y no rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa (Tipo II). Al ser los tests de preferencia revelada contrastes “exactos” de la optimización⁷⁰, que no incorporan ningún error de medida o de naturaleza estocástica, los datos observados pueden haber sido generados desde la optimización de la conducta de un consumidor racional y, sin embargo, violar GARP por la existencia de pequeños errores de medida y/o de naturaleza estocástica presentes en ellos. En este caso se

⁶⁹Estos nuevos modelos de comportamiento aleatorio presentan una mayor fiabilidad que los tradicionales test de comportamiento aleatorio de un consumidor que se han venido utilizando en la literatura económica en el diseño –análisis ex-ante– de los experimentos económicos de la teoría pura del consumidor.

⁷⁰La probabilidad de rechazar la hipótesis nula es cero cuando la hipótesis nula es cierta (los datos han sido generados por un consumidor maximizador de la utilidad), dada la ausencia de un término error en la teoría de la maximización de la preferencia sobre la cual GARP está basado. Es decir, si los datos de demanda se observan sin ningún tipo de error, éstos necesariamente deben satisfacer GARP y en consecuencia no existe error del Tipo I); esto es, $\text{Prob}(H_1/H_0 \text{ cierta}) = 0$.

estaría cometiendo un error de tipo I. Por contra, es posible que los datos sean consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad y, sin embargo, que no hayan sido generados por un agente optimizador. En esta situación estaríamos ante un error del tipo II. Por tanto, cuando se diseñan y se aplican (en cualquier estudio empírico del comportamiento de un consumidor) los tests de preferencia revelada deben analizarse dos cuestiones: por un lado, la “bondad de ajuste” del modelo de optimización y por otro, la potencia de predicción o la fiabilidad del test. Si la prueba encuentra violaciones GARP sería deseable analizar si el resultado es demasiado taxativo o si existe una tolerancia aceptable para poder inferir si los datos han sido generados desde una conducta optimizadora⁷¹. Aquí es donde subyace el concepto de la “bondad del ajuste” que ya ha sido abordado en el capítulo anterior. Por otro lado, como los datos pueden no haber sido generados desde un proceso de optimización y, sin embargo, satisfacer GARP, cabe preguntarse si la prueba es lo suficientemente fiable como para detectar que los datos no han sido generados desde la optimización. Varian (1982, págs. 965-966) fue el primer autor en observar que los datos de demanda agregada generalmente satisfacen GARP, y en dudar, también, de la fiabilidad de los tests de preferencia revelada cuando éstos se aplican a datos de consumo agregado:

“[...] I have applied the routines of Section 1 to several sets of aggregate consumption data. In each case the aggregation consumption data was consistent with GARP: that is, it could have been generated by a single neoclassical “representative consumer” [...] Most existing test of aggregate consumption data are post-war data, and this period has been characterized by small changes in relative prices and large changes in income. Hence, each year has been revealed preferred to the previous years in the sense that it has typically been possible in a given year to purchase the consumption bundles of each of the previous years. Hence no “revealed preference” cycles can occur and the data are consistent with the maximization hypothesis. This observation implies that those studies which have rejected the preference maximization using conventional parametric techniques are rejecting only their particular choice of parametric form [...] Given nature of the data, these intersections are quite rare, and in fact only occur for two years 1974 and 1975. Again, the lack of variation in the price data limits the power of these methods in this case [...].”

Siguiendo a Varian, Bronars (1987) utiliza los datos de consumo agregado de la economía de EEUU en el período 1947-1978 agrupados en nueve categorías (vehículos de motor, ropa, comida, combustible, transporte, vivienda, mobiliario, otros bienes duraderos y otros servicios) para contrastar no paramétricamente la hipótesis de la maximización de la preferencia. El análisis de Bronars difiere del efectuado por Varian en el sentido de que utiliza, tanto datos de consumo agregados como los de consumo per cápita para contrastar las violaciones GARP. Este autor muestra que trabajar con datos per cápita altera significativamente tanto la naturaleza como la frecuencia de las intersecciones de los conjuntos presupuestarios en el período muestral. Utili-

⁷¹Nótese que una violación GARP, por pequeña que sea, implica que los datos no han sido generados por una función de utilidad.

zando los algoritmos de Varian, comprueba que ni la serie con los datos de consumo agregado ni la serie de datos per cápita violan GARP en ese período. Además, prueba, considerando datos agregados, que 7 de los 32 hiperplanos presupuestarios no se cortan con ningún otro, mientras que, con los datos per cápita en cada año, el conjunto presupuestario tiene intersección no vacía (en el ortante positivo) con al menos otros dos conjuntos presupuestarios correspondientes a otros años de la muestra. Sin embargo, Bronars (1987) trata de argumentar que incluso estas “pequeñas” variaciones de precios⁷² son suficientes para detectar las violaciones GARP. Bronars (1987, pág. 693) señala que si bien es cierta la existencia de pocas intersecciones entre los conjuntos presupuestarios rechaza que los tests no paramétricos de la preferencia revelada sean incapaces de descubrir las violaciones GARP:

“ [...] In each year the “representative consumer” has been typically able to purchase the *observed consumption bundles* of previous years, but since consumption bundles are potentially the outcome of preference maximizing decisions, this is not a meaningful criticism of postwar aggregate data for tests of preference maximization. Varian is incorrect in asserting that the relative price change are unimportant in postwar aggregate data, for the budget sets of the “representative consumer” frequently intersect in the positive orthant. Varian finds that the observed consumption bundles do not provide much an improvement on the “classical” bounds for true cost of living indexes, but this does not imply that tests of preference maximization using aggregate data have low power. Any budget set intersections, whether or not they improve the “classical” bounds for true cost of living indexes, increase the power of tests of preference maximization. A data set contains no useful information about preference maximization only if budget sets do not intersect (the “representative consumer” is able to purchase all feasible consumption bundles of previous years) [...]”

Otros autores también han afirmado la debilidad de los tests de preferencia revelada cuando se aplican a datos agregados, debido al reducido número de intersecciones entre los diferentes conjuntos presupuestarios. En este sentido, Blundell, Browning y Crawford (2003) afirman⁷³:

“[...] *There is also a concern that revealed preference tests are inherently lacking in power (as compared with parametric tests) and will fail to reject 'too often' [...] Because revealed preference tests, and in particular GARP, put the mildest restrictions on behavior they can be seen as so flexible as to allow too many observations to pass the test [...]*”

⁷²El problema al cual estos autores se refieren es la correlación de precios; ya que mientras los precios nominales tienden a estar altamente correlacionados entre los distintos bienes, los precios relativos están caracterizados por “pequeños” cambios.

⁷³Blundell et al. (2003) sugieren la posibilidad de combinar las técnicas paramétricas y las no paramétricas y considerar modelos paramétricos flexibles sobre las regiones donde las pruebas no paramétricas no fallan. Sin embargo, advierten, “una de nuestras preocupaciones por los modelos paramétricos actualmente usados es que pueden ser demasiado inflexibles.”

Por todo ello, en los modelos agregados de series temporales se debe ser cauto cuando se tienen que extraer conclusiones sobre el “consumidor representativo”, pues estos modelos parten de la consideración de un agente representativo al que se asimilan las observaciones agregadas.

Es una creencia común el que la agregación a menudo oculta características interesantes del problema que se analiza. Además, como el “consumidor representativo” puede no ser optimizador y, sin embargo, ser consistente con la teoría económica (debido al reducido número de intersecciones de los conjuntos presupuestarios) el uso de datos agregados ha sido considerado por algunos autores como una aproximación inapropiada para estudiar su comportamiento. Lo anterior sugiere plantearse la posibilidad de que los datos puede que no hayan sido generados desde la optimización y, sin embargo, satisfacer GARP. Esta observación, realizada por Andreoni y Harbaugh (2006), se pone claramente de manifiesto en la Figura 3.7, que contiene los conjuntos presupuestarios para los años I, II y III. Todos ellos son idénticos en ambas situaciones, pero mientras el primer consumidor en la primera situación elige A, B y C; el segundo consumidor elige D, E y F. Como la recta presupuestaria III no corta a las otras dos rectas presupuestarias, la situación presupuestaria correspondiente no proporciona ninguna información útil sobre la hipótesis de la maximización de la preferencia en ambas situaciones; es decir, los datos observados no violan GARP independientemente de cual sea la elección realizada en la situación III. Una violación GARP sólo es posible si el consumidor demanda una cesta de bienes situada sobre el segmento GH en el año I y sobre el HI en el año II, lo cual es perfectamente posible en ambas situaciones.

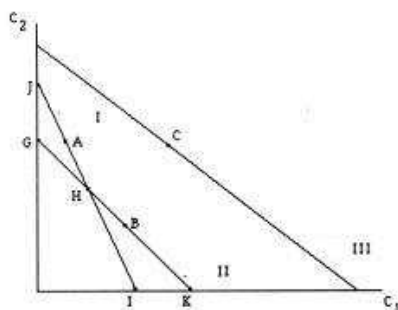


Figura 3.7: Fiabilidad de la preferencia revelada. Fuente: Andreoni y Harbaugh (2006).

Las cestas de bienes de consumo observadas en la Figura 3.7 revelan más información sobre la estructura preferencial del consumidor –y sobre el conjunto de cestas de bienes que no se “revelan peor” que la cesta de consumo seleccionada en el año I– que las cestas de bienes de consumo de la Figura 3.8 ya que E se revela directamente preferida a D, pero ni A se revela directamente preferida a B ni viceversa. Así pues, antes de aceptar los resultados de los tests no paramétricos de la maximización de la preferencia, resulta instructivo y útil analizar la frecuencia y las intersecciones de los conjuntos presupuestarios dado que incluso el comportamiento aleatorio

de un individuo todavía puede ser consistente⁷⁴ con la teoría económica. Nótese que cuando se emplea la aproximación no paramétrica (basada en la teoría de la preferencia revelada) para analizar la consistencia de las decisiones de consumo de un individuo se plantea una situación similar a la que ocurre con las reglas de decisión en la estadística inferencial clásica. Simplemente porque se esté aceptando la hipótesis nula no significa necesariamente que los datos hayan sido generados por una conducta optimizadora. Si no se rechaza la hipótesis nula, simplemente estamos observando que las desviaciones de los datos observados en relación con el modelo de optimización no son concluyentes o que los tests carecen de la fiabilidad necesaria para rechazarla cuando ésta es falsa.

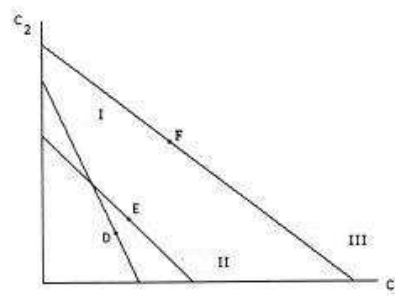


Figura 3.8: Potencia de la preferencia revelada. Fuente: Andreoni y Harbaugh (2006).

En un contraste de hipótesis estadístico lo ideal es reducir los dos tipos de errores aludidos. Sin embargo, en esta aproximación (supuesta la inexistencia de errores de medida y/o aleatorios) no existe posibilidad de cometer un error de Tipo I en la regla de decisión adoptada. Así pues, el concepto de potencia⁷⁵ del contraste no forma parte directa de la decisión de rechazar la hipótesis nula. Sin embargo, este concepto proporciona una valiosa información sobre las propiedades de la regla de decisión. Sería, por tanto, deseable disponer de una medida para analizar la potencia del test estadístico, pues su cálculo proporcionará una valiosa información sobre la estructura del conjunto de datos de demanda y, en consecuencia, sobre las propiedades de la regla de decisión. Pero, naturalmente, la potencia depende de la hipótesis alternativa. Dada alguna hipótesis alternativa razonable y una distribución de los errores, el objetivo será encontrar un procedimiento que aumente la potencia del contraste y que conduzca necesariamente a rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa para poder así detectar si los datos han sido generados, o

⁷⁴Becker (1962) –en su intento de mostrar la universalidad de los principales resultados de la teoría clásica de la demanda– introduce en la literatura económica el concepto de “consumidor impulsivo”.

Diferentes estudios teóricos y experimentales recientes han confirmado un grado alto de universalidad de la teoría pura de la conducta del consumidor. Por ejemplo, el trabajo experimental con ratas y otros animales (Kagel et al., 1981 y 1995) reveló que los animales tienen curvas de demanda de pendiente negativa, como supuestamente las tienen los humanos. Así, Becker (1993) argumenta extensamente que el análisis económico es una poderosa herramienta no sólo para entender el comportamiento humano sino también para entender el comportamiento de otras especies.

⁷⁵En un contraste de hipótesis estadístico la potencia del contraste es la probabilidad de que el contraste nos conduzca correctamente a rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa.

no, por un proceso no optimizador, a pesar de satisfacer GARP. Sería deseable poder conocer una expresión analítica de la potencia del contraste para cualquier hipótesis alternativa. Sin embargo, en la actualidad no se conoce ninguna expresión analítica que resuelva esta cuestión y, como señala Varian (1985), hay pocas esperanzas de poder encontrarla, dada una hipótesis alternativa⁷⁶ arbitraria. Así, el procedimiento natural es obtener diferentes procedimientos que permitan aproximar el poder de predicción de los diferentes test de preferencia revelada.

Bronars (1987, págs. 965-966) ofreció una contribución realmente novedosa en la investigación de la potencia del test GARP. Como todo comportamiento aleatorio es una hipótesis alternativa admisible y, por supuesto, la potencia solo puede medirse contra una hipótesis alternativa, Bronars (1987) especificó una hipótesis alternativa sobre el modelo de comportamiento irracional de Becker (1962) –que postula (bajo el supuesto que las preferencias del consumidor son no saciadas) que las decisiones de consumo de un “consumidor impulsivo” son probabilísticas y que están distribuidas de manera uniforme sobre el conjunto presupuestario– con objeto de poder obtener una aproximación a la sensibilidad de estos tests⁷⁷. Así, adaptó y extendió el concepto de “consumidor impulsivo” de Becker para realizar un análisis ex-ante de los diferentes axiomas de preferencia revelada. El “consumidor impulsivo” de Becker se representa por un modelo probabilístico en el cual todas sus posibles decisiones de consumo son aleatorias y equiprobables. Por ejemplo, en la figura 1 una violación GARP ocurre si el agente económico elige cestas de bienes sobre los segmentos GH y HI, lo cual ocurre con la siguiente probabilidad:

$$\text{Potencia} = \text{Prob}(\text{violación GARP}) = (\|GH\| * \|HI\|) / (\|GK\| * \|JI\|)$$

donde $\|\cdot\|$ designa la norma euclídea. Como $\|HK\| \geq \|HI\|$ y $\|JH\| \geq \|GH\|$, esta probabilidad está acotada entre 0 y 0.25. Nótese que la potencia del test alcanzará su extremo superior cuando $\|HK\| \approx \|HI\|$ y $\|JH\| \approx \|GH\|$, o los dos conjuntos presupuestarios están próximos a ser paralelos. Es evidente la existencia de una alta correlación positiva entre la potencia del test y el número de intersecciones de los conjuntos presupuestarios. En general, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula aumenta a medida que lo hace el número de intersecciones en los conjuntos presupuestarios del conjunto de datos. Una de las ventajas del enfoque de Bronars es que es a la vez natural y simple. Una posible desventaja es que en algunas situaciones es quizás poco predictivo. Supongamos, por ejemplo, una situación como la que describe la Figura 3.9. En esta situación la prueba tiene muy poco poder predictivo dado que las longitudes de los segmentos HI y HK tienden a cero y, en consecuencia, la probabilidad de rechazar la

⁷⁶Está ampliamente aceptado dentro de la comunidad científica que la existencia de fallos en el aprendizaje, memoria, percepción y otros factores cognitivos que influyen de manera directa en el proceso de selección de un individuo puede provocar que las elecciones se desvíen de la optimización y que el consumidor sea “irracional”. Becker (1962, pág. 5) considera “irracional” a cualquier desviación de la hipótesis de la maximización de la utilidad.

⁷⁷Bronars genera 200 series temporales de consumo aleatorio para analizar la fiabilidad de los tests de preferencia revelada, encontrando que con los datos agregados el 67.5% de las series temporales no satisfacen GARP y el 98.5% de las series temporales correspondientes a los datos per cápita son inconsistentes con la teoría clásica de la demanda.

hipótesis nula cuando ésta es falsa es casi nula. En esta situación la prueba tiene muy poco poder predictivo.

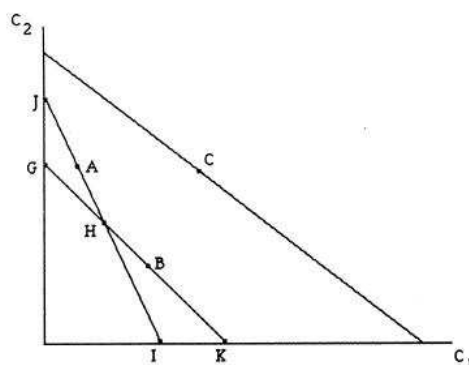


Figura 3.9: Poder predictivo del test de Bronars. Fuente: Bronars (1987).

Dada la dificultad de establecer una fórmula matemática que establezca la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa, desde el punto de vista práctico el procedimiento natural para analizar la capacidad predictiva de los diferentes tests de preferencia revelada es la realización de una serie de simulaciones o experimentos de Monte Carlo en los presupuestos bajo la hipótesis alternativa (la aleatoriedad de las elecciones) para poder calcular así las probabilidades de violaciones GARP. Entonces, el poder de predicción del test es la probabilidad de que las elecciones aleatorias efectuadas violen el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada. Bronars (1967, págs. 965-967) propuso tres métodos diferentes para diseñar un modelo de comportamiento aleatorio (o irracional) de un consumidor que representase al “consumidor impulsivo” de Becker. Los modelos de comportamiento aleatorio (o irracional) de un consumidor, que se enmarcan dentro de los modelos de microsimulación, permiten abordar una diversidad de cuestiones de contenido económico (sistemas de redistribución óptima, de demanda, cuestiones fiscales, etc.) que son susceptibles de ser contestadas con técnicas basadas en la simulación o en los experimentos de Monte Carlo. En el primer modelo de comportamiento aleatorio, que Battalio et. al (1987) denominaron **random money choice**, el consumidor impulsivo se gasta cada unidad de dinero en un cierto bien con una cierta probabilidad, con la única restricción de agotar toda su renta monetaria en la compra de los distintos bienes que forman su conjunto de consumo. De este modo, si β_{ij} es la probabilidad de elegir el bien i en la situación j , m_j es el nivel de renta monetaria disponible por el consumidor y x_{ij} la cantidad demandada del bien i en la situación j se tiene que:

$$x_{ij} = \beta_{ij} \cdot \frac{m_j}{p_{ij}}; \quad \beta_{ij} > 0, \quad \sum_{i=1}^k \beta_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

Bronars (1987, pág. 695) presentó un segundo procedimiento para modelizar el modelo de comportamiento aleatorio **random money choice**. En este segundo método, Bronars considera

que en cada situación presupuestaria el consumidor se gasta aleatoriamente un porcentaje de su renta monetaria en cada uno de los bienes de su conjunto de consumo. Para determinar este porcentaje aleatorio, para cada situación presupuestaria j Bronars genera k variables aleatorias β_{ij} , $i = 1, \dots, k$, estrictamente positivas que se distribuyen según una distribución uniforme y determina, a partir de estas variables, la proporción de gasto, $\beta_{ij} / \sum_{i=1}^k \beta_{ij}$, que el consumidor impulsivo emplea en cada situación presupuestaria j en la compra del bien i . Entonces, si x_{ij} designa la cantidad del bien i que el consumidor impulsivo demanda en la situación presupuestaria j se tiene:

$$x_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\sum_{i=1}^k \beta_{ij}} \cdot \frac{m_j}{p_{ij}}; \quad \beta_{ij} > 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.11)$$

Finalmente, este autor plantea un tercer algoritmo⁷⁸ donde establece que para cada situación presupuestaria j , la proporción de renta monetaria que el consumidor impulsivo se gasta en la compra del bien i viene determinada por $\tilde{\beta}_i \beta_{ij} / \sum_{i=1}^k \tilde{\beta}_i \beta_{ij}$ donde $\tilde{\beta}_i$ designa la media aritmética de la proporción del presupuesto que el consumidor se gasta en el bien i en las n situaciones presupuestarias. En consecuencia, para todo bien i y situación presupuestaria j se tiene:

$$x_{ij} = \frac{\tilde{\beta}_i \beta_{ij}}{\sum_{i=1}^k \tilde{\beta}_i \beta_{ij}} \cdot \frac{m_j}{p_{ij}}; \quad \beta_{ij} > 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

como función de demanda.

Los métodos anteriores constituyeron una contribución novedosa en la investigación de la fiabilidad de los diferentes tests de la preferencia revelada. Los cálculos de la potencia realizados por Bronars sugieren que el test de Varian de la maximización de la utilidad cuando se aplica a datos per cápita es bastante más potente (fiable) contra la hipótesis alternativa de comportamiento aleatorio que los tests que emplean datos de consumo agregado. Él encontró que el modelo de elección aleatoria violó GARP el 67.5 % de las ocasiones, contrariamente a lo supuesto originalmente⁷⁹ por Varian.

Los tests de Bronars se han aplicado en diferentes ocasiones a datos experimentales: Cox (1997) consideró 3 bienes de consumo y 7 situaciones presupuestarias diferentes. Su estudio tuvo una potencia de Bronars de 0.49 (49 % de los sujetos aleatorios tuvieron violaciones). Sippel (1997) realizó dos experimentos con 8 bienes de consumo, que variaban desde la Coca-Cola hasta los videojuegos, y 10 situaciones presupuestarias diferentes. Sippel obtuvo que el 61 % y el 97 % de los “sujetos aleatorios” violaron GARP, pero encontró también que el 95 % de los estudiantes que participaron en sus sesiones experimentales mostró un comportamiento inconsistente con GARP. Mattei (2000), en un estudio similar al efectuado por Sippel, consideró 8 bienes y 10 situaciones presupuestarias, obteniendo un test de Bronars de 0.99. Harbaugh, Krause y Berry (2001) –en un estudio de niños– consideró 2 bienes –patatas fritas y cajas de zumo de fruta–

⁷⁸Véase Bronars (1987, pág. 696), para más detalles.

⁷⁹Varian (2005) señala que: “[...] *Contrary to my original impression, there were apparently enough budget intersections in aggregate time series to give GARP some bite* [...]”.

y 11 situaciones presupuestarias diferentes, encontrando que los individuos aleatorios violaron GARP una media de 8.9 veces. Andreoni y Miller (2002) realizaron un estudio experimental (sesiones 1-4) con una población aleatoria de 50000 individuos y 8 conjuntos presupuestarios, encontrando que el 78.1% de los individuos violaron los tres axiomas de la preferencia revelada analizados (WARP, GARP y SARP) con una media de 2.52 violaciones WARP, 7.52 violaciones GARP y 7.68 violaciones SARP. Repitiendo el análisis con los 11 conjuntos presupuestarios de la sesión 5 encontraron que el 94.7% de la población aleatoria violó GARP y que el promedio de violaciones de esta población fue el siguiente: 4.39 violaciones WARP, 17.28 violaciones GARP y 17.62 violaciones SARP.

En la literatura económica, autores como Famulari (1996), Battalio, Dwyer y Kagel (1987) y Andreoni (2005), entre otros, han planteado otros modelos de comportamiento aleatorio susceptibles de ser utilizados en cualquier análisis ex-ante de los diferentes axiomas de la preferencia revelada. Famulari (1996) ofreció una variante natural del índice de Bronars. Considere que se ha observado el comportamiento de un consumidor que con n vectores de precios $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$, formula elecciones $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, y, por tanto, incurre en unos gastos $(\bar{p}_1\bar{x}_1, \dots, \bar{p}_n\bar{x}_n)$. La hipótesis alternativa que Famulari sugiere es que los individuos asignan sus opciones de manera aleatoria al conjunto de precios. Así, reordenando aleatoriamente los precios se tiene $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)$. A continuación se evalúan los gastos $(\bar{q}_1\bar{x}_1, \dots, \bar{q}_n\bar{x}_n)$ para cotejar las violaciones GARP. Así, teniendo en cuenta todos los posibles ordenamientos de los vectores de precios, se puede calcular el número esperado de violaciones GARP bajo la hipótesis alternativa, como prueba para la fiabilidad del contraste. Este método tiene una clara ventaja sobre el índice de Bronars en el sentido de que tiene en cuenta realmente las elecciones efectuadas por el individuo. El índice de Famulari⁸⁰ tendrá, por tanto, una fiabilidad nula para aquellos individuos que emplean toda su renta monetaria disponible en cada situación presupuestaria en la adquisición de un único bien de consumo.

Battalio, Dwyer y Kagel (1987) introducen en la literatura un nuevo modelo de comportamiento aleatorio del consumidor, **random goods choice**, basado en el modelo de comportamiento irracional “impulsive goods decider” propuesto por Chant (1963). En este modelo, el consumidor realiza sus elecciones de consumo en función de las unidades físicas de los bienes adquiridos. En cada situación presupuestaria, el individuo selecciona una cantidad aleatoria, x_{ij} , de cada uno de los bienes del conjunto de consumo. Si β_{ij} es la proporción aleatoria asociada al bien i en la situación j y m_j el nivel de renta monetaria en la situación j -ésima se tiene $x_{ij} = \beta_{ij} \sum_{i=1}^k x_{ij}$. Dado que $\sum_{i=1}^k p_{ij}x_{ij} = m_j$, se obtiene finalmente

$$x_{ij} = \beta_{ij} \cdot \frac{m_j}{\sum_i \beta_{ij} p_{ij}}; \quad \beta_{ij} > 0, \quad \sum_{i=1}^k \beta_{ij} = 1, \quad (3.13)$$

⁸⁰Conviene señalar además que en la construcción de este índice hay que tener en cuenta que algunos niveles de gastos que no estaban en los datos, y que no todos estos niveles de gasto serían viables para el individuo. Tenga en cuenta que este método es el más adecuado para el caso en el que se observó cada una de las personas a tomar decisiones en virtud de muchos y distintos vectores de precios.

como ecuación para la función de demanda. Tanto el modelo de elección aleatoria de dinero (random money choice) como el de elección aleatoria de bienes (random goods choice) son casos extremos de comportamiento aleatorio de un consumidor individual. Becker (1962) sugiere una generalización de estos modelos combinando diferentes tipos de comportamiento. Según este autor, los individuos podrían optar por obtener parte de su consumo mediante la compra aleatoria de bienes independientemente de su renta monetaria disponible y, la otra parte, mediante el gasto aleatorio de dinero en la compra de los distintos bienes. El modelo **mixed random choice** de Becker caracteriza esta clase de comportamiento aleatorio. En este modelo, la cantidad demandada del bien i en la situación presupuestaria j , x_{ij} , viene dada por:

$$x_{ij} = \gamma_{ij} + \frac{\beta_{ij}}{p_{ij}} \cdot (m_j - \sum_{i=1}^k \gamma_{ij} p_{ij}); \quad \beta_{ij} > 0, \sum_{i=1}^k \beta_{ij} = 1, m_j \geq \sum_{i=1}^k \gamma_{ij} p_{ij} \quad (3.14)$$

donde el parámetro γ_{ij} representa la compra impulsiva del bien i -ésimo. Finalmente, Battalio, Dwyer y Kagel (1987) plantean que los consumidores pueden necesitar consumir una cantidad mínima de cada uno de los bienes del conjunto de consumo, donde este consumo mínimo puede estar determinado psicológicamente o ser necesario para la supervivencia del individuo. El **Generalized Minimum Needs Hypothesis** o modelo generalizado de necesidad mínima caracteriza este comportamiento. En este modelo, la cantidad demandada del bien i en la situación presupuestaria j es:

$$x_{ij} = \gamma_i + \frac{\beta_{ij} p_{ij}^{-\sigma}}{\sum_i \beta_{ij} p_{ij}^{1-\sigma}} (m_j - \sum_i \gamma_{ij} p_{ij}); \quad \beta_{ij} > 0, \sum_i \beta_{ij} = 1, \quad (3.15)$$

En la Tabla 3.1 se resumen los anteriores modelos de comportamiento aleatorio del consumidor:

Modelo	Restricciones paramétricas			(x_{ij})
	σ	γ	$m_j - \sum_i \gamma_{ij} p_{ij}$	Función de demanda
Random money choice	1	0	—	$\beta_{ij} \cdot \frac{m_j}{p_{ij}}$
Random goods choice	0	0	—	$\beta_{ij} \cdot \frac{m_j}{\sum_i \beta_{ij} p_{ij}}$
Mixed random choice	1	> 0	≥ 0	$\gamma_{ij} + \frac{\beta_{ij}}{p_{ij}} \cdot (m_j - \sum_i \gamma_{ij} p_{ij})$
Generalized minimum-needs	> 0	> 0	≥ 0	Ecuación (3.15)

Tabla 3.1: Modelos de comportamiento aleatorio.

A continuación, presentamos una generalización de los anteriores modelos de comportamiento aleatorio de un consumidor que permitirá a un participante con comportamiento aleatorio poder demandar “soluciones esquina”. La aportación, aunque pequeña, no es vanal si se tiene en cuenta que tanto en la mayoría de las encuestas que recogen información del consumo individual o del hogar como en diferentes experimentos económicos⁸¹ existe un porcentaje elevado de observaciones de demanda nulas en alguno de los bienes. Esto puede estar ocasionado por multitud de causas, entre las que cabe destacar que la demanda sea una solución de esquina, que no se demande algún bien (o grupo de bienes) para ningún valor de las variables exógenas (precios o renta) o a la existencia de una variación no observable en las preferencias del individuo. Supongamos que el consumidor en cada situación presupuestaria j selecciona de manera aleatoria el número $h_j \in [1, l]$ de bienes que desea demandar, posteriormente elige de forma aleatoria qué bienes desea consumir en esa situación presupuestaria y finalmente demanda -según los criterios establecidos en los anteriores modelos de comportamiento aleatorio- una cantidad, x_{ij} , para cada uno de los bienes seleccionados. Sea m_j la renta monetaria de la situación presupuestaria j y $\bar{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{lj}) \in \mathbb{R}_+^l$ la cesta demandada por el participante aleatorio en esta situación presupuestaria. Entonces, si $\alpha \equiv (\alpha_{ij}) \in M_{k \times n}(\{0, 1\})$ es la matriz aleatoria booleana asociada a todo participante aleatorio tal que $\alpha_{ij} = 1$ para todo bien i demandado por este participante en la situación j , se tiene que $\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} = h_j$ y, además, $x_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$ con $\alpha_{ij} = 0$ y toda situación presupuestaria j . Más concretamente, supongamos que el consumidor en cada situación presupuestaria selecciona de manera aleatoria el número de bienes h , $1 \leq h \leq k$, que desea demandar. Posteriormente elige de forma aleatoria qué bienes desea consumir en esa situación presupuestaria. Sea $\alpha \equiv (\alpha_{ij}) \in M_{k \times n}(\{0, 1\})$ una matriz booleana aleatoria tal que $\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} = h$. Si el consumidor demanda el bien i en la situación presupuestaria j , entonces $\alpha_{ij} = 1$. En caso contrario, $\alpha_{ij} = 0$.

El modelo **generalised random money choice**, generalización del modelo de comportamiento aleatorio del consumidor, random money choice caracteriza a un consumidor que en cada situa-

⁸¹Février y Visser (2004) observan como los participantes no demandan, en alguna situación presupuestaria, algún bien de su conjunto de consumo. En nuestros dos experimentos también se puede apreciar este hecho.

ción presupuestaria emplea toda su renta monetaria en la compra de un subconjunto aleatorio de bienes de cardinal $1 \leq h \leq k$ procedentes del conjunto de consumo original. El consumidor se gasta cada unidad de dinero en un cierto bien con una cierta probabilidad. De este modo, si β_{ij} es la probabilidad de elegir el bien i en la situación j , m_j es el nivel de renta monetaria disponible por el consumidor y x_{ij} la cantidad demandada del bien i en la situación j se tiene que:

$$x_{ij} = \beta_{ij} \cdot \frac{m_j}{p_{ij}}; \quad \beta_{ij} \geq 0, \beta_{ij} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0, \sum_{i=1}^k \beta_{ij} = 1, \quad (3.16)$$

Obsérvese que $\beta_{ij} = \alpha_{ij} = 0$ es una condición necesaria y suficiente para que el consumidor no demande el bien i en la situación presupuestaria j .

El modelo **generalised random goods choice**, generalización del modelo de comportamiento aleatorio del consumidor random goods choice propuesto por Battalio, Dwyer y Kagel (1987), caracteriza a un consumidor que en cada situación presupuestaria j selecciona una cantidad aleatoria, x_{ij} , para cada uno de los bienes pertenecientes al subconjunto aleatorio de bienes de cardinal $1 \leq h \leq k$ formado a partir del conjunto de consumo original. Sea β_{ij} la proporción aleatoria asociada al bien demandado i en la situación j y m_j el nivel de renta monetaria en la situación j -ésima. Si en la situación presupuestaria j , el consumidor no demanda el bien i se tiene que $\beta_{ij} = 0$ y, por tanto, $x_{ij} = 0$. En caso contrario, $x_{ij} = \beta_{ij} \sum_{i=1}^k x_{ij}$. Dado que $\sum_{i=1}^k p_{ij} x_{ij} = m_j$, se obtiene finalmente

$$x_{ij} = \beta_{ij} \cdot \frac{m_j}{\sum_i \beta_{ij} p_{ij}}; \quad \beta_{ij} \geq 0, \beta_{ij} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0, \sum_{i=1}^k \beta_{ij} = 1, \quad (3.17)$$

como ecuación para la función de demanda.

En el modelo **generalised mixed random choice** de comportamiento aleatorio de un consumidor, si el consumidor no demanda el bien i se tiene que $\beta_{ij} = 0$ y, por tanto, $x_{ij} = 0$. En caso contrario, la cantidad demandada del bien i en la situación presupuestaria j , x_{ij} , viene dada por:

$$x_{ij} = \gamma_{ij} + \frac{\beta_{ij}}{p_{ij}} \cdot (m_j - \sum_{i=1}^k \gamma_{ij} p_{ij}); \quad \beta_{ij} > 0, \sum_{i=1}^k \beta_{ij} = 1, m_j \geq \sum_{i=1}^k \gamma_{ij} p_{ij} \quad (3.18)$$

donde el parámetro γ_{ij} representa la compra impulsiva del bien i -ésimo.

El modelo **strong generalized minimum needs hypothesis**, generalización del modelo generalized minimum needs hipótesis propuesto por Battalio, Dwyer y Kagel caracteriza al comportamiento aleatorio de un consumidor que necesita consumir una cantidad mínima de cada uno de los bienes pertenecientes al subconjunto aleatorio de bienes de cardinal $1 \leq h \leq k$ formado a partir del conjunto de consumo original. Este consumo mínimo puede estar determinado psicológicamente o ser necesario para la supervivencia del individuo. En este modelo, la

cantidad demandada del bien i en la situación presupuestaria j es:

$$x_{ij} = \gamma_i + \frac{\beta_{ij} p_{ij}^{-\sigma}}{\sum_i \beta_{ij} p_{ij}^{1-\sigma}} (m_j - \sum_i \gamma_{ij} p_{ij}); \quad \beta_{ij} > 0, \gamma_{ij}, \beta_{ij} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0, \sum_i \beta_{ij} = 1 \quad (3.19)$$

El siguiente modelo denominado **generalised Bronars's test** es una generalización del test planteado por Bronars en 1987 que caracteriza el comportamiento de un consumidor que, en cada situación presupuestaria, se gasta aleatoriamente un porcentaje de su renta monetaria en cada uno de los bienes del pertenecientes a un subconjunto aleatorio de bienes de cardinal $1 \leq h \leq k$ formado a partir del conjunto de consumo original. En este modelo, $x_{ij} = 0$ si y sólo si $\alpha_{ij} = 0$. En caso contrario, se tiene

$$x_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\sum_i \beta_{ij}} \cdot \frac{m_j}{p_{ij}}; \quad \beta_{ij} > 0, \quad (3.20)$$

como función de demanda. La siguiente tabla recoge los nuevos modelos generalizados de comportamiento aleatorio:

Modelo	Restricciones paramétricas				(x_{ij})
	σ	β	γ	$m_j - \sum_i \gamma_{ij} p_{ij}$	Función de demanda
Generalised money choice	1	≥ 0	0	—	$\beta_{ij} \cdot \frac{m_j}{p_{ij}}$
Generalised goods choice	0	≥ 0	0	—	$\beta_{ij} \cdot \frac{\sum_i \beta_{ij} p_{ij} m_j}{\sum_i \beta_{ij} p_{ij}}$
Generalised mixed choice	1	≥ 0	≥ 0	≥ 0	$\gamma_{ij} + \frac{\beta_{ij}}{p_{ij}} \cdot (m_j - \sum_i \gamma_{ij} p_{ij})$
Strong G.M.N.H.	> 0	> 0	≥ 0	≥ 0	Ecuación (3.15)

Tabla 3.2: Nuevos modelos de comportamiento aleatorio de un consumidor.

El experimento de Monte Carlo cuyos resultados se ilustran en la Tabla 3.9 muestra cómo estos modelos de comportamiento aleatorio proporcionan un mayor grado de fiabilidad que los modelos clásicos de la teoría económica que permiten evaluar desde una perspectiva ex-ante la sensibilidad de los tests de preferencia revelada.

Otra perspectiva diferente es analizar la potencia de los tests no paramétricos de la preferencia revelada desde las elecciones verdaderas realizadas por los agentes económicos mediante técnicas bootstrapping⁸². Las técnicas bootstrapping utilizan las elecciones reales para obtener una medida de la potencia de los tests de preferencia revelada. Andreoni y Miller (2002) fueron los primeros autores⁸³ en emplear estas técnicas para analizar, a partir de la muestra completa de

⁸²Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

⁸³Estos autores crearon una población aleatoria de 50000 individuos artificiales donde las elecciones sobre cada presupuesto fueron "dibujadas" aleatoriamente desde el conjunto de elecciones efectuadas por el conjunto de participantes en los experimentos. Los resultados con este test fueron los siguientes: en las sesiones 1-4

individuos, la potencia de la preferencia revelada desde una perspectiva ex-post. Esta aproximación permite generar una población de individuos artificiales donde sobre cada presupuesto cada individuo artificial⁸⁴ elige aleatoriamente una cesta de bienes que previamente ha sido demandada por algún individuo de la población original.

Finalmente, cabe señalar que Andreoni y Harbaugh (2006) plantean un contraste de hipótesis para cuantificar la potencia de los tests no paramétricos GARP a partir de una hipótesis alternativa diferente. Esta medida de la potencia del contraste está basada en comparar la variación en las elecciones observadas con el grado de aleatoriedad necesario para generar violaciones de GARP. Se supone que la cesta demandada observada \bar{x}_i está relacionada con la verdadera demanda \bar{z}_i de la siguiente manera: $\bar{x}_i = \bar{z}_i + \epsilon_i$ donde ϵ_i es un término aleatorio. Supongamos, además, que $\{\epsilon_i : i = 1, \dots, n\}$ es una secuencia de variables aleatorias de vector de medias cero y de matriz de varianzas-covarianzas σ^2 independientes e idénticamente distribuidas según una función de densidad $f(0, \sigma^2)$. A continuación⁸⁵ se precisa determinar el error que es necesario añadir al conjunto de datos para generar violaciones GARP severas. Para ello se añade un ruido⁸⁶ aleatorio, $\tilde{\sigma}^2$, a los datos observados para, a continuación, comprobar si los datos “jittered”, \tilde{z} , presentan violaciones GARP. Para cada valor de $\tilde{\sigma}$ se repite este proceso un número específico de veces, digamos 10000 iteraciones con objeto de buscar el valor de $\tilde{\sigma}$ tal que, por ejemplo, el 5% de los *experimentos jittered* encuentren al menos una violación GARP o tengan un índice de eficiencia Afriat $e^* \leq 0.95$ (o algunos otros “críticos” de valor). Este valor, σ^* , jugaría el papel de p-valor o valor crítico que se debiera utilizar para rechazar la racionalidad de los datos cuando hay errores. Así, como en cualquier contraste de hipótesis estadístico, cuanto menos diste σ^* de cero mayor será la potencia del contraste. Para determinar si los datos proporcionan una poderosa prueba del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada se analiza si el ruido añadido (para crear los *datos jittered*) es significativamente mayor que el ruido que existe de forma natural en los datos observados. Para ello consideran un contraste de hipótesis nula de igual varianza entre $\tilde{\epsilon}$ y ϵ . La hipótesis nula será que ambos tienen la misma varianza σ^2 . Para cada individuo en la muestra, consideran el estadístico

$$\phi = \frac{\sum (x_k - \tilde{z}_k)^2 / \sigma^2}{\sum (x_k - z_k)^2 / \sigma^2} \approx \frac{\sigma^{*2}}{\sigma^2}$$

que está caracterizado (bajo la hipótesis nula) por una distribución F-Snedecor. La pregunta que surge a continuación es ¿cómo podemos especificar el nivel natural de la varianza σ ? Esta

obtuvieron que el 76.4% de los individuos violaron GARP, siendo 2.3, 7.43 y 6.5 el número medio de violaciones WARP, SARP y GARP respectivamente. En la sesión 5, el porcentaje de sujetos inconsistentes aumentó hasta el 85.7%.

⁸⁴Es decir, sobre cada presupuesto cada individuo artificial extrae de manera aleatoria, y con reemplazamiento, una cesta de bienes desde el conjunto de elecciones originales efectuadas por los individuos participantes en el estudio.

⁸⁵Manser y McDonald (1988) también utilizan este método para cuantificar la potencia del contraste.

⁸⁶Se supone que $\tilde{\epsilon}_k$ procede de la distribución $f(0, \tilde{\sigma}^2)$ para un determinado valor de $\tilde{\sigma}^2$.

pregunta es una reminiscencia del problema al que se enfrenta Varian (1985) en su análisis de la bondad del ajuste y, por lo tanto, las respuestas son similares.

En esta sección hemos mostrado la importancia de examinar la frecuencia y las intersecciones de los conjuntos presupuestarios y analizar la fiabilidad de las pruebas no paramétricas utilizadas, antes de aceptar los resultados de los tests no paramétricos de la maximización de la preferencia. Así, por ejemplo, se debe ser tremendamente cauto (antes de extraer conclusiones) en los modelos agregados de series temporales, pues debido al reducido número de intersecciones entre los conjuntos presupuestarios el “consumidor representativo” al que se asimilan las observaciones agregadas puede ser consistente con la teoría clásica de la demanda y, por otra parte, no presentar un comportamiento optimizador.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1967) The Construction of Utility Functions from Expenditure Data. *International Economic Review*, Vol. 8(1), págs. 67-77.
- [2] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An Extension of the Classical Method. *International Economic Review*, Vol. 14(2), págs. 460-472.
- [3] Andreoni, J. y J. Miller (2002) Giving According to GARP: An Experimental Test of the Consistency of Preferences for Altruism. *Econometrica*, Vol. 70(2), págs. 737-753.
- [4] Andreoni, J. y W. Harbaugh (2006) Power Indices for Revealed Preference Tests...buscar web paper definitivo.
- [5] Battalio, R., Dwyer, G. y J. Kagel (1987) Tests of Competing Theories of Consumer Choice and the Representative Consumer hypothesis *Economic Journal*, Vol. 97, págs. 842-856.
- [6] Becker, G. (1962) Irrational Behavior and Economic Theory. *Journal of Political Economy*, Vol. 70, págs. 1-13.
- [7] Becker, G. (1993) The Economic Way of Looking at Behavior. *Journal of Political Economy*, Vol. 101, págs. 385-409.
- [8] Blundell, R.; Browning, M. y I. Crawford (2003) Nonparametric Engel Curves and Revealed Preference. *Econometrica*, Vol. 71(1), págs. 205-240.
- [9] Bronars, S. (1987) The Power of Nonparametric Tests of Preference Maximization. *Econometrica*, Vol. 55(3), págs. 693-698.
- [10] Chant, J. (1963) Irrational Behavior and Economic theory: a Comment. *Journal of Political Economy*, Vol. 71, págs. 505-510.

- [11] Cox, J. (1997) On Testing the Utility Hypothesis. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1054-1078.
- [12] Deaton, A. y J. Muellbauer (1980) An Almost Ideal Demand System. *American Economic Review*, Vol. 70(3), págs. 312-326.
- [13] Famulari, M. (1996) A Household-Based, Nonparametric Test of Demand Theory. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 77, págs. 372-382.
- [14] Février P. y M. Visser (2004) A Study of Consumer Behavior Using Laboratory Data. *Experimental Economics*, Vol. 7(1), págs. 93-114.
- [15] Harbaugh, W., Krause K. y T. Berry (2001) GARP for Kids: On the Development of Rational Choice Behavior. *American Economic Review*, Vol. 91(5), págs. 1539-1545.
- [16] Houthakker, H. (1950) Revealed Preference and the Utility Function. *Economica*, Vol. 17, págs. 159-174.
- [17] Kagel, J.; Rachlin, H. y L. Green (1981) Demand Curves for Animals Consumers. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 66, págs. 1-15.
- [18] Kagel, J. y A. Roth (1995) *The Handbook of Experimental Economics*. Princeton, Princeton University Press.
- [19] Manser, M. y R. McDonald (1988) An analysis of Substitution Bias in Measuring Inflation 1959-85. *Econometrica*, Vol. 56, págs. 909-930.
- [20] Mattei, A. (2000) Full-Scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data. *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 43, págs. 487-497.
- [21] Samuelson, P. (1938) A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior. *Economica N.S.*, Vol. 5, págs. 353-354.
- [22] Sippel, R. (1997) An Experiment on The Pure Theory of Consumer's Behaviour. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1431-44.
- [23] Varian, H. (1982) The Nonparametric Approach to Demand Analysis. *Econometrica*, Vol. 50(4), págs. 945-971.
- [24] Varian, H. (1983a) Non-Parametric Methods in Demand Analysis. *Economics Letters*, Vol. 9, págs. 23-29.
- [25] Varian, H. (1983b) Nonparametric Tests of Models of Investor Behavior. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 18(3), págs. 269-278.
- [26] Varian, H. (1984) The Nonparametric Approach to Production Theory. *Econometrica*, Vol. 52(3), págs. 579-598.

-
- [27] Varian, H. (1985) Non-Parametric Analysis of Optimizing Behavior with Measurement Error. *Journal of Econometrics* 30, págs. 445-458.
- [28] Varian, H. (2005) Revealed preferences. In *Samuelsonian Economics and the 21st Century*, Michael Szenberg (ed.). Oxford University Press, págs. 99-115.

3.4. La Economía Experimental en la teoría pura del consumidor

La Economía Experimental ha alcanzado en los últimos cincuenta años un nivel de “normalización” que en la actualidad la equipara a otras ramas de la Economía como la Macroeconomía, la Microeconomía, la Econometría o las Finanzas. Frente al método tradicional en el que las teorías se contrastan a partir de la observación del comportamiento de la economía real, la experimentación económica permite analizar las proposiciones teóricas en el marco de un laboratorio, aproximando la economía a las ciencias naturales. Así pues, la Economía Experimental trabaja de forma operativa con el núcleo del análisis económico –la relación existente entre teoría y observación– y desde este núcleo, la extensión a todas las áreas de la economía aplicada se hace de forma natural e inmediata. Las mismas razones generales que se aplican a la realización de cualquier investigación explican también por qué tanto los psicólogos como los economistas y el resto de las ciencias sociales realizan experimentos. Smith (1976, 1982, 1989, 1993, 1994, 2005) destaca las ventajas de su método experimental frente a la verificación tradicional de las teorías a partir de la observación de la economía real. Este autor considera que el contraste experimental permite separar las hipótesis de la teoría y contrastarlas por separado en el laboratorio. En esta sección presentamos una breve revisión de los principales estudios que se han realizado sobre el comportamiento de un consumidor en el ámbito de la Economía Experimental.

En la investigación experimental se realizan experimentos para comprobar teorías, comparar entornos e instituciones, evaluar políticas o proporcionar una base de datos con explicaciones de comportamiento. Los patrones observados en las contradicciones y confirmaciones de los supuestos de racionalidad del modelo estándar de la ciencia socioeconómica proporcionan pistas importantes sobre las reglas o normas implícitas que siguen los individuos, y pueden motivar nuevas hipótesis teóricas para contrastar tanto sobre el terreno como en el laboratorio. Smith (1994) señala que existen por lo menos 7 razones por las que se realizan experimentos de laboratorio: (1) comprobar una teoría, o elegir entre varias de ellas; (2) comparar instituciones; (3) comparar entornos; (4) analizar las causas del fracaso de una teoría; (5) establecer regularidades empíricas como base de una nueva teoría; (6) evaluar propuestas políticas o (7) utilizar el laboratorio como campo de pruebas para el diseño de las instituciones.

Existe una rama importante dentro de la Economía Experimental, la Economía del Comportamiento, que estudia las elecciones realizadas por un individuo, los fundamentos psicológicos de la economía y cómo los principios psicológicos pueden aplicarse a las decisiones económicas. El objetivo en este área es proporcionar una mejor comprensión del comportamiento económico y aumentar el poder explicativo de la ciencia económica considerando las características cognitivas de las personas, sus motivaciones, su aprendizaje, sus emociones, así como otros aspectos psicológicos. Esta rama de la ciencia económica muestra cómo los modelos basados en la teoría de la elección racional pueden mejorarse utilizando regularidades psicológicas que sugieren nuevos supuestos que permitan caracterizar mejor cómo piensan, aprenden y se comportan las personas. El uso de experimentos, en lugar de encuestas de campo, para recopilar datos sobre las decisiones del consumidor, presenta una serie de ventajas considerables. Los experimentos permiten

examinar el comportamiento individual, el orden emergente en la cultura y las instituciones humanas, y su persistencia, la diversidad y el desarrollo a lo largo del tiempo; en definitiva, los experimentos permiten contrastar las proposiciones que se derivan de las reconstrucciones racionales del comportamiento.

Suele atribuirse a Thurstone (1931) la primera investigación experimental de la teoría pura del consumidor. Este autor, a sugerencia de Henry Schultz, utilizó diferentes métodos experimentales extraídos de la psicología para determinar las curvas de indiferencia de un individuo⁸⁷. La preocupación principal de Thurstone, como defensor de la “psicología como ciencia racional cuantitativa” basada en la descripción y la experimentación, era cuantificar las actitudes mentales⁸⁸ y las “habilidades” de un individuo. En el experimento, publicado en 1931 en el “Journal of Social Psychology” bajo el título “The Indifference Function”, Thurstone consideró tres bienes distintos (sombreros, zapatos y abrigos), supuso que la satisfacción asociada a cada bien era positiva (en términos formales, $u(x_i) > 0$ para cada bien i), postuló que la motivación para adquirir cada uno de los bienes era positiva pero decreciente ($u'(x_i) > 0$ y $u''(x_i) < 0$) y que ésta se comportaba según la ley de Fechner⁸⁹ que estipula que la satisfacción asociada a cada bien es proporcional al logaritmo de su cantidad; esto es, $u(x_i) = k_i \log(x_i)$ donde k_i es una constante que caracteriza a cada bien i . Cada participante tuvo que mostrar sus preferencias entre una cesta de bienes de referencia formada por 8 sombreros y 8 pares de zapatos con otras cestas de bienes (más de 200). De esta manera, Thurstone pudo “etiquetar”, para cada individuo, las cestas de bienes preferidas y menos preferidas a la cesta de referencia original y “dibujar” la curva de la indiferencia de tal modo que las cestas preferidas se encontrasen sobre la curva de indiferencia y las menos preferidas por debajo de ella. Thurstone utilizó el método de promedios para estimar los parámetros k_i y derivar empíricamente las curvas de indiferencia para cada par de bienes. La conclusión general de Thurstone (1931, pág. 165) fue que es posible tratar a la curva de indiferencia de forma experimental y, en consecuencia, deducir una ecuación racional para la función de indiferencia, y todo ello, basándose en postulados psicológicos plausibles. Sin embargo, Wallis y Friedman (1942, pág. 181) cuestionaron la utilidad práctica de estimar las curvas de indiferencia de un individuo para analizar empíricamente el comportamiento del mismo y expusieron los defectos presentes, a su juicio, en las técnicas estadísticas empleadas por Thurstone para la estimación de los parámetros k_i . Estos autores señalaron la importancia de utilizar estímulos verdaderos que permitan inducir realmente las preferencias de un individuo, junto a la necesidad de evaluar todos los factores que pudieran modificar el diseño experimental (la variación temporal, modificaciones del ambiente externo y otros efectos inducidos por el procedimiento experimental en sí mismo) y, en consecuencia, los resultados del experimento. La metodología propuesta por Wallis-Friedman se convirtió, durante los años 50 y 60, en un punto

⁸⁷Como Thurstone señaló en más de una ocasión, fue Henry Schultz –que también tenía una preocupación especial por la valoración cuantitativa de variables económicas (especialmente la demanda)– quien le sugirió que aplicase los métodos experimentales utilizados en la investigación psicológica para estimar la curva de indiferencia de un individuo. Véase Thurstone (1931, pág. 139), para más detalles.

⁸⁸Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

⁸⁹La ley de Fechner implica que las curvas de la indiferencia son hipérbolas con ecuación $\bar{u} = k_1 \log(x_1) + k_2 \log(x_2)$, donde \bar{u} designa el nivel de utilidad.

de referencia para los economistas que realizaron experimentos económicos relacionados con la elección individual de un agente económico.

Mientras que en la década de los años 40 el experimento de Thurstone seguía siendo una excepción aislada dentro de la economía, a comienzos de los años 50 aparecieron varios trabajos en el campo de la investigación experimental de la teoría neoclásica de la demanda. Rouseas y Hart (1951) publicaron el segundo estudio experimental de la teoría del consumidor. El objetivo básico de estos autores fue mostrar cómo la teoría ordinal de la demanda formada, en principio, por proposiciones puramente analíticas, admitía una eficaz base empírica. El experimento, desarrollado en dos fases (con un período intermedio entre ambas de un mes aproximadamente), se realizó con estudiantes de sociología de la Universidad de Columbia. En la primera fase participaron 67 estudiantes, mientras que en la segunda lo hicieron 54 estudiantes de entre los 67 primeros, además de 10 nuevos alumnos. Cada estudiante recibió una hoja que enumeraba tres combinaciones de huevos revueltos y bacon y tuvieron que ordenar, según sus preferencias, esas combinaciones. Una condición adicional que impusieron al experimento fue que “cada individuo tuvo que consumir en el acto lo que había elegido, no pudiendo destinar nada para un consumo futuro” (Rouseas-Hart 1951, pág. 291). A partir de los datos recogidos para cada uno de los participantes, Rouseas y Hart (1951) representaron el mapa de indiferencia representativo de las preferencias de cada individuo⁹⁰.

MacCrimmon y Toda (1959) publicaron los resultados de otro experimento económico cuya misión fue probar en qué medida las curvas de indiferencia satisfacen las restricciones teóricas que la teoría neoclásica de la demanda les atribuye; es decir, la no intersección, la pendiente negativa y la convexidad. En las sesiones experimentales, celebradas durante dos días consecutivos, MacCrimmon-Toda solicitaron la colaboración de 7 estudiantes de la Universidad de UCLA para “dibujar” sus curvas de indiferencia. Al igual que en el experimento de Thurstone, a cada estudiante se le presentó una cesta o lote de referencia \bar{x}_0 y se les solicitó que lo comparasen con otros lotes. A medida que avanzaba el experimento, con el objeto de dificultar el proceso de elección, los estudiantes tuvieron que comparar cestas de bienes cada vez más similares. Después de esta fase “comparativa”, cada individuo tuvo que dibujar una curva de indiferencia que pasara por \bar{x}_0 y que reflejara realmente sus preferencias. Para estimular al individuo, con el objeto de que éste dibujase su curva de indiferencia de manera cuidadosa de tal modo que ésta reflejase sus verdaderas preferencias, MacCrimmon y Toda (1959) utilizaron un procedimiento de la rentabilidad similar al empleado posteriormente por Becker, DeGroot y Marschak (1964). Para cada participante, seleccionaron de manera aleatoria una cesta de bienes. Si la cesta de bienes resultante, \bar{x}_j , pertenecía al conjunto mejor que \bar{x}_0 entonces el participante recibiría \bar{x}_j . En caso contrario, recibiría \bar{x}_0 por su participación. Las principales conclusiones obtenidas en

⁹⁰A diferencia de Thurstone (1931), Rouseas y Hart no intentaron ofrecer ninguna representación analítica de las curvas de indiferencia obtenidas. Debido al poco rigor científico que estos autores emplearon para representar las curvas de indiferencia, el experimento del Rouseas-Hart no parece haber tenido ninguna relevancia en la teoría económica. Véase Rouseas-Hart (1951, pág. 318), para más detalles.

su experimento fueron que las curvas de indiferencia satisfacen en la práctica las restricciones teóricas impuestas por la teoría neoclásica de la demanda.

La hipótesis de comportamiento racional más extendida en ese período del análisis económico consistió en suponer que los individuos muestran sus preferencias sobre los pares de opciones factibles a través de relaciones de preferencia y de indiferencia transitivas. La hipótesis de la transitividad refleja una absoluta discriminación entre las diferentes opciones, lo que contradice la conocida existencia de umbrales en la percepción humana. May y Papandreou presentaron en 1953 los primeros estudios experimentales que analizaron la transitividad de las preferencias en la teoría pura del consumidor. May (1953) expuso, en la primera parte de su trabajo, el papel crucial que desempeña la hipótesis de la transitividad en la teoría de la demanda. En la segunda parte, destacó la posibilidad de la existencia de patrones circulares en las preferencias de un individuo, aludiendo a la paradoja bien conocida de la votación de la mayoría. En este caso, la intransitividad aparece en el nivel de la opción colectiva, pese a ser la agregación de patrones individuales transitivos. La idea de May era aplicar la paradoja de la votación a la teoría de la elección y contrastar experimentalmente si los patrones intransitivos de la preferencia pueden presentarse cuando los individuos ordenan las alternativas según criterios que están en conflicto. Los participantes en su experimento fueron 62 estudiantes, presumiblemente de la Universidad de Carleton (May, en su artículo, no hace ninguna referencia en relación con el lugar y fecha donde se celebró el experimento). Las alternativas propuestas a los estudiantes fueron tres características a tener en cuenta al casarse, x , y , z , que se correspondían con la inteligencia, belleza, y la riqueza respectivamente. En inteligencia, x fue descrito superior a y e y superior a z ; y fue retratada como más hermosa que z , y z como más hermosa que x ; finalmente, se les comunicó a los participantes que z era más rica que x que, a su vez, era más rica que y . Los participantes tuvieron que decidir, en diferentes ocasiones, entre pares de novios (novias) con los que casarse (nunca se les presentó las tres alternativas simultáneamente) y a quien preferían. La opción de la indiferencia fue eliminada del experimento. El resultado del experimento concluyó que 17 de los 62 estudiantes, es decir que más de 27% por ciento de los participantes, mostraron preferencias intransitivas. Particularmente, eligieron x sobre y , y sobre z y z sobre x . May explicó la aparición de estos ciclos en las preferencias como “el resultado de elegir la alternativa que es superior a la otra en dos de los tres criterios establecidos” y precisó que dado que las cestas de bienes consideradas en la teoría de la demanda son vectores que contienen diferentes mercancías, si estas mercancías se ordenasen según criterios que pudiesen estar en conflicto, es posible la aparición de ciclos y patrones intransitivos en las decisiones de consumo de los individuos.

Papandreou (1953) realizó un experimento basado en la declaración probabilística de la teoría de la elección, propuesta originalmente por Georgescu-Roegen (1936, pág. 568), para analizar la transitividad de las preferencias de los individuos. Este experimento se llevó a cabo con los estudiantes de una clase de sociología elemental y una clase graduada en Ciencias de la Educación. Los individuos tuvieron que elegir entre diez actividades hipotéticas de carácter recreativo, como la “participación en un partido de baloncesto” o la “admisión como miembro de la sinfonía de Minneapolis bajo la dirección de un director de orquesta”. A pesar de que los participantes mostraron patrones intransitivos en su comportamiento, Papandreou (1953) apoyó la hipótesis de la transitividad de las preferencias más allá cualquier duda posible⁹¹.

Otro de los primeros experimentos sobre preferencias enmarcados dentro de la teoría neoclásica del consumidor fue efectuado por el sociólogo Arnold Rose. En su experimento, Rose (1957) presentó a 74 estudiantes de sociología 13 tipos posibles de crímenes. En una fase preliminar, los participantes tuvieron que ordenar los 13 crímenes según su gravedad. Esta graduación preliminar fue realizada según el método de juicios comparativos introducido años antes por Thurstone. Posteriormente, presentó (de forma aleatoria) a cada estudiante, cada par posible⁹² de crímenes y éstos tuvieron que indicar el que les parecía, a su juicio, el más grave de los dos, sin la opción de “ser indiferentes”. Este mismo experimento fue realizado de nuevo dos meses más tarde con los mismos individuos. Rose registró 341 patrones intransitivos en la primera fase del experimento y 336 en la segunda, detectando que solamente tres individuos no presentaron un comportamiento contrario a la hipótesis de la transitividad. Rose, mostró que más del 90 por ciento de las “circularidades” encontradas en la primera fase del experimento eran diferentes de las que aparecieron en la segunda fase, por lo que la intransitividad de las preferencias no eran las causantes de la presencia de ciclos en las preferencias subyacentes. En cuanto al 10 por ciento restante de “circularidades” repetidas, se refirieron a crímenes muy similares. Rose (1957, pág. 401) afirmó que la mayor parte de la irracionalidad parece ser explicada por ausencia de errores aleatorios y que, en estos casos, los individuos mostraban en realidad indiferencia sobre esos crímenes y que habían seleccionado una u otra opción dependiendo de las instrucciones del experimento.

Los resultados de May (1953), Papandreou (1953) y Rose (1957) activaron el debate sobre el status del supuesto de la transitividad de las preferencias en la elección individual. Este supuesto ha sido analizado y refutado en diferentes estudios experimentales, entre los que cabe destacar los realizados por Van Acker (1990), Fisburn (1970), Tversky (1969) y Tversky-Kahnemann (1974, 1981) entre otros. Los resultados experimentales muestran que las preferencias pueden ser intransitivas debido a múltiples razones, entre las que destaca la capacidad limitada de todo individuo para percibir y juzgar opciones, la dificultad natural de retener en la memoria todas sus manifestaciones, máxime cuando algunas de ellas pueden haberse decidido sin mucha segu-

⁹¹Este autor afirma: “[...] Hay por lo menos 704 casos de un total de 810, el 87 por ciento, en los cuales la hipótesis de la transitividad no se podría rechazar, y a lo más 101 casos, el 12 por ciento, en los cuales podría rechazarte [...]”.

⁹²Nótese que el número de pares de crímenes posibles es igual al número de combinaciones de 13 elementos tomados de dos en dos.

ridad. Así mismo, cuando se tienen en cuenta varios atributos de las opciones, las preferencias pueden no ser transitivas, debido a que constituyen una agregación vaga e informal de otras más simples, relativas a cada uno de los atributos considerados. Esto ha motivado la aparición en la literatura económica de diferentes postulados sobre la coherencia del comportamiento individual, atendiendo a diversas situaciones reales en las que se han de tomar decisiones o manifestar las preferencias entre pares de opciones. Estos nuevos postulados, que recogen diferentes aspectos del comportamiento racional de un individuo mediante el uso de diferentes hipótesis sobre las preferencias de los agentes, han dado lugar a la aparición de nuevos modelos de comportamiento racional más débiles que el modelo clásico. Para un análisis más exhaustivo de estos modelos, véase el estudio realizado por el profesor Rodríguez-Palmero (1997).

Después de que en los primeros trabajos experimentales se evaluaran tanto la derivación de las curvas de la indiferencia, como la evaluación de la hipótesis de la transitividad, a partir de los años 70 comenzó una nueva fase en la historia de la investigación experimental de la teoría del consumidor⁹³. En ella, los experimentalistas económicos se ocuparon de diversas cuestiones tales como la negatividad del efecto sustitución, la existencia de bienes Giffen o el análisis de la racionalidad de la conducta de un consumidor a partir de los diferentes axiomas de la teoría de la preferencia revelada, teoría que, como hemos señalado en diferentes ocasiones, ofrece cierto atractivo, ya que gira en torno a unas hipótesis o reglas de conducta -el axioma fuerte o el axioma generalizado- que se presentan como condiciones de consistencia razonables con el comportamiento optimizador del consumidor individual.

A partir de los años 70 surgió una nueva corriente en la investigación experimental de la teoría pura del comportamiento del consumidor. Esta nueva línea de investigación trataba de analizar la racionalidad de un individuo en términos de la teoría de la preferencia revelada. Según la evidencia existente en la literatura económica, Battalio (1973) fue el primer autor que analizó experimentalmente la racionalidad de un individuo en el ámbito de la teoría pura del consumidor. Este autor usó una economía fiduciaria como laboratorio para analizar el comportamiento racional de un individuo con la teoría neoclásica de la demanda. Los participantes fueron 38 pacientes femeninos del Central Islip State Hospital, hospital psiquiátrico del estado de Islip⁹⁴. En esta “economía fiduciaria” los pacientes ganaban vales que podían canjear por mercancías en el almacén del hospital. Battalio agrupó los bienes de consumo en tres categorías, midiendo el consumo semanal realizado por los individuos durante las 7 semanas. Los precios de los bienes variaban periódicamente de una semana a otra. El comportamiento de la mitad de los 38

⁹³Becker (1962) y Chant (1963) obtuvieron curvas de demanda agregada con pendiente negativa cuando estudiaron el comportamiento de una muestra de individuos que realizaron elecciones de consumo aleatorias en diferentes situaciones presupuestarias. Diferentes estudios teóricos y experimentales recientes confirman un grado alto de universalidad de la teoría neoclásica del consumidor. El trabajo experimental con ratas y otros animales (Kagel et al., 1981 y 1995) “reveló” que los animales tienen curvas de demanda de pendiente negativa, como supuestamente las tienen los humanos. Becker (1991) argumentó extensamente que el análisis económico es una poderosa herramienta no sólo para entender el comportamiento humano sino también para entender el comportamiento de otras especies.

⁹⁴Los pacientes realizaron sus decisiones de consumo sobre tres grupos de bienes en un espacio de 7 semanas.

pacientes fue inconsistente con la teoría neoclásica del consumidor⁹⁵. Sin embargo, los errores en la obtención de los datos y la naturaleza de los pacientes disminuyeron, en alguna medida, la importancia de este interesante estudio. Cox (1997) volvió a analizar estos datos explícitamente incluyendo el ocio como bien, encontrando que 24 individuos no violaron GARP, 8 tenían solamente 1 o 2 violaciones, y 37 participantes fueron consistentes con la teoría neoclásica de la demanda al nivel de significatividad de 0.90.

En los últimos años han sido numerosos los estudios experimentales que tratan de analizar la estructura de las elecciones de consumo realizadas por un consumidor racional cuando éste se enfrenta con diversos precios y rentas, a partir de los axiomas de la teoría de la preferencia revelada. Sippel (1997) diseñó dos experimentos con bienes de consumo reales. Los participantes, estudiantes de Economía y Derecho de la Universidad de Bonn a los que se les abonó 25 DM por participar, tuvieron que elegir entre 8 bienes en 10 situaciones presupuestarias diferentes. En el primer experimento, el 58.3 % de los participantes fueron consistentes con GARP. En el segundo experimento, el 63.3 % de los participantes violaron GARP. Mattei (2000) utilizó 20 presupuestos con 8 mercancías para analizar la consistencia de los individuos en tres experimentos distintos. Los participantes eran 20 estudiantes, 100 estudiantes graduados, y 320 lectores de una revista especializada en consumo. Este autor encontró que el 25 %, el 44 % y el 32 % de los participantes en sus experimentos mostraron una incoherencia en sus decisiones de consumo. Un estudio realizado por Harbaugh, Krause y Berry (2001a) con estudiantes de segundo y sexto grado de las escuelas públicas de Oregon, junto con estudiantes de la Universidad de Oregon, analizó también la racionalidad de sus decisiones de consumo. Harbaugh, Krause y Berry consideraron 2 bienes -patatas fritas y cajas de zumo de fruta- y 11 situaciones presupuestarias diferentes, encontrando que el 26 % de los niños de 7 años (estudiantes de segundo grado), el 62 % de los niños de 11 años (estudiantes de sexto grado) y el 65 % de los estudiantes universitarios fueron maximizadores de la utilidad. Andreoni y Miller (2002) analizaron si el modelo racional puede explicar el altruismo de los participantes en un juego del dictador. Estos autores obtuvieron que el 98 % de los participantes presenta un comportamiento racional. En los últimos años, diversos autores, entre los que cabe destacar a Février y Visser (2004) y Andreoni (2001), entre otros, han realizado trabajos similares.

Finalmente, merece la pena resaltar que como dato del crecimiento del interés por la Economía Experimental en la Universidad española se han fundado múltiples laboratorios bien equipados entre los que cabe destacar a los laboratorios y centros de investigación en economía experimental de la Universidad de Bilbao, Castellón, Granada, Pompeu Fabra o Valencia, entre otros.

⁹⁵La mayor parte de éstas violaciones se podían potencialmente explicar por errores de la entrada de datos.

Referencias Bibliográficas

- [1] Andreoni, J. y J. Miller (2001) Analyzing Choice with Revealed Preference: Is Altruism Rational? In Handbook of Results in Experimental Economics, Amsterdam: North-Holland.
- [2] Andreoni, J. y J. Miller (2002) Giving According to GARP: An Experimental Test of the Consistency of Preferences for Altruism. *Econometrica*, Vol. 70(2), págs. 737-753.
- [3] Battalio, R.C. et al. (1973) A Test of Consumer Demand Theory Using Observations of Individual Consumer Purchases. *Western Economic Journal* Vol. XI, págs. 411-428.
- [4] Becker, G. (1962) Irrational Behavior and Economic Theory. *Journal of Political Economy*, Vol. 70, págs. 1-13.
- [5] Becker, G. (1993) The Economic Way of Looking at Behavior. *Journal of Political Economy*, Vol. 101, págs. 385-409.
- [6] Becker G., DeGroot, M. y J. Marschak (1964) Measuring Utility by a Single-response Sequential Method. *Behavioral Science*, Vol. 9, págs. 226-232.
- [7] Chant, J.F. (1963) Irrational Behavior and Economic Theory: A Comment. *Journal of Political Economy*, Vol. 71, págs. 505-510.
- [8] Cox, J.C. (1997) On Testing the Utility Hypothesis. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1054-1078.
- [9] Février P. y M. Visser (2004) A Study of Consumer Behavior Using Laboratory Data. *Experimental Economics*, Vol. 7(1), págs. 93-114.
- [10] Fishburn, P. (1970) Intransitive Indifference with Unequal Indifference Intervals. *Journal of Mathematical Psychology*, Vol. 7, págs. 144-149.
- [11] Georgescu-Roegen, N. (1936) The Pure Theory of Consumer's Behavior. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 50(4), págs. 545-593.
- [12] Harbaugh, W., Krause K. y T. Berry (2001a) GARP for Kids: On the Development of Rational Choice Behavior. *American Economic Review*, Vol. 91(5), págs. 1539-1545.
- [13] Harbaugh, W., Krause K. y T. Berry (2001b) Are Adults Better Behaved Than Children? Age, Experience, and the Endowment Effect. *Economics Letters*, Vol. 70(2), págs. 175-181.
- [14] Kagel, J.H., Rachlin, H. y L. Green (1981) Demand Curves for Animals Consumers. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 66, págs. 1-15.
- [15] Kagel, J. y A. Roth (1995) *The Handbook of Experimental Economics*. Princeton, Princeton University Press.

- [16] MacCrimmon, K. y M. Toda (1969) The Experimental Determination of Indifference Curves. *Review of Economic Studies*, Vol. 36, págs. 433-451.
- [17] Mattei, A. (2000) Full-scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data. *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 43, págs. 487-497.
- [18] May, O. (1953) Intransitivity, Utility, and the Aggregation of Preference Patterns. *Econometrica*, Vol. 22(1), págs. 1-13.
- [19] Papandreou, A. (1953) An Experimental Test of an Axiom in the Theory of Choice. *Econometrica*, Vol. 21, pág. 477 (abstract).
- [20] Rodríguez-Palmero, C. (1997) Estudio de varias clases de estructuras preferenciales. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, 1997.
- [21] Rose, A. (1957) A Study of Irrational Judgements. *Journal of Political Economy*, Vol. 65(5), págs. 394-402.
- [22] Rousseas, S. y Hart, A. (1951) Experimental Verification of a Composite Indifference Map. *Journal of Political Economy*, Vol. 59, págs. 288-318.
- [23] Sippel, R. (1997) An Experiment On the Pure Theory Of Consumer's Behaviour. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1431-44.
- [24] Smith, V. (1976) Experimental Economics: Induced Value Theory. *American Economic Review*, Vol. 66(mayo), págs. 274-279.
- [25] Smith, V. (1982) Microeconomic Systems as an Experimental Science. *American Economic Review*, Vol. 72(5), págs. 923-955.
- [26] Smith, V. (1989) Theory, Experiment and Economics. *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 3(1), págs. 151-169.
- [27] Smith, V. (1993) Métodos experimentales en Economía y en Política Económica. *Cuadernos Económicos del I.C.E.*, Vol. 54(2), págs. 11-49.
- [28] Smith, V. (1994) Economics in the Laboratory. *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 8(1), págs. 113-131.
- [29] Smith, V. (2005) Racionalidad constructivista y ecológica en economía. *Revista Asturiana de Economía*, Vol. 32, págs. 198-273. Conferencia impartida durante la entrega del Premio Nobel de Economía en el año 2002 (Fundación Nobel 2002 (<http://www.nobelprize.org>)).
- [30] Thurstone, L. (1931) The Indifference Function. *Journal of Social Psychology*, Vol. 2, págs. 139-67.

-
- [31] Tversky, A. (1969) Intransitivity of Preferences. *Psychological Review*, Vol. 76, págs. 31-48.
- [32] Tversky, A. y D. Kahneman (1974) Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, Vol. 85, págs. 1124-1131.
- [33] Tversky, A. y D. Kahneman (1981) The Framing of Decisions and the Psychology of Choice. *Science*, Vol. 211, n° 4481, págs. 453-458.
- [34] Van Acker, P. (1990) Transitivity revisited. *Annals of Operations Research*, Vol. 23, W.V. Gehrlein, J.C. Baltzer AG (eds.), Scientific Publishing Company, Basel, págs. 1-35.
- [35] Wallis W. y M. Friedman (1942) The Empirical Derivation of Indifference Functions. In *Studies in Mathematical Economics and Econometrics*, O. Lange et. al. (eds.), Chicago: University of Chicago Press.

3.5. Análisis Experimental

En la literatura económica existen varias evidencias que sugieren que los estudiantes de economía presentan un comportamiento más próximo a los diferentes modelos económicos que los estudiantes de otras disciplinas⁹⁶. En un experimento de financiación de bienes públicos, Marwell y Ames (1981) observaron cómo el porcentaje de “free-riders” es sensiblemente mayor entre un grupo de estudiantes graduados en economía que entre los otros grupos de estudiantes. Carter y Irons (1991) plantearon un juego de ultimátum, encontrando que los estudiantes de economía presentaban un comportamiento más egoísta y, por tanto, más acorde con la teoría económica. En un estudio parecido, Frank, Gilovich y Regan (1993) exhiben resultados similares. Además, al plantear un par de dilemas éticos a alumnos de cursos iniciales de Microeconomía y Astronomía, encontraron que los estudiantes de economía manifiestan un comportamiento menos cooperativo que los alumnos que cursaban Astronomía. Para finalizar esta breve reseña cabe destacar el trabajo de Rubinstein (2005) donde se presentan los resultados de un experimento económico en el cual los participantes actuaron como si fuesen los vicepresidentes de una compañía, al tener que hacer frente al siguiente dilema: despedir a la mitad de sus trabajadores para maximizar el beneficio de la empresa o despedir a un número de trabajadores menor que el requerido para alcanzar tal máximo. Los estudiantes de economía evidenciaron un comportamiento optimizador mayor que los de otras disciplinas. A pesar de la existencia de estos y otros trabajos⁹⁷ que tratan de determinar la existencia de diferencias de comportamiento entre los estudiantes de economía y los estudiantes de otras disciplinas, no se tiene constancia de la existencia de ningún estudio que tenga como objetivo analizar si existen diferencias de comportamiento entre el nivel de formación económica de un individuo y la racionalidad económica dentro del ámbito de la teoría pura del consumidor.

En esta sección se presentan los resultados de dos experimentos económicos que se efectuaron en el año 2005 para comprobar si la formación económico-matemática forma a los individuos para utilizar protocolos de resolución de problemas en los que las respuestas a las preguntas no sólo se basan en un conocimiento fundamental, sino también en indicaciones contextuales referentes a cual pueda ser la respuesta correcta; esto es, para contrastar experimentalmente la existencia de diferencias de comportamiento entre los individuos que presentan formación económica, y conocen los postulados de la teoría económica de la demanda, y aquellos individuos que carecen de este conocimiento. Y en caso afirmativo, la existencia de una correlación positiva entre el nivel de formación económica de un individuo y el grado de coherencia (grado de eficiencia) de las decisiones de consumo efectuadas por un consumidor potencial.

⁹⁶Está ampliamente aceptado que la educación forma a los individuos para utilizar protocolos de resolución de problemas en los que las respuestas a las preguntas no sólo se basan en un conocimiento fundamental, sino también en indicaciones contextuales referentes a cual pueda ser la respuesta correcta.

⁹⁷Véanse los trabajos de Carter y Irons (1991); Frank, Gilovich y Regan (1993); Marwell y Ames (1981) y Rubinstein (2005), entre otros.

Los experimentos se realizaron los días 10, 11, 17 y 18 de mayo de 2005 en horas de clase, sin previo aviso, y en presencia del profesor de la asignatura. En el primer experimento participaron un total de 339 alumnos de la Universidad Católica de Ávila, mientras que el segundo experimento lo realizaron los 83 estudiantes de Economía, Administración y Dirección de Empresas y Ciencias Empresariales que habían realizado con anterioridad el primero. Nos presentamos en las clases y el profesor de la asignatura correspondiente nos presentó a los alumnos. Tras la conclusión de esta presentación, se informó a los alumnos que en este experimento se iba a simular el comportamiento racional de un consumidor, y se realizó una breve exposición del mismo para, a continuación, preguntarles si deseaban participar. Aquellos alumnos que mostraron un especial interés por participar se desplazaron a una sala informática. Una vez allí, a cada sujeto se le asignó un ordenador personal en una sala de con 21 terminales, se leyeron las instrucciones y se les proporcionó una hoja donde se describía el experimento y se podían analizar, de forma visual, los distintos atributos y características de los diferentes bienes de consumo con el objetivo de que cada participante se creara una imagen comprensible de cada uno de los bienes utilizados en el experimento. A continuación, les explicamos sucintamente el funcionamiento de la aplicación informática que iban a utilizar para efectuar sus elecciones. Cada participante se conectó a la aplicación informática, leyó las instrucciones y respondió a una serie de preguntas (edad, sexo, curso, titulación), antes de proceder a efectuar sus elecciones. Obviamente, parece evidente que los sujetos, al ser estudiantes universitarios, podrían compartir, más o menos, una identidad de grupo y que cada participante pudo haber tenido diferentes impresiones y experiencias que probablemente pudieron asociar con el experimento⁹⁸. A diferencia de otros experimentos económicos, los sujetos son seleccionados previamente (en días anteriores) para la realización del experimento. No se les tomó ningún dato personal (más que los requeridos por el experimento) y no se les hizo ningún tipo de pago por haberse presentado.

Los estudiantes realizaron sus elecciones de consumo de forma voluntaria y anónima, sin ninguna compensación económica y en un ambiente de seriedad y silencio con la única restricción de agotar toda la renta monetaria disponible en cada uno de las 20, y 15, situaciones presupuestarias correspondientes al primer y segundo experimento, respectivamente. Para efectuar sus elecciones de consumo los participantes dispusieron de una [aplicación informática](#) implementada en Visual C++, la cual no permitía al alumno gastarse una cantidad mayor o menor de la renta monetaria disponible en cada situación presupuestaria. Esta aplicación reproduce todos los requerimientos teóricos de la teoría del consumidor, eliminando, por tanto, cualquier error de medida o aleatorio, cualquier variación temporal de las preferencias de los participantes y los posibles efectos derivados de la disonancia en la toma de decisiones económicas. Al finalizar las elecciones de consumo en cada situación presupuestaria, el alumno pulsaba una tecla (»») para que aparecieran los nuevos precios y la nueva renta monetaria disponible correspondientes a la siguiente situación presupuestaria. Esta aplicación impide que se almacenen las decisiones de consumo hasta que el participante no haya acabado de completar todos los escenarios posibles. Así, en todo momento, cada participante podía revisar y rehacer, si lo consideraba oportuno,

⁹⁸Obviamente, cada persona aporta al experimento un montón de impresiones y experiencias pasadas diferentes que probablemente se van a asociar con el experimento actual.

sus decisiones. Una vez que el participante había realizado sus elecciones de consumo en todos los escenarios posibles y revisado sus decisiones, éste pulsaba “Aceptar” y la aplicación almacena al mismo tiempo sus elecciones de consumo. La Figura 3.10 ilustra la aplicación diseñada en Visual C++ para la realización de los experimentos económicos.

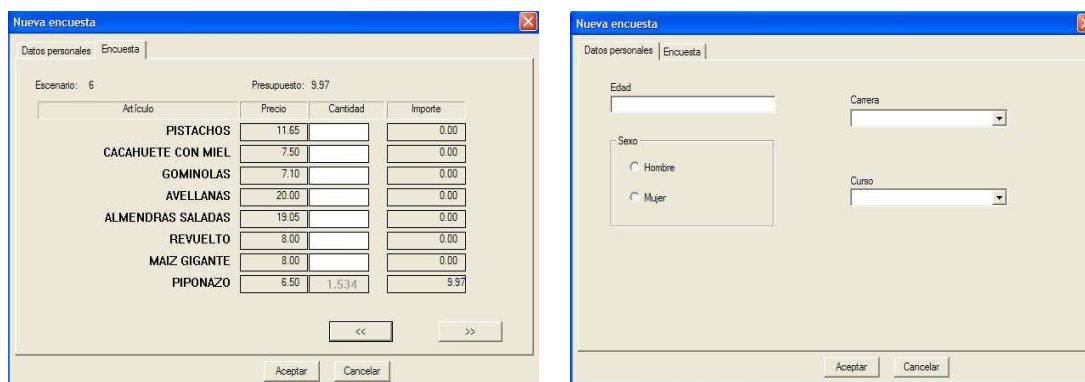


Figura 3.10: Aplicación informática utilizada en los experimentos.

El uso de experimentos, en lugar de encuestas de campo, para recopilar datos sobre las decisiones del consumidor, presenta una serie de ventajas considerables que han sido ampliamente comentadas en las secciones anteriores. El entorno de la elección hipotética puede ser especificado de forma precisa mediante un diseño que permita la identificación directa de efectos. Sin embargo, siempre surgirán preguntas acerca de la medida en que las tareas cognitivas en un marco hipotético pueden ser equiparables a otras pertenecientes al entorno de una decisión real y dudas sobre el correcto diseño experimental y sobre si se han tenido en cuenta todas las variables de control para evaluar los resultados obtenidos⁹⁹.

En el diseño experimental hay muchas dificultades sutiles que pueden incidir en los resultados experimentales y ser las causantes de la aparición de anomalías. Por ejemplo, las características de la demanda son resultado de que el sujeto sabe que está participando en un experimento. Cabe resaltar que los errores en el diseño experimental pueden ser la causa de graves fallos en los resultados. Como ya se ha comentado, en numerosos estudios empíricos que han tratado de analizar el comportamiento de un consumidor a partir de la teoría de la preferencia revelada se ha comprobado la inconsistencia de las decisiones de consumo de un consumidor con los diferentes axiomas de preferencia revelada¹⁰⁰. Esta eventual inconsistencia ha podido estar ocasionada por multitud de factores, entre los que cabe destacar un posible error en el diseño experimental como, por ejemplo: una variación temporal en las preferencias de un consumidor, la existencia de errores de medida, etc., que no todas las elecciones de consumo sean observables,

⁹⁹Una buena técnica experimental puede eliminar las fuentes más obvias de incongruencia, pero la medida y la validación utilizando datos de preferencias reveladas es, habitualmente, necesaria.

¹⁰⁰Véanse los trabajos de Fleissig, Gallant y Seater (2000), Harbaugh, Krause y Berry (2001), Koo (1972), Sippel (1997) y Swofford y Whitney (1994), entre otros.

que exista un racionamiento en las cantidades demandadas, que las preferencias del consumidor varíen en el tiempo o las restricciones presupuestarias no estén siendo consideradas en el modelo optimizador de la utilidad.

Una dificultad relacionada estrechamente con el éxito o fracaso experimental es lo que se denomina en la Psicología Económica el *efecto del experimentador*, que puede llegar a provocar un sesgo en los resultados experimentales. Los efectos del experimentador son artefactos introducidos accidentalmente cuando el experimentador (mediante su conducta o características individuales) proporciona claves que se relacionan con el propósito del experimento o que influyen en el sujeto de manera sistemática¹⁰¹. El efecto del experimentador puede minimizarse por medio de mecanismos que reduzcan las diferencias sutiles en la conducta de éste (Kantowitz et. al.; 2001) o introduciendo en el diseño experimental una variable independiente adicional o variable de control, si se sospecha que algún aspecto de su apariencia (por ejemplo, el género, la raza, el origen étnico) puede alterar el patrón de comportamiento del sujeto. La mejor manera de eliminarlo es ocultar la condición experimental, partiendo de la premisa de que los que realizan el experimento no pueden comunicar lo que no saben. Este procedimiento se denomina *experimento de doble ciego*, porque ni el experimentador ni el participante en la investigación saben qué sujetos se hallan en las condiciones del tratamiento¹⁰².

Además de la existencia del posible sesgo en los resultados experimentales como consecuencia del efecto del experimentador, un erróneo diseño experimental puede ocasionar la existencia de diferentes *fenómenos cognitivos* (anclaje, contexto, marco de referencia focal, etc.) que pueden provocar la aparición de anomalías o errores (inconsistencias con la teoría clásica de la demanda) en el proceso de elección de un consumidor¹⁰³. Los experimentos realizados por Hurd et al. (1998) y Green et al. (1998) muestran que los efectos del anclaje¹⁰⁴ son notables y estadísticamente significativos y, además, que el fenómeno del anclaje¹⁰⁵ puede introducir un sesgo de respuesta que, si no se reconoce, podría provocar desviaciones en el modelo estándar del comportamiento de un individuo. Por otra parte, el formato de las preguntas y, en consecuencia, la dependencia de la referencia, puede llevar a cambiar la prioridad de diferentes aspectos de la tarea cognitiva e influir en el resultado final del proceso de elección de un individuo¹⁰⁶ dado a que, como señala

¹⁰¹Es importante señalar que una gran cantidad de investigaciones y de observaciones anecdóticas ha establecido, ciertamente, que suceden tales efectos (Kantowitz et. al.; 2001). Es posible que el experimentador interactúe con los participantes en las distintas condiciones de maneras ligeramente diferentes; puede variar su tono y énfasis de voz al leer las instrucciones; y, de igual modo, pueden diferir las claves faciales, gestos, etc. En psicología se considera que el género, la raza y el origen étnico del investigador son también efectos potenciales del experimentador.

¹⁰²Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

¹⁰³Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

¹⁰⁴Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

¹⁰⁵Fenómeno cognitivo que se produce cuando las respuestas son dirigidas hacia entradas numéricas incluso cuando son poco informativas. Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

¹⁰⁶Nótese, por ejemplo, como los enunciados “El equipo A vence al equipo B” y “el equipo B perdió frente al equipo A” transmiten la misma información, pero, debido a que cada uno de ellos centra la atención sobre su sujeto gramatical, llevan a diferentes ideas.

Smith (2003), la dependencia de la referencia y la aversión a las pérdidas sirven para explicar varios fenómenos relacionados con la elección. La observación tan conocida de que las pérdidas se valoran por encima de los costes de oportunidad se explica fácilmente si se considera que estos resultados se evalúan en diferentes partes de la función de valor¹⁰⁷. Finalmente, el contexto¹⁰⁸ en el que se desarrolla el experimento puede llegar a influir de manera directa en las decisiones de consumo de un individuo¹⁰⁹. La influencia del contexto en la toma de decisiones económicas se deriva de la naturaleza de la percepción y del carácter autobiográfico de la memoria y de la manera en la que la experiencia pasada codificada interactúa con los estímulos sensoriales actuales para crear la memoria.

Los experimentos fueron diseñados con el propósito de eliminar, o minimizar en la medida de lo posible, los principales fenómenos cognitivos (anclaje, contexto, disponibilidad, referencia focal, etc.) u otros efectos tales como los efectos derivados del contexto, la variación temporal de las preferencias o los efectos potenciales del experimentador que pudieran ser los causantes de las posibles inconsistencias presentes en el proceso de elección de nuestros participantes. En el diseño experimental se intentó limitar, en la medida de lo posible, los potenciales efectos del experimentador puesto que se siguió el mismo proceso con todos los sujetos experimentales. Sin embargo, no podemos hablar de un “efecto nulo” del experimentador, pues en todo diseño experimental todas las operaciones elementales utilizadas son tratamientos que podrían tener o no un efecto significativo sobre los resultados observados¹¹⁰. Sin embargo, sí que podemos afirmar que si existió algún efecto del experimentador, éste debió de ser un “efecto positivo” en el sentido de que los alumnos hubiesen visto aumentada su implicación y su motivación intrínseca (a pesar de no recibir ningún tipo de incentivo monetario) y presentasen un comportamiento más próximo a los postulados de la teoría clásica de la demanda, pues casi la totalidad del alumnado lo eran (o lo habían sido en algún momento) del profesor López Matos, que estuvo presente en todas las sesiones experimentales. En las instrucciones del experimento no se empleó en ningún momento palabras técnicas y/o emotivas que pudieran desencadenar significados no buscados, evitando así los efectos del contexto. No pretendemos afirmar que el punto de partida fuese totalmente “neutro” dado que el que los resultados sean robustos respecto a cambios en

¹⁰⁷La aversión a las pérdidas contribuye también al muy documentado sesgo del status quo y, debido a que el punto de referencia es generalmente el status quo, las propiedades de las demás alternativas se evalúan viendo si son ventajosas o desventajosas respecto a la situación actual, y las desventajas de las alternativas pesan más que sus ventajas. En distintos capítulos de Kahneman y Tversky (2000) se recogen otras aplicaciones del concepto de aversión a las pérdidas.

¹⁰⁸Véase Glosario Terminológico para más detalles.

¹⁰⁹Muchos psicólogos indican que el comportamiento es demasiado sensible al contexto y que parece estar provechosamente relacionado con preferencias estables. Smith (2005) describe diferentes experimentos que demuestran que el contexto (social, cultural, instrucciones/procedimiento, etc.) tiene una importancia notable en la toma de decisiones de un individuo.

¹¹⁰En cualquier diseño experimental pueden existir efectos tanto en las instrucciones como en el procedimiento, incluyendo la presencia o ausencia de un experimentador, lo que él o ella sabe o no sabe (como en los experimentos conductistas del “ciego simple” o del “doble ciego”), y lo que haga o deje de hacer. Es posible que el experimentador interactúe con los participantes en las distintas condiciones de maneras ligeramente diferentes; puede variar su tono y énfasis de voz al leer las instrucciones; y, de igual modo, pueden diferir las claves faciales, gestos, etc.

las instrucciones es algo que sólo se puede determinar de forma empírica¹¹¹. Sin tales estudios no se puede hacer ninguna afirmación respecto a la “neutralidad” relativa de las instrucciones. Además, como señala Smith (en su Lectura del Premio Nobel de Economía) los efectos del contexto pueden depender de la experiencia autobiográfica puesto que, obviamente, como sucede en cualquier experimento, cada participante aporta un sus impresiones y experiencias pasadas que pueden asociar con el experimento actual. Por último, la aplicación informática con la que los participantes efectuaron sus elecciones de consumo fue implementada con el objetivo de eliminar (en la medida de lo posible) diferentes fenómenos cognitivos como el anclaje, la disponibilidad, el marco de referencia focal o el descuento temporal que pueden llevar a cambiar la prioridad de diferentes aspectos de la tarea cognitiva e influir en el resultado final del proceso de elección de un individuo. Esto se debe a que la aplicación informática que utilizaron los participantes en las sesiones experimentales ordenaba aleatoriamente los diferentes bienes de consumo y, además, en cada situación presupuestaria, el participante podía demandarlos en el orden que deseara, eliminando así cualquier efecto posible derivado del anclaje, del marco de referencia focal o de la dependencia de la referencia.

En el primer experimento, el conjunto de consumo estaba formado por 8 bienes: **paquetes de cigarrillos** (Marlboro, Fortuna, Ducados,...), **copas** (whisky, ron, vodka,...), **entradas de cine**, **cenar**, **CD's R-W 700 MB (10X)**, **DVD+R 4.7GB (8X)** y **frutos secos** (pipas, maíces, cacahuetes, etc). Estos bienes de consumo intentan incorporar un atractivo emocional en los participantes en nuestro experimento y despertar su interés, así como cumplir una función de identificación con el grupo de referencia. Es decir, son productos que conllevan un mayor nivel de implicación y, como consecuencia de ello, un mayor esfuerzo cognitivo en la toma de decisiones. Los precios de la primera situación presupuestaria fueron extraídos de la realidad con el objetivo de que éstos sirviesen como precios de referencia, tanto externos como internos, a los participantes del experimento¹¹². Para cada una de las diferentes situaciones presupuestarias, con excepción de la última, se realizó una simulación de los precios de los distintos bienes con el objetivo de aumentar el número de intersecciones de los diferentes conjuntos presupuestarios y, en consecuencia, incrementar la potencia de los diferentes tests no paramétricos utilizados para analizar la consistencia de las decisiones de consumo de un consumidor. Los precios simulados para cada uno de los bienes estaban limitados por unos precios reales de referencia mínimo y máximo¹¹³. Además, y dado que los experimentos fueron diseñados para analizar la existencia o

¹¹¹El efecto del cambio en las instrucciones sobre la decisión es un tema empírico y cualquier conjunto concreto de instrucciones debe ser considerado siempre como un tratamiento, a menos que se demuestre que las observaciones son robustas ante cambios en las instrucciones. Estos efectos tratamiento de las instrucciones ponen en tela de juicio la idea de que se puede definir lo que se entiende como instrucciones “inesgadas”.

¹¹²Los productos que no son tan importantes para el consumidor, que no suponen un riesgo elevado, que no gozan de un atractivo emocional especial o que no cumplen funciones de identificación con el grupo de referencia, implican un menor nivel de implicación por parte del consumidor. Esto es, a medida que el nivel de implicación con la decisión de elección disminuye, el nivel de esfuerzo cognitivo y de búsqueda de información decrece.

¹¹³En la mente de los consumidores existe generalmente una banda de precios aceptables para el nivel de calidad del bien o servicio al que enfrenta su decisión de compra. Los precios que no pertenecen a dicha banda se rechazan. Esta banda implica la existencia de unos umbrales de precio (inferior y superior) que delimitan las

no de una correlación positiva entre el nivel de formación económica de un individuo y el grado de racionalidad o coherencia de sus decisiones de consumo, y no para analizar la influencia de los precios redondeados o psicológicos en la racionalidad de un individuo, se simularon conjuntamente precios redondeados (para favorecer la accesibilidad¹¹⁴ y la percepción de los precios, así como su recuerdo y comparación) y precios psicológicos (para dificultar el proceso de elección, al crear en la mente de los participantes el efecto de ganancia percibida, fenómeno conocido como odd-pricing, psychological pricing, o just below pricing). Así, la terminación fue 0, 5 y 9 para los precios simulados¹¹⁵. Para contrastar la homogeneidad de grado cero de la función de demanda se consideraron los mismos precios y la misma renta monetaria en la situación presupuestaria inicial y final.

En el segundo experimento, el objetivo fue dificultar lo máximo posible el proceso de elección racional haciendo que tanto los precios de cada uno de los bienes como la renta monetaria variaran muy poco de un escenario a otro. El conjunto de consumo también estaba formado por 8 bienes: pipas, maíz gigante, almendras saladas, cacahuets con miel, revuelto de frutos secos, gominolas, avellanas y pistachos. La elección de estos productos estuvo fundamentada por dos razones, principalmente. En primer lugar, por ser todos los bienes perfectamente divisibles. En segundo lugar, por la similitud en los precios reales de estos bienes entre los diferentes establecimientos. Los precios fueron simulados a partir de una matriz de compensación tipo Slutsky y limitados por unos precios de referencia reales mínimo y máximo resultantes de una muestra realizada en la ciudad de Ávila a 15 establecimientos diferentes. Los precios de la primera situación presupuestaria, de manera análoga a lo realizado en el primer experimento, se correspondieron con los precios de estos bienes en uno de los establecimientos de la muestra seleccionado aleatoriamente. La terminación de cada uno de estos precios fue 0 y 5, dada la evidencia del uso de estas terminaciones en los precios reales de estos productos. La renta monetaria varió entre los 9.58 y los 10.36 euros en cada escenario, siendo 10 euros la renta monetaria de la primera situación presupuestaria.

A continuación, realizamos un análisis descriptivo de los resultados obtenidos en nuestros experimentos. El primer experimento fue realizado por 339 alumnos de las siguientes titulaciones que se imparten en la Universidad Católica de Ávila: Ingeniero Técnico Industrial (42 alumnos), Ingeniero de Montes (46 alumnos), Ingeniero Técnico Forestal (49 alumnos), Licenciado en Ciencias Ambientales (33 alumnos), Ingeniero Técnico en Informática de Gestión (36 alumnos), Licenciado en Derecho (20 alumnos), Diplomado en Ciencias Empresariales (16 alumnos), Ingeniero Agrónomo (30 alumnos), Licenciado en Administración y Dirección de Empresas (50 alumnos) y Licenciado en Economía (17 alumnos), lo que en la práctica representa el 70% del

fronteras de precios que los consumidores consideran aceptables. La existencia de estos umbrales constituye un input importante para la estrategia de precios de las empresas.

¹¹⁴Véase Glosario Terminológico, para más detalles.

¹¹⁵La existencia de precios atractivos es una regularidad espacial y temporal en la medida en que es un fenómeno observado en distintos países en períodos diferentes que las terminaciones reales de los precios en las distintas economías es 0, 5 y 9. Para más detalles sobre las estrategias de precios y su aplicación al comercio minorista. Véase el término Estrategias de precios del Glosario Terminológico, para más detalles.

alumnado de esta pequeña universidad. En el primer experimento, el 69.6 % de los participantes violaron GARP y, por tanto, mostraron un comportamiento inconsistente con la teoría neoclásica de la demanda. Al hablar de inconsistencia nos referimos a que el comportamiento observado del consumidor viola el Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada y, por consiguiente, sus observaciones de consumo no proceden del correspondiente comportamiento optimizador.

Una primera aproximación a los resultados de este experimento nos sugiere que los resultados no son muy favorables con la teoría neoclásica del comportamiento de un consumidor. En efecto, este porcentaje de participantes inconsistentes es superior al encontrado en los experimentos de Sippel (41.7 % en el primer experimento y 63.3 % en el segundo), Mattei (25 %, 44 % y 32 % en su primer, segundo y tercer experimento respectivamente) y Février (29 %), aunque el porcentaje de participantes inconsistentes en el experimento de Février y Visser (2004) podría no ser muy significativo debido al reducido número de situaciones presupuestarias que considera en su estudio. Sin embargo, si restringimos nuestro estudio a los estudiantes de Economía o de Administración de Empresas obtenemos unos resultados muy similares a los exhibidos en anteriores experimentos, a pesar de la inexistencia de incentivos. El 35.29 % de los estudiantes de Economía y el 48.00 % de los estudiantes que cursan Administración y Dirección de Empresas presentan un comportamiento inconsistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

La Tabla 3.3 ilustra el porcentaje de estudiantes inconsistentes con GARP para cada uno de los niveles de eficiencia, e^* , considerados. En este experimento, se han considerado como inconsistentes a 13 estudiantes (4 de Industriales, 3 de Administración de Empresas, 2 de Derecho, 1 de Economía, 1 de Ciencias Empresariales, 1 de Ciencias Ambientales y 1 Ingeniero Agrónomo) que presentan un índice Afriat superior a 0.9999.

Titulaciones	Número de participantes que violan GARP (Exp1)					
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Ldo. Economía	6 (35.29 %)	3 (17.64 %)	2 (11.76 %)	1 (05.88 %)	1 (05.88 %)	0 (00.00 %)
Ldo. ADE	24 (48.00 %)	16 (32.00 %)	14 (28.00 %)	7 (14.00 %)	4 (08.00 %)	3 (06.00 %)
Ing. Montes	23 (50.00 %)	20 (43.47 %)	15 (32.60 %)	7 (15.21 %)	5 (10.86 %)	5 (10.86 %)
Técnico Informático	21 (58.33 %)	20 (55.55 %)	11 (30.55 %)	7 (19.44 %)	4 (13.89 %)	3 (08.33 %)
Dip. Empresariales	11 (68.75 %)	9 (56.25 %)	7 (43.75 %)	4 (25.00 %)	2 (12.50 %)	2 (12.50 %)
Ldo. Ambientales	24 (72.72 %)	16 (48.48 %)	14 (42.42 %)	8 (24.24 %)	6 (18.18 %)	3 (09.09 %)
Ing. Agrónomo	22 (73.33 %)	15 (50.00 %)	11 (36.66 %)	10 (33.33 %)	7 (23.33 %)	6 (20.00 %)
Técnico Forestal	41 (89.79 %)	34 (72.54 %)	28 (57.14 %)	20 (40.81 %)	15 (30.61 %)	13 (26.53 %)
Técnico Industrial	38 (90.47 %)	31 (73.80 %)	24 (57.14 %)	18 (42.85 %)	13 (30.95 %)	10 (23.80 %)
Ldo. Derecho	20 (100.0 %)	16 (80.00 %)	10 (50.00 %)	5 (25.00 %)	2 (10.00 %)	1 (05.00 %)

Tabla 3.3: Número de participantes violando GARP(e^*) en Exp1.

El cuadro anterior muestra cómo los participantes que cursan estudios económico-empresariales presentan un mayor grado de coherencia en sus decisiones de consumo que los estudiantes de otras titulaciones, puesto que, para cada uno de los niveles de eficiencia considerados, el porcentaje de participantes que muestran un comportamiento contrario con la hipótesis de la maximización de la utilidad es inferior entre los estudiantes de Economía y los estudiantes de Administración y Dirección de Empresas. En la primera columna de este cuadro se puede

apreciar cómo sólo el 35.29 % de los estudiantes de Economía y el 48.00 % de los alumnos de Administración y Dirección de Empresas violan $GARP(\bar{I})$. La Tabla 3.3 también permite apreciar cómo los estudiantes de Economía y Administración y Dirección de Empresas –que conocen los postulados de la teoría clásica de la demanda– presentan un mayor grado de racionalidad en sus decisiones de consumo que los estudiantes sin ningún tipo de formación económico-matemática, como pudieran ser los estudiantes de Derecho. El porcentaje de estudiantes inconsistentes con $GARP(e^*)$ para cada uno de los niveles de eficiencia, e^* , considerados es inferior entre los estudiantes de Economía y de Administración y Dirección de Empresas (ADE) que en el resto de titulaciones consideradas. Esta apreciación puede corroborarse también con los datos recogidos en la Tabla 3.4. La primera columna de la Tabla 3.4 ilustra la media aritmética del índice de Afriat para los estudiantes de cada una de las titulaciones consideradas en el estudio. La segunda columna muestra la media aritmética de la norma euclídea del conjunto de niveles de eficiencia de Varian, $(e_t)_{t=1}^n$, para cada titulación considerada. Las columnas tercera, cuarta y quinta ilustran el promedio del número de violaciones $SARP(e^*)/GARP(e^*)/WARP(e^*)$ y, finalmente, la última columna designa el promedio del número de observaciones fuertemente inconsistentes con $GARP$.

Titulaciones	Índices de eficiencia (promedio) en Exp1					Obs. Incon.
	Afriat	Varian	GARP	SARP	WARP	
Ldo. Economía	0.99441	0.99870	2.76471	2.29412	2.47059	1.35294
Ldo. ADE	0.98855	0.99491	5.30612	6.48980	3.91837	2.54000
Ing. Montes	0.98534	0.99047	9.28260	10.45652	5.91304	3.33333
Técnico Informático	0.98301	0.98807	12.30556	14.13889	7.50000	3.97222
Dip. Empresariales	0.97913	0.97596	23.82353	25.23529	8.35294	4.94100
Ldo. Ambientales	0.97921	0.98449	18.18182	19.90909	8.24242	5.62500
Ing. Agrónomo	0.97759	0.98504	15.16667	16.80000	7.53333	5.53333
Técnico Forestal	0.97032	0.97823	19.65306	21.79592	9.38776	6.81632
Técnico Industrial	0.96705	0.97192	24.90476	27.14286	10.3809	7.73809
Ldo. Derecho	0.97824	0.98358	16.80000	19.15000	9.70000	6.35000

Tabla 3.4: Eficiencia en el consumo en Exp1.

Una simple inspección de los resultados resumidos en la Tabla 3.4 vuelve a mostrar una clara diferencia de comportamiento entre los estudiantes que conocen los postulados de la teoría económica y los restantes¹¹⁶. El cuadro 3.4 muestra cómo los participantes de economía presentan un mayor grado de coherencia en sus decisiones de consumo que los estudiantes de otras titulaciones al presentar en promedio un mayor índice de Afriat, un mayor índice de Varian, un menor número de violaciones $GARP$, $SARP$, $WARP$ y un menor número de observaciones inconsistentes con $GARP$. Los estudiantes que conocen los postulados de la teoría clásica de la demanda de economía presentan en promedio un mayor índice de Afriat, un mayor índice de

¹¹⁶Binmore (1999) argumenta además que se pueden requerir experimentos repetidos para asegurar que los agentes aprendan la respuesta apropiada. De hecho, varios experimentos muestran que la frecuencia de anomalías en las preferencias disminuye si se permite que los sujetos repitan el experimento o que teóricos de la decisión calificados reemplacen a los sujetos legos.

Varian¹¹⁷ (mayor norma en el conjunto de “índices de eficiencia” de Varian), un menor número de violaciones GARP, SARP y WARP, y un menor número de observaciones fuertemente inconsistentes con GARP.

La Tabla 3.5 muestra el promedio de violaciones $SARP(e^*)$, $WARP(e^*)$ y $GARP(e^*)$, respectivamente para los participantes en el experimento. Una simple inspección a los resultados permiten inferir la misma conclusión: existe una diferencia de comportamiento entre los estudiantes de economía y los de otras titulaciones. Los estudiantes de economía presentan un mayor grado de coherencia en sus decisiones de consumo. De los resultados resumidos en la Tabla 3.5 se desprende que el porcentaje de estudiantes consistentes con la hipótesis de la maximización de la utilidad no solo es mayor cuanto mayor sea su nivel de formación económica sino que, además, presentan un mayor grado de eficiencia en sus decisiones de consumo puesto que para cada nivel de eficiencia e^* se cumple que el porcentaje de estudiantes inconsistentes con $SARP(e^*)/WARP(e^*)/GARP(e^*)$ es menor cuanto menor sea su nivel de formación económica.

Promedio de violaciones GARP(e^*) en Exp1						
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Ldo. Economía	02.294	00.705	00.235	0.117	0.117	0.000
Ldo. ADE	05.306	01.980	01.143	0.490	0.286	0.122
Ing. Montes	09.282	05.326	03.673	2.369	1.173	0.456
Técnico Informático	12.306	07.500	04.194	2.361	1.028	0.639
Dip. Empresariales	23.824	13.529	05.647	2.529	1.765	1.706
Ldo. Ambientales	18.182	10.727	04.939	1.727	1.273	0.515
Ing. Agrónomo	15.167	08.233	04.800	3.333	0.933	0.467
Técnico Forestal	19.653	11.469	06.122	3.143	2.653	1.755
Técnico Industrial	24.905	14.095	10.667	6.690	3.690	2.690
Ldo. Derecho	16.800	09.850	04.100	2.000	1.450	1.250
Promedio de violaciones SARP(e^*) en Exp1						
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Ldo. Economía	02.765	00.705	00.235	0.117	0.117	0.000
Ldo. ADE	06.490	01.980	01.143	0.490	0.286	0.122
Ing. Montes	10.456	05.326	03.673	2.369	1.173	0.456
Técnico Informático	14.139	07.500	04.194	2.361	1.028	0.639
Dip. Empresariales	25.232	13.529	05.647	2.529	1.765	1.706
Ldo. Ambientales	19.909	10.727	04.939	1.727	1.273	0.515
Ing. Agrónomo	16.800	08.233	04.800	3.333	0.933	0.467
Técnico Forestal	21.796	11.469	06.122	3.143	2.653	1.755
Técnico Industrial	27.143	14.095	10.667	6.690	3.690	2.690
Ldo. Derecho	19.150	09.850	04.100	2.000	1.450	1.250
Promedio de violaciones WARP(e^*) en Exp1						
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Ldo. Economía	02.471	0.471	0.235	0.118	0.118	0.000
Ldo. ADE	03.918	1.429	0.898	0.367	0.245	0.122
Ing. Montes	05.913	2.739	1.869	0.956	0.565	0.347
Técnico Informático	07.500	3.778	2.556	1.611	0.778	0.333
Dip. Empresariales	08.353	4.588	2.588	1.294	0.941	0.824
Ldo. Ambientales	08.242	4.000	1.879	1.091	0.970	0.364
Ing. Agrónomo	07.533	3.067	2.067	1.067	0.600	0.467
Técnico Forestal	09.388	5.143	3.306	1.878	1.429	0.857
Técnico Industrial	10.381	5.095	3.714	2.286	1.429	0.952
Ldo. Derecho	09.700	4.000	2.100	1.200	0.900	0.500

Tabla 3.5: Promedio de violaciones $SARP(e^*)/WARP(e^*)/GARP(e^*)$ en Exp1.

¹¹⁷Para los efectos de establecer una comparativa entre los “niveles de eficiencia” estamos considerando $e = \|\bar{e}_t\|_2$ donde $\bar{e}_t = (e_1, \dots, e_n)$.

Los resultados del primer experimento muestran la existencia de una correlación negativa entre el porcentaje de “participantes inconsistentes” y el nivel de formación económica de éstos. En efecto, el porcentaje de “participantes inconsistentes” es sensiblemente inferior entre los estudiantes que cursan Economía (35.3 %) y Administración y Dirección de Empresas (48 %) que en las restantes disciplinas. Por el contrario, los alumnos de Derecho, que no poseen ningún tipo de formación económica ni matemática, son los que exhiben una mayor falta de coherencia en sus decisiones de consumo. En el segundo experimento se han obtenido resultados similares.

El segundo experimento lo realizaron 83 estudiantes de Economía, Administración y Dirección de Empresas y Ciencias Empresariales. Es importante resaltar que los 83 alumnos de ADE, Economía y Ciencias Empresariales que participaron en el segundo experimento habían participado con anterioridad en el primer experimento, lo que en la práctica constituye el 85 % del alumnado de estas titulaciones. Los resultados obtenidos en el segundo experimento, que aparecen ilustrados en las Tablas 3.6, 3.7 y 3.8, no son muy favorables con la hipótesis de la maximización de la utilidad. El 66.2 % de los participantes del segundo experimento violaron GARP.

La Tabla 3.6 muestra como el porcentaje de “participantes inconsistentes” con GARP es sensiblemente inferior en los estudiantes que cursan Economía (47.06 %) que entre los que cursan Administración y Dirección de Empresas (66.00 %) o Ciencias Empresariales (87.50 %). En la evaluación de los resultados obtenidos en este experimento se consideró como “inconsistentes” a 7 estudiantes (3 de Administración de Empresas, 2 de Ciencias Empresariales y 1 de Economía) que presentando un comportamiento inconsistente con la teoría neoclásica de la demanda exhibieron un índice de Afriat superior a 0.9999 en sus decisiones de consumo. La Tabla 3.6 muestra, además, para cada uno de los niveles de eficiencia, e^* , considerados el porcentaje de participantes inconsistentes con $\text{GARP}(e^*)$ es inferior entre los estudiantes de Economía.

Titulaciones	Número de participantes que violan GARP (Experimento II)					
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Ldo. Economía	8 (47.06 %)	2 (11.76 %)	1 (05.89 %)	1 (05.89 %)	0 (0.00 %)	0 (0.00 %)
Ldo. ADE	33 (66.00 %)	21 (42.00 %)	15 (30.00 %)	4 (8.00 %)	0 (0.00 %)	0 (0.00 %)
Ciencias Empresariales	14 (87.50 %)	9 (56.25 %)	5 (31.25 %)	1 (6.25 %)	0 (0.00 %)	0 (0.00 %)

Tabla 3.6: Participantes violando $\text{GARP}(e^*)$ en Exp2.

La Tabla 3.7 también nos permite inferir la existencia de una diferencia de comportamiento entre los estudiantes de economía y los de otras disciplinas. Los estudiantes de economía presentan, de nuevo, un mayor grado de racionalidad en sus elecciones efectuadas y, son, de nuevo, los más eficientes.

Los estudiantes de economía presentan de nuevo un mayor grado de racionalidad en sus elecciones efectuadas y, son, de nuevo, los más eficientes, pues, al igual que sucedía en el primer

Titulaciones	Índices de eficiencia de Afriat y Varian (Experimento II)					
	Afriat	Varian	GARP	SARP	WARP	Obs. Incon.
Ldo. Economía	0.99504	0.99563	8.05882	8.05882	4.00000	3.05882
Ldo. ADE	0.98969	0.98582	25.86000	25.86000	8.52000	5.60000
Ciencias Empresariales	0.98661	0.98827	28.12500	28.12500	12.75000	7.43750

Tabla 3.7: Eficiencia en el consumo en Exp2.

experimento, los “participantes inconsistentes” que cursan los estudios de economía presentan (en promedio) un menor índice de Afriat, una menor norma en el vector de “índices de eficiencia” asociado a sus demandas observadas y un menor número de violaciones con los diferentes axiomas de la preferencia revelada, tal y como se puede apreciar en la Tabla 3.7, que ilustra el grado de coherencia de las elecciones efectuadas por los participantes del segundo experimento. La afirmación anterior está en consonancia con los datos que refleja la Tabla 3.8. La Tabla 3.8 muestra el promedio de violaciones $SARP(e^*)$, $WARP(e^*)$ y $GARP(e^*)$, respectivamente para los participantes en el experimento. Una simple inspección de estos resultados nos conduce a la misma conclusión: existe una diferencia de comportamiento entre los estudiantes de economía y los de otras titulaciones. Los estudiantes de economía presentan un mayor grado de coherencia en sus decisiones de consumo, mientras que los estudiantes de Ciencias Empresariales presentan un comportamiento menos consistente con la hipótesis de la maximización de la utilidad.

	Promedio de violaciones $GARP(e^*)$ en Exp2					
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Ldo. Economía	08.059	1.647	1.000	0.588	0.000	0.000
Ldo. ADE	25.860	8.780	2.300	0.320	0.000	0.000
Dip. Empresariales	28.125	4.438	0.625	0.125	0.000	0.000
	Promedio de violaciones $SARP(e^*)$ en Exp2					
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Ldo. Economía	08.059	1.647	1.000	0.588	0.000	0.000
Ldo. ADE	25.860	8.780	2.300	0.320	0.000	0.000
Dip. Empresariales	28.125	4.438	0.625	0.125	0.000	0.000
	Promedio de violaciones $WARP(e^*)$ en Exp2					
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Ldo. Economía	04.000	1.176	0.471	0.000	0.000	0.000
Ldo. ADE	08.520	2.840	0.960	0.240	0.000	0.000
Dip. Empresariales	12.750	2.500	0.625	0.125	0.000	0.000

Tabla 3.8: Promedio de violaciones $SARP(e^*)/GARP(e^*)/WARP(e^*)$ en Exp2.

Los resultados experimentales nos permiten colegir la existencia de una clara diferencia de comportamiento entre los estudiantes de economía y los de otras disciplinas. En el segundo experimento hemos observado, además, un aumento en el porcentaje de participantes inconsistentes que ha podido estar ocasionado por la pequeña variación tanto en los precios como en la renta monetaria en las diferentes situaciones presupuestaria que dificulta considerablemente el proceso de elección. El porcentaje de “participantes inconsistentes” que estudian Economía

(35.3% vs 47.06%), Administración y Dirección de Empresas (48% vs 66%) o Ciencias Empresariales (68.7% vs 87.5%) es superior en el segundo experimento que en el primero. Sin embargo, el porcentaje de participantes inconsistentes que cursan Economía (35.3%), Administración de Empresas (48%) o Ciencias Empresariales (68.7%) es similar al encontrado en experimentos previos en los que sí que existen incentivos.

A continuación, analizamos la fiabilidad de las pruebas efectuadas dado que, como hemos señalado en la sección 3.3, los datos pueden satisfacer GARP y, sin embargo, no haber sido generados desde un procedimiento optimizador. Como se señaló en la sección 3.3 la teoría de la preferencia revelada presenta una debilidad. Nótese que debido a que las violaciones de los axiomas débil, fuerte y generalizado (entre otros) requieren que los conjuntos presupuestarios se corten, algunas listas de datos de demanda observados son virtualmente incapaces de proporcionar un test útil de la hipótesis de la maximización de la utilidad. Es fácil construir configuraciones precio-gasto en las cuales el gasto total crezca más rápidamente que las variaciones de los precios; de esta forma, cada secuencia de elecciones es consistente con la hipótesis de la maximización de la preferencia. Por tanto, el diseño experimental debe de ser eficiente en el sentido de proporcionar una elevada fiabilidad.

Análisis sensibilidad Simulaciones: 25000						
Porcentaje participantes violando GARP (Exp1)						
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Random money choice	99.91	83.82	31.63	07.39	01.57	00.31
Random goods choice	99.99	86.15	29.96	06.38	01.18	00.20
Random mixed choice	59.20	23.53	06.44	01.27	00.33	00.13
G.M.N.H.	100.0	91.55	44.75	13.09	03.44	00.78
Bronars' Test	99.93	84.92	33.52	08.10	01.87	00.35
Generalized money choice	99.99	97.34	75.39	45.15	26.05	16.86
Generalized goods choice	100.0	97.39	71.96	39.10	22.61	15.21
Generalized mixed choice	73.76	49.55	24.95	15.33	09.95	06.04
Strong G.M.N.H.	100.0	98.67	83.60	49.51	30.49	20.53
Generalized Bronar's Test	99.90	89.04	51.08	20.48	07.19	02.57
Porcentaje participantes violando GARP (Exp2)						
	$e^* = 1$	$e^* = 0.99$	$e^* = 0.98$	$e^* = 0.97$	$e^* = 0.96$	$e^* = 0.95$
Random money choice	99.91	83.82	31.63	07.39	01.57	00.31
Random goods choice	99.99	86.15	29.96	06.38	01.18	00.20
Random mixed choice	59.20	23.53	06.44	01.27	00.33	00.13
G.M.N.H.	100.0	91.55	44.75	13.09	03.44	00.78
Bronars' Test	99.93	84.92	33.52	08.10	01.87	00.35
Generalized money choice	99.99	97.34	75.39	45.15	26.05	16.86
Generalized goods choice	100.0	97.39	71.96	39.10	22.61	15.21
Generalized mixed choice	73.76	49.55	24.95	15.33	09.95	06.04
Strong G.M.N.H.	100.0	98.67	83.60	49.51	30.49	20.53
Generalized Bronar's Test	99.90	89.04	51.08	20.48	07.19	02.57

Tabla 3.9: Análisis de la sensibilidad: porcentaje de individuos inconsistentes con GARP(e).

La Tabla 3.9 muestra una elevada fiabilidad -muy próxima al 100%- de los tests no paramétricos utilizados en ambos experimentos. La probabilidad de que un individuo con comportamiento aleatorio sea inconsistente con la teoría neoclásica de la demanda se sitúa en torno al 0.99 (el

99 % de los individuos con comportamiento aleatorio mostraron un comportamiento inconsistente). Esta probabilidad es superior a la exhibida en otros experimentos. En efecto, Sippel (1997) obtiene una probabilidad igual a 0.61 en el primer experimento y 0.97 en el segundo. En un estudio similar, Mattei (2000) consideró 8 bienes y 20 situaciones presupuestarias diferentes obteniendo un test de Bronars igual a 0.99. Andreoni y Miller (2002) encuentran que el 78.1 % de los individuos de una población de 50000 consumidores aleatorios son inconsistentes con la teoría neoclásica de la demanda. Finalmente, Février y Visser (2004) y Cox (1997) obtienen en sus experimentos que la probabilidad de violar GARP sabiendo que el comportamiento de un consumidor es aleatorio es igual a 0.69 y a 0.49 respectivamente. Además, observamos cómo la generalización presentada en los diferentes modelos de comportamiento aleatorio de un consumidor proporciona unos tests más fiables que los diferentes modelos clásicos de comportamiento aleatorio considerados en anteriores experimentos.

Tras exponer el marco conceptual en que se desarrollaron los experimentos hemos encontrado una clara diferencia de comportamiento entre los estudiantes de economía y los de otras titulaciones. En los dos experimentos realizados observamos que el nivel de formación económica del alumnado está correlacionado negativamente con el número de alumnos que violan los diferentes axiomas de preferencia revelada. Además, cogimos que los alumnos con un mayor nivel de formación económica presentan un menor número de inconsistencias y un mayor grado de eficiencia en sus decisiones de consumo con la teoría neoclásica de la demanda, dado que éstos presentan en promedio un menor índice de Afriat y una menor norma del índice de Varian asociado a sus decisiones de consumo. Los resultados obtenidos, al igual que sucede en anteriores experimentos¹¹⁸ de la teoría del consumidor, muestran un comportamiento inconsistente con la teoría neoclásica de la demanda y, por tanto, no son muy favorables con la hipótesis de la maximización de la utilidad. El comportamiento observado es inconsistente en muchas ocasiones en el sentido de que viola los axiomas de la preferencia revelada y por consiguiente no se puede derivar de un comportamiento maximizador de la utilidad. El elevado porcentaje de participantes inconsistentes encontrado ha podido estar ocasionado por la existencia de errores de percepción. En efecto, como se ha señalado con anterioridad, los estudiantes de Economía, Administración de Empresas y Empresariales realizaron el segundo experimento al finalizar el primero. Por tanto, estos participantes tenían en ambos experimentos la misma motivación intrínseca y, aunque es comúnmente aceptada la relación existente entre la percepción y la motivación¹¹⁹, este aumento en el porcentaje de “participantes inconsistentes” muy probablemente esté ocasionado por la existencia del “efecto umbral” más que por la inexistencia de incentivos. Como señala McFadden (1999, 2001), muchas desviaciones del modelo estándar de los economistas están explicadas por la presencia de ilusiones cognitivas, ilusiones ópticas, discriminación

¹¹⁸Véanse los trabajos de Cox (1997), Sippel (1997), Mattei (2000), Harbaugh et. al. (2001), Andreoni y Miller (2002) y Février y Visser (2004), entre otros.

¹¹⁹La motivación es el elemento más activo en el proceso de compra de un individuo y constituye quizá la variable más importante del proceso de elección del consumidor, pues no sólo juega un papel primordial en el proceso de aprendizaje y comportamiento, sino en la regulación de la entrada de información. El afecto y la motivación son determinantes básicos de las actitudes y también influyen sobre las percepciones que alimentan el proceso de decisión de un consumidor.

de precios y errores en el procesamiento de la información. Esto sucede por las limitaciones¹²⁰ que padecemos los seres humanos para cada categoría de estímulos que percibimos con nuestros sentidos y por el componente heurístico presente en la toma de decisiones económicas.

También es posible afirmar que el elevado número de participantes inconsistentes¹²¹ ha podido estar ocasionado por la ausencia de incentivos económicos. Algunos autores señalan que los experimentos inconsistentes con la teoría podrían dar un resultado diferente si los incentivos fueran suficientes, y que la validez de cualquier procedimiento experimental requiere únicamente el supuesto de que los individuos siempre prefieren estrictamente un incremento de la recompensa media. Fundamentan esta afirmación diversos estudios realizados tanto con animales: diferentes experimentos sobre comportamiento animal¹²² realizados hace más de 50 años demostraron que la motivación estaba basada en la recompensa relativa o desaprovechada –el coste de oportunidad– y no en una escala absoluta de valores generada por el cerebro, como con personas: Breiter et al. (2001) observaron que el hemisferio derecho es predominantemente activo para las ganancias, y el izquierdo para las pérdidas; Thut et al. (1997) estudiaron el efecto de pagar a los sujetos, comparando la activación del cerebro bajo recompensas monetarias con la retroalimentación de un refuerzo “OK” en una tarea de elección dicotómica, en diferentes ámbitos. En esta línea, Binmore (1999) argumenta que los experimentos inconsistentes con la teoría de la utilidad esperada podrían dar un resultado diferente si los incentivos fueran suficientes. Este autor afirma que los incentivos deben ser suficientemente elevados para estimular el comportamiento racional y anular otras motivaciones que puedan influir directamente en su comportamiento. Smith (2005) señala que las comparaciones de preferencia por el riesgo bajo condiciones de riesgo monetario reducido y elevado han demostrado que los niveles reales de remuneración tienen un efecto estadísticamente significativo sobre la decisión, pero que las conclusiones cualitativas derivadas de las encuestas de respuesta basada en alternativas hipotéticas no son refutadas por aquellos estudios que utilizan riesgos muy elevados –las ganancias acumuladas equivalen, en promedio, al triple del coste de vida habitual de los sujetos¹²³.

Este argumento ha sido examinado (con desaprobación) por Bruno Frey y Reiner Eichenberger (1989) y (con aprobación) por Glenn Harrison (1989) entre otros. En una revisión bibliográfica sobre la influencia de los incentivos en los resultados experimentales, Camerer (1999) afirma que

¹²⁰La ley de Webber sostiene que es preciso un determinado nivel de variación en el estímulo para ser percibido, y que esta variación es proporcional a la cantidad inicial de estímulo. Por otra parte, la ley de Stevens estipula que la sensación crece como poder de la intensidad del estímulo; $\Psi = S^n$.

¹²¹Entre la población “general” (estudiantes universitarios) el porcentaje de “participantes inconsistentes” es superior al exhibido en otros experimentos.

¹²²David J. Zeaman (1949) da cuenta de experimentos en los que se entrenaron ratas para que corrieran motivadas por una gran recompensa. Cuando la recompensa se cambió por otra más pequeña, las ratas respondieron corriendo más lentamente de lo que lo habrían hecho de haberse enfrentado únicamente a la recompensa pequeña. Un grupo de control comenzó con una recompensa pequeña y luego se le puso una más grande, y estas ratas empezaron, inmediatamente, a correr más rápido de lo que lo hubieran hecho si sólo se hubiera utilizado la recompensa grande. Los monos respondieron de forma similar ante comparaciones realizadas sobre la base de recompensas diferentes.

¹²³Véanse los trabajos Kachelmeier y Shehata (1992) y Binswanger (1980) para resultados similares.

“The data show that incentives sometimes improve performance, but often don’t. This unsurprising conclusion implies that we should immediately push beyond debating the caricatured positions that incentives always help or never help”. Sin embargo, y a pesar de no haber utilizado ningún tipo de incentivo, hemos encontrado, entre los estudiantes de economía, un porcentaje de “participantes inconsistentes” similar a los resultados de otros experimentos de la literatura económica. No se puede afirmar rotundamente que el número de “participantes inconsistentes”, y el número de violaciones, hubiera sido menor si hubiésemos utilizado incentivos monetarios en la realización de nuestros experimentos, ya que siempre es posible sugerir que el comportamiento de un consumidor se aproximaría más al modelo maximizador de la utilidad si se aumentaran los incentivos. Pero, ¿cual debería ser el pago con el que debemos de incentivar a los participantes para eliminar todas estas anomalías? Smith (1982) propone para que los experimentos “funcionen” que exista un procedimiento de valor inducido en su diseño. Así, plantea una metodología de realización de experimentos donde los participantes muestren deseos de insaciabilidad, obtengan recompensas suficientemente altas y obvias, exista una restricción a la comunicación entre sujetos, etc. Sin embargo, admite que los preceptos anteriores no pueden garantizar ninguna correspondencia entre recompensas monetarias observables y preferencias que, en principio, no son “directamente observables”. La idea de que los preceptos de Smith funcionan es un clásico artículo de fe, que hasta ahora se ha sometido a muy poca investigación metodológica.

Referencias Bibliográficas

- [1] Afriat, S. (1973) On a System of Inequalities in Demand Analysis: An Extension of the Classical Method. *International Economic Review*, Vol. 14(2), págs. 460-472.
- [2] Andreoni, J. y J. Miller (2002) Giving According to GARP: An Experimental Test of the Consistency of Preferences for Altruism. *Econometrica*, Vol. 70(2), págs. 737-753.
- [3] Bechara, A.; Damasio, A.; Tranel, D. and Damasio, A. (1997) Deciding Advantageously Before Knowing the Advantageous Strategy. *Science*, Vol 275(5304), págs. 1203-1295.
- [4] Binmore, K. (1999) Why Experiment in Economics? *Economic Journal*, Vol. 109(2), F16-24.
- [5] Binswanger, H. (1980) Attitudes Toward Risk: Experimental Measurement in Rural India. *American Journal of Agricultural Economics*. August, Vol. 62(3), págs. 395-407.
- [6] Breiter, HC., I. Aharon, D. Kahneman, A. Dale y P. Shizgal (2001) Functional imaging of neural responses to expectancy and experience of monetary gains and losses. *Neuron*, Vol. 30, págs. 619-639.
- [7] Camerer, C. y H. Hogarth (1999) The Effects of Financial Incentives in Experiments: A Review and Capital-Labor-Production Framework. *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 19(1), págs. 7-42.

- [8] Carter, J. y M. Irons (1991) Are Economists Different, and If So, Why? *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 5(2), págs. 171-177.
- [9] Cox, J.C. (1997) On Testing the Utility Hypothesis. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1054-1078.
- [10] Février P. y M. Visser (2004) A Study of Consumer Behavior Using Laboratory Data. *Experimental Economics*, Vol. 7(1), págs. 93-114.
- [11] Fleissig, A.; Hall, A. y J. Seater (2000) GARP, Separability and the Representative Agent. *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 4, págs. 324-342.
- [12] Frank, R., Gilovich, T., Regan, D. (1993) Does Studying Economics Inhibit Cooperation? *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 7(2), págs. 159-171.
- [13] Green, D.; Jacowitz, K.; Kahneman, D. y McFadden, D. (1998) Referendum Contingent Valuation, Anchoring, and Willingness to Pay for Public Goods. *Resource and Energy Economics*, Vol. 20(2), págs. 85-116.
- [14] Harbaugh, W., Krause K. y Berry, T. (2001) GARP for Kids: On the Development of Rational Choice Behavior. *American Economic Review*, Vol. 91(5), págs. 1539-1545.
- [15] Harrison, G. (1989) Theory and Misbehavior of First-Price Auctions. *American Economic Review*, Vol. 79(4), págs. 749-762.
- [16] Hurd, M; Merrill, A. y McFadden, D. (1998) Consumption and Savings Balances of the Elderly: Experimental Evidence on Survey Response, en Wise, D. (eds.), *Frontiers in the economics in aging*. University of Chicago Press, Chicago, págs 353-387.
- [17] Kachelmeier, S. y Shehata, M. (1992) Examining Risk Preferences under High Monetary Incentives: Evidence from the People's Republic of China. *American Economic Review*, Vol. 82(5), págs. 1120-41.
- [18] Kantowitz, Roediger y Elmes (2001). *Psicología experimental*. Thomson-Paraninfo, México.
- [19] Koo, A. (1972) Revealed Preference-A Structural Analysis. *Econometrica*, Vol. 39(1), págs. 89-97. [Spanish Translation: Preferencia revelada: un análisis estructural. *Revista Española de Economía*, Vol. 4(2), págs. 381-398.]
- [20] Marwell, G. y R. Ames (1981) Economists Free Ride, Does Anyone Else? *Journal of Public Economics*, Vol. 15, págs. 295-310.
- [21] Mattei, A. (2000) Full-Scale Real Tests of Consumer Behavior Using Experimental Data. *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 43, págs. 487-497.

- [22] McFadden, D. (1999) Rationality for Economists? *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol. 19(1-3), págs. 73-105.
- [23] McFadden, D. (2001) Economic Choices. *American Economic Review*, Vol. 91(3), págs. 351-378.
- [24] Rubinstein, A. (2005) A Skeptic's Comment on the Study of Economics. Working Paper (<http://www.arielrubinstein.tau.ac.il>)
- [25] Sippel, R. (1997) An Experiment On The Pure Theory Of Consumer's Behaviour. *The Economic Journal*, Vol. 107, págs. 1431-44.
- [26] Smith, V. (1982) Microeconomic Systems as an Experimental Science. *American Economic Review*, Vol. 72(5), págs. 923-955.
- [27] Smith, V. (2003) Constructivist and Ecological Rationality in Economics. *American Economic Review*, vol. 93(3), págs. 465-508.
- [28] Smith, V. (2005) Racionalidad constructivista y ecológica en economía. *Revista Asturiana de Economía*, Vol. 32, págs. 198-273. Conferencia impartida durante la entrega del Premio Nobel de Economía en el año 2002 (Fundación Nobel 2002, <http://www.nobelprize.org>).
- [29] Swofford, J. y G. Whitney (1994) A Revealed Preference Test for Weakly Separable Utility Maximization with Incomplete Adjustment. *Journal of Econometrics*, Vol. 60(1-2), págs. 235-249.
- [30] Thut, G., W. Schultz, U. Roelcke et al. (1997) Activation of the human brain by monetary reward. *NeuroReport*, Vol. 8, págs. 1225-1228.
- [31] Tversky, A. y Kahneman, D. (1974) Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, Vol. 85, págs. 1124-1131.
- [32] Zeaman, D. (1949) Response Latency as a Function of the Amount of Reinforcement. *Experimental Psychology*, Vol. 39, págs. 466-483.

Conclusión y líneas de investigaciones futuras

En el capítulo 3 hemos analizado la utilidad de la preferencia revelada en el análisis empírico del comportamiento de un consumidor. Hemos comenzado el capítulo –sección 3.1– realizando una amplia revisión de los diferentes tests no paramétricos que permiten analizar la consistencia de las decisiones de consumo de un individuo con algún índice de utilidad. En la sección 3.2 hemos realizado un análisis sobre la operatividad de la teoría de la preferencia revelada, extendiendo los análisis efectuados por Koo (1971) y Wakker (1997). En esta sección hemos presentado una nueva caracterización del Axioma Generalizado de la Preferencia Revelada en términos de la relación de preferencia revelada S y hemos proporcionado dos nuevas medidas de la bondad del ajuste del modelo de maximización de la utilidad. En la sección 3.3 de esta memoria hemos abordado la cuestión de la fiabilidad de los test de la preferencia revelada. En esta sección hemos presentado cuatro nuevos *modelos generalizados de comportamiento aleatorio* y hemos realizado un experimento de Monte Carlo en el que hemos mostrado que nuestros modelos generalizados de comportamiento presentan una fiabilidad superior a la exhibida por tests tradicionales de Bronars (1987) y los modelos de comportamiento aleatorio de Battalio, Dwyer y Kagel (1987) –que se suelen utilizar en los experimentos económicos de la teoría pura del consumidor– y, en consecuencia, creemos que son útiles en el diseño de cualquier experimento económico de la teoría pura del consumidor. En relación con la fiabilidad, vale destacar que en los últimos años Andreoni y Harbaugh (2006) han proporcionado un valioso procedimiento para predecir la potencia de la regla de decisión para individuos cuyo comportamiento no es aleatorio. Este autor define un nuevo concepto H-GARP(g) que permite analizar la potencia o sensibilidad de los tests de la preferencia revelada¹²⁴. Así, y dado que este concepto puede considerarse como una noción invertida de la aproximación a la eficiencia en el consumo de Afriat (1972, 1973) y Varian (1987, 1990), la aproximación a la eficiencia en el consumo que hemos realizado en el capítulo 2 –junto con la sección 3.2 en la que hemos analizado la operatividad de la teoría de la preferencia revelada– será la base para intentar en un futuro desarrollar nuevos índices para analizar la potencia y fiabilidad de los distintos tests no paramétricos de la preferencia revelada. En la sección 3.4 hemos realizado una breve revisión histórica sobre la Economía Experimental en el ámbito de la teoría clásica de la demanda. Finalmente, y dado que la Economía Experimental permite reproducir las cales del modelo teórico del comportamiento optimizador de un consumidor, en la sección 3.5 hemos presentado los resultados de dos experimentos económicos de la teoría neoclásica de la demanda que determinan la existencia de una correlación positiva entre el nivel de formación económica de un individuo y el grado de coherencia de sus decisiones de consumo.

Los resultados experimentales de Kahneman y Amos Tversky han tenido una especial influencia a la hora de obligar a los economistas a replantearse el modelo estándar [v., p. ej., Tversky y Kahneman (1974, 1981), Kahneman y Tversky (1979, 1984)]. Está ampliamente aceptada en la

¹²⁴La serie finita de datos de demanda $\{(\bar{p}_t, \bar{x}_t)\}_{t=1}^n$ satisface H-GARP(g) si para todo par de observaciones i, j se cumple: $\bar{x}_i \bar{R}(g) \bar{x}_j$ entonces $g\bar{p}_j \bar{x}_j \leq \bar{p}_i \bar{x}_i$, para $g \geq 1$.

comunidad científica la visión contemporánea de la teoría de la elección, donde factores como el entorno (entorno económico, culturas, grupos de referencia, familia, influencias personales y determinantes situacionales), el aprendizaje, la experiencia y los diferentes procesos psicológicos o cognitivos (percepción, actitudes, motivación, memoria, etc.) inciden de manera directa en las decisiones económicas de un individuo. Las variables psicológicas intervienen en la transformación de los factores ambientales en factores endógenos del comportamiento de compra, y junto con la información y las elecciones previas –que operan a través de la experiencia y de la memoria– proporcionan un contexto para el problema actual de la decisión, cuyos resultados van a influir, a su vez, en los problemas futuros de decisión. Por ello, para comprender las preferencias, pensamos que es necesario tratar de comprender y conocer tanto la componente heurística o conductual –que se manifiesta en mayor medida en las elecciones de un nivel bajo de complejidad– presente en cualquier proceso de elección como los mecanismos y procesos que subyacen a las reacciones de cualquier consumidor ante los estímulos y las reacciones comerciales, a partir del papel que juegan las variables psicológicas (p.ej., la motivación, la emoción, la atención, la percepción, la memoria, el aprendizaje). La estimación y la maximización de la utilidad que realizan los economistas se reduce a uno de los muchos factores del entorno de la toma de decisiones, con una influencia que a menudo queda invalidada por efectos contextuales, emoción y errores en la percepción y el juicio [v., p.ej., Ola Svenson (1979), Tommy Garling (1992); George Lowenstein (1996), entre otros]. Esta realidad nos obliga a prestar especial atención a otras áreas de conocimiento (Psicología cognitiva, Psicología conductual, Sociología, etc.) que analizan el proceso de elección de un individuo.

El comportamiento del consumidor es, por tanto, un fenómeno complejo que resulta de la interacción entre, por un lado: el conocimiento completo de sus propios deseos, de todos los productos disponibles en el mercado y de su capacidad. Los economistas necesitamos ir más allá de las descripciones clásicas del comportamiento de elección e implicarnos más en experimentos económicos y de investigación de mercado que permitan explorar directamente la naturaleza de los procesos económicos de decisión. Para ello será de vital importancia desarrollar una importante interacción de carácter interdisciplinar y establecer líneas de trabajo y colaboración conjunta con los investigadores del ámbito de la Economía Experimental en aras a investigar los problemas relacionados con la adquisición y respuestas de consumo en general puesto que para comprender las preferencias de un individuo pensamos que es necesario entender y los distintos fenómenos psicológicos que influyen en la toma de decisiones económicas. El desarrollo realizado en esta memoria sobre la aproximación no paramétrica a la eficiencia en el consumo nos proporciona la base económica y matemática necesaria para llevar a cabo experimentos (en el ámbito de la Economía Experimental, Investigación de mercados, Marketing, etc.) que exploren directamente la naturaleza de los procesos económicos de decisión y en la que también serán de vital importancia las aportaciones de la Psicología económica (psicobiológica, psicoanalítica, cognitiva, psicosocial y conductual) dedicadas explicar la conducta humana en la toma de decisiones económicas en aras a intentar mejorar tanto la comprensión del comportamiento y la conducta de los agentes económicos como de los diferentes fenómenos cognitivos que, identificados por los psicólogos cognitivos y los economistas conductuales parecen influir

en el proceso cognitivo de toma de decisiones económicas. La base experimental será de vital importancia para que la retroalimentación desde la economía experimental hasta la teoría económica y seguir formando, en un futuro próximo, la base para el análisis microeconómico del comportamiento del consumidor y de las consecuencias de la política económica. En lugar de concluir que son irracionales, habría que preguntarse por qué, reexaminar las hipótesis mantenidas incluyendo todos los aspectos de los experimentos –procedimientos, resultados, contexto, instrucciones, etc.– y preguntarse hasta qué punto nuevos conceptos o diseños experimentales podrían ayudarnos a comprender mejor el comportamiento.

Glosario Terminológico

A

ACCESIBILIDAD. Término que se refiere a la propiedad que caracteriza a un tipo de pensamiento intuitivo que viene a la mente de forma espontánea como consecuencia de la existencia de estímulos relevantes y llamativos desde una perspectiva motivacional y emocional. Las situaciones “calientes” de gran excitación emocional y motivacional aumentan en gran medida la accesibilidad de pensamientos que se relacionan con las emociones inmediatas y las necesidades actuales, y reducen la accesibilidad de otro tipo de pensamientos. Este hecho ha sido profusamente utilizado tanto por los directores de marketing como por los publicistas en el diseño de vallas publicitarias. Las vallas publicitarias son útiles para los anunciantes debido a que el hecho de que se preste atención a un objeto hace que todas sus características sean accesibles, incluyendo aquéllas que no

están vinculadas a su significado emocional o motivacional básico. *Véase* Fenómeno cognitivo.

ACTITUD. Término que se refiere a la predisposición aprendida para responder consistentemente de modo favorable o desfavorable a un objeto o clase de objetos. En las teorías psicológicas del proceso de elección las actitudes desempeñan una función principal en la determinación del modo en que los consumidores definen la tarea de toma de decisiones. Como indican Kahneman et al. (1997) a menudo las decisiones de la gente expresan evaluaciones afectivas (actitudes) que no se ajustan a la lógica de las preferencias económicas. Por ello, para comprender las preferencias, es posible que haya que entender cómo afectan los diferentes factores psicológicos al proceso de elección de un consumidor y entender la psicología de las emociones. Kahneman (2003) muestra cómo algunas elecciones no son lo suficientemente

sensibles a las variaciones de la cantidad y los costes –y se describen mejor como expresiones de una respuesta afectiva que como preferencias económicas. La actitud considerada como la valoración positiva o negativa de las consecuencias de comprar y usar una marca o producto concretos, viene determinada, en parte, por la experiencia y el aprendizaje. Véase Fenómeno cognitivo.

Referencias: (1) Kahneman, D. (1997) *Economist Have Preferences, Psychologists Have Attitudes*. Presentación invitada al NFS Symposium on Preference Elicitation, Berkeley, CA. (2) Kahneman, D. (2003) *Maps of bounded rationality: Psychology for Behavioral Economics*. *The American Economic Review*, vol. 93(5), págs. 1449-1475.

ÁLGEBRA BOOLEANA (o álgebra de Boole). El álgebra de Boole es una estructura distributiva definida sobre un conjunto parcialmente ordenado de tipo especial (retículo distributivo) que tiene el elemento máximo 1 (unidad del Álgebra booleana) y el elemento mínimo 0 (cero del Álgebra booleana) y que comprende, junto con todo su elemento x su complemento, el elemento Cx , que satisface las relaciones

$$\sup\{x, Cx\} = 1, \quad \inf\{x, Cx\} = 0$$

las operaciones *sup* e *inf* suelen designarse con los símbolos \vee y \wedge , a veces, \cup e \cap , lo que subraya su semejanza con las operaciones de unión e intersección de la teoría de los conjuntos. Véase Retículo.

ALGORITMO. Conjunto finito de reglas que dan una secuencia de operaciones para resolver un problema específico. || Procedimiento computacional bien definido, junto con un conjunto de datos de entrada permitidos, que produce un valor o conjunto de valores como sa-

lida. || **Algoritmo iterativo.** Algoritmo recurrente que realiza en cierto espacio topológico X , una sucesión de aplicaciones de conjuntos de puntos $\Delta_k : X \rightarrow X$ con cuya ayuda, valiéndose del punto inicial $x_0 \in X$ se calcula la sucesión de puntos $x_k \in X$ según las fórmulas $x_{k+1} = A_k x_k$, $k = 0, 1 \dots$. La operación anterior se llama iteración y la sucesión $\{x_k\}$, sucesión iterativa. Véase Complejidad computacional.

Referencias: (1) Aho, A.; Hopcroft, J. y Ullman, J. (1974) *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Reading, MA: Addison-Wesley. (2) Brassard, G. y Bratley, P. (1995) *Fundamentals of Algorithmics*. Englewood Cliffs, NY: Prentice Hall. (3) Greene, D. y Knuth, D. (1990) *Mathematics for The Analysis of Algorithms*, 3rd ed. Boston: Birkhäuser. (4) Knuth, D. (1973) *The Art of Computer Programming*, Vols. 1,2 y 3, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley. (5) Sedgewick, R. (1984) *Algorithms*. Inc., USA: Addison Wesley.

ANCLAJE. Fenómeno cognitivo presente en el proceso de elección de un individuo que se produce cuando las respuestas son dirigidas hacia entradas numéricas incluso cuando son poco informativas [v. Tversky y Kahneman (1974)]; esto es, cuando las respuestas se ven influenciadas por indicaciones contenidas en la pregunta. Los experimentos realizados por Hurd et al. (1998) muestran que los efectos del anclaje son notables y estadísticamente significativos y, además, que el fenómeno del anclaje puede introducir un sesgo de respuesta que, si no se reconoce, podría alterar gravemente el análisis de política económica e incluso provocar desviaciones en el modelo estándar del comportamiento de un individuo. Una explicación psicológica para el anclaje es que un valor crea en la mente del sujeto, al menos temporalmente, la posibilidad de que la magni-

tud incierta pudiera situarse bien por encima o por debajo del valor citado. Esto podría ser el resultado de errores clásicos de discriminación psicofísica o de un proceso cognitivo en el que el sujeto trata la cuestión como un problema y busca un marco apropiado para “construir” una solución correcta. Véase Fenómeno cognitivo.

Referencias: (1) Hurd, M.; Merrill, A. y McFadden D. (1998) Consumption and Savings Balances of the Elderly: Experimental Evidence on Survey Response, en Wise, D. (eds.), *Frontiers in the economics of aging*, University of Chicago Press, Chicago, págs 353-387. (2) Tversky, A. y Kahneman, D. (1974) Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases, *Science*, vol. 185, págs. 1124-1131.

APLICACIÓN MULTIFORME o correspondencia. Dícese de una aplicación $\Gamma : X \rightarrow Y$ que a todo elemento x del conjunto X le asigna cierto subconjunto $\Gamma(x)$ de un conjunto Y . Si para cada $x \in X$ el conjunto $\Gamma(x)$ consta de un sólo elemento, la aplicación Γ se llama uniforme o unívoca. La aplicación multiforme Γ puede interpretarse como la aplicación uniforme de X en 2^Y ; es decir en el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto Y .

|| **Aplicación multiforme continua.** Dícese de la aplicación multiforme que es a la vez semicontinua superior e inferior. || **Aplicación multiforme semicontinua inferior.** Dícese de la aplicación multiforme $\Gamma : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X e Y tal que para todo conjunto abierto $U \subset Y$ el conjunto $\Gamma^-(u) = \{x \in X : \Gamma(x) \subset U, \Gamma(x) \cap U \neq \emptyset\}$ es abierto en X . || **Aplicación multiforme semicontinua superior.** Dícese de la aplicación multiforme $\Gamma : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X e Y tal que para todo conjunto abierto $V \subset Y$ el conjunto $\Gamma^+(u) = \{x \in X : \Gamma(x) \subset V, \Gamma(x) \neq \emptyset\}$ es abierto en X .

APLICACIÓN PROYECCIÓN. Dícese de una aplicación $p_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ definida por $p_i(x) = x(i) = x_i, \forall x \in \prod_{i \in I} X_i$ donde $\{X_i\}_{i \in I}$ es cualquier familia de conjuntos. Si $\prod_{i \in I} X_i$ es un producto cartesiano cualquiera y $j \in I$, la aplicación $p_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ tal que $\alpha \mapsto \alpha(j)$ se denomina la proyección de $\prod_{i \in I} X_i$ en el factor X_j . Una aplicación $\varphi : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ da lugar a una familia de aplicaciones $\varphi_j : X \rightarrow X_j, j \in I$, donde $\varphi_j = p_j \varphi$. Recíprocamente, si $\{X \xrightarrow{\varphi_j} X_j\}_{j \in I}$ es una familia de aplicaciones, existe una única aplicación $\varphi : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ tal que $\varphi_j = p_j \varphi$.

APROXIMACIÓN PARAMÉTRICA. La aproximación paramétrica es una técnica utilizada dentro del ámbito de la econometría aplicada para descubrir las relaciones matemáticas entre variables empíricas observadas. En la aproximación paramétrica se determina una forma funcional a priori con una serie de parámetros que son posteriormente estimados. Sin embargo, como ha sido mencionado en la literatura, la elección discrecional de una determinada relación funcional puede originar efectos significativos sobre los resultados de valoración obtenidos a partir de una misma muestra.

APROXIMACIÓN NO-PARAMÉTRICA. La aproximación no-paramétrica es una técnica tradicionalmente empleada en econometría para descubrir relaciones matemáticas entre variables empíricas observadas. La principal ventaja que presenta, respecto de la paramétrica, es no asumir a priori ninguna forma funcional inicial, permitiendo que la relación entre variables quede determinada por el conjunto de datos disponible. A pesar de esta mayor flexibilidad funcional, las técnicas no-paramétricas se caracterizan por mostrar una

mayor complejidad analítica a medida que se incrementa el tamaño muestral.

APROXIMACIÓN SEMIPARAMÉTRICA. La aproximación semiparamétrica es una técnica comúnmente empleada en el ámbito científico para descubrir relaciones matemáticas entre variables empíricas observadas se pueden agrupar en tres aproximaciones alternativas. Los métodos de estimación semiparamétricos no asumen una única forma funcional y permiten incorporar con mayor facilidad variables explicativas [v. Bishop (1995), Horowitz (1999)]. Su complejidad no suele aumentar al incrementar el tamaño muestral. Esta técnica de estimación busca combinar las ventajas de los métodos paramétricos y no-paramétricos. Su principal inconveniente se centra en una mayor complejidad analítica respecto a las tradicionales técnicas paramétricas.

Referencias: (1) Bishop, C. (1995) Neural Networks for pattern Recognition. Oxford University Press. (2) Horowitz, J. (1998) Semiparametric Methods in Econometrics. New York: Springer.

AXIOMA DE LA ELECCIÓN. El axioma de la elección establece que para toda familia F de conjuntos no vacíos existe una función f tal que, para cualquier conjunto S de \mathfrak{S} tiene lugar $f(S) \in S$ (además, f se denomina función de elección en \mathfrak{S}). || Este axioma también postula que el producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es un conjunto no vacío. Esto es, si I es un conjunto no vacío y X_i es un conjunto no vacío para todo $i \in I$, entonces existe una función de elección α para la familia $\{X_i\}_{i \in I}$. Véase Lema de Zorn.

AXIOMA DE ZERMELO. Axioma de elección para una familia arbitraria (no obligatoriamente disyunta) de conjuntos.

B

BOOTSTRAPPING. El Bootstrapping es una técnica que se utiliza habitualmente en econometría aplicada para obtener una descripción de las propiedades en el muestreo de los estimadores empíricos usando la muestra de datos. Esta técnica fue desarrollada por Efron (1979, 1982).

Referencias: (1) Efron, B. (1979) Bootstrapping Methods: Another Look at the Jackknife. *Annals of Statistics*, Vol. 7, págs. 1-26. (2) Efron, B. (1982). The jackknife, the bootstrap, and other re-sampling plans. *Society of Industrial and Applied Mathematics CBMS-NSF Monographs*, 38. (3) Efron, B. y R. Tibshirani (1993) *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman and Hall.

C

CADENA. Término matemático que indica a un subconjunto C de X parcialmente ordenado inducido por el orden de X , en el cual no hay elementos incomparables; es decir, $C \subseteq X$ es una cadena si $x \leq y$ o bien $y \leq x$, para todo par $\{x, y\} \subseteq C$. Véase Orden parcial.

CICLO en un grafo dirigido. Secuencia de vértices v_1, \dots, v_k , no necesariamente distintos unidos por una arista, donde $v_1 = v_k$. Un ciclo se dice que es de tamaño n si está formado por n vértices distintos. Si \succeq es la relación binaria que representa un grafo dirigido finito, $G = (V, E)$, diremos que esta relación binaria definida sobre un conjunto finito de opciones X tiene ciclos de orden $m \in \mathbb{N}$ si y solamente si existen $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $x_1 \succeq x_2 \wedge \dots \wedge x_{m-1} \succeq x_m \wedge x_m \succeq x_1$. || **Ciclo irreducible o minimal.** Dícese del ci-

clo que no posee subciclos propios. || **Ciclo de orden n o n -ciclo.** Dícese del ciclo de tamaño n . Véase Grafo dirigido.

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE UN ALGORITMO. La complejidad computacional de un algoritmo indica el tiempo que requiere un algoritmo para su ejecución. El cálculo de la complejidad temporal de un algoritmo se realiza en función del tamaño del problema. Si $f : N \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es la función que indica cuanto tarda en ejecutarse un algoritmo, entonces $f(n)$ denota el tiempo cuando el tamaño de los datos iniciales es n . Así pues, la complejidad computacional de un algoritmo es el número de pasos que lleva resolver dicho algoritmo a partir del tamaño de los datos iniciales.

El número exacto de pasos depende de la máquina en la que se implementa, del lenguaje utilizado y de otros factores. Para no tener que hablar del costo exacto de un cálculo se hace un estudio de $f(n)$ para valores de n suficientemente grandes, lo cual se denomina análisis asintótico. Para poder realizar dicho estudio se requiere de la utilización de las notaciones asintóticas, las cuales establecen unas cotas superiores e inferiores del tiempo de ejecución de un algoritmo: $\mathcal{O}(\cdot)$ que da una cota superior, $\Omega(\cdot)$ que proporciona una cota inferior y la notación $\Theta(\cdot)$ que establece, simultáneamente, una cota inferior y superior. El conjunto $\mathcal{O}(f(n)) = \{g : N \rightarrow \mathbb{R}_+ : \exists c \in \mathbb{R}_+, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 g(n) \leq cf(n)\}$ define un orden de complejidad y se escogerá, como representante, la función $f(n)$ más sencilla posible dentro del mismo. De esta forma se tiene, por ejemplo, que $\mathcal{O}(n)$ representa el orden de complejidad lineal, $\mathcal{O}(n^2)$ el de complejidad cuadrática y $\mathcal{O}(1)$ el de las funciones constantes.

Las funciones de complejidad más usuales ordenadas de mayor a menor eficiencia (o de menor a mayor complejidad) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) &\subset \mathcal{O}(\log n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^2) \\ &\subset \mathcal{O}(n^k) \subset \mathcal{O}(2^n) \subset \mathcal{O}(n!) \end{aligned}$$

Las dos últimas complejidades forman parte de las complejidades no polinómicas o intratables, mientras el resto pertenecen al grupo de las complejidades polinómicas. || **Complejidad exponencial.** Cualquier algoritmo que no pueda ser acotado por una función polinomial, se conoce como exponencial. En general, los algoritmos polinomiales se consideran eficientes, mientras que los exponenciales se consideran ineficientes. || **Complejidad polinomial.** Cualquier algoritmo que se pueda resolver en un tiempo acotado por un polinomio sobre la longitud de la entrada. En otros términos, si su peor caso de ejecución es de orden $\mathcal{O}(n^k)$, donde n es el tamaño de la entrada y k es una constante.

Referencias: (1) Cooper, S.; Slaman, T. y Wainer, S. (1996). *Computability, Enumerability, Unsolvability: Directions in Recursion Theory*. New York: Cambridge University Press. (2) Du, D. y Ko, K. (2000) *Theory of Computational Complexity*. Wiley. (3) Garey, M. y D. Johnson (1979) *Computers and Intractability: A Guide to Theory of NP-completeness*. New York: W.H. Freeman. (4) Karp, R. (1972) *Reducibility Among Combinatorial Problems*, en *Complexity of Computer Computations*, edited by R. Miller and J. Thatcher (eds.), New York: Plenum Press, págs. 85-103. (4) Papadimitriou, Christos H. (1994) *Computational Complexity*. Addison-Wesley. (5) Sipser, M. (2006) *Time Complexity Introduction to the Theory of Computation* (2nd edition). New York: Thomsom.

COMPLEJIDAD DEL CÁLCULO de un algoritmo. La complejidad del cálculo de un algoritmo es una función que estima numéricamente la dificultad (voluminosidad) de los procesos de aplicación de un algoritmo a los datos iniciales. Para especificar la complejidad del cálculo algorítmica se emplea la noción de función señalizadora (o simplemente señalizadora), es decir, una función que se prefija con la razón decidible entre los objetos de aplicación del algoritmo y los números naturales y que tiene un campo de definición coincidente con el dominio de aplicación del algoritmo.

CONJUNTO ORDENADO. Conjunto no vacío sobre el que se tiene definida una relación de orden. Un conjunto ordenado es un par (X, \succeq) donde X es un conjunto y \succeq una relación binaria definida sobre X reflexiva, simétrica, transitiva y completa.

CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO. Conjunto no vacío sobre el cual se ha fijado un orden parcial. Un conjunto parcialmente ordenado es un par (X, \succeq) donde X es un conjunto y \succeq una relación binaria definida sobre X reflexiva, simétrica y transitiva. Los retículos y las álgebras booleanas son variedades especiales de los conjuntos parcialmente ordenados.

CONTEXTO. Fenómeno cognitivo que puede influir de manera directa en las decisiones de consumo de un individuo como consecuencia del hecho de que las preguntas previas y la interacción con el entrevistador influyen en la percepción. La variación de los resultados observados [v. Smith (2003)] ante cambios sistemáticos en las instrucciones diseñados para modificar el contexto muestra claramente la influencia del contexto en la toma de decisiones económicas. Véase Fenómeno Cognitivo.

Referencias: (1) McFadden, D. (1999) Rationality for Economists? *Journal of Risk and Uncertainty*, vol. 19(1-3), págs. 73-105. (2) Smith, V. (2003) Constructivist and Ecological Rationality in Economics. *The American Economic Review*, vol. 93(3), págs. 465-508. [Traducción Española: Racionalidad constructivista y ecológica en economía. *Revista Asturiana de Economía*, vol. 32].

D

DATOS DE PANEL. Dícese de un conjunto de datos que combina series temporales con unidades de sección cruzada o de corte transversal (países, regiones, empresas, hogares, etc.). Entre las ventajas de utilizar los datos de panel en estudios de econometría aplicada se encuentran el control sobre la heterogeneidad individual; más variabilidad, menos colinealidad entre las variables, más grados de libertad y mayor eficiencia; mejor adecuación al estudio de las dinámicas de ajuste; mejor capacidad de identificar y medir efectos que no son detectables en datos puros de sección cruzada o de series temporales y también mejor capacidad de análisis en comportamientos más complicados. Como desventajas, los datos de panel presentan el problema de recolección de datos, distorsiones por errores de medida y la corta dimensión temporal que se tiene generalmente en los conjuntos de datos.

Referencias: (1) Arellano, M. (2003) *Panel Data Econometrics*. *Advanced Texts in Econometrics*. Oxford Press. (2) Baltagi, B. (2001) *Econometric Analysis of Panel Data*. 2nd Edition. Wiley.

DENSIDAD DE PROBABILIDAD o FUNCIÓN DE DENSIDAD. La densidad de probabilidad es la derivada de una función de distribución que responde a una medida de

probabilidad absolutamente continua. Sea X un vector aleatorio que toma valores en un espacio euclídeano n -dimensional \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) y $F(x_1, \dots, x_n)$ su función de distribución, y supongamos que existe una función no negativa $f(x_1, \dots, x_n)$ tal que

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_n$$

para todos los x_1, \dots, x_n reales. Entonces $f(x_1, \dots, x_n)$ se llama densidad de probabilidad de un vector aleatorio X y para todo conjunto boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$

$$P\{x \in A\} = \int_A \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Toda función integrable no negativa $f(x_1, \dots, x_n)$ que satisface la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

es la densidad de probabilidad de cierto vector aleatorio.

DEPENDENCIA DE LA REFERENCIA. Fenómeno cognitivo presente en el proceso de elección de un consumidor. Este fenómeno ocurre cuando las respuestas se ven influenciadas por la dependencia de la referencia y suele aparecer en situaciones de compra con incertidumbre donde las pérdidas se valoran por encima de los costes de oportunidad. La aversión a las pérdidas contribuye también al muy documentado sesgo del estatu quo y, debido a que el punto de referencia es generalmente el estatu quo, las propiedades de las demás alternativas se evalúan viendo si son ventajosas o desventajosas respecto a la situación actual, y las desventajas de las alternativas pesan más que sus ventajas. Véase Fenómeno cognitivo.

DISTRIBUCIÓN “JI-CUADRADO” o χ^2 . La distribución χ^2 es una distribución continua de probabilidades, concentrada en el semieje positivo $(0, \infty)$, con una densidad

$$p(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1}$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es una función gamma, en tanto que el parámetro expresado por el entero positivo n se llama número de grados de libertad. Véase Función gamma.

DISTRIBUCIÓN LOGARÍTMICO NORMAL. La distribución logarítmico normal, también conocida como distribución log-normal, es una distribución continua, concentrada en $(0, \infty)$, de las probabilidades de densidad

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\log e}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\log x - a)^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

donde $-\infty < a < \infty$, $\sigma^2 > 0$. La variable aleatoria con la función de densidad anterior obedece a una distribución logarítmicamente normal si su logaritmo $\log X$ tiene distribución normal con parámetros a y $\sigma^2 > 0$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL. La distribución normal es una distribución de probabilidades de una variable aleatoria X se denomina normal si se tiene la densidad de probabilidad

$$p(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

La definición general de una distribución normal se reduce al caso unidimensional. La familia de las distribuciones normales depende de 2 parámetros, la media, μ , y la varianza, $\sigma^2 > 0$, que es mayor que cero. La esperanza matemática

tica de X es igual a μ y la varianza de X es igual a σ^2 .

DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIDIMENSIONAL. La distribución de un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ en \mathbb{R}^n o la distribución conjunta de variables aleatorias X_1, \dots, X_n se denomina distribución normal (normal multidimensional) si para cualquier $t \in \mathbb{R}^n$ fijo el producto escalar (t, x) tiene distribución normal o es igual a una constante (como a veces se suele decir, tiene distribución normal con varianza nula).

DISTRIBUCIÓN UNIFORME. Nombre genérico de la clase de distribuciones de probabilidades que surge al extender la idea de “equiprobabilidad de los resultados” a un caso continuo.

DISTRIBUCIÓN UNIFORME EN EL SEGMENTO DE UNA RECTA NUMÉRICA (distribución rectangular). La distribución uniforme en cualquier segmento $[a, b]$, $a < b$, es una distribución de probabilidades que tiene densidad

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

El concepto de distribución uniforme en $[a, b]$ corresponde a la idea de elegir al azar, un punto en dicho segmento. Una variable con distribución uniforme en $(0, 1)$ puede ser construida partiendo de una sucesión de variables aleatorias independientes X_1, X_2, \dots que adoptan valores de 0 y 1 con probabilidades $1/2$, suponiendo que

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot 2^{-n}$$

donde X_n son las cifras del desarrollo binario de X . El número aleatorio X posee distribución uniforme en el segmento $(0, 1)$. Este hecho tiene aplicaciones estadísticas importantes. Véase Generador de números (pseudo) aleatorios.

DOBLE CIEGO. Técnica experimental en la que ni el sujeto ni el investigador saben en qué condiciones de tratamiento están los participantes. En algunos estudios de psicología y economía experimental el tratamiento del doble ciego es la mejor manera de eliminar el posible efecto del experimentador.

E

ECONOMÍA COMPUTACIONAL. La Economía Computacional es una rama de la computación científica (ciencia computacional) basada en la construcción de modelos matemáticos y técnicas numéricas para resolver problemas económicos. Esta rama de la Economía ha contribuido en los últimos años al desarrollo de la ciencia económica en áreas como la teoría del equilibrio general, la teoría de juegos, las finanzas, la macroeconomía, la optimización estática y dinámica, el crecimiento económico, la econometría y el comercio internacional, entre otras.

ECONOMÍA DEL COMPORTAMIENTO. La Economía del Comportamiento es una rama importante dentro de la Economía Experimental que estudia las elecciones realizadas por un individuo, los fundamentos psicológicos de la economía y cómo los principios psicológicos pueden aplicarse a las decisiones económicas. Esta rama de la Ciencia Económica muestra cómo los modelos basados en la teoría de la elección racional pueden mejorarse utilizando

regularidades psicológicas que sugieren nuevos supuestos que permitan caracterizar mejor cómo piensan, aprenden y se comportan las personas. El objetivo de la Economía del Comportamiento es proporcionar una mejor comprensión del comportamiento económico y aumentar el poder explicativo de la ciencia económica considerando las características cognitivas de las personas, sus motivaciones, su aprendizaje, sus emociones, así como otros aspectos psicológicos. Véase Economía Experimental.

ECONOMÍA EXPERIMENTAL. La Economía Experimental es una rama de la economía que emplea las técnicas de experimentación en un laboratorio para comprobar teorías, entornos, instituciones, evaluar políticas o para proporcionar una base de datos con explicaciones de comportamiento. La Economía Experimental ha alcanzado en los últimos cuarenta años un nivel de “normalización” que en la actualidad la equipara a otras ramas de la Economía como la Macroeconomía, la Microeconomía, la Econometría o las Finanzas. Frente al método tradicional en el que las teorías se contrastan a partir de la observación del comportamiento de la economía real, la experimentación económica permite analizar las proposiciones teóricas en el marco de un laboratorio, aproximando la economía a las ciencias naturales.

La Economía Experimental trabaja de forma operativa con el núcleo del análisis económico – la relación existente entre teoría y observación – y desde este núcleo la extensión de todas las áreas de la economía aplicada se hace de forma natural e inmediata. Las mismas razones generales que se aplican a la realización de cualquier investigación explican también por qué tanto los psicólogos como los economistas y el resto de las ciencias sociales realizan experi-

mentos. El uso de experimentos, en lugar de encuestas de campo, para recopilar datos sobre las decisiones del consumidor, presenta una serie de ventajas considerables. El entorno de la elección hipotética puede ser especificado de forma precisa mediante un diseño que permita la identificación directa de efectos. Los experimentos permiten examinar el comportamiento individual, el orden emergente en la cultura y las instituciones humanas, y su persistencia, la diversidad y el desarrollo a lo largo del tiempo.

En la investigación experimental se realizan experimentos para comprobar teorías, entornos, instituciones, evaluar políticas o para proporcionar una base de datos con explicaciones de comportamiento. Vernon Smith (1989, 1994) destaca las ventajas de su método experimental frente a la contrastación tradicional de las teorías a partir de la observación de la economía real y enumera algunas de las razones por las que se realizan experimentos de laboratorio: (1) comprobar una teoría, o elegir entre varias de ellas; (2) comparar instituciones; (3) comparar entornos; (4) analizar las causas o fracaso de una teoría; (5) establecer regularidades empíricas como base de una nueva teoría; (6) evaluar propuestas políticas o (7) utilizar el laboratorio como campo de pruebas para el diseño de las instituciones.

ECONOMÍA MATEMÁTICA. La Economía Matemática es una rama de la economía cuya finalidad son los modelos de los objetos y procesos económicos, como también los métodos de su análisis. No obstante, los conceptos, métodos y resultados de la economía matemática se suele y es conveniente exponer en una relación estrecha con su origen económico, interpretación y aplicaciones prácticas.

EFEECTO DEL EXPERIMENTADOR. El efecto del experimentador en un experi-

to económico es un artefacto introducido accidentalmente cuando el experimentador (mediante su conducta o características individuales) proporciona claves que se relacionan con el propósito del experimento o que influyen en el sujeto de manera sistemática. Una gran cantidad de investigaciones y de observaciones anecdóticas ha establecido, ciertamente, que suceden tales efectos. Es posible que el experimentador interactúe con los participantes en las distintas condiciones de maneras ligeramente diferentes; puede variar su tono y énfasis de voz al leer las instrucciones; y, de igual modo, pueden diferir las claves faciales, gestos, etc. Existen efectos tanto de las instrucciones como del procedimiento, incluyendo la presencia o ausencia de un experimentador, lo que él o ella sabe o no sabe (como en los experimentos conductistas de “doble ciego”), y lo que haga o deje de hacer. Todas las operaciones elementales utilizadas para llevar a cabo un experimento son tratamientos que podrían tener o no un efecto significativo sobre los resultados observados.

Los “efectos del experimentador” pueden eliminarse o reducirse enormemente con ayuda de computadoras u otro tipo que realice el experimento de modo que no intervengan manos humanas. El experimentador aparece al final de la recopilación de datos para informar al participante de los objetivos del estudio y para explicarle la forma en que coadyuvó al avance de la ciencia. Hasta este momento el experimentador sólo supervisa el equipo y al sujeto para asegurarse de que éste siga las instrucciones y no suceda ningún imprevisto. Véase Sesgo del experimentador.

EFICIENCIA ALGORÍTMICA. La eficiencia en un algoritmo designa al proceso de evaluación de los recursos que requiere cada

algoritmo para su ejecución. La eficiencia en tiempo (o complejidad temporal de un algoritmo) indica el tiempo que requiere un algoritmo para su ejecución. La eficiencia en memoria (o complejidad espacial de un algoritmo) indica la cantidad de almacenamiento necesario para ejecutar el algoritmo; es decir, el espacio que ocupan todas las variables utilizadas por el algoritmo. Véase Complejidad computacional.

ERROR DE TIPO I. El error de tipo I es la probabilidad de refutar la hipótesis nula H_0 cuando ésta es realmente verdadera, es decir, $p(H_1/H_0 \text{ cierta}) = \alpha$; igual al nivel de significancia.

ERROR DE TIPO II. El error de tipo II es la imposibilidad de refutar la hipótesis nula H_0 cuando en realidad es falsa.

ESTRATEGIAS DE PRECIOS. Las estrategias de precios constituyen en la actualidad una de las piedras angulares de la práctica comercial por la forma en que los consumidores perciben los precios y desarrollan percepciones de valor. Existen una serie de prácticas comerciales que consisten en establecer la terminación de la expresión numérica del precio de tal manera que minimicen el sacrificio monetario percibido por el consumidor. Los motivos que hacen que un precio resulte atractivo para los consumidores o las empresas son diversos y suelen estar estrechamente relacionados con la terminación de dicho precio, lo que justifica la concentración de precios en determinados dígitos. Así, los precios en términos redondeados, que deben su nombre a la presencia de ceros en su cifra o cifras finales, se consideran precios atractivos debido a la elevada accesibilidad cognitiva de estos números, en un contexto en el que el sistema humano de procesamiento de la información presenta limitaciones.

La existencia de precios atractivos es una regularidad espacial y temporal en la medida en que es un fenómeno observado en distintos países en períodos diferentes. La evidencia internacional muestra que los precios existentes en las distintas economías no se distribuyen de forma uniforme entre las distintas terminaciones posibles, sino que tienden a concentrarse en el último dígito esencialmente en tres cifras: el 0, el 5 y el 9. La siguiente tabla, tomada de Álvarez González et. al. (2004), muestra esta evidencia.

País	Autores	Terminación		
		0	5	9
N. Zelanda	Holdershaw et al.	8	29	61
Alemania	Fengler y Winter ¹	-	-	80
EEUU	Schindler y Kirby	27	19	31
Bélgica	Aucremanne et al.	-	-	-
Holanda	Folkerstama ²	24	12	31
España	Álvarez y Jareño	5	52	34

¹ Resultado para la terminación 8 y 9

² La terminación 5 sólo recoge los precios finalizados en 25 y 75

La categoría de precios psicológicos (precios que se aproximan a precios en términos redondeados aunque sustrayéndoles una pequeña cantidad. Por ejemplo, 1.99 frente a 2, o 1995 frente a 2000) está constituida por aquellos precios fijados con el objetivo de que se tenga la sensación de que el correspondiente artículo es barato. La razón para fijar precios de este tipo es que por el coste de almacenamiento de la información producen la sensación de ser más reducidos de lo que realmente son [v. Holdershaw et al. (1997), para más detalles].

La literatura propone un gran número de explicaciones sobre el uso de la terminación nueve como política de precios, un fenómeno conocido como odd-pricing, psychological pricing, o

just-below pricing. La mayoría de los autores argumenta que la terminación nueve es una estrategia de precios que tiene el objetivo de manipular las percepciones de los consumidores [v. Schindler (1991), Friedman (1967) y Muriello (2005), entre otros]. Sin embargo, existen otras explicaciones que son: las que consideran que es un mecanismo de control administrativo, las que argumentan que la racionalidad de los compradores es restringida [v. Brenner y Brenner (1982) y Basu (1997)] y las que ubican al nueve como un punto focal [v. Schelling (1960); Scherer y Ross (1990)]. Véase Fenómeno cognitivo y Percepción.

Referencias: (1) Álvarez González, L.; Cuadrado Salinas, P.; Jareño Morago, J. y Sánchez García, I. (2004) El impacto de la puesta en circulación del euro sobre los precios de consumo. Banco de España. Documentos ocasionales, nº 0404 (2) Álvarez, L. y Jareño, J. (2002) Implicaciones para la inflación de la conversión de precios a euros. Banco de España. Documento de trabajo, nº 0202. (3) Basu, K. (1997) Why Are So Many Goods Priced to End in Nine? And why this practice hurts the producers. *Economics Letters*, Vol. 54, págs. 41-44. (4) Brenner, G. y Brenner, R. (1982) Memory and Markets, or Why Are You Paying \$2.99 for a Widget. *Journal of Business*, Vol. 55(1), págs. 147-158. (5) Fengler, M. y Winter, J. (2001) Psychological pricing points and price adjustment in German retail markets. Mimeo. Universidad de Mannheim. (6) Folkerstma, C.K. (2002) The euro and psychological prices. Simulations of the worst-case scenario. *De economist* Vol. 150(1), págs. 19-40. (7) Friedman, L. (1967) Psychological Pricing in the Food Industry Prices: Issues in Theory, Practice and Public Policy, eds., Almarin Phillips y Oliver E. Williamson, Philadelphia, University of Pennsylvania Press, págs. 187-201. (8) Holdershaw, J. et. al. (1997) The Widespread Use Of Odd Pricing In The Retail Sector. *Marketing Bulletin*, Vol.

7, págs. 53-58. (9) Murillo, J. (2005) ¿Por qué los precios terminan en nueve? *Gaceta de Economía*, Vol. 9, págs. 71-94. (10) Schelling, T. (1960) *The Strategy of Conflict*. Cambridge: Harvard University Press. (11) Scherer, F. y D. Ross (1990) *Industrial Market Structure and Economic Performance*, 3.^a ed., Houghton Mifflin Company. (12) Schindler, R. (1984) Consumer Recognition of Increases in Odd and Even Prices. *Advances in Consumer Research*, Vol. 11, págs. 43-55. (13) Schindler, R. (1991) Symbolic Meanings of a Price Ending. *Advances in Consumer Research*, Vol. 18, págs. 794-801.

F

FAS. Acrónimo de *Feedback Arc Set* de la teoría clásica de grafos dirigidos. Dado un grafo dirigido $G = (V, E)$ con una función de peso nonegativa definida sobre sus aristas $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, un feedback arc set (FAS) es un subconjunto de aristas $E' \subseteq E$ tal que el grafo dirigido $G' = (V, E \setminus E')$ es acíclico. Véase Grafo dirigido y MFAS.

FENÓMENO COGNITIVO. Término que se refiere a cualquier manifestación cognitiva o proceso mental que se produce en el procesamiento interno de la información. En la teoría del comportamiento del consumidor y en el marketing está ampliamente aceptada la existencia de diferentes fenómenos cognitivos que influyen directamente en la toma de decisiones económicas de un individuo. El cuadro 4.1 enumera algunos de éstos.

Efecto	Descripción
Anclaje	Las respuestas se ven influidas por indicaciones contenidas en las preguntas.
Contexto	Las preguntas previas y la interacción con el entrevistador influyen en la percepción.
Referencia focal	El formato de las preguntas cambia la prioridad de diferentes aspectos de la tarea cognitiva.
Proyección	Las respuestas son acordes con la propia imagen que el sujeto quiere proyectar.
Perspectiva	La verosimilitud de los acontecimientos con baja probabilidad es juzgada erróneamente y tratada bien como demasiado probable o como cero.
Regresión	La causalidad y la permanencia están sujetas a fluctuaciones pasadas y la regresión al punto medio es subestimada
Dividido por reglas	La motivación y el autocontrol inducen a respuestas estratégicas.
Prioridad	Los aspectos más notables de la pregunta se enfatizan con exceso.
Status quo	El estatus actual y la historia son privilegiados.
Superstición	Las estructuras causales elaboradas están vinculadas a coincidencias.
Temporal	Descuento de tiempo temporalmente inconsistente.

Tabla 4.1: Fenómenos cognitivos. Fuente: McFadden (2001).

Estos fenómenos cognitivos, identificados por los psicólogos cognitivos y los economistas conductuales, influyen en ocasiones en el proceso de elección de un individuo y son los causantes de la “irracionalidad” presente en las elecciones efectuadas por un consumidor. Para una apro-

ximación más detallada, véanse los trabajos de Allport, G. (1935), Hurd et al. (1998), Kahneman, D. (1997, 2003), Lowenstein, G. (1996), McFadden, D. (1999, 2001), Smith, V. (2003) y Tversky, A. y Kahneman, D. (1974), entre otros. Véase Proceso de elección de un consumidor.

Referencias: (1) Allport, G. W. (1935) Attitudes, en C.A. Murchison (ed.), *A Handbook of Social Psychology*, Clark University Press, Worcester, Massachusetts, 1935, págs. 798-844. (2) Hurd, M.; Merril, A. y McFadden D. (1998) Consumption and Savings Balances of the Elderly: Experimental Evidence on Survey Response, en Wise, D. (eds.), *Frontiers in the economics of aging*, University of Chicago Press, Chicago, págs 353-387. (3) Kahneman, D. (1997) Economist Have Preferences, Psychologists Have Attitudes. Presentación invitada al NFS Symposium on Preference Elicitation, Berkeley, CA. (4) Kahneman, D. (2003) Maps of bounded rationality: Psychology for Behavioral Economics. *The American Economic Review*, vol. 93(5), págs. 1449-1475. (5) Lowenstein, G. (1996) Out of Control: Visceral Influences on Behavior. *Organizational Behavior and Decision Processes*, vol. 65(3), págs. 272-292. (6) McFadden, D. (1999) Rationality for Economists? *Journal of Risk and Uncertainty*, vol. 19(1-3), págs. 73-105. (7) McFadden, D. (2001) Economic Choices. *American Economic Review*, Vol. 91(3), págs. 351-378. (8) Smith, V. (2003) Constructivist and Ecological Rationality in Economics. *The American Economic Review*, vol. 93(3), págs. 465-508. (9) Tversky, A. y Kahneman, D. (1974) Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases, *Science*, vol. 185, págs. 1124-1131.

FORTRAN 90/95. Acrónimo de FORMula TRANslator (traductor de Fórmulas). Lenguaje de programación de alto nivel muy próximo al lenguaje matemático y especialmente indicado para la modelización numérica y para resol-

ver problemas susceptibles de descomposición funcional. Permite la programación estructurada, la programación modular y la programación orientada a objetos. Fue desarrollado por un equipo de trabajo de IBM, dirigido por John Backus, a finales de los años 50 para su uso por matemáticos, ingenieros y científicos en general en la resolución de problemas matemáticos.

El lenguaje FORTRAN está específicamente diseñado para el cómputo científico, para generar códigos ejecutables que se optimizan altamente y conseguir un funcionamiento extremadamente más rápido. Las operaciones vectoriales con matrices, ya incluidas en el lenguaje, junto la existencia de librerías numéricas comerciales (NAG, IMSL) o de libre acceso como la colección de algoritmos de la ACM o las librerías numéricas BLAS, LINPACK, GRAPHACK, PBLAS o LAPACK, entre otras, permiten al programador escribir basándose en bibliotecas con alto grado de abstracción numérico y resolver, de manera eficiente, los diferentes problemas de modelización económica. Debido a su simplicidad y eficiencia (permite escribir el programa de manera casi idéntica a como se escriben las fórmulas en un papel) se ha convertido junto con C++ en el lenguaje más popular dentro la comunidad científica. Por todo ello, el lenguaje de programación FORTRAN se ha convertido en uno de los lenguajes de programación más populares en la comunidad científica y, en la actualidad, se trata del lenguaje de programación de alto nivel con más años de utilización ininterrumpida.

Referencias: (1) Adams, J. C. et. al. (1992) *Fortran 90 Handbook*. McGraw-Hill. (2) Brainerd, W., Goldberg, C. y J. Adams (1996) *Programmer's Guide to Fortran 90*, 3rd ed. Springer-Verlag. (3) Hahn, B. (1994) *Fortran 90 for Scientists and Engineers*. Edward Arnold. (4) Metcalf, M. y J. Reid

(1997) Fortran 90/95 explained. Oxford University Press. (5) Nyhoff, L. y S. Leestma (1997) Fortran 90 for Engineers and Scientists. Prentice Hall. (6) Press, W.; Teukolsky, S. et. al. (1992) Numerical Recipes in Fortran 90. The Art of Scientific Computing. Second Edición. Cambridge University Press.

FORMA FUNCIONAL FLEXIBLE. Término que se refiere a aquellas funciones que satisfacen las condiciones de integrabilidad que resultan de aplicar las técnicas de aproximación de funciones a las funciones de utilidad (directa o indirecta) o de gasto. Entre las formas flexibles más usadas destacan las que proceden de aproximaciones de Taylor, de las que destacan las formas Translog, propuesto por Christensen, Jorgenson y Lau (1975), y el modelo Sistema de Demanda Casi Ideal (AIDS) debido a sus buenas propiedades, suficientemente descritas en el trabajo original de Deaton y Muellbauer (1980).

Referencias: (1) Christensen, L., Jorgenson, D. y L. Lau (1975) Transcendental Logarithmic Utility Functions. American Economic Review, Vol. 65, págs. 367-383. (2) Deaton, A. (1980) An Almost Ideal Demand System. American Economic Review, Vol. 70(3), págs. 312-326. (3) Deaton, A. (1986) Demand Analysis, in Handbook of Econometrics, Volume III, Edited by Z. Griliches and M.D. Intriligator, Elsevier Science Publishers. (4) Lau, L. (1986) Functional Forms in Econometric Model Building, in Handbook of Econometrics, Volume III, Edited by Z. Griliches and M.D. Intriligator, Elsevier Science Publishers.

FUNCIÓN GAMMA. Dícese de la función que para todo $x > 0$ está definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

La función gamma cumple la siguiente propiedad recursiva $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$. Por tanto, para valores enteros de x , $\Gamma(x) = (x-1)!$. Además, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

FVS. Acrónimo del clásico problema *Feedback Vertex Set* de la teoría de grafos dirigidos. Un subconjunto $V' \subseteq V$, $V \neq \emptyset$, es un FVS del grafo dirigido $G = (V, E)$ si el subgrafo de G inducido por $(V \setminus V')$ es acíclico (donde “\” representa a la diferencia de conjuntos); esto es, si V' contiene al menos un vértice para cada ciclo dirigido de G . Véase Grafo dirigido y MFVS.

G

GENERADOR DE (PSEUDO) NÚMEROS ALEATORIOS. Término que se refiere a un programa de ordenador que genera internamente secuencias de valores que simulan ser cadenas de valores extraídos de una distribución de probabilidad especificada. Tales generadores no sólo son requeridos para la simulación estocástica, sino que además son necesarios para numerosas aplicaciones tales como experimentos estadísticos, análisis numérico mediante métodos de Monte Carlo, algoritmos probabilísticos, juegos de ordenador, criptografía o diferentes protocolos de seguridad en las comunicaciones, casinos, etc. Véase Generador uniforme de (pseudo) números aleatorios.

GENERADOR UNIFORME DE (PSEUDO) NÚMEROS ALEATORIOS. Término que se refiere a todo procedimiento que permite implementar una imitación del concepto matemático de variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en el intervalo (0,1). || *Mat.* Un generador de (pseudo) números aleatorios (RNG)

puede ser definido como una estructura $\mathcal{G} = (S, \mu, f, V, g)$, donde S es un conjunto finito de estados, μ es una distribución de probabilidad sobre S usada para seleccionar el estado inicial s_0 (denominado semilla o valor inicial), $f : S \rightarrow S$ es la función de transición, V es el conjunto output (también designado habitualmente por conjunto finito de símbolos de salida), y $g : S \rightarrow U$ es la función output o función de salida. El generador comienza con el estado inicial s_0 (llamado semilla) y evoluciona de acuerdo con $s_i := f(s_{i-1})$, para $i \geq 1$ y en cada paso i , obtiene la observación $u_i := g(s_i)$. El conjunto V es un conjunto finito de valores entre 0 y 1, representación aproximada de la distribución $U[0,1)$. En este caso se dice que el generador es un generador uniforme de números aleatorios. Puesto que S es finito, la secuencia de estados es, al final, periódica. El periodo es el entero positivo más pequeño ρ tal que, dado algún entero $\tau \geq 0$ y para todo $n \geq \tau$, $s_{\rho+n} = s_n$. El τ más pequeño con esa propiedad se denomina transitorio (cuando $\tau = 0$ la secuencia se dice que es puramente periódica). La secuencia de extracciones no es una verdadera muestra aleatoria de una distribución uniforme (o de cualquier otra). En primer lugar, las extracciones no son independientes; los datos se generan a partir de una ecuación de recurrencia (aunque si el generador está bien construido, las secuencias que genere pasarán los tests de aleatoriedad). En segundo lugar, las extracciones no son verdaderamente aleatorias en absoluto porque pueden ser replicadas reiniciando la semilla a su valor inicial. En tercer lugar, se asume que la distribución es sólo aproximada. Finalmente, señalar que indistintamente de cómo se construya el generador, el generador de (pseudo) números aleatorios hará ciclos en última instancia sobre su valor inicial o semilla y repetirá

la secuencia. Esto puede no ocurrir hasta generar millones o miles de millones de valores. Pero como la mayoría de los estudios de Monte Carlo requieren miles de valores, no es una consideración trivial.

Diversos autores, entre los que cabe destacar entre otros a Hellekalek y Larcher (1998) y Marsaglia (1985) han proporcionado tests estadísticos específicos para analizar la aleatoriedad y la uniformidad de los datos generados por los RNGs. Según señala L'Ecuyer (1998a, 1998b, 1998c) la experiencia muestra que los RNGs con períodos largos pasan muy bien los tests, al contrario que los RNGs con períodos cortos. Este autor realiza una evaluación de los principales RNGs mediante la utilización de diferentes tests estadísticos empíricos para contrastar la hipótesis nula (H_0 : "los u_i son variables aleatorias independientes con distribución $U(0,1)$ ") encontrando que los RNGs de los softwares comerciales son problemáticos. Este autor sugiere utilizar el generador de (pseudo) números aleatorios *MRG32k3a*, propuesto por L'Ecuyer (1999) y que combina dos MRGs de orden 3 (su período está próximo a 2^{191} .) o el generador *Mersenne-Twister*, propuesto por Matsumoto y Nishimura en 1998, que posee un período de $2^{19937} - 1$. En L'Ecuyer y Côté (1991) se discuten técnicas de implementación para LCGs y MRGs que permitan imitar de manera eficiente una sucesión de extracciones independientes realizadas desde una distribución $U(0,1)$. || **Generador de congruencias aditivas.** Dícese del generador uniforme de (pseudo) números aleatorios tal que a partir de una secuencia de números x_1, x_2, \dots, x_n produce una extensión de la secuencia x_{n+1}, x_{n+2}, \dots de la forma siguiente: $x_i = (x_{i-1} + x_{i-n}) \bmod(m)$. Existe una extensión de esta idea de la forma: $x_n = (x_{n-5} + x_{n-17}) \bmod(2^k)$. Marsaglia (1985)

considera que este generador pasa la mayoría de los tests estadísticos y que además proporciona un procedimiento rápido de generación de números aleatorios puesto que precisa realizar ninguna multiplicación. El generador utiliza 17 posiciones de memoria con 17 enteros no todos impares. La suma ya es módulo 2^k en las máquinas de k bits con complemento a 2. El periodo de este generador es $s^k(2^{17} - 1)$. Para $k = 8, 16, 32$ el periodo es 1.6×10^7 , 4.3×10^9 y 2.8×10^{14} respectivamente. || **Generador congruencial lineal (LGC)**. Dícese del generador uniforme de (pseudo) números aleatorios propuesto por Lehmer en 1948. Este generador está basado en el siguiente método de recurrencia:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= (ax_i + c)(\text{mod } m) \\u_{i+1} &= x_{i+1}/m, \quad \text{para todo } i \geq 0.\end{aligned}$$

Este proceso de construcción determinístico, que se denominó generador congruencial lineal, permite simular una sucesión de números aleatorios si el período es lo suficientemente grande como para que se genere un número de pseudo números aleatorios menor que la longitud del período. Si se eligen de manera adecuada los parámetros a , c y m , la sucesión $\{u_i\}_{i \geq 0}$ de pseudo números aleatorios se comporta como una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $U(0, 1)$. Los softwares comerciales utilizan los LCGs y los MRGs como generadores de (pseudo) números aleatorios. La mayoría de los programas de cálculo simbólico utilizan el generador congruencial LCG16807. || **LCG16807**. Acrónimo del generador congruencial de (pseudo) números aleatorios originalmente por Lewis, Goodman y Miller (1969), y definido por:

$$x_i = 16807x_{i-1} \text{ mod}(2^{31}-1), \quad u_i = x_i/(2^{31}-1)$$

Este generador aparece en numerosas bibliotecas de software científico de estadística, simulación, optimización, etc. así como en bibliotecas de sistemas operativos. Este generador, que se viene utilizando en diferentes productos de software de simulación, tiene un período de longitud $2^{31} - 2$. || **G05FAF**. Acrónimo del generador congruencial multiplicativo definido por la relación de recurrencia

$$x_i = (13^{13}x_{i-1}) \text{ mod}(2^{59}), \quad u_i = x_i/2^{59}$$

Este generador, aparte de poseer un período muy largo $2^{59} - 1 \approx 5.76 \times 10^{17}$ presenta una gran ventaja técnica: se puede generar una sucesión de números aleatorios x_1, \dots, x_n con n llamadas a la subrutina G05FAF de la librería NAG. || **MT19937**. Acrónimo del generador uniforme de (pseudo) números aleatorios de Mersene-Twister. Este generador de números aleatorios fue propuesto por Matsumoto y Nishimura (1998), tiene el periodo de longitud más grande: $2^{19937} - 1$ y unas cualidades estadísticas muy buenas. Es uno de los generadores que oferta actualmente Matlab (versión 7.1). || **Generador de desplazamiento de bits**. Dícese del generador uniforme de (pseudo) números aleatorios tal que cada nuevo número entero aleatorio N_i , se obtiene manipulando los bits del número anterior, N_{i-1} . En lenguaje C, esto se puede hacer fácilmente utilizando operadores sobre bits, $\gg, \ll, \wedge, |, \&$. || **Generador de Fibonacci**. Generador uniforme de (pseudo) números aleatorios que genera internamente secuencias de valores que simulan ser cadenas de valores extraídos de una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$ mediante una ecuación de recurrencia del tipo

$$N_i = (N_{i-r} \circ N_{i-s}) \text{ mod } m,$$

donde $r < s$ son enteros dados y \circ denota alguna de las operaciones $+$, $-$, \times , \wedge . Este tipo de generador precisa iniciar (con otro generador) y mantener una lista de los últimos s números generados. Estos generadores son muy rápidos y tienen un período muy largo. || **Generador múltiple recursivo (MRG)**. Dícese del generador uniforme de (pseudo) números aleatorios que está basado en la siguiente relación de recurrencia determinística:

$$\begin{aligned} z_i &= (a_1 z_{i-1} + \dots + a_k z_{i-k} + c) \bmod m \\ u_i &= z_i / m, \quad i \geq 0; \end{aligned}$$

donde el módulo m y el orden k de la ecuación de recurrencia son números enteros y los coeficientes a_i 's pertenecen a $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Estos parámetros deben cumplir unas ciertas características para que una sucesión cíclica como la anterior, que en principio no parece ser una buena candidata para simular una sucesión de números aleatorios, permita imitar una sucesión de extracciones independientes realizadas desde una distribución $U(0,1)$. Si m es un número primo y si los a_i 's satisfacen ciertas condiciones, la sucesión de (pseudo) números aleatorios $\{u_i\}_{i \geq 0}$ tiene un período de longitud maximal $\rho = m^k - 1$ y la sucesión (dado un valor inicial o semilla Z_0) $\{u_i\}_{i \geq 0}$ se comporta como una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $U(0,1)$. Cuando $k = 1$ se obtiene la clase de generadores congruenciales lineales (LCGs), introducidos en la literatura computacional por Lehmer.

Referencias: (1) Hellekalek, P. y G. Larcher (1998) Random and Quasi-Random Point Sets, Volume 138 de Lecture Notes in Statistics. Hellekalek, P., and G. Larcher. (Eds.) New York: Springer. (2) Lehmer, D. (1949) Mathematical Methods in Large-Scale Computing Units. In Proc. 2nd Sympos. on Large-Scale Digital Calculating Machinery

(Cambridge), págs. 141-146. Harvard University Press. (3) L'Ecuyer, P. y S. Cote (1991) Implementing A random number package with splitting facilities, ACM Trans on Math. Software, Vol. 17, págs. 98-111. (5) L'Ecuyer, P. (1998a) Uniform Random Number Generation. Annals of Operations Research, Vol. 53, págs. 77-120. (6) L'Ecuyer, P. (1998b) Random Number Generation en The Handbook on Simulation, edited by Jerry Banks. Wiley, New York. (7) L'Ecuyer, P. (1998c) Random Number Generators and Empirical Tests Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag, Vol. 127, págs. 124-138. (8) L'Ecuyer, P. y P. Hellekalek (1998) Random number generators: Selection criteria and testing. In Random and Quasi-Random Point Sets, ed. P. Hellekalek and G. Larcher, Volume 138 of Lecture Notes in Statistics, págs. 223-265. New York: Springer. (10) Marsaglia, G. (1985) A current view of random number generators. In Computer Science and Statistics, Sixteenth Symposium on the Interface, págs. 3-10, North-Holland, Amsterdam. Elsevier Science Publishers. (11) Matsumoto, M. y T. Nishimura (1998) Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudorandom Number Generator. ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, Vol. 8(1), págs. 3-30.

GENERACIÓN DE NÚMEROS (PSEUDO) ALEATORIOS (distribuciones no uniformes). Término que se refiere a todo procedimiento de generación de secuencias de valores que simulan ser cadenas de valores extraídos de una distribución de probabilidad especificada con densidad de probabilidad dada $w(y)$, definida en el intervalo (y_{min}, y_{max}) . Para la generación de números aleatorios se precisa generar una secuencia $\{u_i\}_{i \geq 0}$ de (pseudo) números aleatorios con distribución uniforme $U(0, 1)$ para, a continuación, transformarlos en secuencias de valores que simulan ser cadenas de valores extraídos de

una distribución de probabilidad especificada, para poder llevar a cabo el proceso de simulación deseado. Una aproximación común para resolver este problema utilizar el método del cambio de variable que concretamente consistirá en buscar una transformación $y = f(x)$ para obtener la distribución deseada. Si la densidad de probabilidad de x es $p(x)$, tenemos:

$$P\{X \in (x, x + dx)\} = P\{Y \in (y, y + dy)\};$$

$$p(x)dx = w(y)dy;$$

Si $x \in U(0, 1)$ la integración de esta ecuación resulta ser

$$\int_0^x dx = \int_{y_{min}}^y w(y')dy'$$

Si sabemos calcular la integral, obtenemos una relación del tipo $X = g(Y)$, que se tiene que invertir para poder obtener $Y = f(X)$, aunque, a veces, no siempre es posible realizarlo de manera directa y son necesarias aproximaciones. Por ejemplo, en el caso de la distribución normal para obtener $Y \in N(0, 1)$, nos queda la siguiente ecuación

$$x = \int_{-\infty}^y e^{-y'^2/2} \frac{dy'}{\sqrt{2\pi}}.$$

Esta integral no se puede resolver analíticamente, y menos aún invertir la relación para obtener $Y = f(X)$. En este caso existen varias formas de proceder: la primera de ellas es aproximar la función inversa. La segunda consiste en transformar los valores $U[0,1]$ a valores de una normal estándar mediante el algoritmo de Box-Mueller (1958) a partir del cual se pueden obtener 2 valores independientes x_1, x_2 con distribución $N(0, 1)$: si x_1, x_2 son las coordenadas de un punto del plano, la densidad de

probabilidad de sus coordenadas polares es

$$w(r, \theta) = p(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \theta)} \right| = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2},$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in [0, +\infty)$. A partir de $w(r, \theta)$ se pueden obtener a partir de 2 números $z_1, z_2 \in U(0, 1)$ con las transformaciones $\theta = 2\pi z_1$, $r = \sqrt{-2\ln z_2}$, de donde se obtienen $x_1 = \sqrt{-2\ln(z_2)}\cos(z_1)$ y $x_2 = \sqrt{-2\ln(z_2)}\sin(z_1)$. Las secuencias generadas desde una distribución normal estándar se pueden transformar fácilmente en otras distribuciones como la t-student, la chi-cuadrado, la F-Snedecor o la distribución beta a partir de las propiedades que relacionan a la distribución normal con estas distribuciones clásicas de probabilidad. Las distribuciones discretas tales como la Poisson, presentan un problema diferente. No hay una transformación inversa obvia para la mayoría de ellas. Un método, aunque desafortunadamente inevitable, para calcular algunas distribuciones es extraer la F , y buscar secuencialmente el valor discreto para el cual la función de densidad es mayor o igual que F . Esto hace que el procedimiento sea bastante intuitivo pero puede precisar de numerosos cálculos. El *método del rechazo* será más eficiente (aunque no más adecuado) para algunas distribuciones. Véase Generador de (pseudo) números aleatorios.

Referencias: (1) Box, G. y M. Muller (1958) A Note on the Generation of Random Normal Deviates. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 26, págs. 610-611. (2) Devroye, L. (1986) *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New York. (3) Fishman, G. (1996) *Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York.

GRAFO. Término matemático que se refiere a un conjunto en el que hay definida una relación binaria. Matemáticamente, un grafo G se define como un par (V, E) , donde V es un conjunto cuyos elementos son denominados vértices o nodos y E es un subconjunto de pares no ordenados de vértices y que reciben el nombre de aristas o arcos. Si $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, los elementos de E se representan de la forma $\{v_i, v_j\}$, donde $i \neq j$. Los elementos de una arista o arco se denominan extremos de dicha arista. Dos vértices v_i y v_j se dicen adyacentes si $\{v_i, v_j\} \in E$. || **Grafo acíclico.** Dícese del grafo que no contiene ciclos. || **Grafo completo.** Dícese del grafo que verifica la siguiente propiedad: cada par de vértices distintos de G son adyacentes. A esta clase de grafos se la suele designar por K_n , donde n indica el número de vértices. || **Grafo conexo.** Dícese del grafo que verifica la siguiente propiedad: para cualquier par de vértices de G existe una trayectoria entre ellos. || **Grafo finito.** Dícese del grafo que tiene un número finito de vértices. || **Grafo trivial.** Dícese del grafo que tiene vértices y ninguna arista. || **Grafo vacío.** Dícese del grafo que no tiene aristas. || **Subgrafo.** Un subgrafo del grafo $G = (V, E)$ es un par (V', E') donde $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ y para cada elemento de E' , sus extremos están en V' . Si E' contiene todos los elementos de E cuyos extremos están en V' , entonces se llama subgrafo generado por V' .

GRAFO DIRIGIDO. Grafo $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de elementos denominados vértices y $E \subseteq V \times V$ es un conjunto de pares ordenados denominados aristas. La cardinalidad de V se denotará por n y la cardinalidad de E por m . El tamaño del G es $n + m$. || **Grafo fuertemente conexo o f-conexo.** Dícese del grafo dirigido tal que cualesquiera dos de sus vértices son mutuamente accesibles. ||

Grafo unilateralmente conexo. Dícese del grafo dirigido tal que entre cualesquiera dos de sus vértices por lo menos uno es accesible desde el otro. || **Grafo dirigido acíclico.** Dícese del grafo dirigido que no contiene ciclos.

Referencias: (1) Deo, N. (1974) Graph theory with applications to engineering and computer science. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA. (2) Diestel, R. (2000) Graph Theory. Electronic Edition, Springer-Verlag, New York. (3) Ford, L. y Fulkerson, D. (1962) Flows in Networks. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (4) Gibbons, A. (1985) Algorithmic Graph Theory, Cambridge University Press, Cambridge.

I

ILUSIÓN. Error o percepción distorsionada. Véase Percepción de precios.

ITERACIÓN. Término matemático que se refiere al resultado de emplear reiteradamente cierta operación matemática. Por ejemplo, si

$$y = f(x) \equiv f_1(x)$$

es cierta función de x , se dice que las funciones

$$f_2(x) = f(f_1(x)), \dots, f_n = f(f_{n-1}(x))$$

son, respectivamente, la segunda, la tercera..., y la n -ésima iteración de la función f . Las iteraciones se utilizan para resolver distintos tipos de ecuaciones y sistemas de ecuaciones aplicando métodos iterativos. Véase Algoritmo iterativo.

L

LEMA DE ZORN o principio de maximalidad. Lema que establece que si X es un conjunto no vacío dotado de una relación de orden parcial para la cual toda cadena de X posee una cota superior, entonces X posee elementos maximales. Esta afirmación es equivalente al axioma de la elección. Véase Axioma de la elección.

Referencias: (1) Azriel Levy, A. (1979). Basic Set Theory. Berlin: Springer-Verlag. (2) Conway, J. and Guy, R. (1996) The Book of Numbers. New York: Springer-Verlag. (3) Kaplansky, I. (2001) Set Theory and Metric Spaces. New York: AMS Chelsea Publishing Company. (4) Kunen, K. (1980) Set Theory. Amsterdam: North Holland. (5) Moore, G. (1982) Zermelo's Axiom of Choice: Its Origin, Development, and Influence. New York: Springer-Verlag.

M

MATRIZ. Una matriz $M \in \mathcal{M}(\{0, 1\})$ es una aplicación $M : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ de forma que $M[i, j]$ es el elemento de M situado en la fila i y en la columna j . || **Matriz de adyacencia.** La matriz de adyacencia $A(G) \in \mathcal{M}(\{0, 1\})$ de un grafo dirigido, $G = (V, E)$, es una matriz (a_{ij}) de dimensión $n \times n$ en la que el elemento a_{ij} es igual a uno si existe una arista que va de v_i a v_j . El elemento (i, j) de la matriz $A^k(G)$ (es decir, de grado k -ésimo de la matriz asociada del grafo G) es igual al número de recorridos de longitud k que van de v_i a v_j . El elemento (i, j) de la matriz $A^k(G)$ (es decir, de grado k -ésimo de la matriz asociada del grafo G) es igual al número de recorridos de longitud k que van de v_i a v_j . || **Matriz nilpo-**

tente. matriz cuadrada B de orden n tal que $B^n = 0_n$, donde 0_n designa a la matriz nula (todos sus términos son iguales a cero). Una propiedad interesante de este tipo de matrices es que si B designa a una matriz booleana de orden n ($n \geq 2$) asociada a una relación binaria \succeq , entonces B es nilpotente si y solamente si, después de permutar convenientemente filas y columnas, la matriz B es estrictamente triangular (superior o inferior) con ceros en la diagonal principal.

MEMORIA. Fenómeno cognitivo que influye de manera directa en el proceso de elección de un individuo. La memoria está determinada por estímulos externos que han sido modificados por los sistemas de procesamiento y cuya organización está condicionada por la experiencia pasada (Hayek, 1952, págs. 64, 165). Existe una "constante interacción dinámica entre la percepción y la memoria, que explica la identidad de los sistemas de procesamiento y representación del cortex que indican las pruebas modernas". La interdependencia entre la percepción y la memoria se revela a través de las diferentes descripciones de un mismo suceso realizadas por dos testigos oculares (Gazzaniga et al., 1998, págs. 484-486). Véase Fenómeno cognitivo.

Referencias: (1) Gazzaniga, M. S. (1998) The mind's past, University of California Press, Berkeley. (2) Hayek, F. A. (1952) The sensory order: An inquiry into the foundations of theoretical psychology, University of Chicago Press, Chicago. (3) Smith, V. (2003) Constructivist and Ecological Rationality in Economics. American Economic Review, vol. 93(3), págs. 465-508.

MÉTODO DE MONTE CARLO. El método o experimentación de Monte Carlo es un procedimiento de simulación que consiste en sustituir el estudio de un proceso físico o ma-

temático por el de un modelo estocástico artificial con el objetivo de determinar alguna propiedad probabilística de una población de objetos o acontecimientos, por medio del uso del muestreo aleatorio.

La generación de datos simulados por el método de Monte Carlo tiene varios usos en econometría. Una de las aplicaciones más comunes es la derivación de las propiedades de estimadores o la comparación de propiedades de los estimadores. Las propiedades exactas en muestras finitas son normalmente intratabulars, de forma que deja al analista con la única opción de aprender de la conducta de los estimadores experimentalmente. Los experimentos de Monte Carlo también están disfrutando de una gran popularidad en la microeconomía empírica. En el monográfico núm. 68 de *Cuadernos Económicos del I.C.E.* dedicado a los modelos de microsimulación se presenta un compendio de aplicaciones que precisan utilizar el método de Monte Carlo para poder evaluar ex-ante los efectos de eventuales políticas y que permite ofrecer una visión general de la utilización de las técnicas de simulación en la resolución de una gran diversidad de problemas económicos que son susceptibles de ser resueltos con estas técnicas. En estos estudios, los datos se generan internamente en el ordenador usando generadores de (pseudo) números aleatorios. Véase Generador de números (pseudo) aleatorios y Microsimulación.

Referencias: (1) VVAA (2004) Modelos de microsimulación. Cuadernos Económicos del I.C.E., Vol. 68. Información Comercial Española, Madrid. (2) Fishman, G. (1996) Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag. New York.

MFAS. Acrónimo del clásico problema *Minimum Feedback Arc Set* (MFAS) de la teoría clásica

de grafos dirigidos. Dado cualquier grafo dirigido finito $G = (V, E)$ con una función de peso nonegativa definida sobre sus aristas $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, resolver el problema del “minimum feedback arc set problem” (MFAS) equivale a encontrar un subconjunto de aristas $E' \subseteq E$ de peso mínimo ($w(E') = \sum_{(x,y) \in E'} w(x,y)$) tal que el grafo dirigido resultante $G' = (V, E \setminus E')$ sea acíclico.

Referencias: (1) Demetrescu, C. y Finocchi, I. (2003) Information Processing Letters, Vol. 86, págs. 129-136. (2) Flood, M. (1990) Exact and heuristic algorithms for the weighted feedback arc set problem: A special case of the skew-symmetric quadratic assignment problem. Networks, Vol. 20, págs. 1-23. (3) Hassin, R. y Rubinstein, S. (1994) Approximations for the Maximum Acyclic Subgraph Problem. Information Processing Letters, Vol. 51, págs. 133-140. (4) Lempel, A. y Cederbaum, I. (1966) Minimum feedback arc and vertex sets of a directed graph, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. 13(4), págs. 399-403. (5) Ramachandran, V. (1988) Finding a minimum feedback arc set in reducible flow graphs. Journal of Algorithms, Vol. 9, págs. 299-313.

MFVS. Acrónimo del clásico problema *Minimum Feedback Vertex Set* (MFVS) de la teoría clásica de grafos dirigidos. Dado un grafo dirigido $G = (V, E)$ con una función de peso nonegativa $z : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida sobre sus vértices, resolver el problema del “minimum feedback vertex set problem” equivale a encontrar un subconjunto de vértices de peso mínimo $V' \subseteq V$ tal que V' contiene al menos un vértice para cada ciclo dirigido de G ; esto es, equivale a obtener un *feedback vertex set* de peso $z(V') = \sum_{v \in V'} z(v)$ mínimo tal que V' contiene al menos un vértice para cada ciclo de G .

Referencias: (1) Bar-Yehuda, R. y Even, S. (1985) A local-ratio theorem for approximating the weigh-

ted vertex cover problem. *Ann. Discrete Math.*, Vol. 25, págs. 27-46. (3) Bar-Yehuda, R.; Geiger, D.; Naor, J. y Roth, R. (1988) Approximation algorithms for the feedback vertex set problem with applications to constraint satisfaction and Bayesian inference. *SIAM Journal Computing*, Vol. 27(4), págs. 942-959. (4) Lempel, A. (1966) Minimum Feedback Arc and Vertex Sets of a Directed Graph. *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-13(4), págs. 399-403. (5) Schwikowski, B. y Speckenmeyer, E. (1997) On computing all minimal solutions for feedback problems. Technical report, Universität zu Köln. (6) Schwikowski, B. y Speckenmeyer, E. (2002) On enumerating all minimal solutions of feedback problems. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 117, págs. 253-265. (7) Smith, G. y Walford, R. (1975) The identification of a minimal feedback vertex set of a directed graph. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, págs. 9-15.

MICROSIMULACIÓN. Instrumento de análisis económico que permite anticipar (análisis ex-ante) y estimar los efectos que pueden tener los cambios en el diseño y en el modo de ejecución de la política económica mediante la realización de experimentos y simulaciones cuyos resultados pudieran extrapolarse a poblaciones más amplias. La combinación del uso de bases de microdatos y el detalle de las simulaciones efectuadas hacen de la microsimulación un instrumento riguroso y minucioso para el estudio de las políticas y las reformas fiscales tanto para la medición de agregados presupuestarios (gasto público o recaudación), como para la medición de efectos más complejos como la distribución de la renta, la pobreza, o los incentivos a decisiones económicas. En los últimos años, el uso de modelos de microsimulación ha pasado a convertirse en un instrumento frecuente en la elaboración de la política económica. En la actualidad, existen diversos microsimuladores abiertos al uso de cualquier

persona, todos ellos contruidos sobre PHOGUE: Espasim, que simula de manera estática diversas políticas de gasto e ingreso (gratis); SIRPIEF, que simula reformas en el IRPF con comportamiento de la oferta de trabajo (de pago); y SimBBVA, que simula estáticamente reformas de IRPF y cotizaciones a la Seguridad Social (gratis on-line).

MOTIVACIÓN. Término que se refiere a la predisposición general que dirige el comportamiento hacia la obtención de lo que se desea y constituye, quizá, la variable más importante del proceso de elección del consumidor, pues no sólo juega un papel primordial en el proceso de aprendizaje y comportamiento, sino en la regulación de la entrada de información. Si no existe alguna motivación, el consumidor queda como impermeabilizado ante la publicidad, la información indirecta y, en general, ante cualquier método o procedimiento de información. La motivación (fisiológica o adquirida) obedece a razones o necesidades de índole biológica o psicológica y constituye el fundamento mismo de nuestro comportamiento de compra, pues no sólo juega un papel primordial en el proceso de aprendizaje y comportamiento, sino en la regulación de la entrada de información. Su naturaleza eminentemente dinámica hace que interactúe con el entorno complejo del comprador. El afecto y la motivación son determinantes básicos de las actitudes y también influyen sobre las percepciones que alimentan el proceso de decisión. Véase Proceso de elección de un consumidor.

N

NIVEL DE CONFIANZA. Término que se refiere a la probabilidad de que un hallazgo ex-

perimental se deba al azar o a una fluctuación aleatoria que opera en los datos.

NIVEL DE IMPLICACIÓN. Término que se refiere a la cantidad de tiempo, esfuerzo cognitivo y de búsqueda de información que un consumidor está dispuesto a dedicar varía en función del nivel de implicación del consumidor con la toma de decisión considerada. || Los niveles de implicación del consumidor elevados se asume que están vinculados a un proceso de toma de decisiones complejo.

P

PARTICIÓN DE UN CONJUNTO. La partición de un conjunto X es una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de partes de X tal que $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ y $\forall i, j \in I, X_i \cap X_j \neq \emptyset$ implica que $X_i = X_j$.

PERCEPCIÓN. Fenómeno cognitivo presente en el proceso de elección de un individuo que se fundamenta en los atributos o criterios de evaluación que son utilizados por el consumidor como criterios de comparación entre las alternativas incluidas en el conjunto de elección. El término percepción se refiere al proceso de selección, organización e integración de los estímulos sensoriales en una imagen significativa y coherente. El individuo, por este proceso, interpreta los estímulos recibidos de cara a colocarles en el seno de su cuadro de referencias. La percepción, junto con el aprendizaje fruto de la experiencia, determina las creencias que el comprador tiene acerca de las alternativas comerciales competitivas entre sí y permite al comprador tomar conciencia de su entorno comercial interpretando y ordenando los estímulos recibidos de acuerdo a su cuadro referencial.

La componente fisiológica en la percepción hace que en muchas ocasiones introducimos algún cambio en nuestros precios, ofertas o actividades comerciales o humanas y, sin embargo, los consumidores y otras personas no perciben el cambio. Muchas desviaciones conductuales del modelo estándar de los economistas están explicadas por ilusiones de percepción y errores en el procesamiento de la información, en lugar de tratarse de un fallo más básico en la definición del interés propio. Para ilustrar este punto se presenta una versión topográfica de la clásica ilusión óptica Muller-Lyer en la que las distancias son, realmente, las mismas.

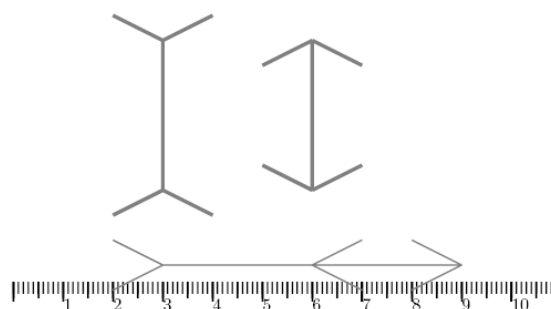


Figura 4.1: Ilusión óptica de Müller-Lyer.
Fuente: Kantowitz (2001).

En la Figura 4.1, que ilustra la ilusión óptica de Müller-Lyer, la ilusión distorsiona, en apariencia, incluso un instrumento de medición objetivo como la regla. Situaciones como ésta pueden ocasionar desviaciones de la conducta de un individuo respecto de la conducta estándar y ser consecuencia de las anomalías presentes en los datos, aunque muchas de las elecciones que realiza un consumidor sigan reglas básicamente defensivas, para protegernos de las malas elecciones. La capacidad limitada de los individuos para percibir y juzgar las opciones ha motivado la aparición en la literatura económica de diferentes clases de relaciones de preferencia: los

órdenes de intervalo, los semiórdenes, las relaciones de preferencia semitransitivas, pseudotransitivas, etc. [v. Rodríguez-Palmero (1997)].

Los procesos de percepción y la interpretación en términos evaluativos de los precios de mercado definen dos fenómenos de enorme interés para la comprensión de las decisiones de compra del consumidor. La forma en que los consumidores perciban e interpreten las estructuras de precios presentes en un mercado determinará en gran medida el proceso de búsqueda y evaluación de la información relativa a los productos y servicios durante un episodio de elección. Un enfoque tradicional que permite comprender el proceso de percepción de los precios por parte de los consumidores y la evaluación de los mismos depende de la utilización del precio como indicador de la relación calidad-precio del producto. Otro enfoque es el que plantea que tal proceso depende de la comparación entre los precios presentes en el mercado con un precio interno de referencia frente al cual los consumidores comparan los precios ofertados por un producto o servicio. La organización de la percepción supone que los estímulos se perciben de forma conjunta y no aisladamente. Así, por ejemplo, los productos de bajo precio se perciben generalmente como de inferior calidad que los productos de precio alto, o que los que se distribuyen en establecimientos comerciales de mayor categoría. Esta organización está relacionada con la percepción física, que consiste en la actividad de las aptitudes motoras sensoriales como los mecanismos de la visión que llevan a una agrupación de las percepciones según la proximidad, la similaridad, la continuidad y la totalidad de las partes. Véase Umbral.

Referencias: (1) Kantowitz, Roediger y Elmes (2001) Psicología experimental, Thomson-Paraninfo, México. (2) McFadden, D. (1999) Ra-

tionality for Economists? *Journal of Risk and Uncertainty*, vol. 19(1-3), págs. 73-105. (3) McFadden, D. (2001) *Economic Choices*. *American Economic Review*, Vol. 91(3), págs. 351-378 [Spanish Translation: *Decisiones Económicas*, *Revista Asturiana de Economía*, vol. 21, págs. 261-303, 2001] (4) Rodríguez-Palmero, C. (1997) *Estudio de varias clases de estructuras preferenciales*. Mimeo. Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

POTENCIA DEL CONTRASTE. La potencia del contraste es la probabilidad de que el contraste nos conduzca correctamente a rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa, es decir, encontrar una relación supuesta cuando ésta existe. Está definida como $1 - \beta$ (o $1 - \text{Prob}(\text{error tipo II})$). Se determina la potencia del contraste como una función del nivel de significación estadística establecido por el investigador para un error de Tipo I. También se puede determinar como una función del tamaño muestral utilizado en el análisis estadístico. El concepto de potencia del contraste no forma parte directa de la decisión de rechazar la hipótesis nula. Sin embargo, el cálculo de la potencia proporcionará al investigador una valiosa información sobre las propiedades de la regla de decisión.

PRECIO. Término que se refiere a la cantidad de dinero que se paga por obtener un producto; así como el tiempo, esfuerzos y molestias necesarios para obtenerlo. También se puede definir como el valor que el comprador da a cambio de la utilidad que recibe por la adquisición de un bien o un servicio. || **Precio conjunto.** Dícese del precio que se fija a a productos complementarios, como los accesorios u opciones. El precio del “paquete” (o precio conjunto) es inferior a la suma de los precios individuales de los productos. || **Precio de referencia.** Dícese del precio que el consumidor toma como

referencia en la valoración del precio de venta de los productos; esto es, el precio que considera adecuado para cada bien o producto. || **Precio externo.** Dícese del precio que recibe el consumidor a través de distintos canales de información externos y que le sirven para hacer comparaciones, refiriéndose al precio de la marca líder o al más económico. || **Precio interno.** Dícese del precio de referencia elaborado por el propio consumidor en función de su información, experiencias y carencias. || **Precio impar.** Dícese del precio rebajado ligeramente por debajo de cifras enteras como, por ejemplo, 9.95 euros, en vez de 10 euros, para dar la sensación de precio bajo, propio de productos de categoría inferior, o acciones promocionales. || **Precio redondeado.** Dícese del precio ajustado a múltiplos (diez, cien, mil, diez mil, etc.) para dar la impresión de que se trata de un producto de categoría superior o de prestigio. || **Precio psicológico.** Dícese del precio que se fundamenta en el modo en el que el mercado percibe la cuantía del precio y en la asociación que el consumidor hace del mismo con las características o atributos del producto. Las terminaciones de precios psicológicos en las diferentes economías reales son 0, 5 y 9. Véase Estrategias de precios.

PROBLEMA NP-COMPLETO. Dícese del problema algorítmico que es no polinomial. La clase NP consta de todos los conjuntos reconocibles en tiempo polinomial por una máquina de Turing no determinística e incluye una gran cantidad de problemas prácticos que aparecen en la actividad empresarial e industrial. Demostrar que un problema es NP-completo equivale a demostrar que no está en P (no tiene una solución determinística en tiempo polinomial), salvo que todos los problemas de NP estén en P. Véase Algoritmo polinomial y Complejidad computacional.

Referencias: (1) Garey, M. y Johnson, D. (1979) *Computers and Intractability: A Guide to Theory of NP-completeness*, W.H. Freeman, New York. (2) Karp, R. (1972) *Reducibility among combinatorial problems*, in: R.E. Miller, J.W. Thatcher (Eds.), *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York. (3) Mehlhorn, K. (1984) *Data Structures and Algorithms Graph Algorithms and NP-Completeness*. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, Berlin.

PROCESO DE ELECCIÓN DE UN CONSUMIDOR. Término que se refiere a las distintas fases o etapas secuenciales que sigue el consumidor desde que siente una necesidad hasta que compra o no el producto. La estimación y la maximización de la utilidad que realizan los economistas se reduce a uno de los muchos factores del entorno de la toma de decisiones, con una influencia que a menudo queda invalidada por efectos contextuales, emoción y errores en la percepción y el juicio (v. Garling (1992), Lowenstein (1996), Svenson (1979)]. Está ampliamente aceptada en la comunidad científica la visión contemporánea de la teoría de la elección, donde factores como el entorno, el aprendizaje, la experiencia y los diferentes procesos psicológicos o cognitivos inciden de manera directa en las decisiones económicas de un individuo.

La Figura 4.2 ilustra los elementos que forman parte de la visión contemporánea de la teoría de la elección, donde la información y las elecciones previas, que operan a través de la experiencia y de la memoria, proporcionan un contexto para el problema actual de la decisión, cuyos resultados van a influir, a su vez, en los problemas futuros de decisión.

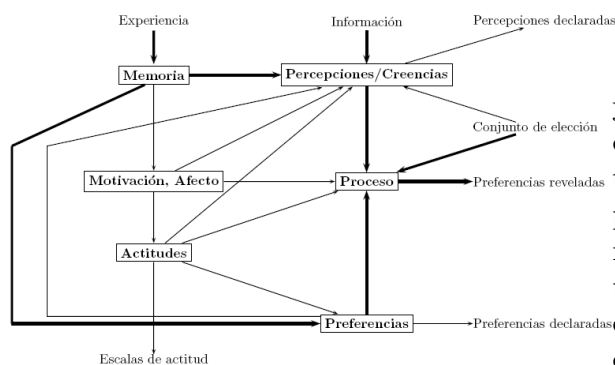


Figura 4.2: Proceso de elección de un consumidor. Fuente: McFadden (1999).

En la Figura 4.2 las flechas más gruesas coinciden con el modelo estándar del proceso de elección de los economistas; una teoría de la elección racional en la que los individuos almacenan información sobre alternativas, utilizan las reglas de la probabilidad para transformar esta información en atributos percibidos, y después atraviesan un proceso cognitivo que puede representarse como una agrupación de los niveles de atributos percibidos en un índice de utilidad estabular y unidimensional que después se maximiza. Las flechas más finas del diagrama corresponden a factores psicológicos (motivación, percepción, experiencia, características personales y actitudes) que están presentes en la toma de decisiones y que influyen en la conducta de un consumidor.

El modelo estándar permite que la experiencia influya en el modo en que se expresan las preferencias coherentes con dicha estructura de gustos. La experiencia satisfactoria ejerce un gran efecto retroalimentador en el refuerzo de ciertos patrones de conducta que se integran en el proceso básico de compra de un individuo. Por su parte, el aprendizaje –que es consecuencia de la experiencia y se refuerza con la experiencia previa– permite una mayor habilidad en la obtención y extracción de información de los estímulos provenientes del entorno

y, en consecuencia, a mayor experiencia (fruto del aprendizaje) la percepción será globalmente más compleja y diferente a la desarrollada por otros individuos que manifiesten menores niveles de aprendizaje. El aprendizaje permite una mayor habilidad en la obtención y extracción de información, en función precisamente de la experiencia y práctica, de los estímulos provenientes del entorno y puede llevar a un cambio en el comportamiento o al hábito y a la lealtad de marca puesto que el aprendizaje hace que el comportamiento que es reforzado sea más probable que vuelva a producirse. Como sostienen las teorías psicológicas del aprendizaje, por el aprendizaje el consumidor modifica su comportamiento por la sustitución de estímulos observables, al tiempo que procesa e interpreta la información que recibe según su propia estructura cognoscitiva. A medida que se repiten las compras y si la experiencia resulta satisfactoria, se reduce el tiempo utilizado en buscar y evaluar la información (v. Assael, ob. cit., págs. 125-131).

Además de los factores del entorno del comprador que influyen en el comportamiento del consumidor en el proceso de elección de un consumidor intervienen ciertas variables psicológicas (percepción, actitudes, motivación, memoria,...) que transforman los factores ambientales en factores endógenos del comportamiento de compra, y que junto con la información y las elecciones previas –que operan a través de la experiencia y de la memoria– proporcionan un contexto para el problema actual de la decisión, cuyos resultados van a influir, a su vez, en los problemas futuros de decisión. La psicología económica se ha caracterizado prácticamente desde su aparición por tratar de comprender y conocer tanto el componente conductual presente en cualquier proceso de elección como los mecanismos y procesos que subyacen a las

reacciones de cualquier consumidor ante los estímulos y las reacciones comerciales, a partir del papel que juegan las variables psicológicas (v.g. la motivación, la emoción, la atención, la percepción, la memoria, el aprendizaje). Así, las aportaciones de la psicología (psicobiológica, psicoanalítica, cognitiva, psicosocial y conductual) dedicadas explicar la conducta humana presentan una enorme utilidad para los economistas de cara a mejorar su comprensión del comportamiento y la conducta de los agentes económicos.

Referencias: (1) Ben-Akiva et. al. (1999) Extended Framework for Modeling Choice Behavior. *Marketing Letters*, vol. 10(3), págs. 187-203. (2) Hoch, S. y John Deighton. Managing What Consumers Learn from Experience. *Journal of Marketing*, vol. 53, abril 1989, págs. 1-20. (3) Kahneman, D. y Tversky, A. (1979) Intuitive Predictions: Biases and Corrective Procedures. *TIMS Studies in Management Science*, Vol. 12, págs. 313-327. (4) Kahneman, D. y Tversky, A. (1984) Choices, values and Frames. *American Psychologist*, vol. 39, págs. 341-350. (5) Kahneman, D.; Knetsch, J. y Thaler, R. (1986) Fairness as a Constraint on Profit Seeking: Entitlements in the Market. *American Economic Review*, Vol. 76(4), págs. 728-741. (6) Kahneman, D. (2003) Mapas de Racionalidad Limitada: Psicología para una Economía Conductual. *Revista Asturiana de Economía*, Vol. 28, págs. 181-225. (7) McFadden, D. (1999) Rationality for Economists? *Journal of Risk and Uncertainty*, vol. 19(1-3), págs. 73-105. (8) McFadden, D. (2001) Economic choices. *American Economic Review*, vol. 91(3), págs. 351-378. (9) Rothscilhd, M. y William C. Gaidis (1981) Behavioral Learning Theory: Its Relevance to Marketing and Promotions. *Journal of Marketing*, vol. 45(2), primavera 1981, págs. 70-78. (10) Tversky, A. y Kahneman, D. (1974) Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, Vol. 85, págs. 1124-1131. (11) Tversky, A.

y Kahneman, D. (1981) The Framing of Decisions and the Psychology of Choice". *Science*, Vol. 211, n.º 4481, págs. 453-458.

PRODUCTO CARTESIANO DE CONJUNTOS. El producto cartesiano una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i \in I}$, denotado por $\prod_{i \in I} X_i$, es el conjunto formado por las aplicaciones $x : i \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ tales que $x(i) = x_i \in X_i$, $\forall i \in I$ (esta condición se suele enunciar diciendo que α es una función de elección de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$).

PRODUCTO ESCALAR. El producto escalar de dos vectores $x = (x_1, \dots, x_l)$ e $y = (y_1, \dots, y_l)$ en \mathbb{R}^l es el número real definido por $xy = \sum_{i=1}^l x_i y_i$. La norma de un vector x se representa por $\|x\|$ y se define de la siguiente manera: $\|x\| = \sqrt{xx}$. Obsérvese que por el teorema de Pitágoras la norma de x es la distancia que media entre el punto x y el origen, es decir, la longitud del vector x .

PSICOLOGÍA ECONÓMICA. En economía se suele emplear este término para referirse a la psicología cognitiva del modo en que ha sido aplicada a cuestiones económicas. Este concepto también se utiliza para designar a un tercer subcampo de los métodos experimentales empleados en economía que recientemente se ha diferenciado como "economía del comportamiento" (Sendhil Mullainathan y Richard H. Thaler, 2001) y que posteriormente se ha diferenciado como "teoría de juegos del comportamiento" (Colin F. Camerer, 2002); los principios fundamentales fueron estabularcidos por W. Edwards, Danny Kahneman, Anatol Rapoport, Paul Slovic y Amos Tversky, por mencionar a algunos de los más destacados.

Referencias: (1) Camerer, C. F. (2002) Behavioral game theory: Experiments on strategic interaction, Princeton University Press, Princeton. (2)

Mullainathan, S. y Thaler, R. (2001) Behavioral Economics in International Encyclopedia of the Social And Behavioral Sciences, Vol. 2, Pergamon, Oxford, págs. 1094-1099.

R

RELACIÓN BINARIA. Una relación binaria \succeq definida sobre un conjunto finito de opciones X es una relación entre X y X . || **Reflexiva.** Dícese de la relación binaria \succeq tal que para todo $x \in X$ se cumple $x \succeq x$. Esta propiedad establece que cualquier elemento del conjunto X es al menos tan preferido como si mismo si \succeq es una relación de preferencia. || **Simétrica.** Dícese de la relación binaria \succeq tal que $x \succeq x'$ implica que $x' \succeq x$ cualesquiera que sean $x, x' \in X$. || **Asimétrica.** Dícese de la relación binaria \succeq tal que $x \succeq x'$ implica que $x' \succeq x$ es falso cualesquiera que sean $x, x' \in X$. || **Antisimétrica.** Dícese de la relación binaria \succeq tal que si $x \succeq x'$ y $x' \succeq x$ implican que $x = x'$ cualesquiera que sean $x, x' \in X$. || **Transitiva.** Dícese de la relación binaria \succeq tal que $x \succeq x'$ y $x' \succeq x''$ implican que $x \succeq x''$ cualesquiera que sean $x, x', x'' \in X$. || **Acíclica.** Dícese de la relación binaria \succeq tal que $x_1 \succeq x_2 \succeq \dots \succeq x_n$ implica que $x_n \succeq x_1$ es falso, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x_1, \dots, x_n \in X$. || **Orden o relación de orden.** Dícese de la relación binaria \succeq reflexiva, transitiva y antisimétrica. || **Equivalencia o relación de equivalencia.** Dícese de la relación binaria \succeq reflexiva, simétrica y transitiva.

RETÍCULO. Término matemático que se refiere a un conjunto parcialmente ordenado en el que cada subconjunto de dos elementos tiene extremo superior e inferior. En otras pala-

bras, si L es un conjunto parcialmente ordenado, diremos que L es un semirretículo inferior (resp. superior) si para cualesquiera x e y elementos de L , existen el ínfimo, $\inf(\{x\}, \{y\})$ (resp. el supremo, $\sup(\{x\}, \{y\})$) del conjunto $\{x, y\}$. Un conjunto ordenado que es a la vez un semirretículo inferior y superior se denomina un retículo.

S

SESGO DEL EXPERIMENTADOR.

Término que indica el efecto que puede ejercer un investigador, sin saberlo, en los resultados de un experimento, por lo general en un sentido que favorece la hipótesis. El sesgo del experimentador no sólo alude a los casos conscientes de fraude, sino también a las influencias mucho más sutiles que los investigadores ejercen de forma inadvertida en el resultado de sus estudios. Una gran cantidad de investigaciones y de observaciones anecdóticas ha establecido, ciertamente, que suceden tales efectos. Es posible que el experimentador interáctue con los participantes en las distintas condiciones de maneras ligeramente diferentes; puede variar su tono y énfasis de voz al leer las instrucciones; y, de igual modo, pueden diferir las claves faciales, gestos, etc. Véase Efectos del experimentador.

SIMULACIÓN. Término que se refiere a todo proceso que comprende el diseño de un modelo del sistema real y el experimento (atemporal) sobre tal modelo con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar diferentes estrategias –dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos– para el funcionamiento del sistema u optimizar su operatividad. || Técnica numérica para conducir experimentos en una

computadora digital. Estos experimentos comprenden ciertos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, las cuales son necesarias para describir el comportamiento y la estructura de sistemas complejos del mundo real a través de largos periodos de tiempo” || *Mat.* Proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias -dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos - para el funcionamiento del sistema”. Véase Experimento de Monte Carlo.

SUBCICLO PROPIO. Si X es un conjunto de opciones, \succeq una relación binaria definida sobre X y C un ciclo de la relación binaria \succeq , se dice que $C' \subseteq X$ es un subciclo propio de C si C' es un ciclo de la relación binaria \succeq y, además, $C' \subsetneq C$.

T

TAMAÑO DEL CONTRASTE. El tamaño del contraste indica la probabilidad de incurrir en el error de tipo I. Generalmente se designa mediante α y también se le denomina nivel de significatividad. Véase también error tipo I.

TAMAÑO DE ENTRADA de un algoritmo. El tamaño de entrada de un algoritmo indica el número de componentes sobre los que se va a ejecutar el algoritmo. Por ejemplo, la dimensión del vector a ordenar o el tamaño de las matrices a multiplicar.

TEOREMA DE CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEIN. El Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein establece que para todo

par de conjuntos X e Y si $|X| \leq |Y|$ y $|Y| \leq |X|$, entonces $|X| = |Y|$.

Referencias: (1) Dugundji, J. (1989) *Topology*. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Publishers. (2) Kaplansky, I. (2001) *Set Theory and Metric Spaces*. New York: AMS Chelsea Publishing Company.

TEOREMA DE ZERMELO. Véase Axioma de la elección.

U

UMBRAL. Término psicológico que se refiere a la componente fisiológica presente en la percepción hace que en muchas ocasiones introducimos algún cambio en nuestros precios, ofertas o actividades comerciales o humanas y, sin embargo, los consumidores y otras personas no perciben el cambio. La existencia de umbrales en la percepción pueden originar –como consecuencia de la capacidad limitada de discriminación entre opciones– que en algunas situaciones el comportamiento de un consumidor no sea optimizador. Se suelen utilizar en marketing para predecir cómo responderán los consumidores a ligeras variaciones en las variables de marketing: modificaciones en el tamaño de los envases, en las cantidades de producto, en el precio o en los propios diseños. || **Umbral absoluto.** Dícese del umbral determinado por la barrera hipotética que tienen que atravesar los estímulos entrantes antes de que el ser humano pueda percibirlos. || **Umbral de decisión.** Dícese del umbral presente en cualquier estímulo que provoca una respuesta. Es el resultado del criterio y de la fuerza del estímulo. || **Umbral diferencial.** Dícese del punto promedio en que se juzga que dos estímulos son distintos. || **Umbral máximo.** Dícese del umbral determinado por el valor máximo de estímulo que

el ser humano puede percibir. || **Umbral mínimo.** Dícese del umbral determinado por el valor mínimo o menor cantidad de un estímulo que el ser humano puede captar o percibir conscientemente. || **Umbral objetivo.** Dícese del umbral determinado por el nivel de energía del estímulo que provoca una conducta aleatoria verdadera. || **Umbral objetivo.** Dícese del umbral determinado por el nivel de energía del estímulo en el que se afirma no tener conciencia de algo, pero en el cual la conducta señala la percepción del suceso. *Véase* Percepción.

V

VALOR CRÍTICO (p-valor). Término que indica el menor nivel de significación al que puede aceptarse una hipótesis nula se denomina valor crítico o p-valor del contraste.

VALOR PERCIBIDO. Término que se refiere a la evaluación global del consumidor de la utilidad de un producto. Se basa en la percepción de lo que se recibe y lo que se da a cambio.