



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Geometría riemanniana y análisis complejo en una variable

Autor: Mario García Mayo

Tutor/es: Jorge Mozo Fernández

Índice general

1. Geometría riemanniana	4
1.1. Introducción	4
1.2. Métricas conformes	10
1.2.1. Isometrías	12
1.2.2. Curvatura	14
2. La métrica de Poincaré	15
2.1. Propiedades	15
2.2. Aplicaciones al análisis complejo	23
2.2.1. Interpretación geométrica del lema de Schwarz y generalización al lema de Ahlfors-Schwarz	23
2.2.2. Teorema de Liouville y pequeño teorema de Picard	27
2.2.3. Familias normales, teorema de Montel y gran teorema de Picard	29
3. Otras métricas invariantes	38
3.1. La métrica de Carathéodory	38
3.2. La métrica de Kobayashi	40
3.3. Algunos resultados relacionados con estas métricas	43
A. Operadores diferenciales complejos	48
B. Algunos teoremas clásicos de variable compleja	51
Bibliografía	53

Introducción

El objetivo principal del trabajo será emplear técnicas de geometría riemanniana sobre abiertos del plano complejo para demostrar e interpretar en este contexto algunos resultados clásicos del análisis complejo, como por ejemplo el lema de Schwarz, el teorema de Montel o los teoremas de Picard. Por tanto, el trabajo está fuertemente relacionado con las asignaturas del tercer curso del grado *Variable compleja y Geometría de curvas y superficies*.

Se comenzará dando una breve introducción a la geometría riemanniana, centrándonos en el caso de superficies, basada en los apuntes de los cursos 2019-20 y 2020-21 de la asignatura Geometría de curvas y superficies ([3] y [6]). En esta introducción tan solo buscaremos llevar los conceptos que presentemos al plano complejo, así que tampoco nos adentraremos demasiado en la geometría riemanniana como tal. Si se desea profundizar más en este campo, el texto [2] de Do Carmo lo trata con más detalle.

Una vez nos adentremos en el plano complejo, el trabajo seguirá principalmente el texto [5] de Krantz, apoyándose también en los textos [7] y [8] de Simon y en el texto [4] de Gong. Estudiaremos principalmente en la llamada *métrica de Poincaré*, con la que llegaremos a casi todos los resultados que queremos probar. La principal motivación de esta parte será que, usando las técnicas de geometría riemanniana que hayamos introducido, podremos llegar a resultados importantes como el teorema de los tres valores de Montel o el gran teorema de Picard de una forma mucho más sencilla que en las demostraciones clásicas.

Para finalizar el trabajo, siguiendo también el texto [5] de Krantz introduciremos otros ejemplos de métricas conformes, las métricas de *Carathéodory* y de *Kobayashi*. Veremos como se relacionan entre sí y con la métrica de Poincaré y mostraremos un par de aplicaciones interesantes de estas.

Capítulo 1

Geometría riemanniana

1.1. Introducción

Comenzamos haciendo una breve introducción a la geometría riemanniana para saber de donde proviene todo lo que usaremos más adelante. Las demostraciones de algunos resultados que ya se vieron en la asignatura de Geometría de curvas y superficies del tercer año del grado no se introducirán en el trabajo.

Definición 1.1. Una subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^n de dimensión d es un subespacio conexo S de \mathbb{R}^n tal que para cada punto $P \in S$ existe una terna (V, U, φ) , llamada carta local, donde V es un abierto de \mathbb{R}^d , U es un abierto de S con $P \in U$ y $\varphi : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo diferenciable tal que $d\varphi|_x : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $x \in V$.

Observación 1.2. A través de las cartas locales (V, U, φ) , S hereda la estructura diferenciable de \mathbb{R}^d . Además, al ser $\varphi : V \rightarrow U$ un homeomorfismo se tiene que para todo punto y de U existe un único $x \in V$ tal que $y = \varphi(x)$, luego los puntos de U están parametrizados por los de V .

Nos centraremos en el caso de superficies diferenciables, es decir, subvariedades diferenciables de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 . Como lo que haremos es un estudio local de las superficies, podremos debilitar un poco la definición.

Definición 1.3. Una superficie parametrizada en \mathbb{R}^3 es la imagen $S = \mathbf{r}(D)$ de una aplicación $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase \mathcal{C}^∞ tal que D es un abierto conexo de \mathbb{R}^2 , $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbf{r}(D)$ es un homeomorfismo y $d\mathbf{r}|_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $x \in D$.

Observación 1.4. La razón por la que nos basta con estudiar superficies parametrizadas es que las cartas locales de una superficie son superficies parametrizadas, y si existen dos

cartas distintas en un mismo punto de S se puede llegar de una a otra mediante un difeomorfismo.

Definición 1.5. Sea $S = \mathbf{r}(D)$ una superficie parametrizada y $P \in S$, donde $P = \mathbf{r}(x)$, $x \in D$. El espacio tangente a S en P , $T_S(P)$, es el plano generado por los vectores $\mathbf{r}_u(x)$ y $\mathbf{r}_v(x)$.

Nos surge ahora la pregunta de cómo podemos medir sobre superficies. Lo que haremos será restringir la métrica euclídea de \mathbb{R}^3 a los planos tangentes a la superficie.

Definición 1.6. Sea $S = \mathbf{r}(D)$ una superficie parametrizada y $P \in S$. La primera forma fundamental de S en P es el producto escalar en $T_P(S)$ restricción del producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^3 , es decir, la aplicación $I_P : T_P(S) \times T_P(S) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

Recordamos que $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ es una base de $T_P(S)$, es decir, cada vector $\mathbf{v} \in T_P(S)$ puede escribirse como $\mathbf{v} = v_1\mathbf{r}_u + v_2\mathbf{r}_v$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} I(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1\mathbf{r}_u + v_2\mathbf{r}_v) \cdot (w_1\mathbf{r}_u + w_2\mathbf{r}_v) = \\ &= v_1w_1(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u) + (v_1w_2 + v_2w_1)(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v) + v_2w_2(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) \end{aligned}$$

Es decir,

$$I(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v & \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{pmatrix} \mathbf{w}$$

Decimos entonces que $E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u$, $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v$ y $G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$ son los coeficientes de la primera forma fundamental. Se ha visto en la asignatura de Geometría de curvas y superficies que la longitud de una curva contenida en una superficie se puede expresar en términos de estos coeficientes: si $\gamma = \mathbf{r} \circ \beta : I \rightarrow S$ es una curva en S y $a, b \in I$, la longitud del arco de curva entre a y b es

$$l_a^b(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2} dt$$

Fijando $a \in I$ y escribiendo $s(t) = l_a^t(\gamma)$, se tiene que

$$s'(t) = \sqrt{E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2}$$

Esto suele escribirse como

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

y representa el cuadrado de la longitud del vector infinitesimal $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$. A veces se llama a esto primera forma fundamental, y con ello únicamente se está indicando cuáles son los coeficientes.

Vamos a estudiar ahora como varía el vector normal de una superficie al realizar leves desplazamientos por ella.

Sea N un campo vectorial (es decir, una aplicación $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m > 1$) unitario y diferenciable en S . Entonces, se tiene que los vectores de la imagen de N están en la esfera \mathbb{S}^2 . Consideramos la aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ que envía cada punto P de S en el punto que le corresponde a su vector normal en la esfera. Los planos tangentes a S por P y a \mathbb{S}^2 por $N(P)$ son perpendiculares al vector normal, así que son iguales. Se tiene entonces que la diferencial de N induce un endomorfismo $d_P N : T_P(S) \rightarrow T_P(S)$ definido por

$$d_P N(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt}(N(\gamma(t))) \right|_{t=0}$$

donde $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ es una curva tal que $\gamma(0) = P$ y $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ (la definición no depende de la curva escogida). El endomorfismo $A_P = -d_P N$ es conocido como endomorfismo de Weingarten. En la asignatura de Geometría de curvas y superficies se ha visto que se trata de un endomorfismo autoadjunto, es decir,

$$A_P(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot A_P(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P(S)$$

Definición 1.7. Sea $S = \mathbf{r}(D)$ una superficie parametrizada y $P \in S$. La segunda forma fundamental de S en P es la forma bilineal simétrica asociada al endomorfismo de Weingarten A_P , es decir,

$$\text{II}_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = A_P(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot A_P(\mathbf{w})$$

Aplicando el operador de Weingarten a los vectores \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v , se tiene que $A_P(\mathbf{r}_u) = -\mathbf{n}_u$ y $A_P(\mathbf{r}_v) = -\mathbf{n}_v$. Los coeficientes de la segunda forma fundamental vienen dados entonces

por

$$\begin{aligned} e &= A_P(\mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_u = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_u \\ f &= A_P(\mathbf{r}_u) \cdot \mathbf{r}_v = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u \\ &= \mathbf{r}_u \cdot A_P(\mathbf{r}_v) = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v \\ g &= A_P(\mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_v = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_v \end{aligned}$$

Como los vectores \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v generan el plano tangente y son perpendiculares al vector normal, se tiene que $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n} = 0$. Derivando estas identidades se llega a que otra expresión de los coeficientes de la segunda forma fundamental es $e = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}$, $f = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}$ y $g = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}$. Podemos entonces obtener los coeficientes de A_P a partir de los de I y II. Si

$$A_P \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{r}_u + a_{12}\mathbf{r}_v \\ a_{21}\mathbf{r}_u + a_{22}\mathbf{r}_v \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} e &= (a_{11}\mathbf{r}_u + a_{12}\mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_u = a_{11}E + a_{12}F \\ f &= (a_{11}\mathbf{r}_u + a_{12}\mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_v = a_{11}F + a_{12}G \\ f &= (a_{21}\mathbf{r}_u + a_{22}\mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_u = a_{21}E + a_{22}F \\ g &= (a_{21}\mathbf{r}_u + a_{22}\mathbf{r}_v) \cdot \mathbf{r}_v = a_{21}F + a_{22}G \end{aligned}$$

En forma matricial, esto se escribe como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Obtenemos así las llamadas ecuaciones de Weingarten, que describen los coeficientes del operador de Weingarten en función de los coeficientes de las dos primeras formas funda-

mentales.

$$a_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2} \quad a_{12} = \frac{fE - eF}{EG - F^2} \quad a_{12} = \frac{fG - gF}{EG - F^2} \quad a_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2}$$

Introducimos finalmente el concepto de curvatura, que medirá la variación del vector normal al desplazarnos por la superficie.

Definición 1.8. Sea $P \in S$.

- La curvatura normal de S en P en la dirección de $\mathbf{v} \in T_P(S)$ es $k_P(\mathbf{v}) = \Pi_P(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|})$
- Las curvaturas principales de S en P , $k_1(P)$ y $k_2(P)$, son los valores máximo y mínimo que alcanza la curvatura normal de S en P variando la dirección.
- La curvatura gaussiana de S en P , $K(P)$, es el producto de las curvaturas principales de S en P .

En la asignatura de Geometría de curvas y superficies se ha visto que las curvaturas principales son precisamente los autovalores del automorfismo de Weingarten, A_P . Entonces, podemos deducir de las ecuaciones de Weingarten que la curvatura gaussiana será

$$K(P) = \det(A_P) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Veamos un ejemplo del cálculo de la curvatura usando esta fórmula que será fundamental cuando hablemos de métricas en abiertos del plano complejo.

Ejemplo 1.9. Consideramos una superficie cuya primera forma fundamental sea

$$ds^2 = I = \rho^2 du^2 + \rho^2 dv^2$$

donde $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase \mathcal{C}^2 . Se tiene que $E = G = \rho^2$ y $F = 0$. De la identidad

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2$$

se deduce que $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \rho^2$. Recordemos que el vector normal unitario en un punto de la superficie viene dado por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

Vamos a calcular los productos eg y f^2 . Se tiene que

$$eg = \left(\mathbf{r}_{uu} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \right) \left(\mathbf{r}_{vv} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \right) = \frac{1}{\rho^4} (\mathbf{r}_{uu} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)) (\mathbf{r}_{vv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v))$$

El producto mixto $\mathbf{r}_{uu} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ puede calcularse como el determinante de la matriz 3×3 cuyos vectores fila son cada uno de los vectores \mathbf{r}_{uu} , \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v . Del mismo modo, el producto $\mathbf{r}_{vv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ puede calcularse como el determinante de la matriz cuyos vectores columna son cada uno de los vectores \mathbf{r}_{vv} , \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v . Entonces, se tiene que

$$ef = \frac{1}{\rho^4} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_{vv} & \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_{vv} & \rho^2 & 0 \\ \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_{vv} & 0 & \rho^2 \end{vmatrix}$$

Del mismo modo,

$$g^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_{uv} & \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_{uv} & \rho^2 & 0 \\ \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_{uv} & 0 & \rho^2 \end{vmatrix}$$

Derivando las expresiones $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \rho^2$ y $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$, se llega a que

$$\begin{array}{lll} \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_u = \rho\rho_u & \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_u = \rho\rho_v & \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_v = -\rho\rho_v \\ \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{r}_v = \rho\rho_v & \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_v = \rho\rho_u & \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{r}_u = -\rho\rho_u \end{array}$$

Derivando de nuevo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_v) &= \mathbf{r}_{uuv} \cdot \mathbf{r}_v + \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_{uv} = \rho_u^2 + \rho\rho_{uu} \\ \frac{\partial}{\partial v}(\mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_v) &= \mathbf{r}_{uuv} \cdot \mathbf{r}_v + \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_{vv} = -\rho_v^2 - \rho\rho_{vv} \end{aligned}$$

y entonces

$$\mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_{vv} - \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_{uv} = -(\rho_u^2 + \rho_v^2) - \rho\Delta\rho$$

Sustituyendo en los determinantes las expresiones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} eg - f^2 &= \frac{1}{\rho^4} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_{vv} & \rho\rho_u & -\rho\rho_v \\ -\rho\rho_u & \rho^2 & 0 \\ \rho\rho_v & 0 & \rho^2 \end{vmatrix} - \frac{1}{\rho^4} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_{uv} & \rho\rho_v & \rho\rho_u \\ \rho\rho_v & \rho^2 & 0 \\ \rho\rho_u & 0 & \rho^2 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{r}_{vv} + \rho_u^2 + \rho_v^2 - \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{r}_{uv} + \rho_u^2 + \rho_v^2 \\ &= \rho_u^2 + \rho_v^2 - \rho\Delta\rho \end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\rho_u^2 + \rho_v^2 - \rho \Delta \rho}{\rho^4} = -\frac{\Delta \log \rho}{\rho^2}$$

1.2. Métricas conformes

Una vez presentados los conceptos principales de la geometría riemanniana, vamos a introducirlos en el plano complejo. Identificando \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , podemos aplicar los conceptos de la sección anterior a los abiertos de \mathbb{C} .

Definición 1.10. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio del plano complejo. Una métrica (conforme) en Ω es una función $\rho : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ de clase \mathcal{C}^2 .

Observación 1.11. Esta definición se corresponde precisamente con el ejemplo 1.9, ya que se tiene que

$$ds^2 = \rho^2 |dz|^2$$

Observación 1.12. A la hora de definir la métrica se puede permitir que esta tenga ceros aislados, es decir, puntos en los que $\rho(z) = 0$, y entonces ρ deberá ser \mathcal{C}^2 en $\{z \in \Omega : \rho(z) > 0\}$. Sin embargo, nosotros no entraremos en estos casos, y nuestras métricas serán estrictamente positivas.

Definición 1.13. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y ρ una métrica en Ω . Se define la longitud de un vector $\xi \in \mathbb{C}$ en un punto $z \in \Omega$ como

$$\|\xi\|_{\rho, z} = \rho(z) \cdot |\xi|$$

donde $|\xi|$ es el módulo de ξ .

A continuación se muestran algunos ejemplos de métricas conformes:

Ejemplo 1.14. Sea Ω un dominio cualquiera de \mathbb{C} y $\rho(z) = 1$ para todo $z \in \Omega$. La longitud de un vector ξ viene dada por

$$\|\xi\|_{\rho, z} = |\xi|$$

Es decir, en esta métrica la longitud de un vector no depende del punto base z y coincide con su módulo usual. Esta métrica se denomina *métrica euclídea*.

Ejemplo 1.15. Sea $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$ y

$$\rho(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}$$

Esta es la *métrica esférica*. Podemos observar que en esta métrica la longitud de un vector depende del punto de partida z que escojamos. Fijando ξ , se tiene que

$$\|\xi\|_{\rho,0} = 2|\xi| \quad \|\xi\|_{\rho,1} = |\xi|$$

Y de hecho, si $|z| \rightarrow \infty$ entonces

$$\|\xi\|_{\rho,z} \rightarrow 0$$

Normalmente, consideramos que un vector tiene únicamente módulo y dirección. Con estas nuevas métricas, tendremos que tener también en cuenta la posición del vector.

Veremos más adelante que el nombre de esta métrica se debe a que la distancia en ella entre dos puntos es precisamente la longitud del arco de circunferencia que une las contra-ímagenes por la proyección estereográfica de dichos puntos.

Ejemplo 1.16. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unidad D y

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Esta es la *métrica de Poincaré*, en la que centraremos nuestra atención en el próximo capítulo. Al igual que en la métrica esférica, la longitud de un vector variará según el punto de partida que tomemos.

Una vez definida la longitud de un vector, podemos calcular la longitud de curvas y la distancia entre puntos de Ω :

- Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio, ρ una métrica en Ω y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva continua diferenciable, su longitud en la métrica ρ viene dada por

$$l_\rho(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\rho, \gamma(t)} dt$$

Si γ es una curva continua diferenciable a trozos, su longitud es la suma de la longitud de cada uno de los trozos.

- Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio y $z_0, z_1 \in \Omega$ dos puntos, la distancia entre z_0 y z_1 en la métrica ρ viene dada por

$$d_\rho(z_0, z_1) = \inf\{l_\rho(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}_\Omega(z_0, z_1)\}$$

donde $\mathcal{C}_\Omega(z_0, z_1)$ es la familia de curvas diferenciables a trozos $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ tales que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$.

Ejemplo 1.17. El inferior con el que se define la distancia no siempre tiene por qué alcanzarse. Por ejemplo, si tomamos $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ con la métrica euclídea, la distancia entre dos puntos z_0 y z_1 con parte real positiva y parte imaginaria con signo distinto será la suma de las longitudes de los segmentos que unan cada uno de estos puntos con 0, pero esta curva no está contenida en Ω al pasar por 0.

En la siguiente figura se muestra como para cada curva que una los dos puntos, se puede encontrar una más corta que se acerque más a la que pasa por el cero, ilustrando que el inferior se obtendría con dicha curva.

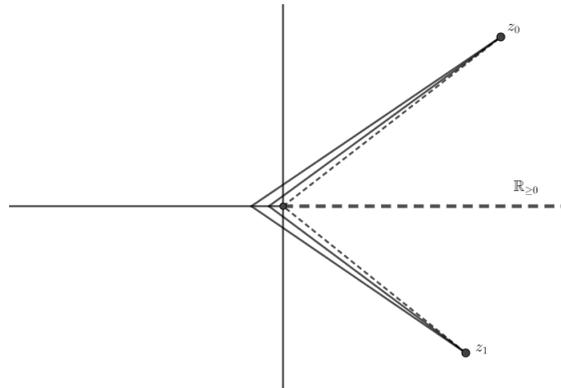


Figura 1.1: Ejemplo 1.17

1.2.1. Isometrías

Para hablar de isometrías en métricas conformes, utilizaremos el concepto de pullback (o imagen inversa) de la métrica.

Definición 1.18. Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios de \mathbb{C} y $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una función diferenciable tal que $f'(z) \neq 0$ en cada $z \in \Omega_1$. Sea ρ una métrica sobre Ω_2 . Se define el pullback de ρ bajo f como la métrica sobre Ω_1 dada por

$$f^* \rho(z) = \rho(f(z)) \cdot |f'(z)|$$

Definición 1.19. Sean Ω_1, Ω_2 dos dominios de \mathbb{C} y ρ_1, ρ_2 dos métricas sobre ellos. Sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una aplicación biyectiva y diferenciable. Si $f^* \rho_2(z) = \rho_1(z)$ para todo $z \in \Omega_1$, se dice que f es una isometría entre (Ω_1, ρ_1) y (Ω_2, ρ_2) .

Proposición 1.20. Sean Ω_1, Ω_2 dos dominios de \mathbb{C} y ρ_1, ρ_2 dos métricas sobre ellos. Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es holomorfa y es una isometría entre (Ω_1, ρ_1) y (Ω_2, ρ_2) se verifican las siguientes propiedades:

a) Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega_1$ es una curva diferenciable, también lo es $f^*\gamma = f \circ \gamma$, y

$$l_{\rho_1}(\gamma) = l_{\rho_2}(f^*\gamma)$$

b) Si $z_0, z_1 \in \Omega_1$ entonces

$$d_{f^*\rho}(z_0, z_1) = d_\rho(f(z_0), f(z_1))$$

c) f^{-1} es una isometría entre (Ω_2, ρ_2) y (Ω_1, ρ_1) .

Demostración. a) Por definición,

$$l_{\rho_2}(f^*\gamma) = \int_a^b \|(f^*\gamma)'(t)\|_{\rho_2, f^*\gamma(t)} dt$$

Aplicando al integrando la regla de la cadena y las definiciones anteriores,

$$\begin{aligned} \|(f^*\gamma)'(t)\|_{\rho_2, f^*\gamma(t)} &= \left\| \frac{df}{dz}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right\|_{\rho_2, f^*\gamma(t)} = \rho_2(f^*\gamma(t)) \left| \frac{df}{dz}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right| = \\ &= (f^*\rho_2)(\gamma(t)) |\gamma'(t)| = \rho_1(\gamma(t)) |\gamma'(t)| = \|\gamma'(t)\|_{\rho_1, \gamma(t)} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$l_{\rho_2}(f^*\gamma) = \int_a^b \|(f^*\gamma)'(t)\|_{\rho_2, f^*\gamma(t)} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\rho_1, \gamma(t)} dt = l_{\rho_1}(\gamma)$$

b) Es consecuencia inmediata de a).

c) La existencia de la inversa se deduce de que f sea isometría, y como f es holomorfa f^{-1} también lo será. Derivando la identidad $z = f(f^{-1}(z))$, se tiene que

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f^{-1*}\rho_1(z) &= \rho_1(f^{-1}(z)) |(f^{-1})'(z)| = f^*\rho_2(f^{-1}(z)) |(f^{-1})'(z)| = \\ &= \rho_2(f(f^{-1}(z))) |f'(f^{-1}(z))| \frac{1}{|f'(f^{-1}(z))|} = \rho_2(z) \end{aligned}$$

□

1.2.2. Curvatura

Hemos visto en el ejemplo 1.9 que para el caso $ds^2 = \rho^2|dz|$ la curvatura gaussiana se puede obtener directamente con una fórmula. Asumiremos esa fórmula como la definición de curvatura para nuestras métricas.

Definición 1.21. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y ρ una métrica sobre él. Se define la curvatura de ρ en un punto $z \in \Omega$ como

$$\kappa_\rho(z) = \frac{-\Delta \log \rho(z)}{\rho(z)^2}$$

Observamos que κ es continua al ser ρ de clase \mathcal{C}^2 .

Teorema 1.22. (Invarianza de la curvatura). Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios de \mathbb{C} y $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una aplicación conforme. Si ρ es una métrica en Ω_2 se tiene que

$$\kappa_{f^*\rho}(z) = \kappa_\rho(f(z)) \quad \forall z \in \Omega_1$$

Demostración. Queremos calcular

$$\kappa_{f^*\rho}(z) = \frac{-\Delta \log (f^*\rho(z))}{(f^*\rho(z))^2} = \frac{-\Delta \log (\rho(f(z))) - \Delta \log (|f'(z)|)}{\rho(f(z))^2|f'(z)|^2}$$

El segundo término del numerador resulta ser

$$\Delta \log (|f'(z)|) = \frac{1}{2} \Delta \log (|f'(z)|^2) = 0$$

ya que por el lema A.1 $\log (|f'(z)|^2)$ es una función armónica. Entonces, aplicando el lema A.2 se obtiene que

$$\kappa_{f^*\rho}(z) = \frac{-\Delta \log (\rho(f(z)))}{(\rho(f(z))|f'(z)|)^2} = \frac{-\Delta (\log \rho) \circ f(z)}{\rho(f(z))^2} = \kappa_\rho(f(z))$$

□

Capítulo 2

La métrica de Poincaré

Como hemos visto en el ejemplo 1.16, la *métrica de Poincaré*

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

es una métrica conforme en el disco unidad $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Esta será nuestro principal objeto de estudio.

2.1. Propiedades

Comenzamos estudiando la acción de funciones holomorfas sobre la métrica de Poincaré. Como la métrica está definida sobre D , nos centraremos en los automorfismos conformes de D . Vamos a ver en primer lugar cómo son estas aplicaciones.

Lema 2.1. Sea $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$ y $\varphi_a : D \rightarrow D$ la función definida por

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

Se tiene que φ_a es una biyección holomorfa, su inversa es φ_{-a} , $\varphi(D) = D$ y $\varphi(\partial D) = \partial D$.

Demostración. Es sencillo ver que $\varphi_{-a}(\varphi_a(z)) = z \quad \forall z \in D$:

$$\varphi_{-a}(\varphi_a(z)) = \frac{\frac{z-a}{1-\bar{a}z} + a}{1 + \bar{a}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}} = \frac{z(1-|a|^2)}{1-|a|^2} = z$$

Tomamos ahora z con $|z| = 1$. Se tiene que

$$|\varphi_a(z)| = \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| = \left| \frac{z-a}{\bar{z}(1-\bar{a}z)} \right| = \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|} = 1$$

Por tanto $\varphi_a(\partial D) = \partial D$. Además, por el principio del máximo se tiene que $\max\{|\varphi_a(z)| : z \in D\} = \max\{|\varphi_a(z)| : z \in \partial D\}$, luego $|\varphi_a(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$, es decir, $\varphi_a(D) = D$. \square

Proposición 2.2. Sea $f : D \rightarrow D$ una función biyectiva y holomorfa. Entonces existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$ tales que $f(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z)$ para todo $z \in D$.

Demostración. Como f es biyectiva, existe un único $a \in D$ tal que $f(a) = 0$. Sea $g = f \circ \varphi_{-a}$. Se tiene que $g(0) = 0$ (y que $g^{-1}(0) = 0$). Por el lema de Schwarz, se tiene que $|g(z)| \leq |z|$ y $|z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)|$ para todo $z \in D$. Entonces, $|g(z)| = |z|$ para todo $z \in D$ y g es una rotación, es decir, $g(z) = e^{i\theta}z$. El resultado final se obtiene de $f = g \circ \varphi_a$. \square

Es decir, los automorfismos conformes de D son precisamente las composiciones de rotaciones y transformaciones de Möbius que envían D en D (las definidas en 2.1). Conociendo su forma, podemos ver como se comporta la métrica bajo su acción.

Proposición 2.3. Sea ρ la métrica de Poincaré en el disco unidad y sea f un automorfismo conforme de D . Entonces f es una isometría entre (D, ρ) y (D, ρ) .

Demostración. Sea $f(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z)$. Derivando,

$$f'(z) = e^{i\theta} \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$

Entonces el pullback de ρ bajo f es

$$\begin{aligned} f^*\rho(z) &= \frac{1}{1-\frac{|z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}} \frac{|e^{i\theta}||1-|a|^2|}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2-|z-a|^2} = \\ &= \frac{1-|a|^2}{1+|a|^2|z|^2-2\operatorname{Re}(\bar{a}z)-|z|^2-|a|^2+2\operatorname{Re}(\bar{a}z)} = \\ &= \frac{1-|a|^2}{(1-|a|^2)(1-|z|^2)} = \rho(z) \end{aligned}$$

\square

De hecho, la propiedad de invarianza bajo los automorfismos conformes de D caracteriza a la métrica de Poincaré:

Proposición 2.4. Si $\tilde{\rho}(z)$ es una métrica conforme en D tal que todos los automorfismos conformes de D son isometrías entre $(D, \tilde{\rho})$ y $(D, \tilde{\rho})$ entonces $\tilde{\rho}$ es, salvo multiplicación por una constante, la métrica de Poincaré.

Demostración. Si fijamos $w \in D$ y consideramos la isometría $h(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}$ entonces

$$|h'(0)| \tilde{\rho}(h(0)) = h^* \tilde{\rho}(0) = \tilde{\rho}(0)$$

Como $h(0) = z_0$ y $h'(0) = 1 - |z_0|^2$, se llega a que

$$\tilde{\rho}(z_0) = \tilde{\rho}(0) \frac{1}{1 - |z_0|^2} = \tilde{\rho}(0) \rho(z)$$

□

Resulta ahora natural preguntarse si todas las isometrías en la métrica de Poincaré son automorfismos conformes. Antes de poder dar respuesta a esta pregunta necesitaremos obtener una fórmula explícita para calcular la distancia entre puntos en la métrica de Poincaré, la cual podremos conseguir gracias al resultado anterior.

Teorema 2.5. Sean $z, w \in D$. La distancia entre z y w en la métrica de Poincaré viene dada por

$$d_\rho(z, w) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|}{1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|} \right)$$

Demostración. Comenzamos considerando el caso $z = 0$:

Sea γ una curva de $\mathcal{C}_\Omega(0, w)$. Si $\gamma(s) = 0$ para algún $s \neq 0$, el segmento de γ desde s hasta 1 será otra curva de $\mathcal{C}_\Omega(0, w)$ con menor longitud. Podemos entonces suponer que $\gamma(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, 1]$ y entonces podemos escribir γ como $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$, donde $r(0) = 0$, $0 < r(t) < 1 \ \forall t \in (0, 1]$ y $\theta(t) \in \mathbb{R} \ \forall t \in [0, 1]$

Observamos ahora que la curva $\hat{\gamma}(t) = r(t)e^{i\theta(1)}$ está también en $\mathcal{C}_\Omega(0, w)$ y

$$\begin{aligned} l_\rho(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2} (1 - r(t)^2)^{-1} dt \geq \\ &\geq \int_0^1 \sqrt{r'(t)^2} (1 - r(t)^2)^{-1} dt = l_\rho(\hat{\gamma}) \end{aligned}$$

Por tanto la curva de menor longitud debe ser de la forma $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Finalmente, notamos que la rotación $h(z) = e^{-i\theta}z$, que lleva w a $|w|$, es una isometría, así que nos basta con considerar las curvas del tipo $\gamma(t) = r(t)$. Entonces la curva de menor longitud es $\gamma(t) = |w|t$ y la distancia entre 0 y w viene dada por

$$\begin{aligned} d_\rho(0, w) &= d_\rho(0, |w|) = \int_0^1 \frac{|w|}{1 - |w|^2 t^2} dt = \\ &= \int_0^{|w|} \frac{ds}{1 - s^2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |w|}{1 - |w|} \right) \end{aligned}$$

El caso general se deduce del anterior utilizando que φ_z es una isometría:

$$\begin{aligned} d_\rho(z, w) &= d_\rho(\varphi_z(z), \varphi_z(w)) = d_\rho(0, \varphi_z(w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |\varphi_z(w)|}{1 - |\varphi_z(w)|} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|}{1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|} \right) \end{aligned}$$

□

Observación 2.6. La distancia entre dos puntos z y w también se puede expresar como

$$d_\rho(z, w) = \operatorname{arctanh} \left(\frac{|z - w|}{|1 - \bar{w}z|} \right)$$

De hecho, resulta natural introducir funciones hiperbólicas en este contexto ya que el disco unidad junto con la métrica de Poincaré constituyen uno de los modelos clásicos de geometría hiperbólica, el disco de Poincaré. En este modelo, las "líneas rectas" son las rectas que pasan por el origen y las circunferencias que forman ángulos rectos con la circunferencia unidad (ortocircunferencias), que veremos a continuación que resultan ser también las geodésicas en la métrica de Poincaré.

En la geometría hiperbólica se mantienen todos los postulados de la geometría euclídea excepto el de las paralelas, que se reemplaza con el siguiente: *para cualquier recta r y cualquier punto P que no esté en r , en el plano que contiene a r y a P existen al menos dos rectas distintas que pasan por P y no intersecan a r .*

Esto es fácil de visualizar en el disco de Poincaré:

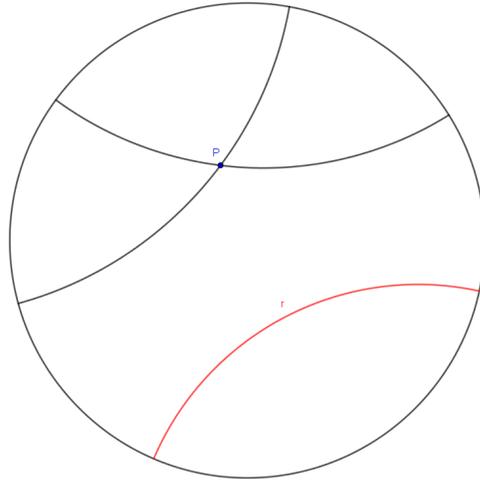


Figura 2.1: Dos rectas "paralelas" a la recta r que pasan por el punto P

Corolario 2.7. Sean $z, w \in D$. La curva de menor longitud en la métrica de Poincaré entre z y w es

$$\gamma_{z,w}(t) = \frac{t \frac{w-z}{1-\bar{z}w} + z}{1 + t\bar{z} \frac{w-z}{1-\bar{z}w}}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Demostración. Sabemos que la curva de menor longitud entre 0 y w es $\gamma_w(t) = tw$. Considerando la isometría $\varphi_z^{-1} = \varphi_{-z}$ llegamos a que

$$d_\rho(z, w) = d_\rho(\varphi_z^{-1}(0), \varphi_z^{-1}(\varphi_z(w))) = d_\rho(0, \varphi_z(w))$$

y la curva con la que se alcanza esta distancia es

$$\varphi_z^{-1} \circ \gamma_{\varphi_z(w)}(t) = \frac{t\varphi_z(w) + z}{1 + t\bar{z}\varphi_z(w)}$$

Concluimos observando que $\varphi_z^{-1} \circ \gamma_{\varphi_z(w)} = \gamma_{z,w}$. □

Observación 2.8. En la observación 2.6 comentamos que las geodésicas en la métrica de Poincaré eran los segmentos que pasan por el origen y los arcos de ortocircunferencias. Vamos a analizar las curvas obtenidas en el corolario anterior.

Al ser la curva $\gamma_{z,w}$ la imagen de un segmento a través de una transformación lineal fraccionaria, esta será o un segmento de recta o un segmento de circunferencia. Se puede ver entonces que cuando z y w son colineales con 0 la fórmula de $\gamma_{z,w}$ se reduce a la de un segmento y que cuando esto no sucede la circunferencia sobre la que se encuentra $\gamma_{z,w}$

es ortogonal a la circunferencia unidad en sus puntos de corte (aunque es algo pesado de mostrar y no entraremos en detalle).

Representando una de estas curvas se puede observar que efectivamente se trata de un arco de una ortocircunferencia:

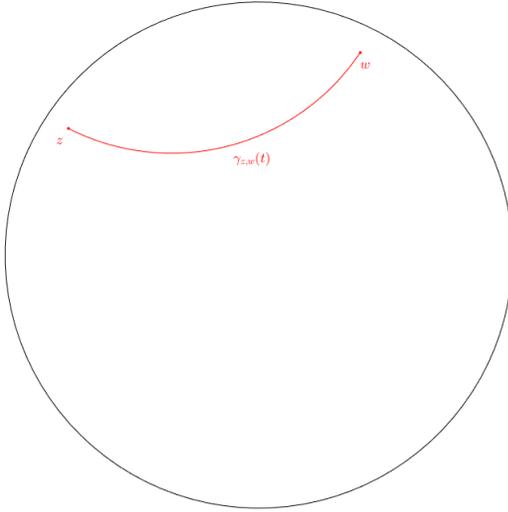


Figura 2.2: Geodésica entre $z = -0,75 + 0,5i$ y $w = 0,4 + 0,8i$

Ahora que conocemos la fórmula de la distancia, podemos responder a la pregunta que nos hicimos anteriormente sobre si las isometrías en la métrica de Poincaré eran necesariamente automorfismos conformes del disco.

Proposición 2.9. Sea $f : D \rightarrow D$ una isometría en la métrica de Poincaré. Entonces f o \bar{f} son automorfismos conformes de D .

Demostración. Sea f una isometría en la métrica de Poincaré y sea $w = f(0)$. Entonces $f_1 = \varphi_w \circ f$ es también una isometría con $f_1(0) = 0$. Consideramos el conjunto de puntos que distan $\frac{1}{2} \log 3$ del origen en la métrica de Poincaré $C = \{z : d_\rho(0, z) = \frac{1}{2} \log 3\}$. De la fórmula en 2.5 se deduce que

$$C = \left\{ z : \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) = \frac{1}{2} \log 3 \right\} = \left\{ z : |z| = \frac{1}{2} \right\}$$

Es decir, C es la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$. Además, para todo $z \in C$ se tiene que

$$d_\rho(0, z) = d_\rho(f_1(0), f_1(z)) = d_\rho(0, f_1(z))$$

luego $f_1(C) = C$. Entonces, $|f_1(z)| = |z| = \frac{1}{2}$ para todo $z \in C$. Componemos ahora f_1 con una rotación h que envíe $f_1(z)$ en $\frac{1}{2}$ para obtener $f_2 = h \circ f_1$. Se tiene entonces que f_2 deja fijo el intervalo $(-1, 1)$ (una isometría que deje fijos dos puntos de una geodésica también deja fija la geodésica por la unicidad de estas).

Nos fijamos en el punto $\frac{i}{2}$. Al ser f_2 una isometría, se tiene que $d_\rho(\frac{i}{2}, \frac{1}{2}) = d_\rho(f_2(\frac{i}{2}), \frac{1}{2})$ y $d_\rho(\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}) = d_\rho(f_2(\frac{i}{2}), -\frac{1}{2})$. Esto nos deja dos posibilidades: que sea $f_2(\frac{i}{2}) = \frac{i}{2}$ o que sea $f_2(\frac{i}{2}) = -\frac{i}{2}$. Como todo punto está determinado por su distancia a tres puntos no alineados, en el primer caso se tiene que f_2 es la identidad y en el segundo que f_2 es la conjugación. Por tanto, o bien

$$f(z) = \varphi_w^{-1}(h^{-1}(z)) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

o bien

$$\bar{f}(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

para algunos $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. □

La fórmula de la distancia también nos permite estudiar dos conceptos fundamentales de los espacios métricos: la topología y la completitud. Vamos a ver que (D, ρ) es un espacio métrico completo y su topología asociada es la usual, características bastante deseables en un espacio métrico.

Proposición 2.10. La topología inducida en D por la métrica de Poincaré es la topología usual del plano.

Demostración. Una base de entornos de 0 en la topología inducida por la métrica de Poincaré es

$$\begin{aligned} B(0, r) &= \{z : d_\rho(0, z) < r\} = \\ &= \left\{z : \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) < r\right\} = \left\{z : |z| < \frac{e^{2r} - 1}{e^{2r} + 1}\right\} \end{aligned}$$

Como $\frac{e^{2r} - 1}{e^{2r} + 1} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$, esta resulta ser también una base de entornos del origen en la topología usual así que ambas topologías coinciden en el origen. Para llevar este resultado a cualquier otro punto $a \in D$, basta considerar la transformación de Möbius

$$\varphi_{-a}(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

Al ser esta aplicación una isometría $\varphi_{-a}(B(0, r))$ es una base de entornos de a para la

topología inducida por la métrica de Poincaré, y al ser una transformación de Möbius envía circunferencias en circunferencias y entonces $\varphi_{-a}(B(0, r))$ es también una base de entornos de a para la topología usual. \square

Proposición 2.11. El disco unidad D junto con la métrica de Poincaré es un espacio métrico completo.

Demostración. Sea p_j una sucesión en D de Cauchy para la métrica de Poincaré. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_\rho(p_j, p_k) < \varepsilon$ si $j, k \geq n_0$, es decir,

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{p_j - p_k}{1 - \bar{p}_k p_j} \right|}{1 - \left| \frac{p_j - p_k}{1 - \bar{p}_k p_j} \right|} \right) < \varepsilon \quad \text{si } j, k \geq n_0$$

Desarrollando esta expresión se llega a que

$$|p_j - p_k| < \left| \frac{p_j - p_k}{1 - \bar{p}_k p_j} \right| < \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{e^{2\varepsilon} + 1} \quad \text{si } j, k \geq n_0$$

Como $\frac{e^{2\varepsilon} - 1}{e^{2\varepsilon} + 1} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos concluir que la sucesión p_j es de Cauchy para la métrica euclídea.

Por otro lado, al ser p_j de Cauchy en la métrica de Poincaré debe estar acotada en esa métrica, luego existe $M > 0$ tal que $d_\rho(0, p_j) < M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. De nuevo, desarrollando la fórmula de la distancia se obtiene que

$$|p_j| \leq \frac{e^{2M} - 1}{e^{2M} + 1} < 1$$

Es decir, p_j está contenida en un subconjunto compacto K del disco unidad. Al ser K con la métrica euclídea un espacio métrico completo y p_j una sucesión de Cauchy para la métrica euclídea, debe converger a un elemento de $K \subset D$. \square

Nos falta hablar de uno de los conceptos que introdujimos previamente: la curvatura de la métrica.

Proposición 2.12. La curvatura de la métrica de Poincaré es $\kappa_\rho(z) = -4$ para todo $z \in D$.

Demostración. En primer lugar, observamos que

$$-\Delta \log \rho(z) = \Delta \log(1 - |z|^2)$$

Desarrollando la expresión,

$$\Delta \log(1 - |z|^2) = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\log(1 - z\bar{z}) \right) = 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-z}{1 - z\bar{z}} \right) = \frac{-4}{(1 - |z|^2)^2}$$

Entonces, $\kappa_\rho(z) = -4$ para todo $z \in D$. \square

2.2. Aplicaciones al análisis complejo

2.2.1. Interpretación geométrica del lema de Schwarz y generalización al lema de Ahlfors-Schwarz

Comenzamos dando una interpretación geométrica del lema de Schwarz-Pick que además nos servirá para estudiar algunas propiedades de todas las funciones holomorfas del disco (no solo de las biyectivas).

Proposición 2.13. Sea $f : D \rightarrow D$ una función holomorfa. Entonces para todo $z \in D$ se tiene que

$$f^* \rho(z) \leq \rho(z)$$

Como consecuencia directa, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ es una curva diferenciable

$$l_\rho(f^* \gamma) \leq l_\rho(\gamma)$$

y si z_0, z_1 son dos puntos de D

$$d_\rho(f(z_0), f(z_1)) \leq d_\rho(z_0, z_1)$$

Es decir, la distancia en la métrica de Poincaré decrece bajo la acción de funciones holomorfas.

Demostración. Se tiene que

$$f^* \rho(z) = |f'(z)| \rho(f(z)) = \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}$$

y

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

Por tanto, la desigualdad que queremos probar no es más que el lema de Schwarz-Pick. \square

Observación 2.14. Si f es además biyectiva, podemos aplicar el resultado anterior a f y a f^{-1} para obtener la igualdad y ver que f es una isometría:

$$\begin{aligned}\rho(f(z))|f'(z)| &\leq \rho(z) \\ \rho(f^{-1}(z))|(f^{-1})'(z)| &\leq \rho(z) \Rightarrow \rho(z) \frac{1}{|f'(z)|} \leq \rho(f(z))\end{aligned}$$

Y entonces $\rho(f(z))|f'(z)| = \rho(z)$.

Podemos probar ahora un resultado interesante sobre la existencia de puntos fijos de funciones holomorfas del disco.

Teorema 2.15. Sea $f : D \rightarrow D$ una función holomorfa y supongamos que su imagen $M = \{f(z) : z \in D\}$ tiene clausura compacta en D . Entonces existe un único punto fijo de f en D , es decir, un único $z \in D$ tal que $f(z) = z$.

Demostración. Por hipótesis, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $m \in M$ y $|z| \geq 1$ entonces $|m - z| > 2\varepsilon$. Fijamos $z_0 \in D$ y definimos la función

$$g(z) = f(z) + \varepsilon(f(z) - f(z_0))$$

La función g es holomorfa

$$|f(z) - g(z)| = \varepsilon|f(z) - f(z_0)| \leq 2\varepsilon$$

luego $|g(z)| < 1$ para todo $z \in D$. Además,

$$g'(z) = (1 + \varepsilon)f'(z)$$

Por 2.13,

$$g^*\rho(z_0) = \rho(g(z_0))|g'(z_0)| = \rho(f(z_0))(1 + \varepsilon)|f'(z_0)| = (1 + \varepsilon)f^*\rho(z_0) \leq \rho(z_0)$$

Como esta desigualdad vale para cualquier $z_0 \in D$, se tiene que para cualquier curva diferenciable $\gamma : [a, b] \rightarrow D$

$$l_\rho(f^*\gamma) \leq (1 + \varepsilon)^{-1}l_\rho(\gamma)$$

y entonces para todo $z, w \in D$

$$d_\rho(f(z), f(w)) \leq (1 + \varepsilon)^{-1}d_\rho(z, w)$$

Por tanto f es una contracción para la métrica de Poincaré. Como D con la métrica de Poincaré es un espacio métrico completo, por el teorema del punto fijo de Banach podemos concluir que f admite un único punto fijo. \square

Corolario 2.16. Sea f como en el teorema anterior y z_0 el único punto fijo de f . La sucesión de iteraciones $f, f \circ f, f \circ f \circ f, \dots$ converge uniformemente en los compactos a la función constante z_0 .

Demostración. Sea $\bar{B}(z_0, r) = \{z \in D : d_\rho(z_0, z) \leq r\}$. Por el teorema anterior,

$$f(\bar{B}(z_0, r)) \subset \bar{B}\left(z_0, \frac{r}{1 + \varepsilon}\right)$$

y entonces si f_n es la n -ésima iteración de la sucesión,

$$f_n(\bar{B}(z_0, r)) \subset \bar{B}\left(z_0, \frac{r}{(1 + \varepsilon)^n}\right)$$

Observamos ahora que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B(z_0, j) = D$$

Por 2.5, las bolas en la distancia de Poincaré son conjuntos abiertos en la topología euclídea, luego cualquier compacto K estará en alguna bola $B(z_0, j)$. Concluimos entonces que

$$f_n(K) \subset \bar{B}\left(z_0, \frac{j}{(1 + \varepsilon)^n}\right)$$

Tomando $n \rightarrow \infty$ se obtiene el resultado final. \square

Veamos ahora que esta propiedad de decrecimiento de la distancia en la métrica de Poincaré bajo la acción de funciones holomorfas se puede generalizar a otras métricas conformes con curvatura negativa.

Teorema 2.17. (Ahlfors-Schwarz) Sea σ una métrica conforme en un dominio Ω tal que $\kappa_\sigma(z) \leq -4$ para todo $z \in \Omega$ y ρ la métrica de Poincaré en D . Si $f : D \rightarrow \Omega$ es holomorfa entonces

$$f^* \sigma(z) \leq \rho(z) \quad \forall z \in D$$

Demostración. Sea $0 < r < 1$. En $D(0, r)$, definimos la métrica

$$\rho_r(z) = \frac{r}{r^2 - |z|^2} = h_r^* \rho(z)$$

donde $h_r : D(0, r) \rightarrow D(0, 1)$ es la aplicación $h_r(z) = z/r$. Esta métrica es análoga a la métrica de Poincaré en el disco de radio r : tiene curvatura -4 en todos sus puntos y es invariante a través de aplicaciones conformes. Definimos ahora

$$v = \frac{f^*\sigma}{\rho_r}$$

Observamos que v es continua, no negativa y $v \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow r$ ($f^*\sigma$ está acotada en $D(0, r)$ al ser continua en $\bar{D}(0, r) \subset D$, mientras que $\rho_r(z) \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow r$). Por tanto, v debe alcanzar su valor máximo M en algún punto $z_0 \in D(0, r)$. Si probamos que $M \leq 1$, podremos concluir que $\rho_r(z) \leq 1 \ \forall z \in D(0, r)$ y tomando $r \rightarrow 1^-$ habremos terminado.

Si $f^*\sigma(z_0) = 0$, entonces $v \equiv 0$ y claramente $M < 1$. Supongamos que $f^*\sigma(z_0) > 0$. Por hipótesis,

$$\kappa_{f^*\sigma}(z) = \kappa_\sigma(f(z)) \leq -4 \quad \forall z \in D$$

La función $\log v$ alcanza su máximo en z_0 , luego $\Delta \log v(z_0) \leq 0$. Desarrollando esta desigualdad se llega a que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta \log v(z_0) = \Delta \log f^*\sigma(z_0) - \Delta \log \rho_r(z_0) = \\ &= -\kappa_{f^*\sigma}(z_0)(f^*\sigma(z_0))^2 + \kappa_{\rho_r}(z_0)(\rho_r(z_0))^2 \geq \\ &\geq 4(f^*\sigma(z_0))^2 - 4(\rho_r(z_0))^2 \end{aligned}$$

Entonces,

$$M = \frac{f^*\sigma(z_0)}{\rho_r(z_0)} \leq 1$$

□

Observación 2.18. Tomando Ω el disco unidad y σ la métrica de Poincaré obtenemos la versión del lema de Schwarz-Pick vista en 2.13. Por tanto, este teorema se trata de una generalización suya.

Podemos obtener una versión más fuerte del teorema anterior si en vez de D con la métrica de Poincaré consideramos el disco $D(0, \alpha)$ y la métrica

$$\rho_\alpha^A(z) = \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2 - |z|^2)}$$

con curvatura constante negativa $-A$. Omitiremos su demostración ya que es análoga a la anterior.

Teorema 2.19. (Ahlfors-Schwarz generalizado) Sea $A > 0$, ρ_α^A la métrica conforme en $D(0, \alpha)$ vista en la observación anterior y σ una métrica conforme en un dominio Ω tal que $\kappa_\sigma(z) \leq -B$ para todo $z \in \Omega$, donde $B > 0$. Si $f : D(0, \alpha) \rightarrow \Omega$ es holomorfa,

$$f^*\sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\rho_\alpha^A(z) \quad \forall z \in D(0, \alpha)$$

2.2.2. Teorema de Liouville y pequeño teorema de Picard

Los primeros resultados clásicos que podremos demostrar usando lo visto hasta ahora son el teorema de Liouville y el pequeño teorema de Picard. La clave para esto será el siguiente resultado, que se deduce de 2.19.

Teorema 2.20. (Ahlfors-Liouville) Sea σ una métrica conforme en un dominio Ω tal que $\kappa_\sigma(z) \leq -B < 0$ para todo $z \in \Omega$. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \Omega$ es una función entera, f es constante.

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Para $\alpha > |z|$ y $A > 0$, podemos aplicar el teorema 2.19 a la restricción de f al disco $D(0, \alpha)$, obteniendo

$$f^*\sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\rho_\alpha^A(z)$$

Teniendo en cuenta que $\rho_\alpha^A(z) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$ llegamos a que

$$f^*\sigma(z) = \sigma(f(z))|f'(z)| \leq 0$$

Entonces $f'(z) = 0$. Como la elección de z es arbitraria, f tiene que ser constante. □

El teorema de Liouville es una consecuencia directa de 2.20.

Teorema 2.21. (Liouville) Toda función entera y acotada es constante.

Demostración. Sea f una función entera y acotada. Tras multiplicar f por una constante si fuese necesario, su imagen estará en el disco unidad. Como la métrica de Poincaré tiene curvatura constante negativa, del teorema anterior se deduce que f debe ser constante. □

El pequeño teorema de Picard es un resultado bastante más fuerte que el teorema de Liouville, ya que nos permite sustituir la hipótesis de que f esté acotada por que f omita tan solo dos valores. Para demostrarlo, además de 2.20 necesitaremos otro resultado que veremos a continuación.

Proposición 2.22. Sea Ω un dominio tal que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contiene al menos dos puntos. Entonces Ω admite una métrica μ cuya curvatura satisface $\kappa_\mu(z) \leq -B < 0$ para alguna constante positiva B .

Demostración. Aplicando una transformación lineal invertible a Ω , podemos llevar dos de los puntos de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ a 0 y a 1. Vamos entonces a construir una métrica con curvatura estrictamente negativa en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Definimos

$$\mu(z) = \left(\frac{(1 + |z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \right) \left(\frac{(1 + |z - 1|^{1/3})^{1/2}}{|z - 1|^{5/6}} \right)$$

Está claro que μ es positiva y de clase \mathcal{C}^2 . Calculamos la curvatura de μ . En primer lugar, notamos que

$$\Delta(\log |z|^{5/6}) = \frac{5}{12} \Delta(\log |z|^2) = 0$$

por el lema A.1. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta \log \left(\frac{(1 + |z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \right) &= \frac{1}{2} \Delta \log(1 + |z|^{1/3}) = 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log(1 + (z\bar{z})^{1/6}) = \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^{1/6}}{\bar{z}^{5/6} + \bar{z}z^{1/6}} \right) = \frac{1}{18} \frac{1}{|z|^{5/3}(1 + |z|^{1/3})^2} \end{aligned}$$

Del mismo modo se llega a que

$$\Delta \log \left(\frac{(1 + |z - 1|^{1/3})^{1/2}}{|z - 1|^{5/6}} \right) = \frac{1}{18} \frac{1}{|z - 1|^{5/3}(1 + |z - 1|^{1/3})^2}$$

La curvatura de la métrica viene entonces dada por

$$\kappa_\mu(z) = -\frac{1}{18} \left(\frac{|z - 1|^{5/3}}{(1 + |z|^{1/3})^3(1 + |z - 1|^{1/3})} + \frac{|z|^{5/3}}{(1 + |z|^{1/3})(1 + |z - 1|^{1/3})^3} \right)$$

Observamos que $\kappa_\mu(z) < 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, es decir, la curvatura de la métrica es negativa. Para ver que está acotada superiormente por una constante negativa, basta observar que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \kappa_\mu(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \kappa_\mu(z) = -\frac{1}{36} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \kappa_\mu(z) = -\infty$$

Como estos límites son negativos y distintos de cero, dicha constante existe. □

Teorema 2.23. (Pequeño teorema de Picard) Sea f una función entera que toma valores en Ω . Si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contiene al menos dos puntos, f es constante.

Demostración. Como $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contiene al menos dos puntos, por 2.22 existe una métrica μ en Ω con $\kappa_\mu(z) \leq -B < 0$ para alguna constante positiva B . Se deduce entonces de 2.20 que f debe ser constante. \square

Observación 2.24. El pequeño teorema de Picard se puede formular también del siguiente modo: si f es entera y no es constante, entonces la imagen de f es todo el plano complejo con la posible excepción de un punto.

Analizamos con mayor detalle que sucede cuando una función f es entera. Nuestra función es holomorfa en todo \mathbb{C} , ¿pero como se comportará en el infinito? Si consideramos el infinito como un punto de $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, pueden darse cuatro posibilidades: que f también sea holomorfa allí, que presente una singularidad evitable, que presente un polo o que presente una singularidad esencial.

- Si f es holomorfa en infinito, debe estar acotada en una bola $B(\infty, \delta)$ para algún $\delta > 0$. Al ser f continua en el compacto $\hat{\mathbb{C}} \setminus B(\infty, \delta)$, concluimos que f está acotada en todo \mathbb{C} , y por el teorema de Liouville f es constante.
- Si f presenta una singularidad evitable en infinito, razonamos como en el caso anterior considerando esta vez una bola agujereada $B'(\infty, \delta)$ y concluimos que f también debe ser constante.
- Si f presenta un polo en infinito, f es un polinomio y el teorema fundamental del álgebra nos garantiza que su imagen será todo \mathbb{C} (para cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$, el polinomio $f(z) - z_0$ admitirá una raíz).
- Si f presenta una singularidad esencial en infinito, el teorema de Casorati–Weierstrass nos garantiza que la imagen por f de cualquier entorno agujereado de una singularidad esencial es densa en \mathbb{C} .

Es natural entonces preguntarnos si en este cuarto caso el hecho de que la imagen de f sea todo el plano complejo o a excepción de un punto se deba realmente a la singularidad esencial en infinito y no a que f sea entera. La respuesta nos la dará el gran teorema de Picard, que generaliza al teorema de Casorati–Weierstrass.

2.2.3. Familias normales, teorema de Montel y gran teorema de Picard

Además de lo visto hasta ahora sobre la métrica de Poincaré, para poder demostrar el gran teorema de Picard necesitaremos hablar de familias normales de funciones.

Definición 2.25. Sea Ω un dominio y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones de Ω en \mathbb{C} .

- Se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es normalmente convergente a una función f si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $K \subset \Omega$ compacto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, z \in K$$

Es decir, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en los compactos.

- Se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es compactamente divergente si para todo $K \subset \Omega$ compacto y para todo $L \subset \mathbb{C}$ compacto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_n(z) \notin L \quad \forall n \geq n_0, z \in K$$

Es decir, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a infinito en los compactos.

Definición 2.26. Sea Ω un dominio y \mathcal{F} una familia de funciones de Ω en \mathbb{C} . La familia \mathcal{F} es normal si de toda sucesión suya se puede extraer una subsucesión normalmente convergente o compactamente divergente.

Ejemplo 2.27. Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $f_n(z) = z^n$. \mathcal{F} es normal en $\Omega_1 = \{z : |z| < 1\}$ (toda subsucesión de \mathcal{F} converge normalmente a $f \equiv 0$) y en $\Omega_2 = \{z : |z| > 1\}$ (toda subsucesión de \mathcal{F} es normalmente divergente). Sin embargo, \mathcal{F} no puede ser normal en ningún dominio que contenga puntos de la circunferencia unidad, ya que tal dominio contendría puntos en los que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge y puntos en los que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Un resultado fundamental a la hora de hablar de familias normales es el teorema de Montel. Antes de demostrarlo, introducimos el concepto de equicontinuidad y un teorema clásico del análisis real relacionado con este concepto, el teorema de Ascoli-Arzelà (aunque omitiremos su demostración ya que es muy tediosa y se estudia en la asignatura Introducción a los espacios de funciones, en mi caso en la asignatura Analisi funzionale de la Universidad de Padova).

Definición 2.28. Sea \mathcal{F} una familia de funciones definidas en un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Decimos que \mathcal{F} es equicontinua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos $z, w \in \Omega$ con $|z - w| < \delta$ entonces

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

Teorema 2.29. (Ascoli-Arzelà) Sea K un compacto de \mathbb{R}^n . Si \mathcal{F} es una familia de funciones equicontinua y uniformemente acotada, entonces \mathcal{F} contiene una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en K .

Lema 2.30. Sea Ω un dominio y \mathbb{F} una familia equicontinua de funciones continuas en Ω , y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de F tal que f_n converge puntualmente a f en Ω . Entonces f es continua en Ω y f_n converge normalmente a f . Además, basta con que se de la convergencia puntual en un subconjunto denso de Ω para que se de el resultado.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $w \in \Omega$, elegimos $\delta_w > 0$ tal que $|f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon$ para todo $z \in D(w, \delta_w)$ y todo n . Se tiene entonces que $|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$ para todo $z \in D(w, \delta_w)$, luego f es continua. Sea K un subconjunto compacto de Ω . Como $\{D(w, \delta_w) : w \in K\}$ es un recubrimiento de abiertos de K , existen $w_1, \dots, w_m \in K$ tales que $K \in \cup_{j=1}^m D(w_j, \delta_{w_j})$. Escogemos ahora N tal que $n \geq N$ implique $|f(w_j) - f_n(w_j)| < \varepsilon$ para $j = 1, \dots, m$. Entonces si $z \in D(w_j, \delta_{w_j})$ y $n \geq N$, se tiene que

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z) - f(w_j)| + |f(w_j) - f_n(w_j)| + |f_n(w_j) - f_n(z)| < 3\varepsilon$$

En particular, si $z \in K$ y $n \geq N$ se tiene que $|f(z) - f_n(z)| < 3\varepsilon$, luego f_n converge uniformemente a f en K .

Supongamos ahora que la convergencia puntual solo se da en un subconjunto denso $S \subset \Omega$. Como antes, se tiene que $|f_n(z) - f_n(w)| < \varepsilon$ para todo n y para todo $z \in D(w, \delta_w)$. Como S es denso, $D(w, \delta_w)$ contendrá un punto $z \in S$, y entonces para m, n suficientemente grandes

$$|f_m(w) - f_n(w)| \leq |f_m(w) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(w)| < 3\varepsilon$$

Por tanto $\{f_n(w)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y es convergente, es decir, f_n converge puntualmente en todo Ω . Aplicando la primera parte del lema se obtiene el resultado final. \square

Teorema 2.31. (Montel) Sea Ω un dominio y \mathcal{F} una familia de funciones holomorfas en Ω . Si para todo $K \subset \Omega$ compacto existe un número $M_K > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M_K \quad \forall z \in K, f \in \mathcal{F}$$

entonces \mathcal{F} es una familia normal.

Demostración. Veamos en primer lugar que \mathcal{F} es equicontinua. Sea $z_0 \in \Omega$ y tomamos $r > 0$ tal que $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Entonces para $z \in D(z_0, r)$ y $f \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \sup \left\{ \left| \frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-z_0} \right| : w \in C(z_0, r) \right\} 2\pi r = \\ &= r|z - z_0| \sup \left\{ \left| \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)} \right| : w \in C(z_0, r) \right\} \end{aligned}$$

Por hipótesis, existe M_r tal que $|f(w)| \leq M_r$ para cada $w \in C(z_0, r)$ y cada $f \in \mathcal{F}$. Entonces, si $z \in D(z_0, r/2)$ y $f \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$r|z - z_0| \sup \left\{ \left| \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)} \right| : w \in C(z_0, r) \right\} \leq r|z - z_0| \frac{M_r}{(r/2)^2}$$

Es decir, \mathcal{F} es equicontinua. Ahora nos interesa aplicar el lema anterior. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ y $S = \{z_1, z_2, \dots\}$ un subconjunto denso y numerable de Ω (recordemos que \mathbb{C} es separable). Si probamos que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tiene una subsucesión que converja puntualmente en S , habremos terminado. Consideramos las sucesiones de números complejos

$$\{f_n(z_1)\}_{n=1}^\infty, \{f_n(z_2)\}_{n=1}^\infty, \dots$$

Por hipótesis, estas sucesiones deben estar acotadas, luego podemos extraer una subsucesión $\{f_{1n}\}_{n=1}^\infty$ de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ que converja en z_1 . Del mismo modo, podemos extraer una subsucesión $\{f_{2n}\}_{n=1}^\infty$ de $\{f_{1n}\}_{n=1}^\infty$ que converja también en z_2 , y repitiendo el proceso podemos obtener una subsucesión $\{f_{kn}\}_{n=1}^\infty$ que converja en z_1, \dots, z_k .

Pongamos ahora $g_n = f_{nn}$. Entonces $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ es una subsucesión de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ que converge puntualmente en $S = \{z_1, z_2, \dots\}$. \square

Corolario 2.32. Si Ω y \mathcal{F} son como en el teorema anterior y existe $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Omega, f \in \mathcal{F}$$

entonces \mathcal{F} es una familia normal.

Observación 2.33. Ninguna familia holomorfa de funciones \mathcal{F} que satisfaga las hipótesis del teorema de Montel puede tener una subsucesión compactamente divergente. Por tanto, una tal familia \mathcal{F} tendrá la propiedad de que toda sucesión de elementos suyos admitirá una subsucesión normalmente convergente. Más adelante veremos una versión más general del teorema de Montel que también permite que haya divergencia compacta. La clave para esto será movernos a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Recordamos ahora la métrica esférica vista en el ejemplo 1.15

$$\sigma(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}$$

De un modo similar a como hicimos en el teorema 2.5 con la métrica de Poincaré (viendo primero el caso $z = 0$, $w = r + 0i$ y usando después la invarianza de la métrica bajo rotaciones de $\hat{\mathbb{C}}$) obtenemos que la distancia entre dos puntos en la métrica esférica es

$$d_\sigma(z, w) = 2\arctan\left(\left|\frac{z - w}{1 + \bar{w}z}\right|\right)$$

Si $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ es la esfera de radio 1, la aplicación $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ dada por

$$p(z) = \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \operatorname{Re}z, \frac{2}{|z|^2 + 1} \operatorname{Im}z, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

es la proyección estereográfica, que identifica uno a uno los puntos de S^2 con los de $\hat{\mathbb{C}}$: a ∞ le corresponde el polo norte $(0, 0, 1)$, y a cada punto $z = x + iy$ le corresponde la intersección de S^2 con la recta que une el polo norte y el punto $(x, y, 0)$.

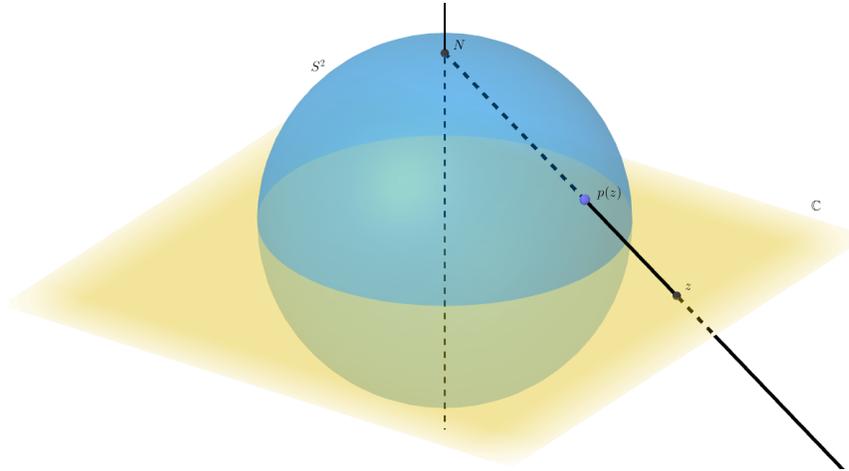


Figura 2.3: Proyección estereográfica

La mínima distancia entre dos puntos de la esfera es la longitud del arco de circunferencia de radio máximo entre estos, cuya longitud viene dada por

$$2\arctan\sqrt{\frac{1 - x_1x'_1 - x_2x'_2 - x_3x'_3}{1 + x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3}}$$

Por tanto, la distancia entre las proyecciones estereográficas de dos puntos z y w será

$$2\arctan\left(\left|\frac{z-w}{1+\bar{w}z}\right|\right)$$

Es decir, la distancia entre dos puntos en la métrica esférica es precisamente la distancia en S^2 entre las proyecciones estereográficas de dichos puntos.

Vamos ahora a ver que sucede si en vez de funciones holomorfas estudiamos funciones meromorfas, es decir, funciones holomorfas que toman valores en $\hat{\mathbb{C}}$. En primer lugar, observamos que si una familia de funciones es compactamente divergente entonces es normalmente convergente al punto $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$. Por tanto, la definición de familia normal para funciones con llegada en $\hat{\mathbb{C}}$ será la siguiente:

Definición 2.34. Sea Ω un dominio y \mathcal{F} una familia de funciones de Ω en $\hat{\mathbb{C}}$. La familia \mathcal{F} es normal si de toda sucesión suya se puede extraer una subsucesión normalmente convergente.

El siguiente teorema que veremos, el teorema de Marty, nos da una caracterización de las familias normales en términos de la métrica esférica. Antes de probarlo vamos a ver un lema que usaremos en su demostración.

Lema 2.35. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones meromorfas de Ω en $\hat{\mathbb{C}}$. Si f_n converge normalmente a una función f , entonces $f_n^*\sigma$ converge uniformemente a $f^*\sigma$ en los compactos.

Demostración. Observamos en primer lugar que

$$f^*\sigma(z) = \sigma(f(z))|f'(z)| = \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

y que

$$\left(\frac{1}{f}\right)^*\sigma(z) = \frac{2}{1+\frac{1}{|f(z)|^2}} \left|\frac{-f'(z)}{f(z)^2}\right| = f^*\sigma(z)$$

Basta probar que para cada $z_0 \in \Omega$ existe un $\delta > 0$ tal que $f_n^*\sigma \rightarrow f^*\sigma$ uniformemente en $\bar{D}(z_0, \delta)$.

Si $f(z_0)$ no es infinito, existirá algún $\delta > 0$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $\bar{D}(z_0, \delta)$. Entonces, $|f_n|$ y $|f'_n|$ también lo harán y $f_n^*\sigma \rightarrow f^*\sigma$ uniformemente en $\bar{D}(z_0, \delta)$.

Si $f(z_0) = \infty$, existirá algún $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$ uniformemente en $\bar{D}(z_0, \delta)$. Razonando como en el caso anterior pero con $\frac{1}{f}$, llegamos a que $f_n^*\sigma = \frac{1}{f_n}^*\sigma \rightarrow \frac{1}{f}^*\sigma = f^*\sigma$ uniformemente en $\bar{D}(z_0, \delta)$. \square

Teorema 2.36. (Marty) Sea \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas definidas en Ω . \mathcal{F} es una familia normal si y solo si

$$\{f^* \sigma : f \in \mathcal{F}\}$$

está uniformemente acotada en los compactos de Ω , siendo σ la métrica esférica.

En otras palabras, \mathcal{F} es una familia normal si y solo si para todo subconjunto compacto $K \in \Omega$ existe una constante M_K tal que

$$\frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq M_K \quad \forall z \in K, f \in \mathcal{F} \quad (*)$$

Demostración. Sea \mathcal{F} una familia normal y supongamos que no se cumple (*). Entonces, podemos encontrar $K \in \Omega$ compacto y una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de funciones de \mathcal{F} tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in K} f_n^* \sigma(z) = \infty$$

Como \mathcal{F} es normal, existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ que converge normalmente a una función f . Por el lema anterior,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{z \in K} f_{n_j}^* \sigma(z) = \max_{z \in K} f^* \sigma(z) < \infty$$

Llegamos así a una contradicción y concluimos que (*) debe cumplirse.

Supongamos ahora que (*) es cierto. Sea $K \in \Omega$ compacto. Podemos suponer que $K = \bar{V}$ donde V es un abierto conexo. Si Γ es el conjunto de curvas diferenciables $\gamma : [a, b] \rightarrow V$,

$$\begin{aligned} d_\sigma(f(z_0), f(z_1)) &= \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\|_{\sigma, f \circ \gamma(t)} dt = \\ &= \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_a^b \frac{2|f'(\gamma(t))|}{1 + |f(\gamma(t))|^2} |\gamma'(t)| dt \leq \\ &\leq M_K \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M_K |z_0 - z_1| \end{aligned}$$

Es decir, \mathcal{F} es equicontinua respecto a la distancia esférica. Como esta distancia está acotada, \mathcal{F} también está uniformemente acotada. Entonces podemos aplicar el teorema de Ascoli-Arzelà y concluir que \mathcal{F} es una familia normal. \square

Conociendo el teorema de Marty ya estamos listos para obtener la generalización del teorema de Montel que comentamos en la observación 2.33, también conocido como teorema de los tres valores de Montel o test fundamental de normalidad.

Teorema 2.37. (de los tres valores de Montel) Sean α, β y γ tres puntos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$ y \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas definidas en un dominio Ω . Si todas las funciones de \mathcal{F} toman valores en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$, \mathcal{F} es una familia normal.

Demostración. Con una transformación lineal fraccionaria podemos mover los tres puntos a $0, 1$ e ∞ . Tenemos que probar entonces que una familia de funciones holomorfas que toma valores en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ es normal. Nos bastará con ver que \mathcal{F} es normal en cada disco $D(z_0, \alpha) = \{z : |z - z_0| < \alpha\} \subset \Omega$. Supongamos que $z_0 = 0$. Sea μ la métrica definida en 2.22,

$$\mu(z) = \left(\frac{(1 + |z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \right) \left(\frac{(1 + |z - 1|^{1/3})^{1/2}}{|z - 1|^{5/6}} \right)$$

Tras multiplicarla por una constante, podemos asumir que su curvatura es menor o igual que -4 en cada punto. Por el lema de Schwarz-Alhfors generalizado (2.19) con $A = B = 4$ se tiene que para toda $f \in \mathcal{F}$

$$f^* \mu(z) \leq \rho_\alpha^A(z) \quad \forall z \in D(0, \alpha)$$

Comparamos ahora la métrica μ con la métrica esférica σ en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$:

$$\frac{\sigma(z)}{\mu(z)} = \frac{\frac{2}{1+|z|^2}}{\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}|z-1|^{5/6}}} \rightarrow 0$$

cuando z tiende a $0, 1$ o ∞ . Entonces existe una constante positiva M tal que

$$\sigma(z) \leq M\mu(z)$$

Por tanto

$$f^* \sigma \leq M f^* \mu \leq M \rho_\alpha^A \text{ en } D(0, \alpha)$$

Concluimos que la familia $\{f^* \sigma : f \in \mathcal{F}\}$ está uniformemente acotada en los compactos de $D(0, \alpha)$ y por el teorema de Marty \mathcal{F} es normal. \square

De la primera parte de la demostración obtenemos también el siguiente corolario.

Corolario 2.38. Sea \mathcal{F} una familia de funciones holomorfas definidas en un dominio Ω . Si cada función en \mathcal{F} omite los dos mismos valores entonces \mathcal{F} es una familia normal.

Con el teorema de Montel generalizado podemos al fin demostrar el gran teorema de Picard de una forma sencilla.

Teorema 2.39. (Gran teorema de Picard) Sea $\Omega = D'(0, \alpha) = D(0, \alpha) \setminus \{0\}$ y sea f una función holomorfa en Ω con una singularidad esencial en 0. Entonces en cada entorno agujereado de 0 la imagen de f es \mathbb{C} con la posible excepción de un valor.

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que se omiten dos valores en la imagen por f de cada entorno agujereado. Tras hacer un reescalado podemos suponer que $\Omega = D'(0, 1)$ y que los valores omitidos son 0 y 1. Vamos a ver que 0 es o una singularidad evitable o un polo de f , contradiciendo la hipótesis de que es una singularidad esencial.

Definimos $f_n(z) = f(z/n)$, $0 < |z| < 1$, y ponemos $\mathcal{F} = \{f_n\}$. Como todas las funciones de \mathcal{F} omiten los valores 0 y 1, \mathcal{F} es una familia normal. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que es normalmente convergente o compactamente divergente.

En el primer caso, $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ está acotada en los compactos de $D'(0, 1)$. En particular, está acotada por alguna constante M en la circunferencia $\{z : |z| = 1/2\}$, es decir, f está acotada por M en cada circunferencia $\{z : |z| = 1/2n_k\}$. Aplicando el principio del máximo en los anillos delimitados por estas circunferencias y haciendo tender $k \rightarrow \infty$, se llega a que f está acotada en $\{z : 0 < |z| < 1/2\}$, luego 0 tiene que ser una singularidad evitable. En el segundo caso, razonando de un modo similar podemos probar que $1/f \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow 0$, es decir, $f \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow 0$, luego 0 es un polo de f . \square

Capítulo 3

Otras métricas invariantes

Para finalizar el trabajo, vamos a introducir otras dos métricas invariantes estrechamente relacionadas entre ellas, las métricas de Carathéodory y de Kobayashi, y veremos alguna aplicación suya. No obstante, no entraremos en tantos detalles con estas métricas como hemos hecho con la de Poincaré, que era el principal objeto de estudio del trabajo.

3.1. La métrica de Carathéodory

Definición 3.1. Sea Ω un dominio del plano complejo. Si $z \in \Omega$, definimos

$$(D, \Omega)_z = \{\text{funciones holomorfas de } \Omega \text{ en } D \text{ tales que } f(z) = 0\}$$

La *métrica de Carathéodory* para Ω en z se define como

$$F_C^\Omega(z) = \sup\{|\phi'(z)| : \phi \in (D, \Omega)_z\}$$

Observación 3.2. Claramente se tiene que $F_C^\Omega(z) \geq 0$ para todo $z \in \Omega$ (y además de las estimaciones de Cauchy se deduce que $F_C^\Omega(z) < \infty$ para todo $z \in \Omega$). Nos preguntamos entonces si la métrica es estrictamente positiva. Si Ω está acotado, existirá $R > 0$ tal que $\Omega \subset D(0, R)$, y entonces la aplicación

$$\phi : w \longrightarrow \frac{w - z}{2R}$$

estará en $(D, \Omega)_z$. Se tiene entonces que

$$F_C^\Omega(z) \geq |\phi'(z)| = \frac{1}{2R} > 0$$

Sin embargo, si Ω no está acotado la métrica puede degenerar. Por ejemplo, si $\Omega = \mathbb{C}$ el teorema de Liouville nos dice que cualquier función de $(D, \Omega)_z$ será constante y por tanto $F_C^\Omega \equiv 0$.

Una característica importante de la métrica de Carathéodory es que generaliza la propiedad vista en 2.13 de la métrica de Poincaré.

Proposición 3.3. Sean Ω_1 y Ω_2 dominios de \mathbb{C} y sea ρ_j la métrica de Carathéodory en Ω_j . Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es holomorfa entonces

$$f^* \rho_2(z) \leq \rho_1(z) \quad \forall z \in \Omega_1$$

Como consecuencia directa, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega_1$ es una curva diferenciable

$$l_{\rho_2}(f^* \gamma) \leq l_{\rho_1}(\gamma)$$

y si z_0, z_1 son dos puntos de Ω_1

$$d_{\rho_2}(f(z_0), f(z_1)) \leq d_{\rho_1}(z_0, z_1)$$

Demostración. Sea $z \in \Omega_1$ y $w = f(z)$. Si $\phi \in (D, \Omega_2)_w$, se tiene que $\phi \circ f \in (D, \Omega_1)_z$. Entonces,

$$F_C^{\Omega_1}(z) \geq |(\phi \circ f)'(z)| = |\phi'(w)| \cdot |f'(z)|$$

Tomando el supremo entre $\phi \in (D, \Omega_2)_w$ se tiene que

$$F_C^{\Omega_1}(z) \geq F_C^{\Omega_2}(w) \cdot |f'(z)|$$

o lo que es lo mismo

$$\rho_1(z) \geq f^* \rho_2(z)$$

□

Corolario 3.4. Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es conforme entonces f es una isometría entre (Ω_1, ρ_1) y (Ω_2, ρ_2) .

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior a f y a f^{-1} como se hace en la observación 2.14. □

Viendo que la métrica de Carathéodory comparte características con la de Poincaré, resulta natural tratar de comparar ambas. Veamos que sucede con la métrica de Carathéodory

cuando $\Omega = D$.

Proposición 3.5. La métrica de Carathéodory en el disco coincide con la métrica de Poincaré.

Demostración. Hemos visto en el corolario anterior que los automorfismos conformes son isometrías de la métrica de Carathéodory en el disco, luego por la proposición 2.4 la métrica de Carathéodory en el disco tiene que ser, salvo multiplicación por una constante, igual a la métrica de Poincaré.

Vamos a calcular la métrica en el origen. Por el lema de Schwarz, si $\phi \in (D, D)_0$ se tiene que $|\phi'(0)| \leq 1$, luego $F_C^D(0) \leq 1$. Como la función $\phi(z) = z$ está en $(D, D)_0$ y $\phi'(0) = 1$, se tiene que $F_C^D(0) = 1$. La métrica de Poincaré en 0 también vale 1, luego la constante que nos faltaba por determinar es 1 y ambas métricas coinciden. \square

3.2. La métrica de Kobayashi

Definición 3.6. Sea Ω un dominio de \mathbb{C} . Si $z \in \Omega$, definimos

$$(\Omega, D)_z = \{\text{funciones holomorfas de } D \text{ en } \Omega \text{ tales que } f(0) = z\}$$

La métrica de Kobayashi para Ω en z se define como

$$F_K^\Omega(z) = \inf \left\{ \frac{1}{|\phi'(0)|} : \phi \in (\Omega, D)_z \right\}$$

Observación 3.7. Si $z \in \Omega$, existirá $\delta > 0$ tal que el disco cerrado $\bar{D}(z, \delta)$ esté contenido en Ω . Entonces, la función $\phi(w) = z + \delta w$ está en $(\Omega, D)_z$ y su derivada en 0 vale $\phi'(0) = \delta$ (por tanto $F_K^\Omega(z) \leq 1/\delta$). Es decir, para todo $z \in \Omega$ existe $\phi \in (\Omega, D)_z$ con derivada no nula en 0, luego la definición que hemos dado tiene sentido en todos los puntos de Ω .

Está claro que hay cierto paralelismo entre esta métrica y la de Carathéodory. Comparemos ahora ambas métricas.

Proposición 3.8. Sea Ω un dominio. Para todo $z \in \Omega$ se tiene que

$$F_C^\Omega(z) \leq F_K^\Omega(z)$$

Demostración. Sea $\phi \in (D, \Omega)_z$ y $\psi \in (\Omega, D)_z$. Entonces $\phi \circ \psi : D \rightarrow D$ y $\phi \circ \psi(0) = z$.

Por el lema de Schwarz se tiene que

$$|(\phi \circ \psi)'(0)| = |\phi'(z)||\psi'(0)| \leq 1$$

o lo que es lo mismo

$$|\phi'(z)| \leq \frac{1}{|\psi'(0)|}$$

Tomando el supremo entre todas las ϕ se obtiene que

$$F_C^\Omega(z) \leq \frac{1}{|\psi'(0)|}$$

Tomando el inferior entre todas las ψ se concluye que

$$F_C^\Omega(z) \leq F_K^\Omega(z)$$

□

Observación 3.9. Como consecuencia de este resultado y de la observación 3.2, si Ω es acotado la métrica de Kobayashi no es degenerada. Si Ω no es acotado, al igual que ocurría con la métrica de Carathéodory la métrica de Kobayashi puede degenerar. Por ejemplo, si $\Omega = \mathbb{C}$, tomamos $z \in \Omega$ y consideramos las funciones

$$\phi_R(w) = z + Rw$$

Para cualquier $R > 0$ se tiene que $\phi_R \in (\Omega, D)_z$, y entonces

$$F_K^\Omega(z) \leq \frac{1}{|\phi_R'(0)|} = \frac{1}{R}$$

Haciendo tender $R \rightarrow 0$ se llega a que $F_K^\Omega(z) = 0$.

La métrica de Kobayashi también se comporta como las métricas de Poincaré y de Carathéodory bajo la acción de funciones holomorfas.

Proposición 3.10. Sean Ω_1 y Ω_2 dominios de \mathbb{C} y sea ρ_j la métrica de Kobayashi en Ω_j . Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es holomorfa entonces

$$f^* \rho_2(z) \leq \rho_1(z) \quad \forall z \in \Omega_1$$

Como consecuencia directa, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega_1$ es una curva diferenciable

$$l_{\rho_2}(f^*\gamma) \leq l_{\rho_1}(\gamma)$$

y si z_0, z_1 son dos puntos de Ω_1

$$d_{\rho_2}(f(z_0), f(z_1)) \leq d_{\rho_1}(z_0, z_1)$$

Demostración. Sea $z \in \Omega_1$ y $w = f(z)$. Tomamos $\phi \in (\Omega_1, D)_z$. Se tiene entonces que $f \circ \phi \in (\Omega_2, D)_w$ y

$$F_K^{\Omega_2}(w) \leq \frac{1}{|(f \circ \phi)'(0)|} = \frac{1}{|f'(z)||\phi'(0)|}$$

Tomando el inferior entre todas las $\phi \in (\Omega_1, D)_z$ se obtiene que

$$F_K^{\Omega_2}(w) \leq \frac{1}{|f'(z)|} F_K^{\Omega_1}(z)$$

o lo que es lo mismo

$$(f^* F_K^{\Omega_2})(z) \leq F_K^{\Omega_1}(z)$$

□

Corolario 3.11. Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es conforme entonces f es una isometría entre (Ω_1, ρ_1) y (Ω_2, ρ_2) .

Observación 3.12. Gracias a la proposición anterior, podemos encontrar otro tipo de dominios en el que la métrica de Kobayashi degenera. Aplicando la proposición anterior a la aplicación holomorfa $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $h(w) = e^w$, se obtiene que

$$F_K^{\mathbb{C}_0}(e^z)e^z \leq F_K^{\mathbb{C}}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

luego la métrica de Kobayashi degenera en $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En general, si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no contiene al menos dos puntos la métrica de Kobayashi será degenerada en Ω .

Resulta interesante también aplicar este resultado a las funciones enteras. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \Omega$ es holomorfa, se tiene que

$$f^* F_K^{\Omega}(f) = F_K^{\Omega}(f(z))|f'(z)| \leq F_K^{\mathbb{C}}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Entonces, si la métrica de Kobayashi es no degenerada en Ω , f tiene que ser constante. En la sección 5 del capítulo 3 del libro de Krantz [5] se prueba que F_K^{Ω} es no degenerada en

$\Omega = \{z_1, \dots, z_k\}$ si los z_k son distintos y $k \geq 2$ (aunque en este trabajo no lo probaremos porque se usan conceptos de hiperbolicidad de un dominio a los que no llegaremos a entrar). Obtendríamos así una demostración alternativa del pequeño teorema de Picard 2.23 utilizando la métrica de Kobayashi.

Al igual que la métrica de Carathéodory, vamos a ver que la métrica de Kobayashi coincide con la de Poincaré en el disco unidad.

Proposición 3.13. La métrica de Carathéodory en el disco coincide con la métrica de Poincaré.

Demostración. Al igual que pasaba con la métrica de Carathéodory, hemos visto que los automorfismos conformes son isometrías de la métrica de Kobayashi en el disco, luego por la proposición 2.4 la métrica de Kobayashi en el disco tiene que ser, salvo por una constante multiplicativa, igual a la métrica de Poincaré.

Análogamente a como hicimos con la métrica de Carathéodory vamos ver que el valor de esta constante es 1. Para $z \in D$ se tiene que

$$F_K^\Omega(z) \geq F_C^\Omega(z) = \rho(z)$$

Para obtener la desigualdad opuesta, tomamos $z = 0$. Sea $\phi \in (D, D)_0$ dada por $\phi(w) = w$. Entonces,

$$F_K^D(0) \leq \frac{1}{|\phi'(0)|} = 1 = \rho(0)$$

luego

$$F_K^D(0) = 1 = \rho(0)$$

Concluimos entonces que el valor de la constante multiplicativa es 1 y que ambas métricas coinciden. \square

3.3. Algunos resultados relacionados con estas métricas

Vamos ahora con el primer resultado fuerte de este capítulo: una caracterización de los dominios conformemente equivalentes al disco unidad en términos de las métricas de Carathéodory y Kobayashi.

Teorema 3.14. Sea Ω un dominio. Ω es conformalmente equivalente al disco unidad D si y solo si existe un punto $z \in \Omega$ tal que

$$F_C^\Omega(z) = F_K^\Omega(z) \neq 0$$

Demostración. Supongamos que Ω es conformalmente equivalente a D , es decir, que existe una aplicación conforme $h : \Omega \rightarrow D$. Entonces para cualquier $z \in \Omega$ se tiene que

$$F_C^\Omega(z) = (h^* F_C^D)(z) = (h^* \rho)(z) = (h^* F_K^D)(z) = F_K^\Omega(z)$$

Supongamos ahora que existe $z \in \Omega$ tal que $F_C^\Omega(z) = F_K^\Omega(z) \neq 0$. Tomamos sucesiones $\phi_j \in (D, \Omega)_z$ y $\psi_j \in (\Omega, D)_z$ tales que

$$|\phi_j'(z)| \rightarrow F_C^\Omega(z) \quad \text{y} \quad \frac{1}{|\psi_j'(0)|} \rightarrow F_K^\Omega(z)$$

Como $\{\phi_j\}$ está acotada uniformemente por 1, podemos extraer una subsucesión $\{\phi_{j_k}\}$ que converja normalmente a un límite ϕ_0 . Sea

$$h_{j_k} = \phi_{j_k} \circ \psi_{j_k}$$

Pasando a otra subsucesión, que denotamos h_l , podemos suponer que h_l converge normalmente a un límite h_0 . Entonces, la sucesión de sus derivadas también convergerá normalmente (por las estimaciones de Cauchy) y se tiene que

$$\begin{aligned} |h_0'(z)| &= \lim_{l \rightarrow \infty} |(\phi_l \circ \psi_l)'(0)| = \lim_{l \rightarrow \infty} |\phi_l'(z)| |\psi_l'(0)| = \\ &= F_C^\Omega(z) \cdot \frac{1}{F_K^\Omega(z)} = 1 \end{aligned}$$

Por el lema de Schwarz, se tiene que $h_0(w) = \mu w$ para alguna constante unimodular μ . Entonces

$$\mu \cdot w = h_0(w) = \lim_{l \rightarrow \infty} \phi_l \circ \psi_l(w)$$

Tras componer las funciones con una rotación, podemos suponer que $\mu = 1$.

Por hipótesis la métrica de Kobayashi no es degenerada en Ω , luego por la observación 3.12 se tiene que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ contiene al menos dos puntos. Por el teorema de los tres valores de Montel (2.37), la familia $\{\psi_l\}$ es normal y podemos extraer una subsucesión que llamaremos ψ_m que converja a algún ψ_0 . Escribimos entonces

$$w = h_0(w) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m \circ \psi_m(w) = \phi_0 \circ \psi_0(w)$$

Como h_0 es sobreyectiva, ϕ_0 también lo será.

Veamos ahora que ϕ_0 también es inyectiva. Para ello, nos basta ver que ψ_0 es sobreyectiva, ya que h_0 es inyectiva. Como ψ_0 es una función holomorfa no constante ($\psi_0'(0) \neq 0$), por

el teorema de la función abierta su imagen será abierta. Veamos que también es cerrada: sea $\psi_0(w_j)$ una sucesión de elementos de la imagen que converge a l . Como ϕ_0 es continua, $\phi(\psi_0(w_j))$ converge a un límite r . Pero entonces $\phi_0 \circ \psi_0(w_j) = w_j \rightarrow r$, y por la continuidad de ψ_0 se tiene que $l = \psi_0(r)$. La imagen de ψ_0 es entonces abierta, cerrada y no vacía. Como Ω es conexo, concluimos que la imagen de ψ_0 tiene que ser el propio Ω , es decir, ψ_0 es sobreyectiva.

Hemos visto así que ϕ_0 es una aplicación conforme de Ω en D . □

Por último, vamos a ver que las únicas isometrías de las métricas de Carathéodory y de Kobayashi que dejan un punto fijo son las aplicaciones conformes. De hecho, probaremos algo más fuerte, ya que nos bastará con que la condición de isometría se dé únicamente en el punto fijo.

Teorema 3.15. Sea Ω un dominio en el que la métrica de Kobayashi no degenera y sea $z \in \Omega$. Supongamos que $f : \Omega \rightarrow \Omega$ es una función holomorfa con $f(z) = z$ y que f es una isometría para la métrica de Carathéodory o para la de Kobayashi en z , es decir, que

$$f^* F_C^\Omega(z) = F_C^\Omega(z) \quad \text{o} \quad f^* F_K^\Omega(z) = F_K^\Omega(z)$$

Si la métrica no se anula en z , f es una aplicación conforme de Ω en Ω .

Demostración. Como Ω tiene métrica de Kobayashi no degenerada, $\mathbb{C} \setminus \Omega$ tendrá al menos dos puntos y cualquier familia de funciones que tome valores en Ω será normal (teorema de los tres valores de Montel, 2.37). Usaremos esta observación en repetidas ocasiones.

La hipótesis

$$f^* F_C^\Omega(z) = F_C^\Omega(z) \quad \text{o} \quad f^* F_K^\Omega(z) = F_K^\Omega(z)$$

implica que $|f'(z)| = 1$. Definimos

$$\begin{aligned} f^1 &= f \\ f^2 &= f \circ f \\ &\dots \\ f^j &= f^{j-1} \circ f, \quad j \geq 2 \end{aligned}$$

La familia $\{f^j\}$ es normal. Además, se tiene que $|(f^j)'(z)| = 1$ para todo j y si $f'(z) = e^{i\theta\pi}$,

$\theta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} (f^2)'(z) &= f'(f(z))f'(z) = e^{i2\theta\pi} \\ (f^3)'(z) &= (f^2)'(f(z))f'(z) = e^{i3\theta\pi} \\ &\dots \\ (f^j)'(z) &= (f^{j-1})'(f(z))f'(z) = e^{ij\theta\pi}, \quad j \geq 2 \end{aligned}$$

Por tanto, existe una subsucesión $\{f^{j_i}\}$ tal que $(f^{j_i})'(z) \rightarrow 1$ (si θ es racional es fácil llegar a esta conclusión a partir de las expresiones de $(f^j)'(z)$, mientras que si es irracional bastaría con ver que los $(f^j)'(z)$ forman un subconjunto denso de la circunferencia). Por la normalidad de la familia, existe otra subsucesión, a la que seguiremos denotando f^{j_i} , que converge normalmente a una función \tilde{f} . Se tiene entonces que $\tilde{f}'(z) = 1$. Vamos a ver que $\tilde{f}(w) \equiv w$:

Supongamos que no lo sea. Por simplicidad, asumimos que $z = 0$. Entonces, para w cercano a 0 se tiene que

$$\tilde{f}(w) = 0 + w + (\text{términos de orden mayor})$$

Sea $a_m w^m$, $m \geq 2$, el primero de estos términos que no se anula (como estamos suponiendo que $\tilde{f}(w) \neq w$, debe haber alguno). Observamos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}^2 &= \tilde{f} \circ \tilde{f} = w + 2a_m w^m + \dots \\ \tilde{f}^3 &= \tilde{f} \circ \tilde{f} \circ \tilde{f} = w + 3a_m w^m + \dots \\ &\dots \\ \tilde{f}^k &= \tilde{f} \circ \dots \circ \tilde{f} = w + k a_m w^m + \dots \end{aligned}$$

Entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^m \tilde{f}^k(w) = m! \cdot k \cdot a_m$$

que tiende a infinito en módulo cuando $k \rightarrow \infty$. Pero por otro lado, al ser $\{\tilde{f}^k\}$ una familia normal debería haber una subsucesión suya que converja normalmente en Ω , luego sus derivadas también convergerían normalmente en Ω y nos topamos con una contradicción. Concluimos entonces que tiene que ser $\tilde{f}(w) \equiv w$.

Tenemos entonces que $f^{j_i}(w) \rightarrow z$ normalmente. Vamos a ver que esto implica que f es conforme. Consideramos la familia $\{f^{j_i-1}\}$. Es normal, luego existe una subsucesión $\{f^{j_r-1}\}$ que converge normalmente a un límite g . Observamos que $g'(z) \neq 0$ luego g no es

constante. Entonces,

$$f \circ g(w) = f \circ \lim_{r \rightarrow \infty} f^{j_r-1}(w) = \lim_{r \rightarrow \infty} f^{j_r}(w) \equiv w$$

y de un modo similar

$$g \circ f(w) \equiv w$$

Se tiene entonces que f es sobreyectiva e inyectiva, es decir, biyectiva. Como se trata de una aplicación holomorfa podemos concluir que es conforme. \square

Apéndice A

Operadores diferenciales complejos

Para realizar operaciones relacionadas con el cálculo diferencial en el análisis complejo, nos será de gran ayuda considerar los operadores diferenciales conocidos como derivadas de Wirtinger:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

La razón principal es la siguiente: si $f(z) = u(z) + iv(z)$ es una función compleja en Ω (donde $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son sus partes real e imaginaria), se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ en } \Omega \iff \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x,y) + iv(x,y)) = 0 \text{ en } \Omega$$

Al tomar las partes real e imaginaria en esta ecuación, se obtienen justamente las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial y} v \quad \frac{\partial}{\partial x} v = -\frac{\partial}{\partial y} u$$

Es decir, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$ en Ω si y solo si f es holomorfa en Ω . Además, si f es holomorfa en Ω se tiene que

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\mathbb{R} \ni s \rightarrow 0} \frac{f(z+s) - f(z)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

Por tanto, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = f'$ en Ω .

Nos interesará fijarnos en la forma que toma el operador laplaciano con estas derivadas:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Al igual que las derivadas usuales, estas también mantienen las propiedades de linealidad y la regla del producto. La regla de la cadena toma una forma algo distinta:

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z)) \frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z)) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z)) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z)) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}(z)$$

Cuando alguna de las funciones f o g es holomorfa, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z)) \frac{\partial g}{\partial z}(z)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z)) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g(z)) \overline{\left(\frac{\partial g}{\partial z}(z) \right)}$$

Vamos ahora a ver dos lemas que necesitaremos para demostrar el teorema de invarianza de la curvatura (2.11):

Lema A.1. Sea f una función holomorfa y que no se anula en un dominio Ω . Entonces, la función $\log(|f|^2)$ es armónica, es decir,

$$\Delta \log(|f|^2) = 0$$

Demostración. Fijamos $P \in \Omega$ y consideramos un entorno $U \subset \Omega$ de P en el que f admita un logaritmo holomorfo. Entonces en U se tiene que

$$\Delta \log(|f|^2) = \Delta(\log f + \log \bar{f}) = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log f + 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log \bar{f} = 0$$

□

Lema A.2. Sean f una función holomorfa en Ω y h una función de clase \mathcal{C}^2 en $\text{Im}f$. Entonces,

$$\Delta(h \circ f) = (\Delta h \circ f) |f'(z)|^2$$

Demostración. Aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\Delta(h \circ f) &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} (h \circ f) = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial h}{\partial z}(f(z)) \frac{\partial f}{\partial z}(z) \right) = \\ &4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial h}{\partial z}(f(z)) \right) \frac{\partial f}{\partial z}(z) + 4 \frac{\partial h}{\partial z}(f(z)) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z) \right)\end{aligned}$$

Como f es holomorfa, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z) \right) = 0$ y el segundo término se anula. Entonces, con otra aplicación de la regla de la cadena se obtiene que

$$\begin{aligned}\Delta(h \circ f) &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial h}{\partial z}(f(z)) \right) \frac{\partial f}{\partial z}(z) = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} h(f(z)) \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}(z)} \right) \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \\ &= (\Delta h \circ f) |f'(z)|^2\end{aligned}$$

□

Apéndice B

Algunos teoremas clásicos de variable compleja

En este apéndice se enuncian algunos resultados clásicos de variable compleja que se utilizan a lo largo del trabajo. La demostración de todos ellos puede encontrarse en [1].

Teorema B.1. (Fórmula integral de Cauchy) Sea f holomorfa en un dominio Ω . Entonces f tiene derivadas de todos los órdenes en Ω , y si $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ entonces

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad z \in D(z_0, r)$$

Corolario B.2. (Estimaciones de Cauchy) Si f es holomorfa en Ω y $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ entonces

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{z \in C(z_0, r)} |f(z)|$$

Teorema B.3. (Principio del máximo) Sea Ω un dominio y f una función holomorfa en Ω .

- a) Si $|f|$ alcanza un máximo local en algún punto de Ω , entonces f es constante en Ω .
- b) Si $\lambda = \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}$, entonces o $|f(z)| < \lambda$ para todo $z \in \Omega$ o f es constante en Ω .
- c) Si Ω es una región acotada y $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| \leq M$ para cada sucesión z_n en Ω que converja a un punto de la frontera de Ω , entonces o $|f(z)| < M$ para cada $z \in \Omega$ o f es constante en Ω .

- d) Si Ω es una región acotada, f es continua en $\bar{\Omega}$ y $M_0 = \max\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\}$, entonces o $|f(z)| < M_0$ para todo $z \in \Omega$ o f es constante en Ω . Por tanto, $\max\{|f(z)| : z \in \bar{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\}$

Teorema B.4. (Lema de Schwarz) Sea f una función holomorfa en el disco unidad D , y supongamos que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$. Entonces $|f(z)| \leq |z|$ en D y $|f'(0)| \leq 1$. Además, si se da la primera igualdad en algún punto $z \neq 0$ o la segunda igualdad, f es una rotación de D , es decir, $f(z) = \lambda z$ con $|\lambda| = 1$ para todo $z \in D$.

Teorema B.5. (Lema de Schwarz-Pick) Sea $f : D \rightarrow D$ holomorfa. Entonces para cualquier $a \in D$ y para cualquier $z \in D$ se tiene que

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \bar{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|$$

y

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

Además, si se da la primera igualdad para algún $z \neq a$ o la segunda igualdad, entonces f es una transformación lineal fraccionaria.

Teorema B.6. (Casorati-Weierstrass) Sea f una función con una singularidad esencial insolada en z_0 . Entonces, para cualquier $\delta > 0$, $f(D'(z_0, \delta))$ es un subconjunto denso de \mathbb{C} .

Teorema B.7. (De la función abierta) Sea Ω un dominio de \mathbb{C} y f una función holomorfa en Ω y no constante. Entonces f es una función abierta, es decir, envía conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.

Bibliografía

- [1] R. B. Ash y W. P. Novinger. *Complex Variables: Second Edition*. Dover Publications, 2007.
- [2] M. P. Do Carmo y J Flaherty Francis. *Riemannian geometry*. Springer, 1992.
- [3] J. Finat. *Notas de la asignatura Geometría de curvas y superficies del curso 2020-21*.
- [4] S. Gong y Y. Gong. *Concise complex analysis (revised edition)*. World Scientific Publishing Company, 2007.
- [5] S. G. Krantz. *Complex analysis: the geometric viewpoint*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] A. Nuñez. *Notas de la asignatura Geometría de curvas y superficies del curso 2019-20*.
- [7] B. Simon. *Advanced Complex Analysis*. American Mathematical Soc., 2015.
- [8] B. Simon. *Basic complex analysis*. American Mathematical Soc., 2015.