



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de la estructura del
espacio-tiempo a través de diagramas de
Penrose

TRABAJO DE FIN DE GRADO
GRADO EN FÍSICA

Autor: Andrés Infante Adrián

Tutor: Diego Sáez-Chillón Gómez

2023

*Dedicado a todos los estudiantes y profesores que, mientras yo escribía
este trabajo, fueron enviados a un frente de guerra.*

Índice general

Introducción	5
1. Estructura causal	7
1.1. Futuro y pasado	7
1.2. Condiciones de causalidad	9
1.3. Hiperbolicidad global	10
2. Diagramas de Penrose	15
2.1. El espacio de Minkowski	17
2.2. Planitud asintótica	19
2.3. Soluciones cosmológicas	20
2.3.1. Espacio-tiempo de De Sitter	20
2.3.2. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	22
2.4. Agujeros negros	27
2.4.1. Agujero negro de Schwarzschild	27
2.4.2. El colapso de Oppenheimer-Snyder	30
2.4.3. Agujero negro de Reissner-Nordström	34
2.4.4. Radiación de Hawking	40
2.5. Agujeros de gusano	42
Conclusiones	47
A. Geometría diferencial	51
A.1. Métrica	53
A.2. Hipersuperficies	55
A.3. La variedad espacio-temporal	57
B. Horizontes	59
B.1. Horizontes de Killing	59
B.2. Singularidades	60
B.3. Agujeros negros: el horizonte de sucesos	62
B.4. Horizontes cosmológicos	63
Bibliografía	71

Introducción

El espacio-tiempo se representa matemáticamente por una variedad diferenciable lorentziana \mathcal{M} de cuatro dimensiones, una temporal y tres espaciales. La métrica (lorentziana) de la misma induce una estructura causal intrínseca a cada vector $v \in T_p\mathcal{M}$, lo cual nos permite establecer claramente la distinción entre «pasado» y «futuro» a través del concepto de cono de luz. Debido a que es imposible alcanzar la velocidad de la luz, un evento pasado no puede influenciar a un observador en el presente hasta que la luz de ese evento entre en su cono de luz. Lo que está fuera del cono de luz de un punto está *causalmente desconectado* de él.

El estudio del espacio-tiempo a gran escala en Relatividad General precisa de establecer claramente su estructura causal, así como sus propiedades asintóticas y singularidades. Los diagramas de Carter-Penrose (normalmente denominados diagramas de Penrose o diagramas conformes) suponen una herramienta extremadamente útil para este propósito. Fueron desarrollados por el físico matemático británico Roger Penrose en 1962, y sistematizados por el físico australiano Brandon Carter en 1966. La idea es conseguir representar de manera sistemática el espacio-tiempo en diagramas bidimensionales cumpliendo los siguientes dos puntos: primero, acercar los puntos del infinito a una distancia finita, de forma que estén contenidos en los diagramas. Segundo, que la estructura causal de la solución se conserve, para lo cual los rayos de luz deben estar siempre, como en un diagrama de Minkowski si tomamos $c = 1$, a $\pm 45^\circ$, además de conservarse el carácter causal de cualquier vector.

Para todo ello se realiza una compactificación conforme en la que embebemos el espacio-tiempo físico en otro no físico pero que mantiene su estructura causal. En otras palabras, se realiza una transformación que da lugar a una métrica conforme a la original. Además, se elige el factor conforme de manera que el infinito quede «aplastado» o «compactificado» en un tamaño finito (típicamente, a través de la función \arctan), en los denominados «infinitos conformes». En consecuencia, las líneas de tiempo o posición constantes, infinitas en el espacio-tiempo original, se transforman en hipérbolas que convergen a dichos infinitos en el diagrama de Penrose.

Exponemos a continuación la estructura de esta memoria. En el apéndice A, relativo a Geometría Diferencial, explicamos los conceptos necesarios para entender qué es una variedad espacio-temporal. Por ejemplo, se define la estructura causal que induce la métrica lorentziana, en particular para las hipersuperficies. Estos conceptos son fundamentales para comprender este trabajo, pero por ser una base previa requerida para el estudio detallado de los diagramas de Penrose, hemos decidido incluirlo como apéndice. Por contra,

sí hemos considerado dedicar un primer capítulo a la estructura causal propiamente dicha en Relatividad General, un tema particular en el estudio de la estructura a gran escala del espacio-tiempo. Lo dividimos en tres partes: la distinción detallada de futuro y pasado, las condiciones de causalidad y las hipersuperficies de Cauchy, o en general los espacios-tiempos globalmente hiperbólicos.

Dedicamos el segundo capítulo al objetivo central, esto es, construimos y explicamos algunos diagramas de Penrose correspondientes a soluciones cosmológicas y soluciones de agujeros negros de las ecuaciones de campo de Einstein. En particular, comenzamos definiendo rigurosamente la compactificación conforme, para luego estudiar algunas soluciones cosmológicas: el espacio de Minkowski, el espacio de De Sitter y varios espacios-tiempos con la métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Posteriormente tratamos con las soluciones de distintos agujeros negros: Schwarzschild, colapso gravitatorio, Reissner-Nordström y unas pinceladas de la radiación de Hawking. Por último, presentamos los agujeros de gusano de Morris-Thorne y de Simpson y Visser. Relativo a este segundo capítulo es el apéndice B, donde explicamos aspectos básicos de cosmología y agujeros negros. Tiene especial interés para esta memoria la definición de agujero negro y de los horizontes de eventos y cosmológicos, pues los trataremos a menudo en los diagramas de Penrose. Este apéndice podría haber encajado como un segundo capítulo en el trabajo, pero hemos preferido dejarlo como apéndice para que el texto sea más breve y trate directamente el tema en cuestión.

Recomendamos leer los dos apéndices antes del texto general, aunque no son necesarios. En cualquier caso, si el lector no comprende cualquier cosa relativa a convenios o definiciones, podrá consultarlos.

Como última parte, planteamos las conclusiones de la memoria, así como la idea de continuar desarrollando un texto donde se expliquen rigurosamente distintos diagramas de Penrose, tanto de soluciones clásicas como de alguna más moderna.

Para finalizar esta introducción, comentar que todas las figuras presentes en el texto son de elaboración propia. La mayoría de ellas se han elaborado con Inkscape. Las líneas temporales o espaciales constantes representadas en algunos diagramas de Penrose están programadas en Python, con la librería Matplotlib. No hemos considerado necesario incluir los programas.

Capítulo 1

Estructura causal

La estructura causal en Relatividad General es *localmente* similar a la del espacio de Minkowski en Relatividad Especial. Sin embargo, al tratar el espacio-tiempo globalmente habrá grandes diferencias debido a su topología no trivial, como la aparición de singularidades. El objetivo de este capítulo es dar las definiciones y los resultados más relevantes que serán necesarios para estudiar la estructura causal en los diagramas de Penrose.

1.1. Futuro y pasado

Consideramos un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) temporalmente orientable. Dividimos los vectores causales (tipo tiempo o tipo luz) en *dirigidos al futuro* o *dirigidos al pasado* dependiendo de si están en la parte futura o pasada del cono de luz. A partir de la distinción de vectores, se distinguen las curvas diferenciables sobre la variedad entre curvas temporales, espaciales o de tipo luz según lo sea su vector tangente en todos sus puntos. También las clasificamos ahora en *curvas temporales/causales dirigidas al futuro (pasado)* si, para todo punto, el vector tangente es un vector temporal/causal dirigido al futuro (pasado).

El **futuro cronológico** $I^+(p)$ de $p \in \mathcal{M}$ es el conjunto de eventos que se pueden alcanzar por una curva temporal dirigida al futuro que empieza en p :

$$I^+(p) = \{ q \in \mathcal{M} / \exists \gamma(t), v^\mu v_\mu > 0, \text{ dirigido al futuro con } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \} \quad (1.1.1)$$

Es claro que $I^+(p)$ es un abierto de la variedad, pues ante una *pequeña* deformación del punto q , siempre podremos mantener el carácter de curva temporal dirigida al futuro. Notemos que, en general, $p \notin I^+(p)$, pero que $p \in I^+(p)$ ocurriría si hubiese una curva temporal cerrada que empezase y acabase en p . Si consideramos un subconjunto cualquiera de la variedad, o más específicamente, una hipersuperficie \mathcal{S} , podemos definir el conjunto (también abierto):

$$I^+(\mathcal{S}) = \bigcup_{p \in \mathcal{S}} I^+(p) \quad (1.1.2)$$

De manera similar definimos el **pasado cronológico** $I^-(p)$, $I^-(\mathcal{S})$.

El **futuro causal** $J^+(p)$ de $p \in \mathcal{M}$ es definido de manera similar pero con curvas causales dirigidas al futuro:

$$J^+(p) = \{ q \in \mathcal{M} / \exists \gamma(t), v^\mu v_\mu \geq 0, \text{ dirigido al futuro con } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \} \quad (1.1.3)$$

Análogamente definimos $J^+(\mathcal{S}) = \bigcup_{p \in \mathcal{S}} J^+(p)$, y el pasado causal $J^-(p)$, $J^-(\mathcal{S})$. Ahora tenemos $p \in J^+(p)$. Este conjunto es cerrado en el espacio-tiempo plano, pero no generalmente (véase la figura 1.1.1).

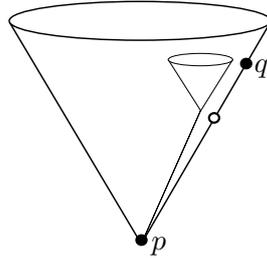


Figura 1.1.1 Espacio-tiempo de Minkowski con un punto removido en el cono de luz futuro. No hay ninguna curva causal que conecte p y q , y sin embargo $q \in \overline{J^+(p)}$, luego el futuro causal de p no es un conjunto cerrado.

Siguiendo con el ejemplo de Minkowski, tendremos que $I^+(p)$ es el conjunto de puntos que pueden alcanzarse a través de geodésicas de tipo tiempo dirigidas al futuro que empiezan en p , y su frontera $\partial I^+(p)$ está generada por las geodésicas nulas dirigidas al futuro que empiezan en p . Estas características no son ciertas un espacio-tiempo arbitrario, como hemos visto en la figura 1.1.1, pero sí son válidas *localmente*.

Diremos que un subconjunto de la variedad espacio-tiempo es **ácrono** si no existe ningún par de puntos del mismo que estén unidos por curvas temporales. Por ejemplo una hipersuperficie \mathcal{S} es ácrona si, y sólo si, $\nexists p, q \in \mathcal{S}$ tales que $q \in I^+(p)$, o sea, $\mathcal{S} \cap I^+(\mathcal{S}) = \emptyset$. Se puede demostrar (véase [18], p. 192) el siguiente teorema:

Teorema 1.1.1. $\partial I^+(\mathcal{S})$ es una hipersuperficie (superficie tridimensional) ácrona embebida en \mathcal{M} .

Hasta ahora hemos hablado de curvas diferenciables, pero es necesario extender las consideraciones hechas al caso de curvas únicamente continuas. Diremos que una curva continua λ es una curva temporal (causal) dirigida al futuro si, para cada $p \in \lambda$, existe un entorno normal convexo U tal que, si $\lambda(t_1), \lambda(t_2) \in U$, $t_1 < t_2$, entonces existe una curva temporal (causal) diferenciable dirigida al futuro en U de $\lambda(t_1)$ a $\lambda(t_2)$. La estructura causal de las curvas es invariante bajo reparametrizaciones continuas, luego consideraremos equivalentes las curvas que difieran en una parametrización tal. Ahora tratemos de dar criterios para diferenciar las curvas que «van al infinito», las que «siguen alrededor para siempre» y las que «llegan a una singularidad» o «acaban». Para ello usamos el concepto de punto final de una curva. Sea $\lambda(t)$ una curva causal dirigida al futuro. Un punto $p \in \mathcal{M}$ es un **punto final** de λ si para todo entorno O de p existe t_0 tal que $\lambda(t) \in O, \forall t > t_0$.

Notemos que no tiene por qué estar en la curva, y que, por ser \mathcal{M} Hausdorff, es único. La curva λ es *inextensible al futuro (pasado)* si no tiene un punto final futuro (pasado). En la figura 1.1.2 vemos algunos de estos conceptos representados.

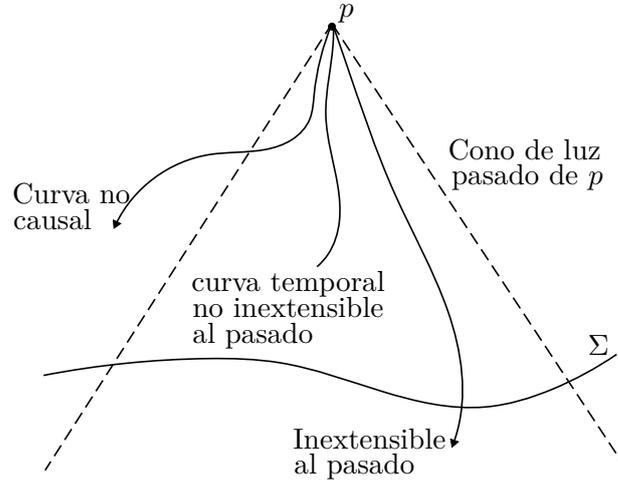


Figura 1.1.2 En el cono de luz pasado de p , representado con línea discontinua, tenemos siempre curvas dirigidas al pasado. Hemos representado una curva no causal, o sea, su vector tangente no es siempre causal. Por otra parte, distinguimos una curva temporal no inextensible al pasado, es decir, con un punto final pasado, y una curva inextensible al pasado. Σ es una hipersuperficie de Cauchy.

El siguiente teorema, cuya prueba se puede encontrar en [18] (también para el resto de resultados del capítulo, que daremos sin demostración), caracteriza la naturaleza de los bordes de los futuros cronológicos (y que encaja con las ideas que dábamos para el cono de luz).

Teorema 1.1.2. Sea $C \subset \mathcal{M}$ un subconjunto cerrado de la variedad espacio temporal \mathcal{M} . Todo $p \in \partial I^+(C)$ con $p \notin C$ está en una geodésica nula que está enteramente sobre $\partial I^+(C)$, y o bien es inextensible al pasado, o bien tiene un punto final en C .

1.2. Condiciones de causalidad

Como hemos comentado, se puede probar que, localmente, cualquier espacio-tiempo tiene la misma estructura causal que el espacio plano de la relatividad especial. Sin embargo, a escala global las diferencias son radicales. Por lo pronto, podemos construir sin dificultad un espacio-tiempo con curvas causales cerradas, donde un observador podría alterar eventos pasados (véase la figura 1.2.1).

Sin embargo, no nos es suficiente con descartar los espacio-tiempos que permitan curvas causales cerradas. Incluso uno en el que hay curvas temporales que están «arbitrariamente cerca» de cruzarse consigo mismas daría lugar a violaciones de la causalidad, pues una perturbación en la métrica podría provocar el cruce. Debemos prevenirnos de estos casos también. Una manera de evitarlos es la siguiente condición: un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) es

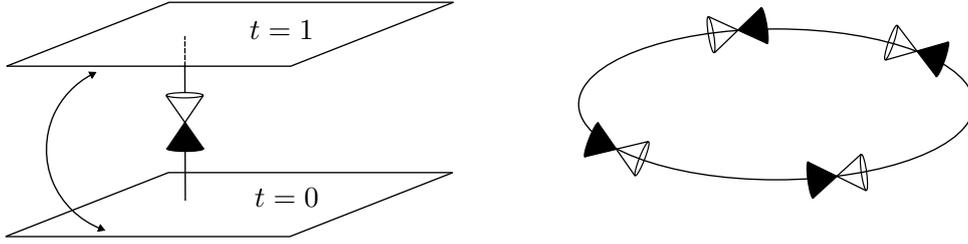


Figura 1.2.1 Ejemplos de espacios-tiempos con curvas temporales cerradas. Un espacio con topología $\mathbb{S} \times \mathbb{R}^3$ identificando los hiperplanos $t = 0$ y $t = 1$ en el espacio de Minkowski, donde las curvas integrales de ∂t serían curvas temporales cerradas. O uno con topología \mathbb{R}^4 donde los conos de luz se retuercen tanto como para permitir la existencia de curvas temporales cerradas. Incluso hay soluciones a las ecuaciones de Einstein que dan lugar a universos que admiten estas curvas, como la solución rotatoria de Gödel.

fuertemente causal si para todo punto $p \in \mathcal{M}$ y para todo entorno O de p , existe un entorno V de p contenido en O , $V \subset O$, tal que ninguna curva causal interseca V más de una vez. De esta manera, si un espacio-tiempo viola la causalidad fuerte en un punto, cerca de él existirán curvas que están arbitrariamente cerca de cruzarse consigo mismas. Pero en realidad esto no es suficiente, pues se pueden construir espacios-tiempos fuertemente causales en los que una modificación de la métrica en entornos arbitrariamente pequeños de dos o más puntos produce curvas causales cerradas.

La siguiente condición elimina definitivamente las violaciones causales: un espacio-tiempo es **causalmente estable** si existe una función diferenciable en \mathcal{M} (campo escalar) tal que su gradiente $\nabla^\mu f = g^{\mu\nu} \nabla_\nu f$ es un campo vectorial temporal dirigido al futuro. A una función de estas características se la llama **función global del tiempo**, y nos permite distinguir entre futuro y pasado en todo punto de la variedad, de tal manera que evitamos las violaciones de la causalidad.

Teorema 1.2.1. La estabilidad causal implica la causalidad fuerte.

1.3. Hiperbolicidad global

Para un conjunto espacio-temporal $S \subset \mathcal{M}$, definimos el **borde** de S como el conjunto de puntos $p \in S$ tales que todo entorno abierto O de p contiene un punto $q \in I^+(p)$, un punto $r \in I^-(p)$, y una curva temporal λ desde r hasta q que no corta a S (véase figura 1.3.1).

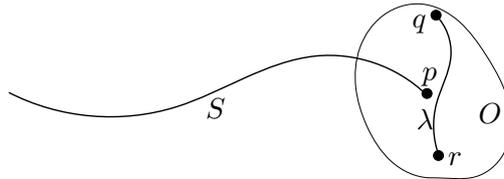


Figura 1.3.1 Diagrama que ilustra la definición de borde de un conjunto espacio-temporal cerrado y ácrono.

Consideremos a partir de ahora hipersuperficies \mathcal{S} (aunque las definiciones son válidas para cualquier subconjunto cerrado de la variedad). Definimos el **dominio de dependencia futuro (pasado)** $D^+(\mathcal{S})$ ($D^-(\mathcal{S})$) de una hipersuperficie ácrona \mathcal{S} como el conjunto de puntos de la variedad para los que todas las curvas causales inextendibles al pasado (futuro) que pasan por ellos, intersecan a la hipersuperficie \mathcal{S} . Es decir, el dominio de dependencia futuro (pasado) de un punto en el espacio-tiempo consiste en todos los eventos cuyos efectos pueden ser (haber sido) experimentados por ese punto en el futuro (pasado). Notemos que siempre se cumple que $\mathcal{S} \subset D^+(\mathcal{S})$. El conjunto $D^+(\mathcal{S})$ es interesante: como nada puede ir más rápido que la luz, toda señal enviada hacia $p \in D^+(\mathcal{S})$ debe haberse registrado en \mathcal{S} . Entonces, si se nos da información apropiada sobre las «condiciones iniciales» en \mathcal{S} , deberíamos ser capaces de predecir lo que pasa en $p \in D^+(\mathcal{S})$. Para el dominio de dependencia pasado, del conocimiento de condiciones en \mathcal{S} somos capaces de conocer las condiciones en todo $q \in D^-(\mathcal{S})$.

El **dominio de dependencia** (total) queda definido por:

$$D(\mathcal{S}) = D^+(\mathcal{S}) \cup D^-(\mathcal{S}). \quad (1.3.1)$$

Entonces, $D(\mathcal{S})$ representa el conjunto completo de eventos para los cuales todas las condiciones se determinan si se conocen las condiciones en \mathcal{S} . La siguiente definición es muy importante:

Una hipersuperficie ácrona Σ tal que su dominio de dependencia es todo el espacio-tiempo, $D(\Sigma) = \mathcal{M}$, se denomina **hipersuperficie de Cauchy**. Se sigue inmediatamente que toda hipersuperficie de Cauchy tiene borde vacío. Dado que es ácrona, podemos pensar en una hipersuperficie de Cauchy como algo que representa un «instante de tiempo» en todo el universo.

Un espacio-tiempo en el que existe una hipersuperficie de Cauchy se dice que es **globalmente hiperbólico**. En consecuencia, en un espacio globalmente hiperbólico toda la historia futura y pasada (lo que ocurre en cualquier punto) puede conocerse a partir de las condiciones en el instante de tiempo representado por la hipersuperficie de Cauchy Σ . En otras palabras, las ecuaciones de movimiento tienen solución en todo el espacio-tiempo, y ésta es única si debe satisfacer condiciones iniciales en una hipersuperficie de Cauchy. Por contra, en un espacio-tiempo que no lo sea, tendremos siempre una laguna en el conocimiento de la historia completa del universo. Hay bastante evidencia de que todos los espacio-tiempos físicamente realistas son globalmente hiperbólicos (véase [14], cap. 12). Por lo pronto, se puede demostrar que si (\mathcal{M}, g) es globalmente hiperbólico, entonces es causalmente estable (luego fuertemente causal).

De la definición de hipersuperficie de Cauchy se puede demostrar sin dificultad que todas las curvas causales inextensibles (al pasado o al futuro) la intersecan y atraviesan una y sólo una vez.

Consideremos de nuevo una hipersuperficie \mathcal{S} cerrada ácrona (bastaría con que fuese un subconjunto espacio-temporal). Definimos el **horizonte futuro (pasado) de Cauchy** de \mathcal{S} de la siguiente manera:

$$H^+(\mathcal{S}) = \overline{D^+(\mathcal{S})} - I^-(D^+(\mathcal{S})), \quad (1.3.2)$$

$$H^-(\mathcal{I}) = \overline{D^-(\mathcal{I})} - I^+(D^-(\mathcal{I})). \quad (1.3.3)$$

Claramente $H^+(\mathcal{I})$ es cerrado, pues es intersección de los cerrados $\overline{D^-(\mathcal{I})}$ y $\mathcal{M} - I^-(D^+(\mathcal{I}))$. Además tenemos que

$$I^-(H^+(\mathcal{I})) \subset I^-(\overline{D^+(\mathcal{I})}) = I^-(D^+(\mathcal{I})) \subset \mathcal{M} - H^+(\mathcal{I}) \quad (1.3.4)$$

, luego $I^-(H^+(\mathcal{I})) \cap H^+(\mathcal{I}) = \emptyset$, por lo que $H^+(\mathcal{I})$ es ácrono. Un resultado importante sobre horizontes de Cauchy es el siguiente:

Teorema 1.3.1. Todo punto $p \in H^+(\mathcal{I})$ está en una geodésica nula λ contenida completamente en $H^+(\mathcal{I})$ que, o bien es inextensible al pasado, o bien tiene un punto final pasado en el borde de \mathcal{I} .

El *horizonte de Cauchy* (total) de una hipersuperficie cerrada acronal \mathcal{I} se define:

$$H(\mathcal{I}) = H^+(\mathcal{I}) \cap H^-(\mathcal{I}), \quad (1.3.5)$$

que puede ser vacío en ciertos casos. No es difícil comprobar que el horizonte de Cauchy de \mathcal{I} es la frontera de su dominio de dependencia: $H(\mathcal{I}) = \partial D(\mathcal{I})$. Se deduce este resultado también muy importante:

Teorema 1.3.2. Si \mathcal{M} es conexo, entonces un conjunto no vacío, cerrado y ácrono, Σ , es una hipersuperficie de Cauchy si, y sólo si, $H(\Sigma) = \emptyset$.

Demostración. Si Σ es una hipersuperficie de Cauchy, entonces $D(\Sigma) = \mathcal{M}$ y $\overline{H(\Sigma)} = \partial D(\Sigma) = \emptyset$. Por otra parte, si $\partial D(\Sigma) = \emptyset$, por la definición de frontera, $\overline{D(\Sigma)} = \text{Int}(D(\Sigma))$, luego $D(\Sigma)$ es abierto y cerrado. Por lo tanto, o bien es el total, o bien el vacío; como $\Sigma \neq \emptyset$, $\Sigma \subset D(\Sigma)$ y \mathcal{M} es conexo, no es vacío, luego es el total, $D(\Sigma) = \mathcal{M}$. \square

Recordemos que un espacio-tiempo es globalmente hiperbólico si tiene una hipersuperficie de Cauchy, luego los resultados anteriores pueden escribirse en términos de hiperbolicidad global. Por ejemplo, si \mathcal{M} no es globalmente hiperbólico, entonces $D^+(\Sigma)$ o $D^-(\Sigma)$ tendrán un horizonte en \mathcal{M} , lo que hemos llamado horizonte de Cauchy futuro o pasado. En la siguiente imagen (figura 1.3.2) tenemos un ejemplo para entender todos los conceptos anteriores.

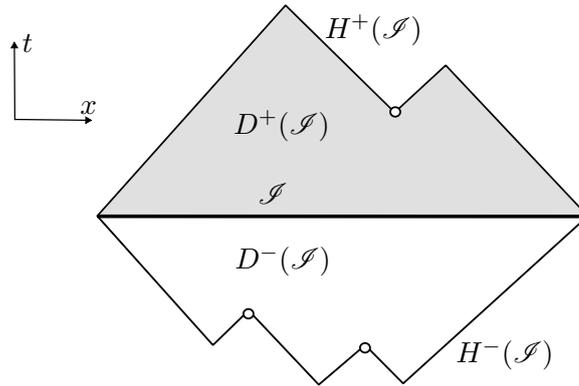


Figura 1.3.2 Representación del espacio de una hipersuperficie ácrona \mathcal{S} en el espacio de Minkowski. En gris, su dominio de dependencia futuro; en blanco, el pasado. El horizonte de Cauchy (futuro y pasado) se corresponde, en este caso, con los bordes del dibujo. Se han remarcado algunos puntos que no pertenecen al espacio-tiempo.

A continuación, otra caracterización de las hipersuperficies de Cauchy, ahora en términos de geodésicas nulas:

Teorema 1.3.3. Sea Σ una hipersuperficie cerrada y ácrona. Σ es una hipersuperficie de Cauchy si, y sólo si, toda geodésica nula inextensible intersecta Σ y entra en $I^+(\Sigma)$ e $I^-(\Sigma)$.

En un espacio-tiempo globalmente hiperbólico no pueden existir curvas temporales cerradas. Por definición una hipersuperficie de Cauchy es ácrona, luego una curva temporal cerrada no puede cruzarla. Pero si existe una curva temporal inextensible que no la cruza, entonces es que no es una hipersuperficie de Cauchy y el espacio no es globalmente hiperbólico.

Cabe remarcar que, en un espacio globalmente hiperbólico todas las superficies de Cauchy son homeomorfas. Por último, el siguiente resultado es de una importancia crucial (recordemos que globalmente hiperbólico \Rightarrow causalmente estable):

Teorema 1.3.4. Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico. Se puede escoger una función global del tiempo f tal que cada hipersuperficie definida por $f = \text{cte}$ sea una hipersuperficie de Cauchy espacial. Así, \mathcal{M} puede foliarse¹ por hipersuperficies de Cauchy espaciales Σ_t , y su topología es $\mathbb{R} \times \Sigma_t$ (\mathcal{M} y $\mathbb{R} \times \Sigma_t$ son difeomorfos).

¹Partición de \mathcal{M} en subvariedades diferenciables.

Capítulo 2

Diagramas de Penrose

El objetivo de los diagramas de Penrose es estudiar la estructura causal de las soluciones de las ecuaciones de Einstein en un espacio finito bidimensional; o sea, en una hoja de papel. Para ello se debe acercar gráficamente (proyectar) el infinito a una distancia finita, lo cual se consigue a través de una transformación conforme («de Weyl»¹) de la métrica. La nueva métrica, al ser conforme a la original, tiene la misma estructura causal, ya que las geodésicas nulas de ambas coinciden. En este sentido, utilizando coordenadas nulas nos aseguraremos de que los rayos de luz sean siempre rectas con pendiente $\pm 45^\circ$.

Sean \mathcal{M} , $\tilde{\mathcal{M}}$ dos espacios-tiempos, $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ un embebimiento y una función $\Omega : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ . Decimos que $\tilde{\mathcal{M}}$ es una **compactificación conforme** de \mathcal{M} si cumple las siguientes propiedades:

1. φ embebe \mathcal{M} como una variedad diferenciable con frontera suave en $\tilde{\mathcal{M}}$. Tenemos $\tilde{\mathcal{M}} = \varphi(\mathcal{M}) \cup \partial\varphi(\mathcal{M})$, con $\varphi(\mathcal{M}) = \text{Int}(\tilde{\mathcal{M}}) := \tilde{\mathcal{M}} - \partial\tilde{\mathcal{M}}$.
2. $\Omega > 0$ en $\varphi(\mathcal{M})$ y la métrica \tilde{g} en $\varphi(\mathcal{M})$ se obtiene a partir de la métrica g en \mathcal{M} mediante la isometría conforme $\tilde{g} = \Omega^2 \varphi^* g$.
3. En la frontera suave de $\varphi(\mathcal{M})$ en $\tilde{\mathcal{M}}$, que denotaremos $\tilde{\mathcal{I}}$ y llamaremos **infinito conforme**², la función Ω se anula ($\Omega=0$), pero no su gradiente ($\nabla_\mu \Omega \neq 0$).
4. El tensor $\Omega^{-1}C$ es suave en $\tilde{\mathcal{M}}$, donde C es el tensor de Weyl.

De acuerdo con la primera condición, el espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) , que llamamos el espacio-tiempo físico, puede considerarse como parte de un espacio-tiempo que lo embebe, $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$, un espacio-tiempo no físico. Como subvariedad de $\tilde{\mathcal{M}}$, el espacio-tiempo físico puede tener una frontera que se requiere que sea suave. La métrica no física $\tilde{g}_{\mu\nu}$ está bien definida en $\tilde{\mathcal{M}}$ y, en particular, en \mathcal{M} , mientras que la métrica física $g_{\mu\nu}$ sólo se define en \mathcal{M} y no se puede extender en un sentido bien definido a la frontera de \mathcal{M} o más allá.

En coordenadas, podemos escribir la segunda condición de la siguiente manera

¹Para un análisis muy detallado de las transformaciones de Weyl, tanto para la métrica de Minkowski como para métricas arbitrarias, véase [8].

²Es usual encontrarlo en la bibliografía denotado por la letra \mathcal{I} , que Penrose sugiere pronunciar «scri».

$$\Omega^{-2}(y)\tilde{g}_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}(x), \quad (2.0.1)$$

donde y son las coordenadas de un punto p en $\tilde{\mathcal{M}}$ y x en \mathcal{M} . Es decir, la métrica es invariante módulo un factor conforme; o sea, *conformemente equivalente*. Sin embargo, en general una **transformación conforme** no corresponde con un cambio de coordenadas, y escribiremos

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x). \quad (2.0.2)$$

Por esto mismo, la nueva métrica es físicamente distinta de la anterior aunque conserve la estructura causal, pues no es un cambio de coordenadas, sino una transformación que relaciona métricas que son física y geoméricamente distintas. El factor de escala cambia de punto a punto el concepto de unidad de longitud. Esto se puede comprobar calculando la expresión de los tensores de curvatura en ambas métricas y viendo que no se corresponden con las reglas de transformación bajo cambios generales de coordenadas (de nuevo nos remitimos a [8]). De hecho, dependiendo de las características de la función Ω , podría darse el caso de una métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ con singularidades cuando $g_{\mu\nu}$ no las tiene.

En cuanto a la tercera propiedad, nos está diciendo que el factor conforme $\Omega(y)$ tiende a cero cuando las componentes de la métrica original tienden a infinito. De esta manera identificamos el «infinito» con los puntos para los cuales $\Omega = 0$, o sea, los puntos del infinito conforme. Estos puntos no pertenecen al espacio-tiempo original, pero son añadidos en la compactificación conforme.

Por último, la cuarta condición implica que el tensor de Weyl se anula en el infinito conforme (véase [3] para un tratamiento detallado). Recordemos que el tensor de Weyl es invariante bajo transformaciones de Weyl, esto es, dos métricas relacionadas a través de una transformación conforme tienen el mismo tensor de Weyl. Se puede descomponer el tensor de Riemann en una suma del tensor de Weyl y distintas trazas (véase [8]), lo que nos dice que el tensor de Weyl es la parte de la geometría que no está determinada por las ecuaciones de Einstein, pues en ellas sólo aparecen el tensor y el escalar de Ricci. Las diferencias geométricas entre distintas soluciones, por ejemplo, del vacío, se encuentran en sus tensores de Weyl.

La estructura causal de la métrica es la misma, pues, por la positividad del factor de escala, el carácter causal de los vectores se preserva

$$\tilde{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \tilde{g}_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \Omega(x)^2 g(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (2.0.3)$$

La demostración de que las geodésicas nulas de dos métricas conformes coinciden es sencilla, pero no la explicitamos aquí (véase, de nuevo, [8]). Se trata de sustituir los símbolos de Christoffel en la nueva métrica, utilizar la condición de geodésica nula $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$ y el hecho de que los parámetros afines están relacionados por la expresión $d\tilde{\sigma} = \Omega^2 d\sigma$.

Definimos el **infinito espacial** i_0 como el punto de $\varphi(\mathcal{M})$ en el que las geodésicas espaciales inextensibles comienzan y terminan. Podría haber dos infinitos espaciales en un diagrama de Penrose; en tal caso, uno será el punto en el que comienzan todas las geodésicas espaciales inextensibles, y el otro en el que acaban. La métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ es de clase C^∞ en todo

punto excepto posiblemente en i_0 (véase [18], cap. 11). Hemos definido el infinito conforme \mathfrak{I} como la frontera $\partial\varphi(\mathcal{M})$. Lo podemos dividir en dos partes, el infinito conforme **futuro** y el infinito conforme **pasado**:

$$\mathfrak{I}^+ = \partial J^+(i_0) - i_0, \quad \mathfrak{I}^- = \partial J^-(i_0) - i_0, \quad (2.0.4)$$

$$\partial\varphi(\mathcal{M}) = \partial\tilde{\mathcal{M}} = \mathfrak{I} = \mathfrak{I}^+ \cup \mathfrak{I}^-. \quad (2.0.5)$$

Todas las geodésicas nulas inextensibles comienzan en \mathfrak{I}^- y terminan en \mathfrak{I}^+ . Sin embargo, \mathfrak{I}^\pm no son siempre hipersuperficies nulas, como en el caso de soluciones cosmológicas con constante cosmológica no nula. Para entender mejor estos conceptos tratemos el espacio-tiempo de Minkowski.

2.1. El espacio de Minkowski

Partimos del elemento de línea del espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ en coordenadas esféricas

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)d\varphi^2) = dt^2 - dr^2 - r^2d\Omega_2^2. \quad (2.1.1)$$

Definimos las coordenadas de cono de luz (si en un diagrama espacio-temporal la luz está a $\pm 45^\circ$, en un diagrama $u - v$ está sobre los ejes) a través de la componente radial

$$u = t - r, \quad v = t + r. \quad (2.1.2)$$

Si teníamos que $r \in (0, \infty)$, $t \in (-\infty, \infty)$, entonces $-\infty < u, v < \infty$. Además, $v - u = 2r \in (0, \infty)$, luego siempre se tiene que $v > u$. En estas nuevas coordenadas la métrica toma la forma

$$ds^2 = dudv - \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega_2^2. \quad (2.1.3)$$

A continuación realizamos el cambio de coordenadas que nos «acerca» el infinito. Para ello debemos usar una función compactificadora, como la \arctg , la \tanh , la función sigmoide $1/(1 + e^{-x})$... Es igual, la única diferencia será la posición del diagrama en el plano.

$$U = \arctg(u), \quad V = \arctg(v), \quad (2.1.4)$$

$$-\frac{\pi}{2} < U, V < \frac{\pi}{2}, \quad V > U, \quad (2.1.5)$$

$$ds^2 = \frac{dUdV}{\cos^2(U)\cos^2(V)} - \frac{1}{4} \frac{\sin^2(V - U)}{\cos^2(U)\cos^2(V)} d\Omega_2^2. \quad (2.1.6)$$

Ahora vamos a «deshacer» las coordenadas de cono de luz para que la luz vuelva a estar a $\pm 45^\circ$ en nuestro digrama

$$U = \frac{t' - r'}{2}, \quad V = \frac{t' + r'}{2}, \quad \implies \quad t' = U + V, \quad r' = V - U, \quad (2.1.7)$$

$$-\pi < t' - r' < \pi, \quad -\pi < t' + r' < \pi, \quad r' > 0, \quad (2.1.8)$$

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2\left(\frac{t'-r'}{2}\right) \cos^2\left(\frac{t'+r'}{2}\right)} [dt'^2 - dr'^2 - \sin^2(r') d\Omega_2^2]. \quad (2.1.9)$$

Vemos que tenemos efectivamente una nueva métrica, $d\tilde{s}^2$, la que está entre corchetes, conforme a la anterior, ds^2

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2, \quad \Omega = 2 \cos\left(\frac{t' - r'}{2}\right) \cos\left(\frac{t' + r'}{2}\right) \quad (2.1.10)$$

Reconocemos en la nueva métrica, conforme a la anterior, la del universo estático de Einstein (solución cosmológica para materia fría y con constante cosmológica) con radio unidad. En otras palabras, la métrica de $\mathbb{R}^{1,3}$ es conforme al trozo de universo estático de Einstein descrito por las coordenadas acotadas en los rangos de 2.1.8.

Para obtener el diagrama de Penrose debemos restringirnos a dos coordenadas. En concreto, prescindiremos de las coordenadas compactas θ y φ , pues, como hay simetría esférica, todos los puntos de cada esfera serán equivalentes. Por consiguiente cada punto (excepto los que están en $r = 0$ e i^\pm, i^0 , que son puntuales) del diagrama representan esferas bidimensionales \mathbb{S}^2 . A través de 2.1.8 delimitamos el diagrama (dibujamos la frontera suave), y las líneas de luz, haciendo $d\tilde{s}^2 = 0$, son, efectivamente, las rectas con pendiente $\pm 45^\circ$. Lo representamos en la figura 2.1.1.

Notemos que esta compactificación conforme incluye, además del espacio de Minkowski conforme y todos sus infinitos conformes, los puntos i^\pm e i^0 , que no pertenecen a la frontera suave de $\varphi(\mathcal{M})$.

Dividimos el infinito conforme del espacio de Minkowski en 5 partes:

- i^0 define el **infinito espacial**. Corresponde a $r = \infty$, t arbitrario, o sea, $(U, V) = (-\pi/2, \pi/2)$. Las geodésicas espaciales inextensibles comienzan y terminan en i^0 .
- i^\pm son el **infinito temporal futuro** y el **infinito temporal pasado**. Corresponden a $t = \pm\infty$, r arbitrario, o sea, $(U, V) = (\pi/2, \pi/2)$ y $(U, V) = (-\pi/2, -\pi/2)$. Todas las geodésicas temporales inextensibles comienzan en i^- y terminan en i^+ .
- \mathcal{I}^\pm , los infinitos conformes definidos en 2.0.4. Corresponden a $r = \infty$, $t = \pm\infty$ con $R \mp T$ finito. Es decir, son el futuro y el pasado nulos del infinito espacial i^0 , luego las geodésicas nulas inextensibles comienzan en \mathcal{I}^- y terminan en \mathcal{I}^+ .

Debido al carácter puntual de i^\pm , el cono de luz alcanza tamaños arbitrariamente grandes, y deducimos que no hay ni horizonte de partículas ni horizonte cósmico de eventos:

$$l_{HP}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \rightarrow \infty, \quad l_{HE}(t) = \int_t^\infty dt' \rightarrow \infty, \quad (2.1.11)$$

donde hemos usado que $a(t) = 1$ en la métrica de Minkowski, y que es un modelo sin singularidad inicial.

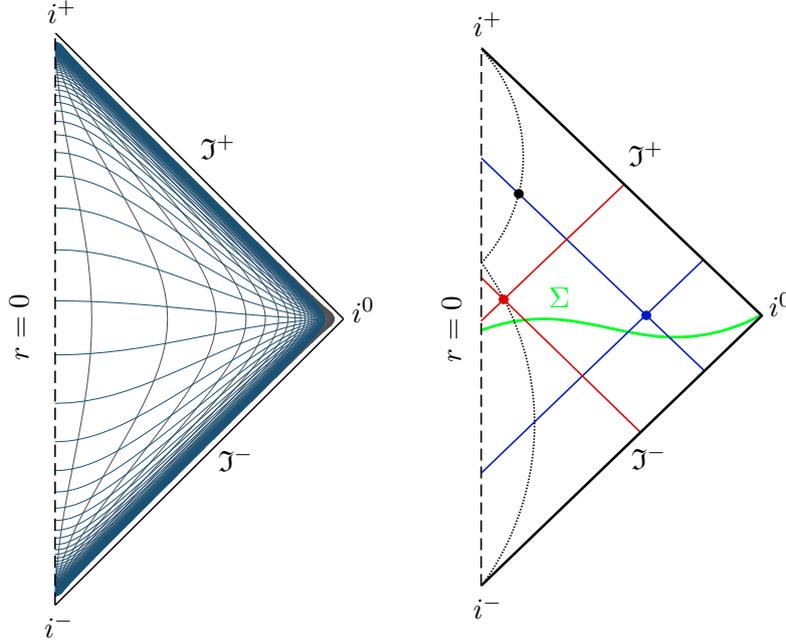


Figura 2.1.1 Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Minkowski. A la izquierda, en gris, líneas de r constante; en azul, líneas de t constante. En el diagrama de la derecha hemos remarcado en línea punteada la singularidad de coordenadas $r = 0$, donde las geodésicas radiales o nulas parece que «rebotan» debido a que los puntos del diagrama representan esferas bidimensionales. En azul y rojo tenemos el cono de luz (geodésicas nulas) de dos eventos. El hecho de que i^\pm sean puntuales implica que las influencias causales pueden provenir de distancias arbitrariamente lejos. Cualquier evento (punto azul) influirá a cualquier observador inercial (geodésica radial temporal en negro punteada) en un futuro suficientemente lejano (punto negro). En verde, una hipersuperficie de Cauchy: Minkowski es globalmente hiperbólico.

2.2. Planitud asintótica

Es fundamental en RG encontrar una definición precisa para aquellos espacios-tiempos que tienen la misma estructura para el infinito conforme que el espacio-tiempo de Minkowski. Es el concepto de espacio *asintóticamente plano*. Son necesarios algunas definiciones previas.

- Un espacio-tiempo \mathcal{M} es **asintóticamente simple** si, y sólo si, admite una compactificación conforme y todas las geodésicas nulas de $\varphi(\mathcal{M})$ comienzan y terminan en su frontera suave $\partial\varphi(\mathcal{M}) = \mathfrak{I}$.
- Un espacio-tiempo \mathcal{M} asintóticamente simple es **asintóticamente vacío** si, y sólo si, existe un abierto de su frontera \mathfrak{I} como espacio embebido en el que el tensor de Ricci se anula (ecuaciones de Einstein en el vacío).

La frontera \mathfrak{I} de un espacio-tiempo asintóticamente simple \mathcal{M} (como embebimiento) no puede incluir los puntos i^\pm e i^0 , puesto que no es suave en estos puntos. Por tanto, en $\tilde{\mathcal{M}}$, $\overline{\varphi(\mathcal{M})} \neq \varphi(\mathcal{M}) \cup \mathfrak{I}$. La frontera \mathfrak{I} representa el infinito en el sentido de que las

geodésicas nulas empiezan y terminan en ella con valores infinitos de su parámetro afín, puesto que $\Omega|_{\mathcal{I}} = 0$. Para la demostración de la siguiente proposición véase [6], cap. 6.

Proposición 2.2.1. Los espacios-tiempos asintóticamente simples y vacíos cumplen:

1. Tienen la misma estructura para i^0 y para \mathcal{I}^\pm que el espacio-tiempo de Minkowski: frontera suave nula formada por dos partes disjuntas, \mathcal{I}^\pm , que son el futuro y pasado nulos de i^0 .
2. Son globalmente hiperbólicos.
3. \mathcal{I}^\pm tienen la topología de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, y \mathcal{M} la de \mathbb{R}^4 .

Podríamos pensar que estas condiciones serían adecuadas para describir un espacio-tiempo asintóticamente plano, pero no son suficientes. Notemos que los espacios-tiempos con agujeros negros no son asintóticamente simples, pues contienen geodésicas nulas que no acaban en \mathcal{I} , sino en singularidades, las cuales no pueden formar parte de la frontera suave. Evitamos este problema restringiéndonos a un abierto del espacio-tiempo de la siguiente manera:

Un espacio-tiempo es *asintóticamente plano* si, y sólo si, posee un abierto que es isométrico a un entorno abierto de la frontera de la compactificación conforme de algún espacio-tiempo asintóticamente simple y el tensor de Ricci se anula en dicho entorno.

2.3. Soluciones cosmológicas

2.3.1. Espacio-tiempo de De Sitter

El espacio-tiempo de De Sitter es la solución cosmológica no trivial con la construcción del diagrama de Penrose más sencilla. Se trata de un solución del vacío ($\rho_M = \rho_{rad} = 0$) pero que, debido a una constante cosmológica positiva ($\rho_\Lambda > 0$), describe un universo en expansión acelerada. Además tiene curvatura escalar constante positiva: $k = +1$ (FRW con secciones espaciales esféricas³) con radio $R_0 = \sqrt{3/\kappa\rho_\Lambda}$.

La solución es máximamente simétrica, luego es fácil embeberla en un espacio plano de 5 dimensiones (Minkowski $\mathbb{R}^{1,4}$):

$$ds^2 = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} dX^{\hat{\mu}} dX^{\hat{\nu}}. \quad (2.3.1)$$

El espacio de De Sitter es la subvariedad embebida en $\mathbb{R}^{1,4}$ descrita por el hiperboloide de una hoja

$$\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} X^{\hat{\mu}} X^{\hat{\nu}} = -R_0^2, \quad (2.3.2)$$

donde R_0 es el radio de De Sitter (cuadrimensional), que está relacionado con la constante cosmológica en la forma $R_0 = \sqrt{3/\kappa\Lambda}$ y representa la distancia espacial de la hipersuperficie de De Sitter al origen. El universo se contrae hasta un radio R_0 y luego se expande de manera exponencial.

³Se pueden definir análogos para $k = 0, -1$, o sea, secciones espaciales planas o hiperbólicas.

Una parametrización adecuada de las coordenadas $X^{\hat{\mu}}$ que satisfaga la ligadura 2.3.2 nos proporcionará la expresión de la métrica de De Sitter. Una opción es

$$\begin{aligned} X^0 &= R_0 \sinh(R_0^{-1}\tilde{t}), \\ X^i &= R_0 \cosh(R_0^{-1}\tilde{t}) \sin(\chi) \hat{X}^i, \\ X^4 &= R_0 \cosh(R_0^{-1}\tilde{t}) \cos(\chi), \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

donde $(\hat{X}^1, \hat{X}^2, \hat{X}^3) = (\cos(\theta), \sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi))$, una parametrización de \mathbb{S}^2 con radio unidad. Tomando diferenciales y sustituyendo en 2.3.1, obtenemos la métrica de De Sitter como la métrica inducida en la hipersuperficie 2.3.2 por la métrica del espacio de Minkowski 5-dimensional ambiente

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 - R_0^2 \cosh^2(R_0^{-1}\tilde{t}) d\Omega_3^2. \quad (2.3.4)$$

La coordenada temporal $t \equiv \tilde{t}$ coincide con X^0 , y las secciones espaciales son 3-esferas parametrizadas por X^i y X^4 . Así, las coordenadas 2.3.3 cubren toda la variedad, que tiene topología $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. Lo que ocurre es que, para $t < 0$, las 3-esferas \mathbb{S}^3 se contraen exponencialmente desde un tamaño infinito hasta un radio R_0 ; desde aquí y para $t > 0$, se expanden exponencialmente.

Para dibujar el diagrama de Penrose vamos a escribir la métrica en coordenadas conformes. Para ello, efectuamos el cambio de coordenadas

$$\tau = 2 \arctg(e^{t/R_0}), \quad -\infty < t < \infty \quad \longrightarrow \quad 0 < \tau < \pi, \quad (2.3.5)$$

con el que hemos compactificado la coordenada temporal. Escribiendo $d\Omega_3^2 = d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega_2^2$, la métrica de De Sitter toma la forma

$$ds^2 = \frac{R_0^2}{\sin^2(\tau)} \left[d\tau^2 - d\chi^2 - \sin^2(\chi) d\Omega_2^2 \right] \quad (= \Omega^{-2} ds^2), \quad (2.3.6)$$

que es conforme a la banda del universo estático de Einstein delimitada por

$$0 < \tau < \pi, \quad 0 < \chi < \pi. \quad (2.3.7)$$

Con estas expresiones representamos el diagrama de Penrose en la figura 2.3.1.

¿Por qué no tenemos infinito espacial? A causa de que las secciones espaciales, que son esferas \mathbb{S}^3 , son compactas. Así, hacer el límite $\chi \rightarrow \infty$ no tiene sentido, pues χ es una coordenada angular compacta de la métrica inicial. Los límites a izquierda y derecha, $\chi = 0, \chi = \pi$, del diagrama no son sino singularidades de coordenadas (esféricas).

Ahora el infinito pasado y futuro temporales, i^\pm , no son puntuales, sino superficies espaciales, pues al hacer $t = \pm\infty$ tenemos $\tau = 0, \pi$. Las geodésicas nulas que llegan a $\chi = 0, \chi = \pi$ «rebotan» y salen por el otro lado (como si $\chi = 0$ fuera el «polo norte» y $\chi = \pi$ el «polo sur») y siguen hasta $\tau = 0, \pi$, dependiendo si son dirigidas al futuro o al pasado, luego el infinito conforme coincide con el infinito temporal: $i^+ = \mathcal{I}^+$, $i^- = \mathcal{I}^-$. $\mathcal{I}^+, \mathcal{I}^-$ son también superficies espaciales, con topología \mathbb{S}^3 .

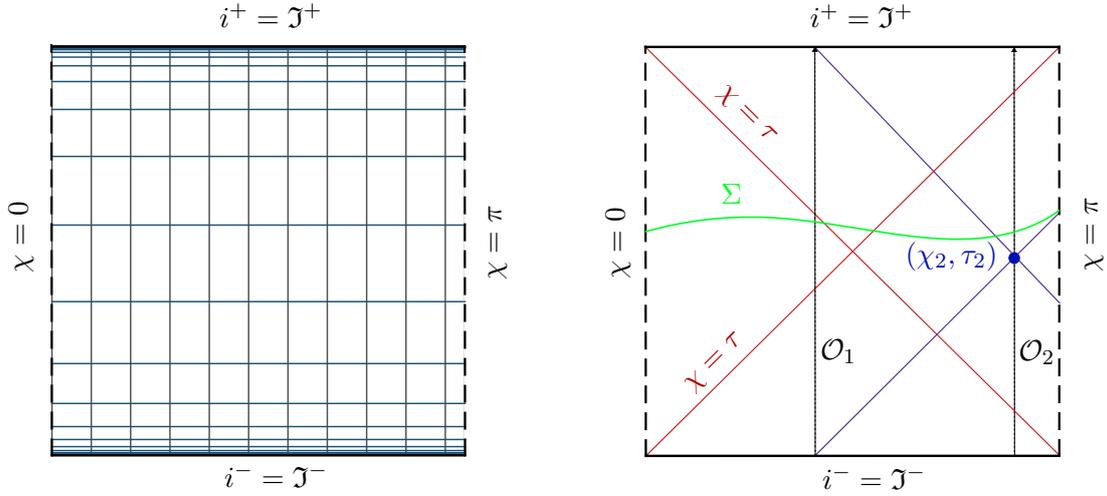


Figura 2.3.1 Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de De Sitter. En la imagen de la izquierda, en gris, líneas de χ constante; en azul, líneas de τ constante. A la derecha, en rojo, una línea geodésica nula que «rebota» en $\chi = 0, \chi = \pi$. Tenemos dos líneas de universo de dos observadores comóviles, \mathcal{O}_1 en χ_1 y \mathcal{O}_2 en χ_2 . El observador \mathcal{O}_2 no sabrá de la existencia de \mathcal{O}_1 hasta el evento (χ_2, τ_2) , cuando entra en su cono de luz pasado (líneas azules). A partir de entonces siempre podrá verlo. Al principio, con un corrimiento al azul extremo, pues, en el intervalo $[\tau_2, \tau_2 + \Delta\tau]$, \mathcal{O}_2 recibirá lo enviado por el observador \mathcal{O}_1 en $[0, \Delta\tau]$, y como el tiempo físico t está comprimido cerca de i^- , un intervalo de este tipo representa un intervalo infinito $(-\infty, t)$. De la misma forma, las señales que emite \mathcal{O}_1 cuando está muy cerca de $i^+ = \mathfrak{J}^+$ tardan un tiempo infinito en llegar a \mathcal{O}_2 , que lo verá con un corrimiento al rojo brutal. De Sitter es globalmente hiperbólico: en verde una hipersuperficie de Cauchy; ninguna curva causal inextendible puede «evitarla».

El hecho de que i^\pm sean superficies espaciales y no sean puntuales implica la existencia de un horizonte de partículas y de un horizonte cósmico de eventos. El horizonte de partículas crece con el tiempo, y únicamente en $\tau = \pi$, o sea, $t = \infty$, el universo entero será visible (el cono de luz serían las líneas rojas del dibujo), pues la única señal de luz capaz de llegar a las antípodas en $\tau = \pi$ es una emitida en $\tau = 0$. Por otro lado, debido a la expansión exponencial del espacio, dos observadores perderán contacto causal tarde o temprano. El horizonte de eventos cosmológico disminuye a medida que el universo se expande. Es muy útil observar el espacio de De Sitter en el cilindro que representa el universo estático de Einstein (un dibujo se puede encontrar en [8]).

2.3.2. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Vamos a presentar los diagramas de Penrose de distintas soluciones cosmológicas con métrica de FRW. Todas las métricas se obtienen con las condiciones adecuadas integrando las ecuaciones de Friedmann. Para el caso de densidad subcrítica y materia fría, véase [8]. Lo omitimos aquí por ser el diagrama similar a otros casos.

- **Universo lleno de materia fría y densidad supercrítica:** $w = 0$ y $k = +1$.

$$ds^2 = R_0^2 \sin^4(\tau/2) \left[d\tau^2 - d\chi^2 - \sin^2(\chi) d\Omega_2^2 \right], \quad (2.3.8)$$

con $R_0 = \kappa\rho_0 a_0^3/3$. La interpretación de $a(t)$ es una cicloide: crece inicialmente muy rápido, pero se frena debido a la gran cantidad de materia, acaba parándose y comienza a contraerse. Tenemos $\mathcal{R} = 3R_0^{-2} \text{sen}^{-6}(\tau/2)$, luego hay singularidades físicas en $\tau = 0$ (implica que $t = 0$, esta es la singularidad del Big Bang) y en $\tau = 2\pi$ (equivalentemente, $t = \pi R_0$, esta es la singularidad del Big Crunch).

Para representar el diagrama de Penrose no necesitamos hacer una transformación conforme, pues las coordenadas

$$0 < \tau < 2\pi, \quad 0 < \chi < \pi, \quad (2.3.9)$$

ya son compactas. Tenemos, igual que en el caso de Minkowski y De Sitter, que este espacio es conforme al universo estático de Einstein, esta vez en la región 2.3.9. El diagrama de Penrose (parte de arriba a la izquierda de la figura 2.3.2) tiene similitudes con el de De Sitter. Pero hay una gran diferencia: ahora $\tau = 0, 2\pi$, que corresponden al infinito temporal pasado i^- y al infinito temporal futuro i^+ son singularidades. Por eso no coinciden con el infinito conforme, pues éste se encuentra a una distancia finita de tiempo propio de observadores comóviles.

Por el carácter espacial del infinito conforme, existen horizontes de partículas y horizontes cósmicos de eventos. Al contrario que en el espacio de De Sitter, cualquier observador comóvil puede observar el universo entero en el momento particular $\tau = \pi$, a pesar de que hasta entonces tenía un horizonte de partículas. De igual forma, es únicamente a partir de este punto cuando se empieza a formar un horizonte de eventos.

- **Universo espacialmente plano en expansión decelerada:** $k = 0, w > -1/3$.

Para cualquier universo espacialmente plano, introduciendo la ecuación de la densidad de energía general (ver apéndice B, ecuación B.4.22) en la ecuación de Friedmann, llegamos a la siguiente expresión general para el factor de escala

$$a(t) = \left[\frac{3(1+w)}{2} R_0^{-1} t \right]^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (2.3.10)$$

siempre que w sea distinto de 1. Por su dependencia de w , deducimos que, dependiendo del contenido de energía del universo, el factor de escala será distinto. Para los distintos casos podemos escribir $a(t) = A_0 t^n$, con A_0 una constante. En este primer caso:

$$ds^2 = dt^2 - (A_0 t^n)^2 [dr^2 + r^2 d\Omega_2^2], \quad (2.3.11)$$

con $0 < n < 1$ debido al valor de w . Además, el rango de las coordenadas es

$$0 < t < \infty, \quad 0 < r < \infty. \quad (2.3.12)$$

A continuación pasamos a coordenadas conformes

$$d\tau = a^{-1}(t)dt, \quad \longrightarrow \quad \tau = \int_0^t \frac{1}{A_0 t^n} dt' = \frac{t^{1-n}}{(1-n)A_0}, \quad (2.3.13)$$

$$ds^2 = C_0 \tau^{\frac{-2n}{n-1}} [d\tau^2 - dr^2 - r^2 d\Omega_2^2], \quad (2.3.14)$$

con C_0 una constante relacionada con A_0 . Mantenemos el rango $0 < \tau < \infty$, $0 < r < \infty$. Así, tenemos que esta métrica es conforme a la de Minkowski 2.1.1. Por tanto, podemos efectuar los mismos cambios de coordenadas que en ese caso: coordenadas de cono de luz $u = \tau - r$, $v = \tau + r$, compactificación con la función arcotangente, $U = \arctg(u)$, $V = \arctg(v)$, y vuelta a cartesianas, $t' = U + V$, $r' = V - U$. Obtenemos una métrica conforme al universo estático de Einstein.

$$u + v > 0, \quad v > u, \quad 0 < v < \infty, \quad -\infty < u < \infty, \quad (2.3.15)$$

$$U + V > 0, \quad V > U, \quad 0 < V < \pi/2, \quad -\pi/2 < U < \pi/2, \quad (2.3.16)$$

$$ds^2 = \tilde{C}_0 \frac{\left[\operatorname{tg} \left(\frac{t'+r'}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{t'-r'}{2} \right) \right]^{\frac{-2n}{n-1}}}{\cos^2 \left(\frac{t'+r'}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{t'-r'}{2} \right)} \left[dt'^2 - dr'^2 - \operatorname{sen}^2(r') d\Omega_2^2 \right]. \quad (2.3.17)$$

$$t' > 0, \quad r' > 0, \quad 0 < t' + r' < \pi, \quad -\pi < t' - r' < \pi, \quad (2.3.18)$$

Representamos el diagrama de Penrose en la figura 2.3.2, en la parte de abajo a la izquierda. Este universo, en expansión decelerada, tiene un horizonte de partículas debido a que \mathcal{I}^- es una hipersuperficie espacial. Además, $\mathcal{I}^- = i^-$ y coinciden con la singularidad del Big Bang. Como en el caso de Minkowski, el infinito temporal futuro i^+ es puntual, luego no hay horizonte cósmico de eventos, y el infinito nulo futuro \mathcal{I}^+ es una hipersuperficie nula. Ahora las secciones espaciales son \mathbb{R}^3 , no compactas, luego volvemos a tener infinito espacial.

- **Universo espacialmente plano en expansión acelerada:** $k = 0$, $w < -1/3$.

En este caso tenemos $n > 1$. Esto es lo único que cambia en la métrica 2.3.11. Tenemos pues que $\tau \sim -t^{1-n}$, por lo que el rango de coordenadas en 2.3.14 ahora es: $-\infty < \tau < 0$, $0 < r < \infty$. Realizando los mismos cambios de coordenadas llegamos a

$$t' < 0, \quad r' > 0, \quad -\pi < t' + r' < \pi, \quad -\pi < t' - r' < 0, \quad (2.3.19)$$

que nos permite dibujar el diagrama de Penrose (figura 2.3.2, parte central abajo). Vemos que $i^+ = \mathcal{I}^+$ es una hipersuperficie espacial, por lo que habrá un horizonte cosmológico, lo cual tiene sentido para un universo en expansión. i^- es puntual, por lo que no existe horizonte de partículas. \mathcal{I}^- es una hipersuperficie nula que representa el Big Bang (es singular).

- **Universo espacialmente plano dominado por radiación:** $k = 0$, $w = -1/3$.

Un universo de estas características dominado por radiación crece de manera constante, pues $a(t) = A_0 t$, con $A_0 = R_0^{-1}$. La métrica es por tanto

$$ds^2 = dt^2 - (A_0 t)^2 \left[dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \right]. \quad (2.3.20)$$

Transformando a coordenadas conformes, $\tau = A_0^{-1} \ln(t)$, y obtenemos

$$ds^2 = e^{2A_0\tau} \left[d\tau^2 - dr^2 - r^2 d\Omega_2^2 \right], \quad (2.3.21)$$

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad (2.3.22)$$

Podemos realizar los mismos cambios de coordenadas para trazar el diagrama de Penrose, y llegamos a lo siguiente

$$ds^2 = \frac{e^{A_0 \left[\operatorname{tg} \left(\frac{t'+r'}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{t'-r'}{2} \right) \right] \frac{-2n}{n-1}}}{\cos^2 \left(\frac{t'+r'}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{t'-r'}{2} \right)} \left[dt'^2 - dr'^2 - \operatorname{sen}^2(r') d\Omega_2^2 \right], \quad (2.3.23)$$

es decir, un universo conforme al universo estático de Einstein en el rango de coordenadas

$$r' > 0, \quad -\pi < t' + r' < \pi, \quad -\pi < t' - r' < \pi. \quad (2.3.24)$$

Debido a que el rango de coordenadas es el mismo, el diagrama de Penrose (figura 2.3.2, arriba a la derecha) tiene la misma forma que el de Minkowski. Sin embargo, ahora el infinito nulo pasado \mathcal{J}^- es singular, representando el Big Bang. Debido a su carácter nulo (i^- puntual), no hay horizonte de partículas, y tampoco horizonte cosmológico, pues \mathcal{J}^+ es nulo e i^+ puntual.

■ **Espacio de De Sitter con foliación plana:** $k = 0$, $w = -1$.

El parámetro $w = -1$ expresa la presencia de una constante cosmológica positiva: $\Lambda = \rho_\Lambda > 0$. Integrando la ecuación de Friedmann obtenemos

$$a(t) = e^{t/R_0}, \quad (2.3.25)$$

con $R_0 = \sqrt{3/\kappa\Lambda}$ es el radio de De Sitter, una medida de la curvatura del espacio. Ahora tratamos la métrica de De Sitter como una del tipo FRW (y no embebiéndola en $\mathbb{R}^{1,4}$)

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t/R_0} \left[dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \right], \quad (2.3.26)$$

que representa un universo vacío en expansión exponencial. Pasando a coordenadas conformes: $\tau = R_0 e^{-t/R_0}$, $-\infty < \tau < 0$, $0 < r < \infty$, y la métrica queda

$$ds^2 = \frac{R_0^2}{\tau^2} \left[d\tau^2 - dr^2 - r^2 d\Omega_2^2 \right]. \quad (2.3.27)$$

Es conforme a la métrica de Minkowski, luego podemos hacer los mismos cambios de coordenadas. Omitimos ahora la expresión de la métrica, pues nos basta con el rango de coordenadas

$$t' < 0, \quad r' > 0, \quad 0 < t' + r' < \pi, \quad -\pi < t' - r' < 0, \quad (2.3.28)$$

para dibujar el diagrama de Penrose (figura 2.3.2, abajo a la derecha). Está limitado de la misma manera que los modelos cosmológicos acelerados. Sin embargo, ahora el infinito

nulo pasado no representa una singularidad tipo Big Bang, pues sabemos que el espacio de De Sitter es totalmente regular. En realidad, las coordenadas que hemos elegido no cubren más que la mitad de la variedad, como podemos ver comparando el diagrama con el de la figura 2.3.1: ahora sólo tenemos la esquina superior izquierda.

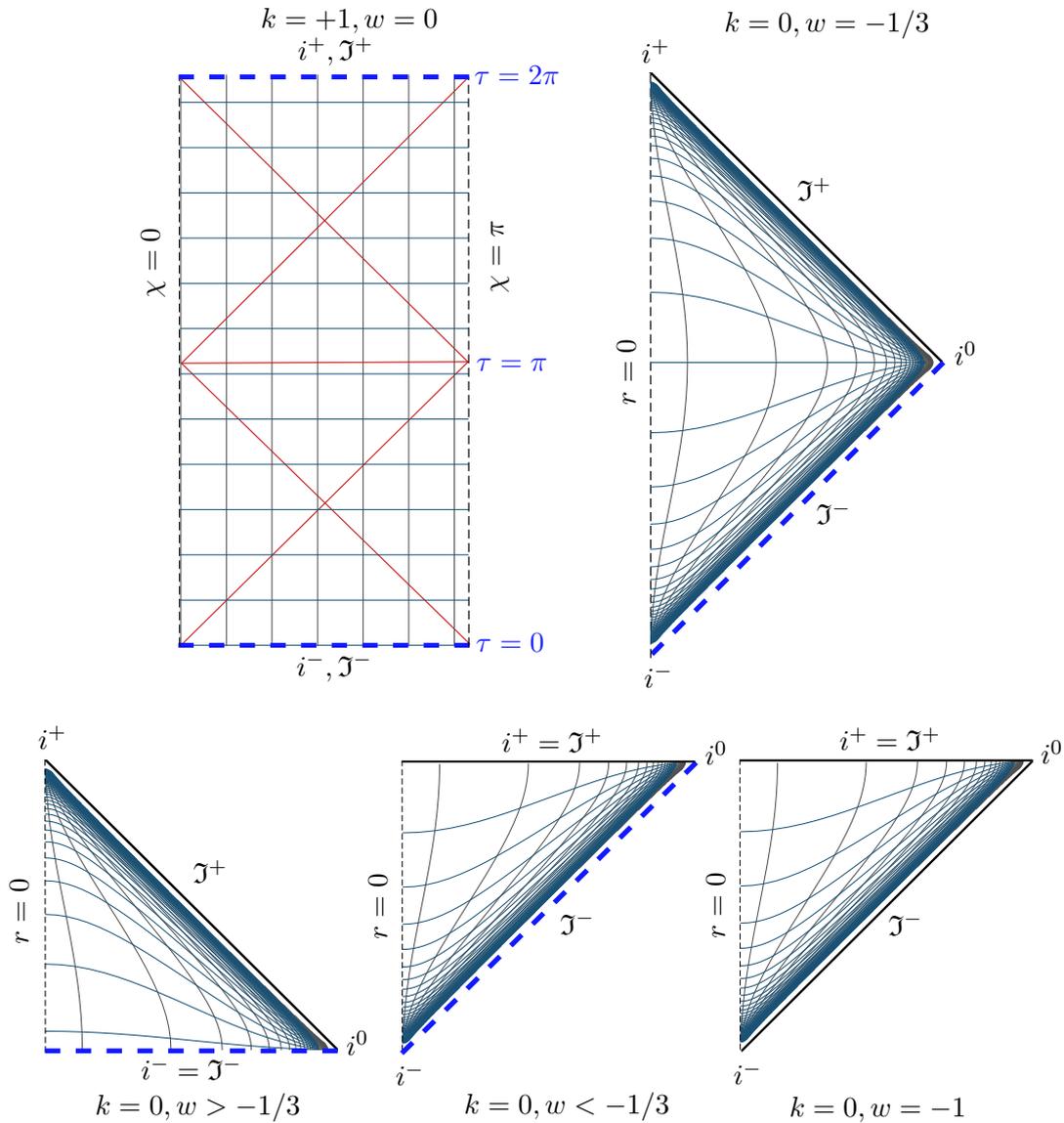


Figura 2.3.2 Diagramas de Penrose de los espacios-tiempos comentados anteriormente. En gris, líneas de χ o r constante; en azul suave las líneas de tiempo constante. Hemos representado en azul y con línea discontinua las singularidades físicas; esto es, un Big Bang y un Big Crunch, en $\tau = 0$ y $\tau = 2\pi$, para el caso $k = +1, w = 0$, y la singularidad del Big Bang para los otros casos, excepto De Sitter con foliación plana, que no tiene singularidades físicas.

2.4. Agujeros negros

El teorema de «no pelo»⁴ establece que cualquier agujero negro puede caracterizarse por sólo tres parámetros: la masa, la carga eléctrica y el momento angular. En el caso de las soluciones con simetría esférica y en el vacío, la carga y el momento angular son cero, luego el valor de la masa M caracteriza el agujero negro. El teorema de Birkhoff asegura que cualquier solución de las ecuaciones de Einstein con estas características es (isométrica) a la solución exterior de Schwarzschild. Si añadimos una carga eléctrica al agujero negro de Schwarzschild tendremos la solución de Reissner-Nordström, que describe un agujero negro esféricamente simétrico con masa y carga eléctrica, y que es la solución más sencilla que no es puramente gravitacional. Por último, la solución de Kerr describe un agujero negro en rotación sin carga eléctrica, y la de Kerr-Newmann un agujero con masa, en rotación y con carga eléctrica. Estudiaremos los dos primeros.

2.4.1. Agujero negro de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild es un caso con simetría esférica y en el vacío, $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$; es decir, sin energía ni materia. Además es una solución estática, esto es, con simetría $t \rightarrow -t$, luego existe un sistema de coordenadas donde la métrica se divide en una componente estrictamente temporal y tres coordenadas estrictamente espaciales. Utilizando estas simetrías como «Ansatz», llegamos a la solución exterior de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.4.1)$$

Para soluciones estáticas y con poca curvatura, $g_{tt} \approx 1 + 2\Phi$, donde Φ es el potencial newtoniano. Vemos que la solución de Schwarzschild reproduce el potencial newtoniano $\Psi = -G_N m/r$ de un objeto esférico con masa m , si interpretamos M (que es una constante de integración) como $M = G_N m$. Pero aquí hay un problema, y es que nuestra métrica era una solución para el vacío. Una posibilidad es considerar 2.4.1 como una solución válida para $r > R_0 \gg 2M$, con R_0 el radio del planeta o la estrella causante de la curvatura.

Las coordenadas de Eddington-Filkenstein nos permiten eliminar la singularidad de coordenadas en $r = 2M$, pero tampoco cubren la variedad entera. Las coordenadas que cubren todas las regiones a la vez son las coordenadas de Kruskal, con métrica

$$ds^2 = \frac{32M^2}{r} e^{-r/2M} (dT^2 - dR^2) - r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.4.2)$$

donde las coordenadas T y R , de carácter temporal y espacial, son adimensionales. Para $r > 2M$

$$T = e^{r/4M} \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad R = \pm e^{r/4M} \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad (2.4.3)$$

y para $r < 2M$

⁴Véase [5], pp. 164-165, para un exposición rigurosa.

$$T = \pm e^{r/4M} \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad R = e^{r/4M} \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (2.4.4)$$

Con la siguiente fórmula, que se cumple para ambos casos, tenemos r definido implícitamente

$$T^2 - R^2 = -\frac{1}{2M} e^{r/2M} (r - 2M). \quad (2.4.5)$$

Se puede demostrar que las coordenadas de Kruskal forman la única extensión analítica máxima del espacio-tiempo de Schwarzschild. Se podría estudiar la causalidad en un diagrama TR, pero nos será más sencillo a través del diagrama de Penrose. Para ello efectuamos los siguientes cambios de coordenadas

$$u = T - R, \quad v = T + R, \quad -\infty < u, v < \infty, \quad (2.4.6)$$

$$U = \arctg(u), \quad V = \arctg(v), \quad -\pi/2 < U, V < \pi/2, \quad (2.4.7)$$

$$\tilde{T} = U + V, \quad \tilde{R} = V - U, \quad -\pi < \tilde{T} \pm \tilde{R} < \pi, \quad (2.4.8)$$

Además de esta restricción de coordenadas, tendremos otra a causa de la singularidad física en $r = 0$. Si evaluamos la ecuación 2.4.4 en $r = 0$ tenemos

$$T = \pm \cosh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad R = \sinh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (2.4.9)$$

Sustituyendo esto en \tilde{T} , nos da que $\tilde{T} = \pm\pi/2$. El rango total de las nuevas coordenadas es

$$-\pi < \tilde{T} \pm \tilde{R} < \pi, \quad -\pi/2 < \tilde{T} < \pi/2, \quad (2.4.10)$$

con lo que representamos el diagrama de Penrose en la figura 2.4.1. Podemos distinguir cuatro regiones:

- Regiones I y I' . Son asintóticamente planas. Desde ellas cualquier curva causal dirigida al futuro (pasado) va hacia (proviene de) la región II , i^+ o \mathcal{I}^+ (II' , i^- o \mathcal{I}^-). Ambas están «conectadas» por un agujero de gusano (puente de Einstein-Rosen), pero que no transmite influencias causales, y separadas por los horizontes de sucesos \mathcal{H}^- , pasado, y \mathcal{H}^+ , futuro.
- Región II . Representa un agujero negro, $\mathcal{B} = \mathcal{M} - J^-(\mathcal{I}^+)$, delimitado por un horizonte de eventos futuro \mathcal{H}^+ . La coordenada r tiene ahora carácter temporal y t carácter espacial. Una vez se entra en esta región, es imposible salir; está causalmente desconectada de las otras regiones. Sin embargo, las otras regiones sí la influncian, y un observador en ella recibe las señales de luz de las regiones I y I' . Una singularidad física en el futuro a una distancia de tiempo propio finito del horizonte (a diferencia de i^+ , \mathcal{I}^+) es el destino de todo cuanto entre en el agujero negro.

- Región II' . Representa un agujero blanco $\mathcal{W} = \mathcal{M} - J^+(\mathcal{J}^-)$, delimitado por un horizonte de eventos pasado \mathcal{H}^- . Aquí también tenemos r como coordenada temporal y t espacial. Ningún evento en las regiones I o I' puede influenciar lo que ocurre aquí, pues es una región que está en su pasado, y ningún observador externo puede entrar en ella. Contiene una singularidad inicial en $r = 0$.

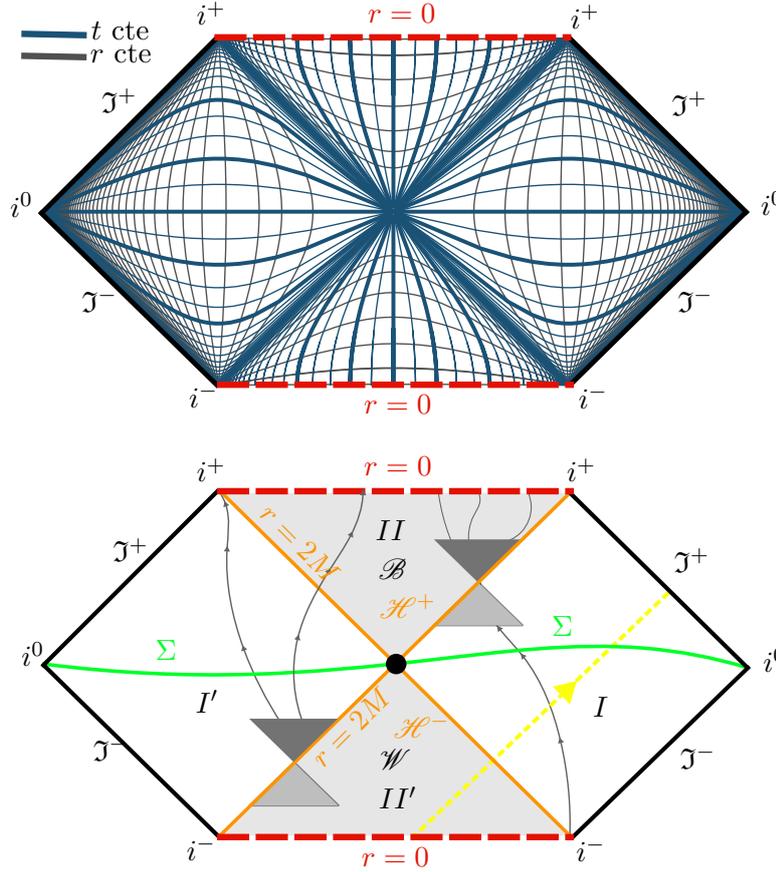


Figura 2.4.1 Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Kruskal. En líneas rojas punteadas, la singularidad física $r = 0$. En naranja, el horizonte de sucesos (futuro) del agujero negro que representa la región II y el horizonte de sucesos (pasado) del agujero blanco que representa la región II' , que son superficies nulas, como hemos explicado en el apartado 4 del apéndice B. Hemos representado dos conos de luz, uno que acaba de cruzar \mathcal{H}^+ y otro que acaba de cruzar \mathcal{H}^- . Observamos que, en el primer caso, es imposible salir del agujero negro, acabando inevitablemente (pues es una superficie espacial), y en un tiempo propio finito, en la singularidad. Por contra, es imposible no salir del agujero blanco, pues todas las líneas de universo se dirigen a i^\pm , i^0 o el infinito conforme, y también es imposible volver a entrar. Hemos representado en amarillo una señal de luz desde $r = 0$, que, como vemos, puede alcanzar el infinito nulo futuro. Tenemos pues que $r = 0$ en la zona II' es una singularidad visible. Sin embargo, no afecta a la predictibilidad, y queda excluida de la conjetura del censor cósmico por ser una singularidad inicial. En efecto, el espacio-tiempo de Kruskal es globalmente hiperbólico (hipersuperficie de Cauchy en verde), y fuertemente asintóticamente predecible, pues $\mathcal{M} \cap J^+(\mathcal{J}^-) = I \cup I' \cup II'$ es una región globalmente hiperbólica. El punto negro central es el puente de Einstein-Rosen que conecta, sin dejar pasar influencias causales, las regiones asintóticamente planas I y I' .

En el diagrama también observamos que $r = 2M$ es una superficie de corrimiento al rojo infinito, pues las señales que emite un observador en caída libre durante un intervalo finito $\Delta\tau$ antes de cruzar el horizonte se «esparcen» para el observador externo durante toda su existencia. En el caso límite de una señal emitida en el horizonte, el observador externo la recibe en el infinito futuro nulo, es decir, en i^+ . Para una explicación del carácter especular bajo las simetrías $R \rightarrow -R$, $T \rightarrow -T$ de las regiones I , II con I' , II' , véase [8].

Un ejemplo de singularidad desnuda sería la métrica de Schwarzschild 2.4.1 con $M < 0$. Sigue siendo una solución de las ecuaciones de Einstein, luego no tenemos por qué excluirla. Para dibujar el diagrama de Penrose, hagamos un cambio de la coordenada radial tal que $dr^* = (1 + 2|M|/r)^{-1}dr$, de forma que la métrica queda

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2|M|}{r}\right) (dt^2 - dr^{*2}) - r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.4.11)$$

con la siguiente relación implícita para las coordenadas radiales

$$r^* = r - 2|M| \log\left(1 + \frac{r}{2|M|}\right) > 0. \quad (2.4.12)$$

Hacemos cambios de coordenadas similares a los anteriores

$$4M \tan(U) = u = t - r^*, \quad 4M \tan(V) = v = t + r^*, \quad (2.4.13)$$

quedando los rangos de coordenadas de la siguiente manera

$$-\infty < u < v < \infty, \quad \longrightarrow \quad -\pi/2 < U < V < \pi/2. \quad (2.4.14)$$

Con estos cambios de coordenadas llegamos a una métrica conforme, $d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2$, con

$$d\tilde{s}^2 = (4M)^2 dU dV - \frac{r^2 \cos^2(U) \cos^2(V)}{1 + 2|M|/r} d\Omega_2^2, \quad \Omega = \frac{\cos(U) \cos(V)}{\sqrt{1 + 2|M|/r}}, \quad (2.4.15)$$

donde $r = r(U, V)$ queda definido implícitamente en los cambios de coordenadas anteriores. El diagrama de Penrose (figura 2.4.2) es similar al de Minkowski, pero ahora la singularidad en $r = 0$ es física (se puede ver que el invariante de Kretschmann $R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}$ tiende a infinito).

2.4.2. El colapso de Oppenheimer-Snyder

La extensión máxima de Schwarzschild de la sección anterior tiene características que la hacen parecer poco natural, y esto es debido a la suposición de ser una solución estática. En la naturaleza los agujeros negros se forman en procesos dinámicos de colapso gravitacional, luego no tienen esta característica de simetría bajo inversión temporal. Para modelizar el colapso de una estrella trataremos la solución de Oppenheimer-Snyder. Nuestro análisis será superficial, pero puede consultarse [5] para una exposición detallada.

Asumimos simetría esférica durante todo el colapso gravitatorio. Además, tomamos el caso más simple en el que la estrella es homogénea, esto es, la densidad sólo depende del tiempo propio. Para tener una extensión analítica máxima consideraremos que la estrella

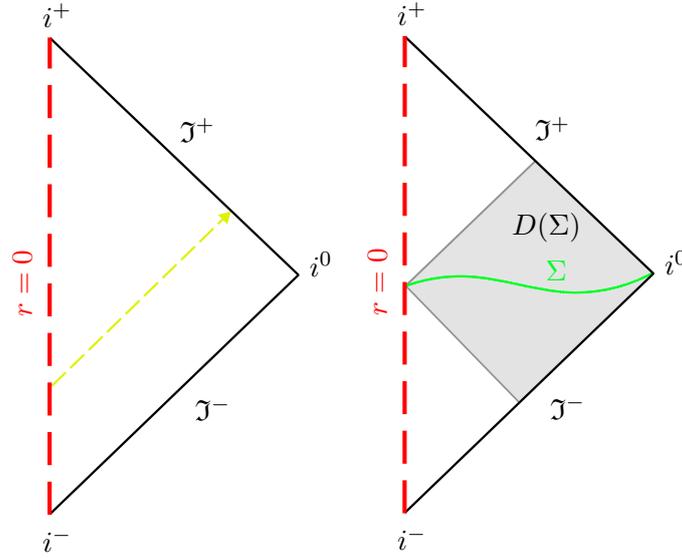


Figura 2.4.2 Diagrama de Penrose de la solución de Schwarzschild para $M < 0$. Tenemos una singularidad visible en $r = 0$ (en amarillo, una señal de luz desde $r = 0$ que alcanza \mathcal{J}^+). La región $\overline{\mathcal{M} \cap \mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+)}$ es todo el diagrama, y no existe una hipersuperficie de Cauchy. En efecto, como podemos ver en la imagen de la derecha, cualquier hipersuperficie putativa de Cauchy, como corta a la singularidad y a i^0 , su dominio de dependencia no es todo \mathcal{M} . Por tanto, este espacio-tiempo no es fuertemente asintóticamente predecible y en consecuencia $r = 0$ es una singularidad desnuda.

está en equilibrio hidrostático para $t < 0$, donde tenemos cierta densidad y cierta presión en su interior, y un radio constante $r = R_0$, pero deja de estarlo en $t = 0$, momento en el que, de repente, la presión se va a cero⁵. De esta forma el tensor energía-momento es

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \rho(t)u_\mu u_\nu, \quad (2.4.16)$$

y el radio de la superficie depende del tiempo, $R = R(\tau)$, con $R(\tau_0) = R_0 \gg 2M$. Por el teorema de Birkhoff, la métrica en el exterior de la estrella es la métrica de Schwarzschild 2.4.1. La métrica en el interior ds_-^2 podemos expresarla de la siguiente manera

$$ds_-^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)d\Omega_3^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) \left[d\chi^2 + \text{sen}^2(\chi)d\Omega_2^2 \right], \quad (2.4.17)$$

con $\chi \in [0, \pi]$, y donde $a(\tau)$ es el radio de las 3-esferas para τ constante, dependiendo de τ . Tenemos pues dos métricas, 2.4.1 y 2.4.17, que debemos «pegar» en la superficie de la estrella. La segunda derivada de las métricas queda fijada por las ecuaciones de Einstein (a través del tensor de Ricci), cuya componente temporal $\mathcal{R}_{tt} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{tt} = -8\pi G_N \mathcal{T}_{tt}$ queda

$$\dot{a}^2(\tau) + 1 = \frac{-8\pi G_N}{3} a(\tau)^2 \rho(\tau). \quad (2.4.18)$$

Podemos usar también la ecuación de conservación del tensor energía-momento para un fluido perfecto, cuya componente temporal nos lleva a

⁵Esta es una buena aproximación para modelar el colapso del núcleo de una estrella masiva.

$$\dot{\rho}(\tau) + 3\frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)}\rho(\tau) = 0, \quad \rightarrow \quad \partial_\tau(\rho(\tau)a^3(\tau)) = 0, \quad \rightarrow \quad \rho(\tau) = \frac{3a_0}{-8\pi G_N} \frac{1}{a^3(\tau)}, \quad (2.4.19)$$

donde vemos que una disminución del radio incrementa la densidad. Teniendo en cuenta esto, podemos representar la solución de 2.4.18 en forma paramétrica

$$a(\eta) = \frac{a_0}{2}(1 + \cos(\eta)), \quad \tau(\eta) = \frac{a_0}{2}(\eta + \operatorname{sen}(\eta)), \quad \eta \in [0, \pi]. \quad (2.4.20)$$

Tenemos que si $\eta = 0$, entonces $\tau = 0$, lo que en las coordenadas de Schwarzschild implica que $t = 0$. Este es el momento en el que el colapso comienza: el combustible nuclear de la estrella se acaba, la presión es expulsada y la estrella colapsa gravitatoriamente. Esto se corresponde con $a = a_0$. Por otra parte, cuando $\eta = \pi$, a se hace cero, momento en el que la estrella desaparece tras una singularidad. Desde el inicio del colapso hasta la singularidad ha transcurrido un tiempo propio finito ($\tau = \pi a_0/2$).

En la métrica interior, la superficie S de la estrella se corresponde con el parámetro $\chi = \chi_0$ de las 3-esferas. Las métricas restringidas a la superficie son

$$ds_-^2|_S = d\tau^2 - a^2(\tau)\operatorname{sen}^2(\chi_0)d\Omega_2^2 \quad (2.4.21)$$

$$ds_+^2|_S = \left[\left(1 - \frac{2M}{R}\right) \left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 \right] d\tau^2 - R^2(\tau)d\Omega_2^2, \quad (2.4.22)$$

donde hemos tomado, para la línea de universo de la superficie de la estrella, las coordenadas $[T(\tau), R(\tau)]$. Igualando ambas métricas

$$R(\tau) = a(\tau)\operatorname{sen}(\chi_0), \quad \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = 1. \quad (2.4.23)$$

Despejando en la segunda

$$\dot{T} = \frac{\sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M}{R}}}{1 - \frac{2M}{R}}. \quad (2.4.24)$$

Cuando $R \rightarrow 2M$ (la superficie de la estrella se acerca a su radio de Schwarzschild), entonces $dT \approx -\frac{dR}{1 - \frac{2M}{R}}$, cuya solución es

$$R(T) \approx 2M(1 + e^{-T/2M}), \quad T \rightarrow \infty \quad (R \rightarrow 2M), \quad (2.4.25)$$

A pesar de que para la estrella, cruzar el radio de Schwarzschild toma un tiempo propio finito, para un observador externo, nunca lo alcanza; ya sabíamos que el horizonte de eventos es una superficie de corrimiento al rojo infinito. Lo que nos queda por hacer es igualar la derivada primera de ambas métricas. Simplemente reproducimos el resultado para no extendernos (véase [5])

$$2M = \frac{8\pi G_N}{3} R^3(\tau) \rho(\tau) = \text{cte.} \quad (2.4.26)$$

Ya estamos en condiciones de dibujar el diagrama de Penrose. La superficie de la estrella se mantiene en la región I de la figura 2.4.1 con la restricción adicional $R > 0$. Para $t < 0$, el diagrama es el mismo. Posteriormente, tendremos el diagrama dado por la métrica 2.4.17, donde la estrella cruzará el horizonte de eventos $r = 2M$ (entrando así en la región II de la figura 2.4.1). Pasamos a coordenadas conformes

$$d\tau = a(\eta)d\eta = \frac{a_0}{2}(1 + \cos(\eta))d\eta, \quad (2.4.27)$$

$$ds_-^2 = \frac{a_0^2}{2}(1 + \cos(\eta))^2 [d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sen}^2(\chi)d\Omega_2^2]. \quad (2.4.28)$$

Tenemos pues que en el interior de la estrella la métrica es conforme al universo estático de Einstein, $d\tilde{s} = \Omega^2 ds_-^2$, con $\Omega^{-1} = \frac{a_0}{2}(1 + \cos(\eta))$. Tenemos $\eta \in [0, \pi]$ y $\chi \in [0, \chi_0]$, por lo que diagrama de Penrose de la superficie de la estrella para $t > 0$ es un rectángulo con la arista derecha χ_0 . Recordemos que $\eta = 0$ corresponde con $t = 0$, y $\eta = \pi$ con $a = r = 0$. Con esta información ya podemos dibujar el diagrama (figura 2.4.3).

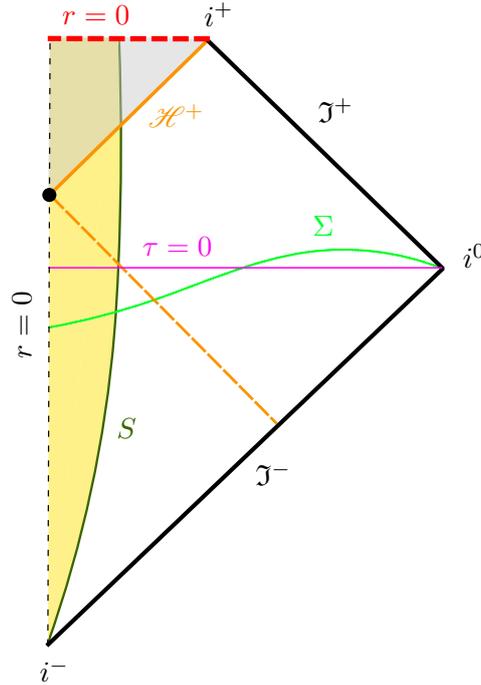


Figura 2.4.3 Diagrama del colapso de Oppenheimer-Snyder. En verde oscuro, la superficie de la estrella, que, al cruzar su radio de Schwarzschild, se convierte en un agujero negro, $\mathcal{B} = \mathcal{M} - J^-(\mathcal{J}^+)$, delimitado por un horizonte de eventos futuro \mathcal{H}^+ . Cualquier observador que cruza el horizonte llega en un tiempo propio finito a la singularidad, marcada en rojo. En negro, el punto final pasado de las geodésicas nulas generadoras de \mathcal{H}^+ (punto caústico), que continúan en el pasado fuera del mismo hasta \mathcal{J}^- .

2.4.3. Agujero negro de Reissner-Nordström

Como dijimos, es la generalización más sencilla del agujero negro de Schwarzschild, añadiéndole carga eléctrica. Desde el punto de vista astrofísico es una solución poco realista, pues cualquier objeto macroscópico cargado tendería a atraer carga contraria y a descargarse. Sin embargo, es interesante estudiar una solución en presencia de campo electromagnético. En este caso, las ecuaciones de movimiento vienen dadas por las ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 8\pi G_N \left[F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \right], \quad \nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.4.29)$$

Establecemos un «Ansatz» teniendo en cuenta que hay simetría esférica, que la solución es estática, y que el campo electromagnético sólo consiste en un campo eléctrico radial $F_{tr} = E(r)$ ⁶. Operando (véase [8]) llegamos a la métrica de Reissner-Nordström

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.4.30)$$

donde $\kappa = 8\pi G_N$. Con el límite del potencial newtoniano podemos seguir interpretando $M = G_N m$ como la masa del agujero negro. Además, con la ley de Gauss, teniendo en cuenta que $E(r) = Q/r^2$, vemos que Q se puede interpretar, efectivamente, como la carga eléctrica. En realidad, tanto Minkowski como Schwarzschild son soluciones también de 2.4.29 para $M \rightarrow 0$ y $Q \rightarrow 0$. La contracción del tensor de Ricci, $\mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu} = \kappa^2 Q^4/r^8$, diverge para $r = 0$, por lo que tenemos una singularidad de curvatura en este punto. Además, para soluciones estáticas, estudiando cuándo diverge g_{rr} , podremos estudiar los horizontes de la solución

$$g_{rr} \rightarrow \infty \iff r = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{1}{2}\kappa Q^2}. \quad (2.4.31)$$

Esta ecuación tiene una solución, dos, o ninguna, dependiendo del valor relativo entre M^2 y $\frac{1}{2}\kappa Q^2$.

- **Caso sobre-extremal** $M^2 < \frac{1}{2}\kappa Q^2$: No hay ningún horizonte que cubra la singularidad física en $r = 0$, luego se trata de una singularidad desnuda. La conjetura del censor cósmico descarta esta solución como no física. Nos queda un diagrama igual al del caso de Schwarzschild para $M < 0$ (figura 2.4.7, arriba a la derecha).
- **Caso sub-extremal** $M^2 > \frac{1}{2}\kappa Q^2$: Tenemos dos raíces reales, $R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{1}{2}\kappa Q^2}$, luego habrá un horizonte interior en $r = R_-$ y uno exterior en $r = R_+$.

Dado que las coordenadas (t, r, θ, φ) que estamos usando son las equivalentes a las de Schwarzschild, es de suponer que son la causa de estas singularidades, y que son poco fiables para describir todo el espacio-tiempo. Efectivamente, se pueden construir coordenadas

⁶Esta, y una con $F_{\theta\varphi} = B(r)$, son las únicas opciones que respetan la simetría esférica y la estaticidad sin introducir monopolos magnéticos.

similares a las de Eddington-Finkelstein, así como una extensión completa similar a la de Kruskal, donde estas singularidades desaparecen. De hecho, se puede demostrar que las hipersuperficies $r = R_+$ y $r = R_-$ son hipersuperficies nulas, y además, horizontes de Killing con gravedad de superficie $\kappa_{\pm} = \frac{R_{\pm} - R_{\mp}}{2R_{\pm}^2}$. Nosotros no vamos a tratar esto, sino que, trabajando con 2.4.30 y usando las simetrías que conocemos de Schwarzschild, podremos dibujar el diagrama (el motivo es que creemos más ilustrativo esta construcción por partes; véase [6], p. 157, para la construcción de la métrica de la máxima extensión de la variedad). Reescribimos la métrica

$$ds^2 = \frac{(r - R_-)(r - R_+)}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{(r - R_-)(r - R_+)} dr^2 - r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.4.32)$$

donde hemos usado que $r^2 - 2Mr + \kappa Q^2/2 = (r - R_-)(r - R_+)$. Ahora, buscando algo similar a la ecuación 2.4.2, hacemos $T = t$ y $dR = \frac{r^2}{(r - R_-)(r - R_+)} dr$

$$ds^2 = \frac{(r - R_-)(r - R_+)}{r^2} [dT^2 - dR^2] - r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.4.33)$$

Es muy importante entender que, dado que no estamos en unas coordenadas extendidas como las de Kruskal, tenemos que $R > 0$. Efectuando de nuevo los cambios 2.4.6-2.4.8

$$ds^2 = \frac{(r - R_-)(r - R_+)}{r^2} \frac{1}{4 \cos^2(\frac{\tilde{T} - \tilde{R}}{2}) \cos^2(\frac{\tilde{T} + \tilde{R}}{2})} [d\tilde{T}^2 - d\tilde{R}^2] - r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.4.34)$$

Como el rango de coordenadas es el mismo, $-\pi < \tilde{T} \pm \tilde{R} < \pi$, tenemos el mismo «rombo» que en el caso de Schwarzschild (ver figura 2.4.4). Ahora tenemos que estudiar las singularidades $r = 0$, $r = R_+$ y $r = R_-$. Para ello, integramos la ecuación diferencial de R en función de r y obtenemos (ver figura 2.4.4)

$$R(r) = r + \frac{1}{R_+ R_-} \left[R_+^2 + \ln|r - R_+| - R_-^2 \ln|r - R_-| \right], \quad r > 0. \quad (2.4.35)$$

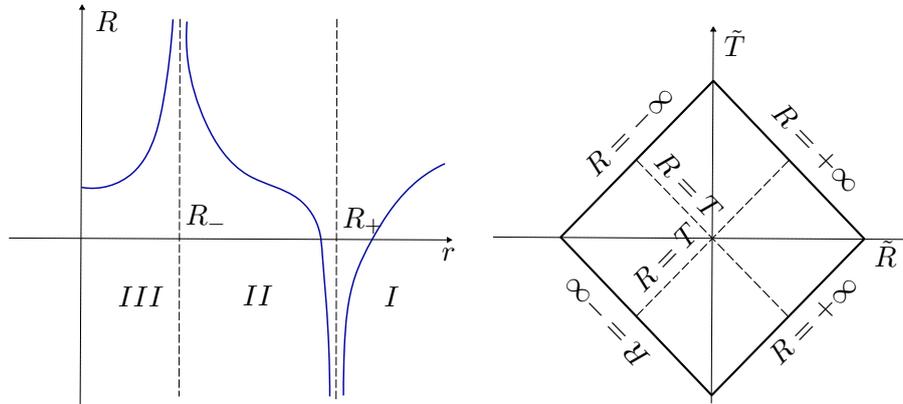


Figura 2.4.4 A la izquierda, diagrama conceptual de $r = R(r)$, donde observamos las tres regiones y los horizontes. A la derecha, el diagrama de Penrose genérico (o sea, sin tener en cuenta las singularidades) para la métrica de Schwarzschild.

Con esto, debemos estudiar el comportamiento en las singularidades, para lo que tendremos que distinguir entre la región *I*, cuando $0 < r < R_-$, la región *II*, cuando $R_- < r < R_+$, y la región *III*, cuando $r > R_+$.

- Región *I*, $r > R_+$: $R(r) = \infty$ cuando $r = \infty$ y $R(r) = -\infty$ cuando $r = R_+$.
- Región *II*, $R_- < r < R_+$: $R(r) = \infty$ cuando $r = R_-$ y $R(r) = -\infty$ cuando $r = R_+$.
- Región *III*, $0 < r < R_-$: $R(r = 0) = R_0 > 0$, aunque, estrictamente hablando, nuestras coordenadas no cubren este punto. Si $r = R_-$ entonces $R(r) = \infty$.

Estos resultados se presentan en la figura 2.4.5. Ahora, como comentábamos, tratemos de dibujar el diagrama completo a pesar de no haber trabajado con las coordenadas que cubren toda la variedad. Si en la solución de Schwarzschild decíamos que las regiones *I* – *I'* y *II* – *II'* eran regiones «espejo» bajo las simetrías $R \rightarrow -R$, $T \rightarrow -T$, en este caso podemos utilizar la misma idea. Como sólo hemos considerado coordenadas válidas para $R > 0$, nos falta la región correspondiente, simétrica, para $R < 0$. En tal caso, los diagramas se duplican y aparecen regiones paralelas como en el caso de Schwarzschild. Los representamos en la figura 2.4.6, de forma afín pero con todos los ejes orientados de la forma tiempo vs espacio en las coordenadas que cubren toda la variedad.

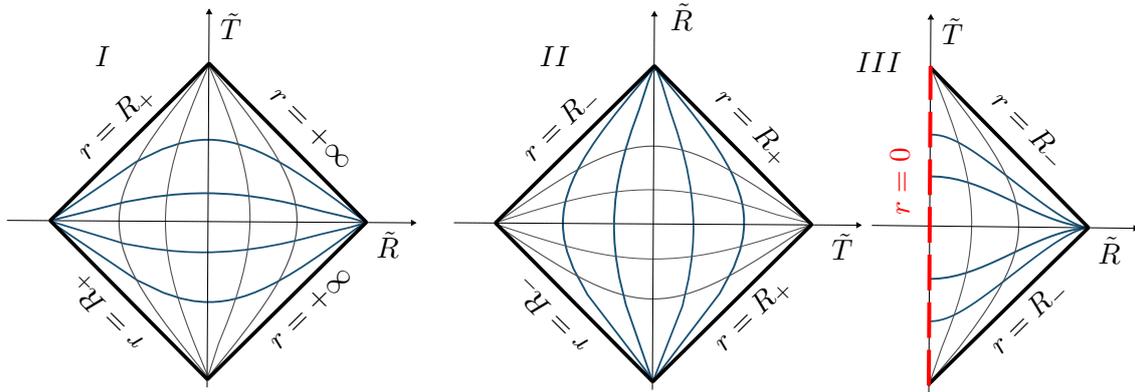


Figura 2.4.5 Diagramas de Penrose para las distintas regiones de la solución de Reissner-Nordström. Notemos que en la región *II* la coordenada espacial y temporal se han intercambiado, lo cual indica la presencia de horizontes similares a los de Schwarzschild. Además la singularidad de curvatura $r = 0$ en la región *I* es una singularidad desnuda.

Pues bien, si trabajásemos con las coordenadas completas entre los bordes de cada diagrama, tendríamos un «plano vectorial» en la figura 2.4.6, en el sentido de que podríamos «pegar» los distintos diagramas, situando cada uno donde verdaderamente le corresponde. Una diferencia fundamental con el caso de Schwarzschild es que la singularidad física es una hipersuperficie temporal, luego es evitable. De hecho las geodésicas radiales temporales (calculadas con las coordenadas de Eddington-Finkelstein) son «repelidas» gravitacionalmente al acercarse a la singularidad. Y lo más curioso es que, al cruzar de nuevo el horizonte interior, entran en una región *II* distinta de la original por la que habían entrado. Esto se debe a que, en las coordenadas de Eddington-Finkelstein, la región *II* de entrada tiene la coordenada temporal sobre el eje radial, con la flecha del tiempo

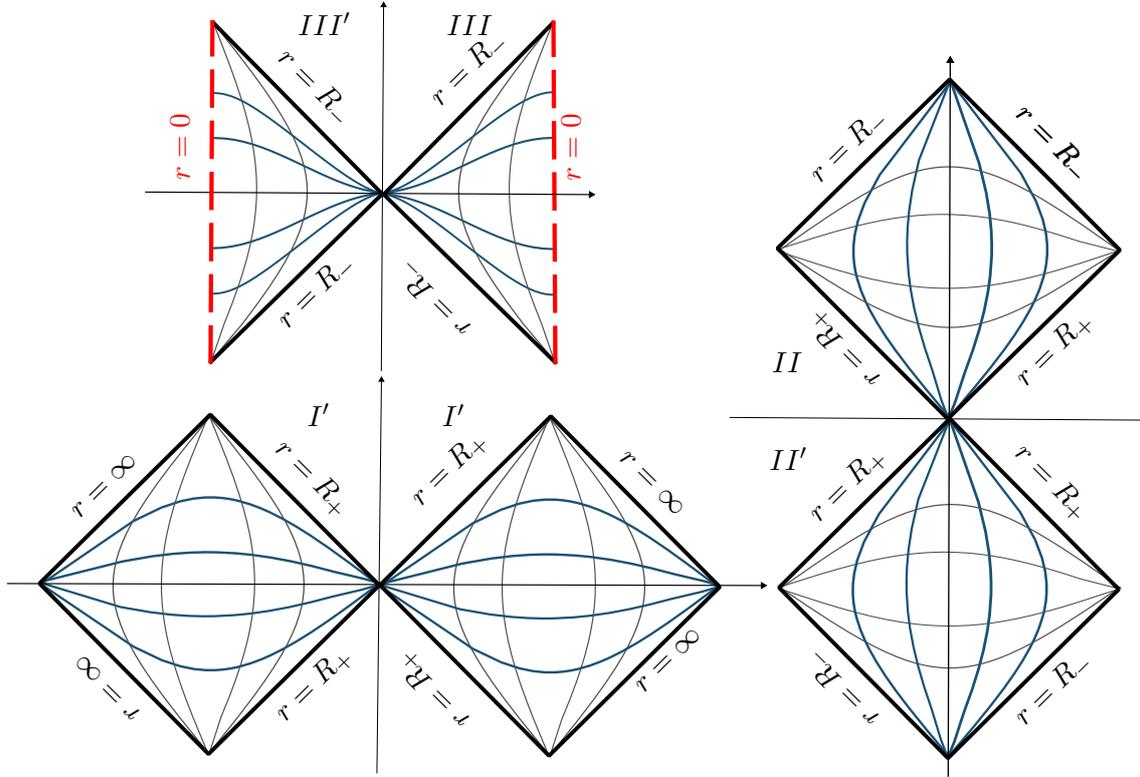


Figura 2.4.6 Diagramas de Penrose para las distintas regiones de la solución de Reissner-Nordström, incluidas sus regiones espejo.

orientada hacia r menor, y sin embargo en la región II de salida la coordenada temporal también es radial pero en sentido contrario. Matemáticamente se tiene un infinito espacial «interno» que, a través de la transformación conforme se lleva a un parámetro afín finito que, para que las geodésicas sean completas, requiere extender la coordenada vertical infinitamente en ambas direcciones (véase [17] o [5]). Con esta información ya podemos representar el diagrama de Penrose (figura 2.4.7) y procedemos a explicarlo.

Las zonas I y I' son asintóticamente planas, luego un observador puede quedarse aquí eternamente, acabando en i^+ o en \mathcal{I}^+ . La región II es un agujero negro, pues $\mathcal{B} = \mathcal{M} - J^-(\mathcal{I}^+)$. Por contra, su región espejo es un agujero blanco, pues $\mathcal{W} = \mathcal{M} - J^+(\mathcal{I}^-)$. Cuando un observador cruza el horizonte de eventos futuro \mathcal{H}^+ , entonces ya no puede volver a la región I ni mandar señales a los observadores en ella, pues está causalmente desconectada de \mathcal{B} . En esta zona la coordenada radial es temporal y viceversa, debido a la extremada curvatura del espacio-tiempo, como ya hemos comentado anteriormente. En consecuencia, un observador no puede quedarse en reposo, a distancia radial constante, en su interior. Es el mismo flujo del tiempo el que le impulsa a la región III o III' ; dicho con otras palabras, siempre llega un momento en el cual cruza el horizonte $r = R_-$. El horizonte $r = R_-$ es el horizonte de Cauchy futuro $H^+(\Sigma)$ de una putativa hipersuperficie de Cauchy Σ . La misma presencia de este horizonte y su homólogo pasado $H^-(\Sigma)$, demuestran la no hiperbolicidad global de la solución de Reissner-Nordström (aunque las diferentes regiones

$I \cup I' \cup III \cup III'$ sí lo son, la tercera, III , III' , nunca lo es, por los mismos motivos explicados en la figura 2.4.2). Como decíamos, cualquier observador que cruza $r = R_+$, el horizonte exterior, cruza inevitablemente $r = R_-$, el horizonte interior. Entra, pues, en la región III , que contiene a la singularidad física $r = 0$. Aquí las coordenadas radial y temporal han vuelto a orientarse como en la región I . En consecuencia, al contrario que en el caso de Schwarzschild, la singularidad es una hipersuperficie temporal, o sea, no está situada en su futuro, sino en un lugar específico en cualquier instante, y por lo tanto es evitable. De hecho, si bien la singularidad está cubierta por un horizonte de Cauchy y un horizonte de eventos para observadores externos, en la región III la singularidad se ve desnuda. Pero la información que un observador pueda tener no la podrá compartir, pues ha quedado causalmente desconectado de las regiones I y II .

Como ya comentábamos, aunque las geodésicas radiales nulas llegan a la singularidad sin problemas (lo cual se ve claramente en el diagrama, véase la línea amarilla), las geodésicas radiales temporales no, sino que son repelidas gravitacionalmente de forma similar al movimiento limitado por un potencial efectivo de una partícula en un potencial central. Explícitamente tenemos $g_{tt}\dot{t} = E$ constante (cantidad conservada al tratar la componente de las geodésicas radiales de Schwarzschild), que con la ecuación de las geodésicas radiales temporales queda $\dot{r}^2 = E^2 - g_{tt}$, luego para cierto valor de r en el que la componente temporal de la métrica es igual a E , el observador que se acerca a la singularidad es repelido y empujado hacia el horizonte interior $r = R_-$ (aún así, un observador que no sigue geodésicas sí llegaría a la singularidad en un tiempo propio finito). Ahora bien, si cruza el horizonte, no vuelve a la zona II , sino que entra en una región similar pero distinta, II' . En este sentido, el agujero negro, la zona III o III' que contiene la singularidad, y el agujero blanco, actúan como una auténtico agujero de gusano entre distintos universos asintóticamente planos.

Observamos también que el horizonte $r = R_+$ es una superficie de corrimiento al rojo infinito para un observador en I , y $r = R_-$ una superficie de corrimiento infinito hacia el azul para el observador que la cruce. Éste observador tardará un tiempo propio finito en atravesar la zona II , tiempo durante el cual verá toda la historia de la región I . Esto último significa que cualquier onda electromagnética sería infinitamente energética, lo cual es problemático; la interpretación habitual es que la solución es altamente inestable en estas regiones.

- **Caso extremal** $M^2 = \frac{1}{2}\kappa Q^2$: Una única raíz, doble, $r = M$, por lo que habrá un único horizonte.

Distinguimos dos regiones, una primera, I , para $r > M$, y una segunda, II , para $0 < r < M$. El proceso para dibujar el diagrama de Penrose es similar al anterior, luego no vamos a repetirlo (véase 2.4.7, derecha).

En este caso, al coincidir los horizontes $r = R_-$ y $r = R_+$, desaparece la región II y su región espejo II' . Tampoco tenemos universos paralelos I' y III' . De la zona I asintóticamente plana se pasa a la región III que contiene a la singularidad, que de nuevo es evitable, y que ve desnuda. Esta región es, para cada I , un agujero negro \mathcal{B} , por lo que el horizonte $r = M$ es un horizonte de eventos futuro \mathcal{H}^+ . Por contra, para la siguiente región asintóticamente plana I , esa misma región III se comporta como un agujero blanco

\mathcal{W} , con $r = M$ un horizonte de eventos pasado \mathcal{H}^- . Además, el infinito temporal futuro de una región I coincide con el infinito temporal pasado de la próxima región I .

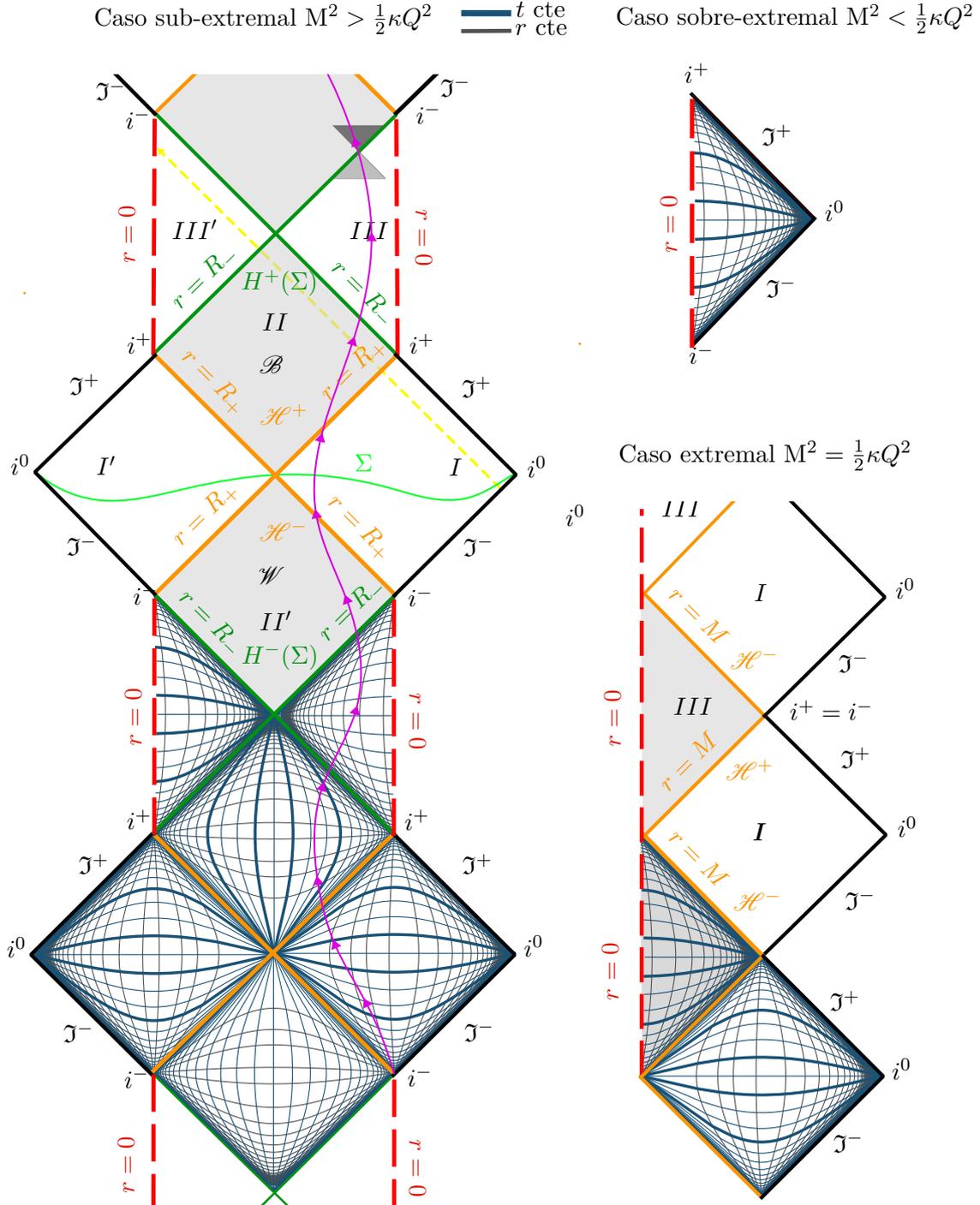


Figura 2.4.7 Diagramas de Penrose para la solución de Reissner-Nordström. Hemos marcado algunas líneas azules de t constante con un grosor mayor.

2.4.4. Radiación de Hawking

En 1974, Stephen Hawking descubrió que los agujeros negros emiten radiación térmica correspondiente a un cuerpo negro con temperatura

$$T = \frac{\hbar\kappa_H}{2\pi k_B}, \quad (2.4.36)$$

donde κ_H es la gravedad de superficie (véase apéndice B), lo que en último término provoca su evaporación. Para un cálculo riguroso de la radiación de Hawking necesitaríamos trabajar en teoría cuántica de campos para espacios-tiempos curvos, algo que va más allá de este trabajo (para ello, puede verse [17] o [9]). Damos un breve argumento heurístico (basándonos totalmente, casi literal, en [15]; remarcamos esto efusivamente) y presentamos el diagrama de Penrose (figura 2.4.4).

En el cálculo de Hawking se trabaja, como decíamos, con teoría cuántica de campos en espacios-tiempos curvos, en particular en la solución de Schwarzschild. No debemos confundirlo con un cálculo de «gravedad cuántica». De hecho, partimos de la siguiente aproximación: que las partículas presentes en el espacio-tiempo no modifican la métrica.

Según la QFT, el universo está impregnado de campos cuánticos, incluso en lo que llamamos «vacío». Estos campos fluctúan: contienen ondas que denominamos partículas virtuales, algunas de energía positiva y otras de energía negativa. En este sentido, el «vacío» no es más que el estado en el que todas las ondas de energía positivas y negativas están compensadas; a pesar de mantenerse las fluctuaciones, nada se propaga. Una partícula real es una onda que no está compensada y por tanto se propaga.

Consideremos dos observadores cerca del horizonte de eventos de un agujero negro. El primero en caída libre, luego no observa nada especial cuando cruza el horizonte, pues localmente el espacio-tiempo es plano y la curvatura no es apreciable. El segundo, un objeto que se mantiene quieto a pesar del tirón gravitatorio, para lo cual necesita acelerar de forma constante. El espacio alrededor del agujero negro está vacío, en particular cerca del horizonte. En esta situación, dado que las ondas positivas y negativas de los campos cuánticos están en reposo respecto a la métrica, el observador 1, en caída libre, no mide ninguna partícula y detecta el vacío. Sin embargo, el observador 2, que acelera frente al tirón natural de la métrica, precisamente porque acelera «respecto a la métrica», percibe las ondas positivas y negativas de manera diferente, con frecuencias deformadas. En particular, las ondas por detrás del horizonte no le llegan nunca, luego, a diferencia del observador 1, detecta el horizonte. Para él, las ondas positivas no se compensan: desde su punto de vista el espacio no está vacío, sino lleno de partículas. Cerca del horizonte de eventos no podemos decir de manera absoluta si existen o no partículas: la noción es relativa, su existencia depende del observador.

Sin embargo, a gran escala el espacio-tiempo está curvado. Cuanto más nos alejamos del agujero negro, más el estado inmóvil, que corresponde al observador 2 acelerando al lado del horizonte, constituye el estado natural. Por tanto, si bien la noción de partículas es relativa cerca del horizonte, a medida que nos alejamos, estas partículas se convierten poco a poco en partículas reales. Así, los agujeros negros emiten radiación, cuyo origen son las fluctuaciones del vacío en el exterior del horizonte de eventos. La curvatura del espacio-

tiempo efectúa la transición entre una región donde hace falta acelerar para quedarse quieto, y otra donde estar quieto es el estado natural.

Una forma intuitiva de ver este fenómeno es imaginarse las fluctuaciones del vacío como pares de partícula-antipartícula (energía positiva-energía negativa) virtuales, que se crean y se aniquilan instantáneamente⁷. Estas partículas virtuales no pueden convertirse en partículas reales, las cuales deben tener siempre una energía positiva. Pero en el interior de un agujero negro, la curvatura es tan intensa que la dimensión temporal está sobre el eje espacial, y la dimensión espacial ocupa el lugar de la temporal; o sea, se invierte la coordenada temporal y la radial (espacial)⁸. Desde un punto de vista externo, esto autoriza a las partículas en el interior del agujero negro a tener energía negativa. Así, cuando un par partícula-antipartícula virtual se crea en el horizonte, es posible que la partícula negativa sea capturada por el agujero negro y la partícula positiva escape. Es decir, hay posibilidades de que estas partículas, incluida la de energía negativa, tengan existencia real. De esta forma, absorbiendo partículas de energía negativa, el agujero negro pierde poco a poco energía, o sea, pierde masa, y la radiación de Hawking hace que se evapore.

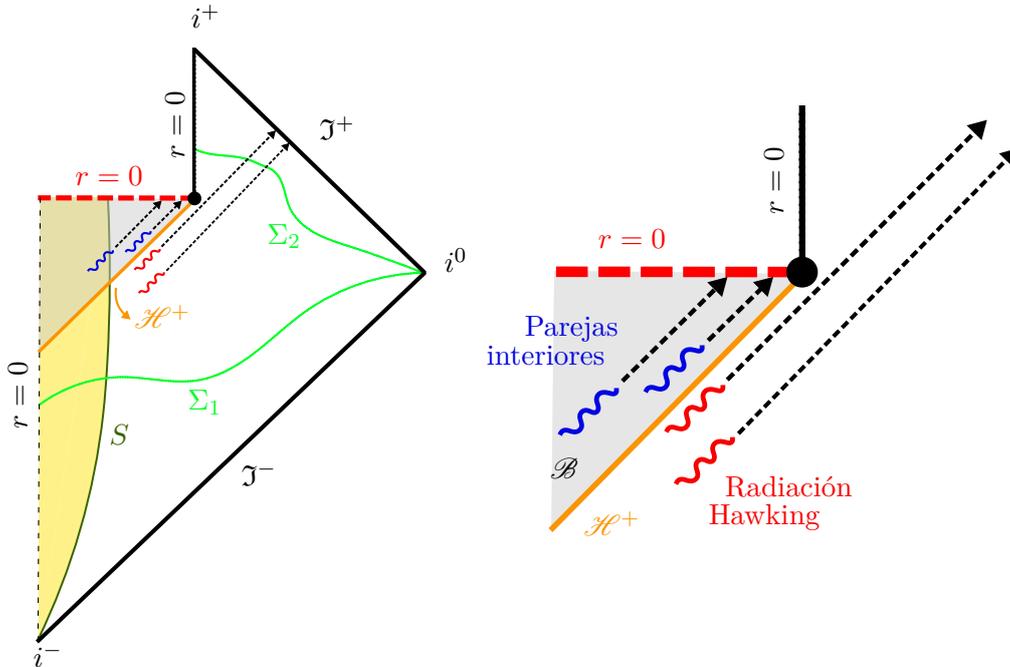


Figura 2.4.8 Diagrama de Penrose de un colapso gravitatorio y la posterior evaporación del agujero negro. Σ_1 es una hipersuperficie de Cauchy, pero Σ_2 no, pues en su dominio de dependencia pasado no incluye la región del agujero negro \mathcal{B} . Desde Σ_1 la información puede propagarse hacia \mathcal{B} y no hacia Σ_2 , luego parece haber una «pérdida de información» en el agujero negro. El punto negro es el momento en el que el agujero negro se evapora completamente, lo cual toma, por ejemplo, para un agujero negro de una masa solar, $2,1 \times 10^{67}$ años, mucho más que la edad del universo, $1,4 \times 10^{10}$ años.

⁷Según la QFT, gracias al principio de incertidumbre de Heisenberg, una sola partícula puede «fluctuar» en un estado cuántico de dos partículas y volver a su estado inicial.

⁸Esto se puede ver en los diagramas espacio-temporales o en el signo de la métrica: para $r < 2M$, $g_{tt} < 0$ y $g_{rr} > 0$; para $r > 2M$, $g_{tt} > 0$ y $g_{rr} < 0$.

2.5. Agujeros de gusano

En 1987, Michael S. Morris y Kip S. Thorne publicaron un genial artículo ([13]) donde proponen una sencilla solución para agujeros de gusano potencialmente viables para viajes interestelares. Las características clave para que un agujero de gusano sirva a ese propósito son las siguientes:

- Deben mantenerse abiertos. Con esto quedan descartadas soluciones como el agujero negro de Reissner-Nordström o de Kerr, que poseen horizontes de Cauchy fuertemente inestables.
- Las fuerzas de marea deben ser muy pequeñas.
- Debe permitir un viaje de ida y vuelta. Por ejemplo, agujeros de gusano como el puente de Einstein-Rosen no serían válidos por poseer un agujero negro en la entrada y un agujero blanco en la salida. En otras palabras, no puede haber horizontes.
- El tiempo que toma atravesarlos debe ser relativamente corto, tanto para el viajero como para un observador externo. En caso contrario perdería toda su utilidad como «atajo» espacio-temporal.
- Algún tipo de materia válida (un tensor de energía-momento físicamente razonable, que, por el teorema de Birkoff, será distinto de cero) debe ser capaz de formar el agujero de gusano.

Aunque en el artículo se tratan soluciones más generales y complejas, vamos a estudiar el caso más simple, en el que la métrica viene dada por

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 - (b_0 + l^2)(d\theta^2 + \text{sen}(\theta)d\varphi^2), \quad (2.5.1)$$

$$-\infty < t < \infty, \quad -\infty < l < \infty, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (2.5.2)$$

donde t es una coordenada temporal que representa el tiempo propio de un observador estático y l una coordenada radial que representa la distancia propia para t fijo. Notemos además que la métrica es estática y esféricamente simétrica, algo deseable para simplificar los cálculos. Tratemos ahora de dibujar la métrica embebiéndola en un espacio-tiempo euclideo tridimensional. De esta forma, tomando, sin pérdida de generalidad por la simetría esférica, $\theta = \pi/2$, tendremos una superficie que representa la misma geometría que una hipersuperficie espacial a t constante. Tenemos pues que igualar los elementos de línea

$$ds^2 = -dz^2 - dr^2 - r^2d\varphi^2 = -dl^2 - (b_0^2 + l^2)d\varphi^2. \quad (2.5.3)$$

Igualando componentes e integrando para z ,

$$z(r) = \pm b_0 \ln(|\sqrt{r^2 - b_0^2} + r|), \quad l = \pm \sqrt{r^2 - b_0^2}, \quad (2.5.4)$$

donde para determinar la constante de integración hemos usado que $z(b_0) = 0$, que es el punto central de la garganta del agujero, cuando $l = 0$. Dibujamos este embebimiento en la figura 2.5.1. Para $l \rightarrow \pm\infty$ tenemos dos regiones asintóticamente planas.

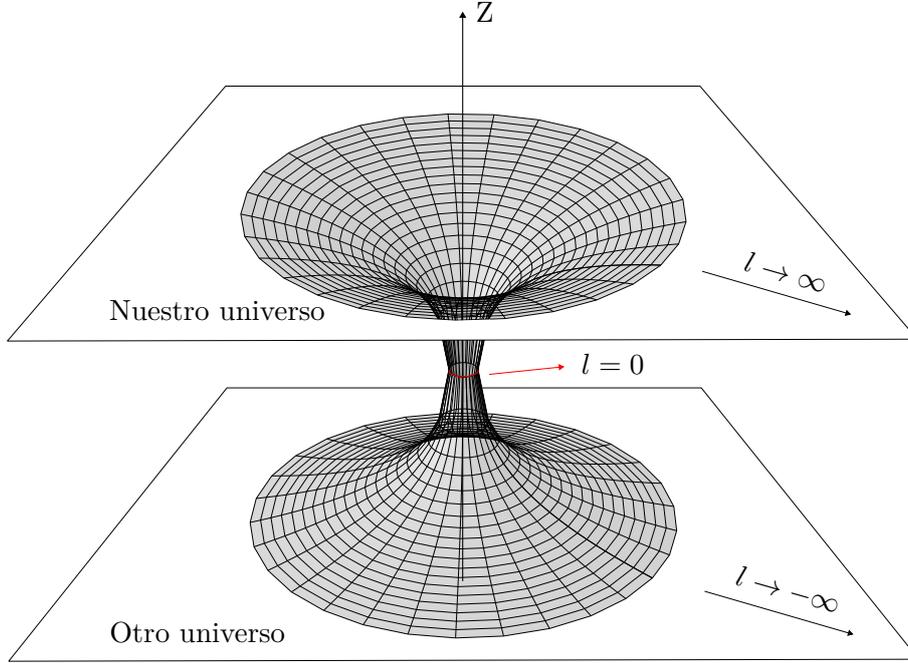


Figura 2.5.1 Diagrama embebido de un agujero de gusano que conecta dos universos distintos. Representa la geometría de la sección $\theta = \pi/2$ del espacio-tiempo en cierto instante t . Podríamos construir un diagrama que una dos partes del mismo universo uniendo el plano superior con el inferior.

La coordenada radial r representa circunferencias en el espacio embebido: decrece desde $+\infty$ hasta un valor mínimo b_0 en el punto central de la garganta del agujero, Posteriormente crece desde ese valor hasta $+\infty$ de nuevo, a medida en que nos desplazamos hacia z más negativo. Es fácil ver que las geodésicas temporales cumplen $dl/dt = v = cte$, con v la velocidad de caída libre de la partícula. Para una descripción completa (tensores de curvatura, ecuaciones de Einstein...) del espacio-tiempo, véase el artículo de Morris y Thorne [13]. Para representar el diagrama de Penrose no tenemos más que realizar los cambios de coordenadas habituales: coordenadas de cono de luz, compactificación con la función arcotangente, y vuelta a coordenadas cartesianas. Obtenemos

$$d\tilde{s}^2 = dt'^2 - dr'^2 = \Omega^2 ds^2, \quad \Omega = 2\cos\left(\frac{t' + r'}{2}\right)\cos\left(\frac{t' - r'}{2}\right), \quad -\pi < t' \pm r' < \pi. \quad (2.5.5)$$

Teniendo en cuenta que el centro de la garganta es $r = b_0$ ($l = 0$), lo dibujamos en la figura 2.5.2.

A continuación tratamos una generalización para agujeros de gusano presentada por Alex Simpson y Matt Visser en [16]. Estos autores proponen una métrica dependiente de un parámetro a que es una modificación mínima de la de Schwarzschild

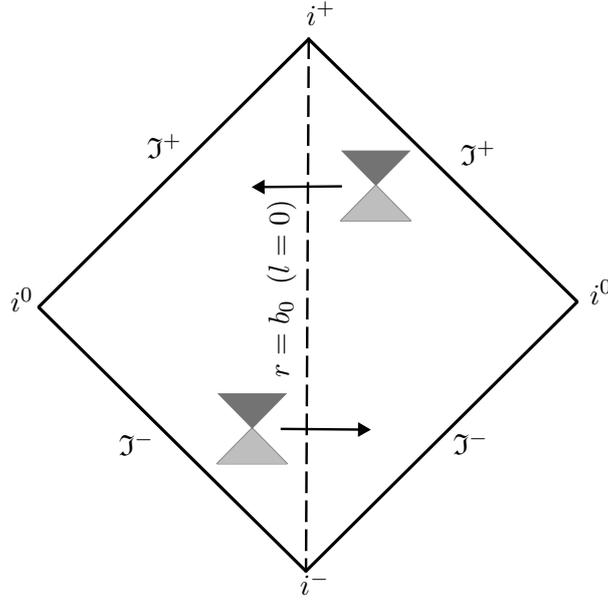


Figura 2.5.2 Diagrama de Penrose para un agujero de gusano de Morris-Thorne. Los observadores en las dos zonas asintóticamente planas pueden atravesar la garganta en ambos sentidos. Además, vemos claramente que a cada lado del agujero de gusano hay dos zonas asintóticamente planas.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{l^2 + a^2}}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{l^2 + a^2}}\right)^{-1} dl^2 - (l^2 + a^2)(d\theta^2 + \text{sen}(\theta)d\varphi^2). \quad (2.5.6)$$

$$-\infty < t < \infty, \quad -\infty < l < \infty, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (2.5.7)$$

Esta geometría espacio-temporal es claramente estática y esféricamente simétrica. Dependiendo del valor del parámetro a la métrica toma diversas formas. Si $a = 0$, entonces es la métrica de Schwarzschild, luego estudiaremos los casos donde $a \neq 0$. Para encontrar los horizontes podemos utilizar las geodésicas radiales nulas (y que no nos hace falta integrar)

$$\left(\frac{dl}{dt}\right) = \pm \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{l^2 + a^2}}\right), \quad (2.5.8)$$

Observamos que, cuando $l \rightarrow 0$, entonces $dl/dt \rightarrow 0$ cuando $a = 2M$. Con este valor del parámetro tenemos una métrica que tiene una singularidad de coordenadas en $l = 0$. Esta geometría representa un agujero de gusano de dirección única con una garganta que es una hipersuperficie nula en $l = 0$. Se pueden definir unas coordenadas tipo Kruskal que cubren toda la variedad, y con ellas obtenemos el diagrama de Penrose de la figura 2.5.4.

Si $a > 2M$, entonces $dl/dt \neq 0$ para cualquier valor de $l \in (-\infty, +\infty)$. Tenemos entonces las mismas geodésicas radiales temporales que en agujero de gusano de Morris-Thorne, y efectivamente esta métrica representa un agujero de gusano de las mismas características. En este caso ya sabemos que la garganta del agujero en $l = 0$ es una hipersuperficie temporal, tal como se puede ver en el diagrama de Penrose 2.5.2.

Por último, cuando $a < 2M$, entonces $dl/dt = 0$ cuando $l_{\pm} = \pm\sqrt{(2M)^2 - a^2}$. Por tanto, cuando el parámetro es menor que $2M$, tendremos un par de horizontes en dos valores de l simétrico $l_{\pm} = \pm|l_{\pm}|$. Podemos centrarnos en el intervalo $a \in (0, 2M)$, y obtenemos que $l = 0$ es una hipersuperficie espacial (una sección esférica). El tratamiento para construir el diagrama de Penrose es similar al de Schwarzschild, pero las diferencias son notables. Por lo pronto, la singularidad $l = 0$ no es física, sino de coordenadas; es decir, la solución es *regular* en $l = 0$, y en el resto de puntos, como hemos comentado. Esta métrica representa un agujero negro regular, que muy resumidamente es un agujero negro con horizontes pero sin singularidades físicas (para una buena explicación genérica, véase [9]). Se puede demostrar que no hay singularidades físicas: en el artículo, [16], los autores muestran que el tensor de Riemann y los invariantes de curvatura son estrictamente finitos $\forall l \in (-\infty, +\infty)$, incluido el valor $l = 0$, para el cual se obtienen valores máximos. Aunque la finitud de los invariantes de curvatura no es suficiente para determinar la existencia de singularidades físicas, basta con comprobar un conjunto completo de invariantes de Riemann (de nuevo, véase [9] para una explicación detallada y varios ejemplos). El horizonte $l = 0$ marca el borde entre nuestro universo ($l > 0$) y una copia suya en el futuro, hacia la que «rebota» (para $l < 0$) todo lo que llega a la hipersuperficie. Además, como hemos dicho, tenemos dos horizontes, l_{\pm} . De esta manera, usando la extensión máxima del espacio tiempo, tenemos una sucesión *ad infinitum* de universos «pegados» a universos futuros a través de la hipersuperficie $l = 0$ (figura 2.5.3).

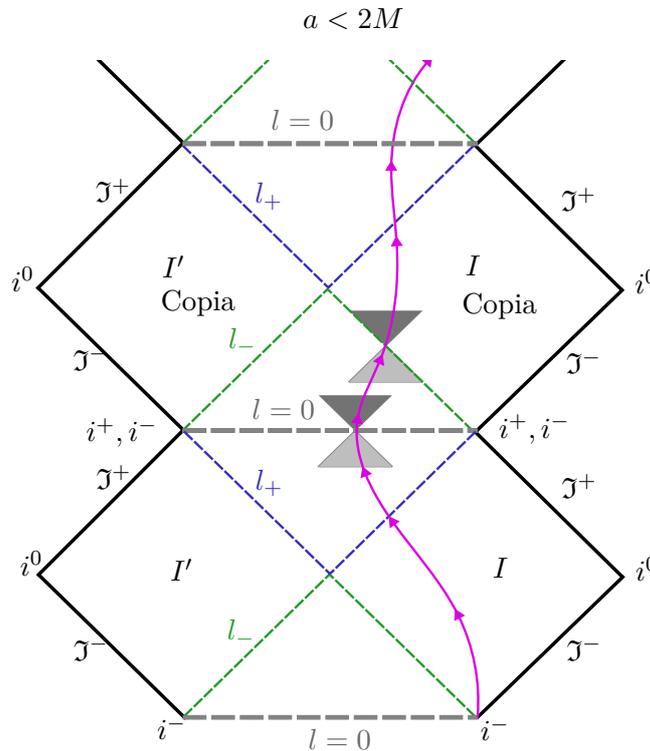


Figura 2.5.3 Diagrama de Penrose para un agujero negro regular, resultado del valor del parámetro $a < 2M$. Existe un universo paralelo a I, I' . En el horizonte $l = 0$, que es una hipersuperficie espacial, se «rebota» a una copia de nuestro universo.

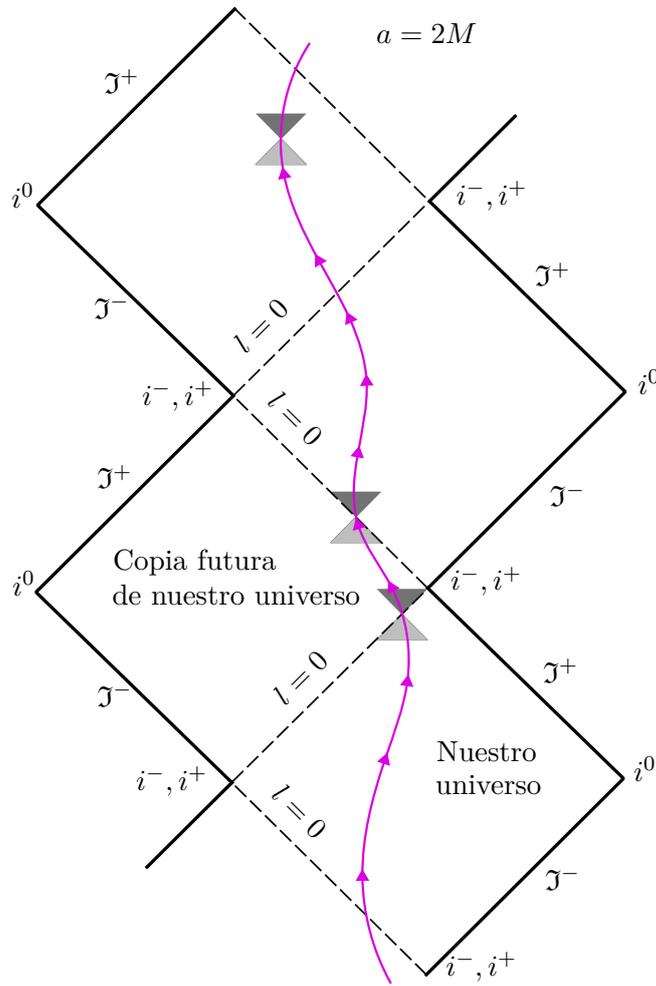


Figura 2.5.4 Diagrama de Penrose para un agujero de gusano de un sólo sentido, resultado del valor del parámetro $a = 2M$. Los observadores que cruzan la garganta (horizonte) $l = 0$ del agujero ya no pueden volver a la zona anterior, ni si quiera enviar señales, debido al carácter de hipersuperficie nula de la misma.

Conclusiones

Para concluir con este Trabajo Fin de Grado, sintetizaremos en las conclusiones los resultados más importantes. Comentaremos también la relación que guarda con las materias estudiadas en el grado en Física y en el grado en Matemáticas, y las posibilidades de continuar ahondando en estos temas.

Podemos decir que a lo largo del texto hemos trabajado en tres ámbitos: el carácter causal global de las soluciones, su interpretación en los diagramas y la construcción matemática de los mismos.

En el primero hemos estudiado la estructura causal de distintas soluciones de las ecuaciones de Einstein usando los conceptos definidos en el primer capítulo y en los apéndices, especialmente el B. En concreto, hemos insistido en calificar si un espacio tiempo es globalmente hiperbólico (esto es, si contiene una hipersuperficie de Cauchy) o no. Recordemos que una hipersuperficie de Cauchy es una hipersuperficie ácrona cuyo dominio de dependencia es todo el espacio-tiempo (es decir, cualquier curva causal inextendible al pasado (futuro) que pasa por un punto corta a esta hipersuperficie). En relación a esto, hemos tratado los siguientes casos a lo largo del trabajo:

- Espacios-tiempos globalmente hiperbólicos: Minkowski, espacio de De Sitter, distintos modelos cosmológicos con la métrica de FRW, agujero negro de Schwarzschild, colapso gravitatorio de Oppenheimer-Snyder y agujero de gusano de Morris-Thorne ($a > 2M$).
- Espacios-tiempos no globalmente hiperbólicos: agujero negro de Schwarzschild con $M < 0$, los distintos casos de la solución de Reissner-Nordström, evaporación del agujero negro por la radiación de Hawking (paradoja de la información) y agujeros de gusano de Simpson y Visser ($a < 2M$ y $a = 2M$).

En segundo lugar hemos utilizado los diagramas de Penrose para facilitar la interpretación causal de las soluciones. Hemos diferenciado singularidades evitables, por ejemplo la de Reissner-Nordström, o inevitables, por ejemplo la de Schwarzschild, según el carácter temporal o espacial de la hipersuperficie. También identificamos fácilmente en los diagramas las singularidades iniciales, como la del Big Bang o la del agujero blanco en la solución de Schwarzschild, y las singulares desnudas, como la del caso $M < 0$ de la solución de Schwarzschild. Además los diagramas de Penrose nos han permitido detectar fácilmente la existencia, o no, de horizontes de partículas y/o horizontes cosmológicos, pues el simple carácter puntual o no del infinito temporal futuro y/o pasado nos lo aclara.

Además de esto, podemos visualizar claramente la naturaleza de hipersuperficie de corrimiento al rojo infinito del horizonte de eventos futuro de un agujero negro en los diagramas. En efecto, en un intervalo infinitesimalmente cerca del horizonte, las señales de luz emitidas se dirigen infinitesimalmente cerca del infinito temporal futuro, donde las recibirá un observador externo. El mismo argumento vale para las hipersuperficies de corrimiento al azul infinito, como los horizontes de Cauchy presentes en la solución de Reissner-Nordström.

En el caso de los agujeros de gusano, vemos claramente la posibilidad de transitar desde una de las regiones a las que están al otro lado. Especialmente ilustrativo es la sencilla solución de Morris-Thorne, donde podemos cruzar desde una región asintóticamente plana a la otra.

En tercer lugar, hemos insistido en la construcción matemática efectiva de los distintos diagramas. Para ello hemos presentado el formalismo matemático de la compactificación conforme. En resumen, si $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ es un embebimiento y $\Omega : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ el factor conforme, de clase \mathcal{C}^∞ . Decimos que $\tilde{\mathcal{M}}$ es una compactificación conforme si:

1. φ embebe \mathcal{M} como una variedad diferenciable con frontera suave en $\tilde{\mathcal{M}}$.
2. $\Omega > 0$ en $\varphi(\mathcal{M})$ y la métrica $\tilde{\mathbf{g}}$ en $\varphi(\mathcal{M})$ se obtiene a partir de la métrica \mathbf{g} en \mathcal{M} mediante la isometría conforme $\tilde{\mathbf{g}} = \Omega^2 \varphi^* \mathbf{g}$.
3. En la frontera suave de $\varphi(\mathcal{M})$ en $\tilde{\mathcal{M}}$, que denotaremos \mathfrak{I} y llamaremos infinito conforme, la función Ω se anula ($\Omega=0$), pero no su gradiente ($\nabla_\mu \Omega \neq 0$).
4. El tensor $\Omega^{-1} \mathbf{C}$ es suave en $\tilde{\mathcal{M}}$, donde \mathbf{C} es el tensor de Weyl,

A lo largo del trabajo hemos especificado las métricas conformes a los espacios-tiempos considerados, así como el factor conforme correspondiente. Hemos encontrado varias que son conformes a distintas bandas del universo estático de Einstein: el espacio-tiempo de Minkowski, el de De Sitter y las soluciones tipo FRW para materia fría y densidad supercrítica ($w = 0, k = +1$) y para el caso de un universo espacialmente plano dominado por radiación ($k = 0, w = -1/3$). A su vez, las soluciones tipo FRW para un universo plano en expansión decelerada ($k = 0, w > 1/3$) y acelerada ($k = 0, w < 1/3$), y el espacio de De Sitter con foliación plana ($k = 0, w = -1$) tienen una métrica conforme a la de Minkowski. Para obtener estas métricas nos ha sido fundamental el uso de las coordenadas conformes.

La deducción de los diagramas de Oppenheimer-Snyder y Reissner-Nordström ha sido más compleja, sobre todo esta última, pues no hemos utilizado las coordenadas que cubren toda la variedad, sino unas que la cubren parcialmente. Sumadas a algunos argumentos heurísticos y a las condiciones de simetría hemos podido construir el diagrama de Penrose. Los únicos diagramas conformes presentados sin construcción explícita han sido el relativo a la radiación de Hawking, debido a su complejidad, y el de los agujeros de gusano de Simpson y Visser, en este caso por ser muy similar a otros casos anteriores.

A lo largo de este Trabajo Fin de Grado hemos utilizado múltiples conceptos estudiados en las asignaturas del grado en Física y del grado en Matemáticas. En particular, la

geometría diferencial es la base sólida e ineludible de la Relatividad General, tratada en los Métodos Matemáticos para la Física I, del grado en Física, y en Geometría Diferencial del grado en Matemáticas. Por supuesto, para desarrollar el análisis físico de esta materia ha sido fundamental aplicar los conceptos aprendidos en Gravitación y Cosmología, y también de Mecánica y Ondas, del grado en Física. Aunque no se ha explicitado en este trabajo, el estudio riguroso de las soluciones en Relatividad General precisa también de los fundamentos y métodos matemáticos estudiados en otras asignaturas como Ecuaciones Diferenciales.

Por último, decir que actualmente seguimos trabajando en este texto con el objetivo de crear un documento riguroso que contenga la construcción de los diagramas de Penrose de distintas soluciones de las ecuaciones de Einstein. La continuación natural sería estudiar en detalle el agujero negro de Kerr, y también ampliar las soluciones cosmológicas, para lo cual sería interesante analizar el espacio de anti-De Sitter. Además, podríamos tratar algunas de las soluciones ya presentadas, como De Sitter y Schwarzschild, con otras coordenadas interesantes. También tenemos intención de explorar soluciones misceláneas como el «warp drive» de Alcubierre a través del estudio de los agujeros negros acústicos o incluso el universo rotatorio de Gödel. Nuestro planteamiento inicial pretendía incluir el agujero negro de Kerr y el «warp drive» de Alcubierre, pero finalmente no se ha hecho para no alargar el trabajo más de lo necesario y conveniente.

Otra opción interesante y diferente para profundizar más sería ir completando el trabajo con una deducción detallada de las distintas soluciones. No debemos olvidar que, a pesar de la gran utilidad de los diagramas de Penrose, la Relatividad General es muy amplia, y un documento que exclusivamente los construya será un gran repositorio, pero no incluirá otras cuestiones importantes como la deducción de las singularidades o las geodésicas en torno a los agujeros negros.

Apéndice A

Geometría diferencial

En este apéndice definimos algunos de los conceptos geométricos más importantes que se usan en este trabajo. El formalismo en Relatividad General requiere del estudio abstracto de las variedades diferenciables. En un primer apartado realizamos un repaso relativo a ello. Omitiremos las definiciones sobre tensores (para un tratamiento detallado, véase [8]), limitándonos a escribir los conceptos fundamentales de variedades y aplicaciones diferenciables. Posteriormente analizamos el tensor métrico y el cono de luz. En el tercer apartado hablaremos de hipersuperficies y finalmente definiremos la variedad espacio-temporal y sus características principales.

A grandes rasgos, una variedad diferenciable es un espacio que localmente es como \mathbb{R}^n . Es decir, es la generalización del concepto de superficie en \mathbb{R}^3 .

Formalmente, definimos una **variedad topológica** como un espacio topológico Hausdorff \mathcal{M} tal que todo punto $p \in \mathcal{M}$ posee un entorno abierto homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n . Además, podemos definir una **carta** (\mathcal{U}, ϕ) como el par compuesto por $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ y un homeomorfismo $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que un conjunto de cartas $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es un **atlas** \mathcal{C}^∞ de la variedad si cumple las dos condiciones siguientes:

1. $\mathcal{M} = \cup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$, esto es, que las cartas cubren toda la variedad.
2. Satisfacen la **compatibilidad de cartas**. Esta condición expresa que, si dos cartas están solapadas, $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, entonces la función de transición entre ambas $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ es una función \mathcal{C}^∞ entre abiertos de \mathbb{R}^n (véase figura A.0.1). Notemos que las cartas no necesitan ser clase \mathcal{C}^∞ , basta con que sean continuas.

Si una variedad topológica \mathcal{M} posee un atlas \mathcal{C}^∞ , diremos que es una **variedad diferenciable**.

Una carta (\mathcal{U}, ϕ) nos asocia un punto p a sus **coordenadas locales** x^μ en \mathcal{M} , inducidas por las coordenadas de $\phi(p)$ en \mathbb{R}^n a través de la aplicación inversa ϕ^{-1} . Lo que explica la carta es que una parte $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ es topológicamente equivalente a \mathbb{R}^n .

Una aplicación $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ entre dos variedades diferenciables \mathcal{M} y \mathcal{M}' es **suave** si, y sólo si, dado un par de atlas $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)\}, \{(\mathcal{U}'_\beta, \phi'_\beta)\}$ de \mathcal{M} y \mathcal{M}' , las funciones

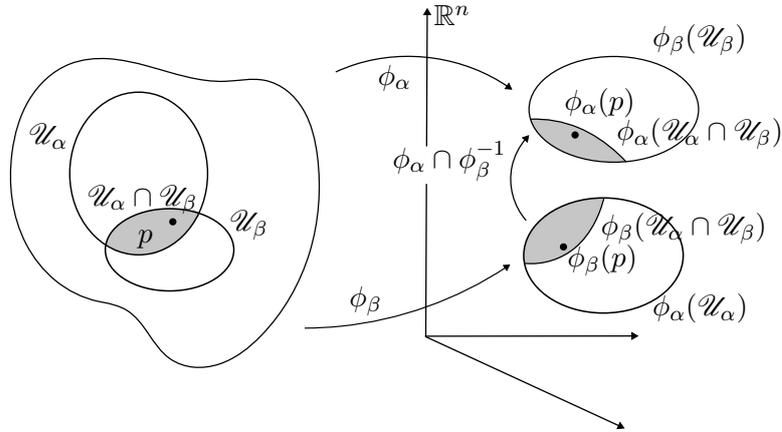


Figura A.0.1 Imagen ilustrativa sobre la condición de compatibilidad de cartas.

$\phi'_\beta \circ \varphi \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ son suaves (clase C^∞). Esto quiere decir que, dados dos sistemas de coordenadas locales, las coordenadas x' de la imagen $p' = \varphi(p) \in \mathcal{M}'$ de $p \in \mathcal{M}$ son funciones suaves de las coordenadas x de p .

Por otra parte, $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ es un **difeomorfismo** si, y sólo si, tanto ella como su inversa son aplicaciones suaves. Este concepto refiere a un cambio de coordenadas de la siguiente manera. Dado un difeomorfismo φ y una carta (\mathcal{U}, ϕ) , de manera que $p \in \mathcal{U}$, y otra carta (\mathcal{U}', ϕ') tal que $p' = \varphi(p) \in \mathcal{U}'$, la aplicación $\psi = \phi' \circ \varphi$, que asigna a p las coordenadas de p' , junto con el abierto $\mathcal{V} = \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}')$, es una carta que contiene a p (véase figura A.0.2).

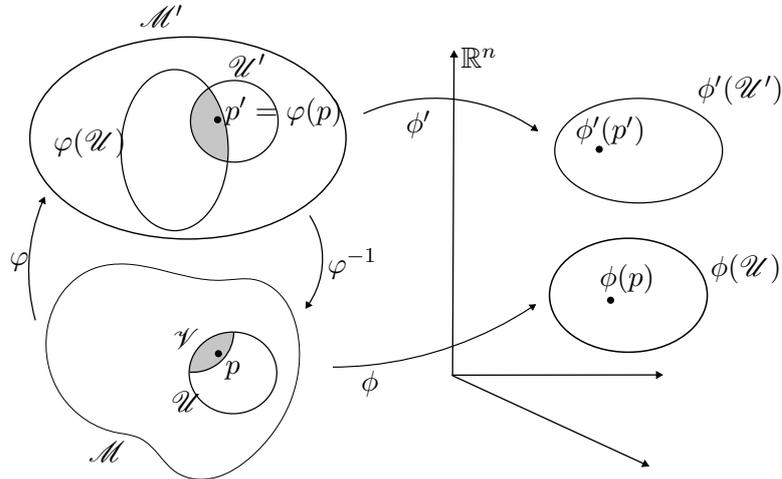


Figura A.0.2 Imagen ilustrativa de un difeomorfismo entre variedades. La carta $(\psi, \mathcal{V}) = (\phi' \circ \varphi, \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}'))$ contiene a p .

Las aplicaciones suaves inducen dos aplicaciones de gran utilidad, la aplicación **pull-back** φ^* y la aplicación **push-forward** φ_* . Consideramos \mathcal{F}_M el conjunto de todas las funciones $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ suaves (aquellas tales que $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es suave).

- **Aplicación pull-back** entre $\mathcal{F}_{\mathcal{M}'}$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$. Dada una función $f' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi^* f' : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que:

$$\varphi^* f'(p) := f' \circ \varphi(p), \quad (\text{A.0.1})$$

que, si escribimos $f = \varphi^* f'$, en lenguaje coordenado se expresa

$$f(x) = f'(x'(x)). \quad (\text{A.0.2})$$

- **Aplicación push-forward** entre $T_p \mathcal{M}$ y $T_{\varphi(p)} \mathcal{M}'$. Dado $\mathbf{v} \in T_p \mathcal{M}$, entonces $\varphi_* \mathbf{v}$ es un vector de $T_{\varphi(p)} \mathcal{M}'$ tal que su actuación sobre $f' \in \mathcal{F}_{\mathcal{M}'}$ es:

$$\varphi_* \mathbf{v}|_{\varphi(p)}(f') := \mathbf{v}|_p(\varphi^* f'), \quad (\text{A.0.3})$$

que, si $\mathbf{v} = \varphi_* \mathbf{v}$, en lenguaje coordenado adquiere la forma

$$v^{\mu'}(x'(x)) = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} v^\nu(x). \quad (\text{A.0.4})$$

- **Aplicación pull-back** entre $T_{\varphi(p)}^* \mathcal{M}'$ y $T_p^* \mathcal{M}$. Si $\omega' \in T_{\varphi(p)}^* \mathcal{M}'$, entonces $\varphi^* \omega'$ es una uno-forma de $T_p^* \mathcal{M}$ que actúa sobre $\mathbf{v} \in T_p \mathcal{M}$ de la forma:

$$\langle \varphi^* \omega', \mathbf{v} \rangle|_p := \langle \omega', \varphi_* \mathbf{v} \rangle|_{\varphi(p)}. \quad (\text{A.0.5})$$

En lenguaje coordenado, el pullback $\omega = \varphi^* \omega'$ se escribe:

$$\omega_\mu(x) = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \omega'_{\nu'}(x'(x)). \quad (\text{A.0.6})$$

Podemos definir la aplicación *pull-back* sobre tensores covariantes (por ejemplo, la métrica) y la aplicación *push-forward* sobre tensores contravariantes de forma similar. Además, notemos que si $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ es un difeomorfismo, entonces tenemos garantizada la existencia y el carácter suave de φ^{-1} , luego podemos extender la definición del *pull-back* φ^* y el *push-forward* φ_* para cualquier tipo de tensores, pues $\varphi^* = (\varphi^{-1})_*$ y $\varphi_* = (\varphi^{-1})^*$. Por último, debemos tener claro que \mathcal{M} y \mathcal{M}' pueden tener dimensiones distintas.

A.1. Métrica

En Relatividad General trabajamos con variedades pseudoriemannianas, esto es, los pares $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ donde \mathcal{M} es una variedad diferenciable y \mathbf{g} un tensor de rango $(0, 2)$, o dos veces covariante, no degenerado. Este tensor \mathbf{g} con el que está equipada la variedad diferenciable se denomina *métrica*.

Normalmente escribiremos directamente los términos de la métrica en una cierta base $\{\mathbf{e}_\mu\}$ del espacio tangente a un punto de la variedad, $T_p \mathcal{M}$ (base asociada a las coordenadas x^μ de $p \in \mathcal{M}$). Si $\mathbf{g} : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, tendremos:

$$(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) \in T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = g_{\mu\nu} \quad (\text{A.1.1})$$

Para dos vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p \mathcal{M}$, tales que $\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu$, $\mathbf{w} = w^\nu \mathbf{e}_\nu$, tendremos:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu \quad (\text{A.1.2})$$

Si denotamos por dx^μ la base coordenada $\{\mathbf{e}^\mu\}$ del espacio dual $T_p^*\mathcal{M}$, tendremos que $\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$, término que se suele denotar por ds^2 y que se denomina **elemento de línea** o **intervalo espacio-temporal**.

Hemos equipado nuestra estructura matemática con un tensor métrico, lo que nos da la capacidad de definir la norma de un vector, y con ello introducir el concepto de distancia. Definimos la **norma** de un vector \mathbf{v} , y el **ángulo** entre dos vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} de norma no nula de la siguiente manera:

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{|g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu|} = \sqrt{|v_\nu v^\nu|} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\cos(\alpha) := \frac{\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu}{\sqrt{|g_{\rho\sigma} v^\rho v^\sigma|} \sqrt{|g_{\beta\gamma} w^\beta w^\gamma|}} \quad (\text{A.1.4})$$

Como hemos dicho, trabajamos con métricas **no degeneradas**, que podemos definir como las métricas tales que su matriz de componentes $(g_{\mu\nu})$ es no singular en cualquier base. Además, sabemos que la introducción de la métrica establece un isomorfismo entre $T_p\mathcal{M}$ y $T_p^*\mathcal{M}$ que nos permite «subir y bajar índices». En consecuencia, la métrica puede actuar sobre vectores covariantes (por ejemplo, sobre el vector normal).

El número de autovalores positivos y negativos de $(g_{\mu\nu})$ son independientes de las coordenadas (propiedad inherente al tensor), de modo que forman una característica intrínseca del espacio considerado: llamamos la **signatura** del tensor métrico \mathbf{g} al número de autovalores negativos menos el número de autovalores positivos. Definimos una **métrica lorentziana** como aquella cuya signatura es $n - 2$ (también se dice signatura $(1, n - 1)$), donde n es la dimensión de la variedad (tiene un autovalor positivo y el resto negativos). Una variedad diferenciable $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ equipada con una métrica lorentziana es una **variedad lorentziana**, un tipo especial de variedad pseudo-riemanniana.

Una métrica lorentziana en la variedad \mathcal{M} separa el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ en tres tipos de vectores, induciendo una **estructura causal** válida para cualquier observador ($\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ es un escalar, luego es invariante bajo cambios generales de coordenadas):

- **Vectores temporales:** $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu > 0$.
- **Vectores espaciales:** $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu < 0$.
- **Vectores nulos o de tipo luz:** $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0$.

Definimos ahora el **cono de luz** de un punto $p \in \mathcal{M}$ como el conjunto de vectores nulos de $T_p\mathcal{M}$. Es importante entender que el cono de luz es un conjunto del espacio tangente en un punto y no de la variedad. Así, podemos entender la estructura causal de p , asignando la mitad del cono de luz como «futuro» y la otra mitad como «pasado», como vemos en la figura A.1.1.

Debido a que no se puede alcanzar la velocidad de la luz, la línea de universo de cualquier observador queda recluida dentro del cono de luz y no podrá salir de él, pues,

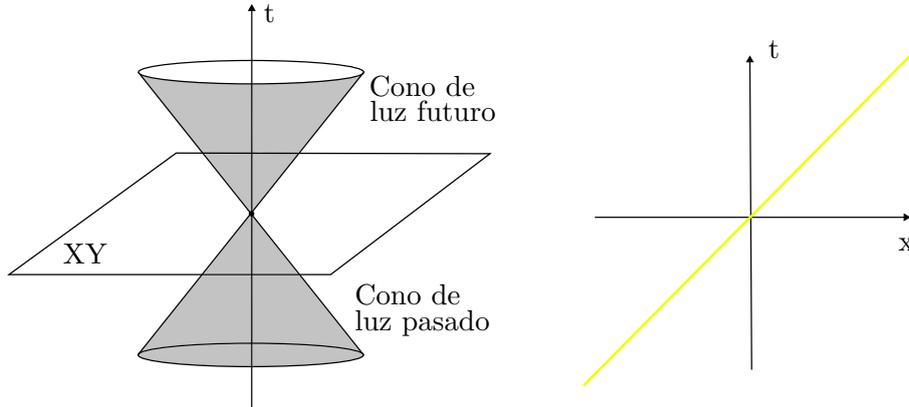


Figura A.1.1 A la izquierda, el cono de luz para un punto situado en una superficie bidimensional XY . El espacio-tiempo es una variedad cuatridimensional, con tres dimensiones espaciales y una temporal. Para representarlo en tres dimensiones hemos eliminado una dimensión espacial. Lo que en la imagen es el plano XY , en realidad debería ser una hipersuperficie que representa el instante presente. Para $t > 0$, tenemos el cono de luz futuro; para $t < 0$, el cono de luz pasado. A la derecha, un diagrama de Minkowski en dos dimensiones. Si trabajamos con unidades donde $c = 1$, entonces en un diagrama espacio-temporal la luz siempre está a 45 grados. Es el borde del cono de luz.

en caso contrario, en un cierto intervalo de tiempo habría recorrido un espacio mayor que el que ha recorrido la luz (en el sentido de la figura de la derecha de A.1.1, no puede tener pendiente mayor que uno, pues entonces tendría una velocidad mayor que $c = 1$). En consecuencia, un evento pasado no puede influenciar a un observador en el presente hasta que la luz de ese evento entre en el cono de luz del observador. Lo que está fuera del cono de luz de un punto está *causalmente desconectado* de él. En la figura A.1.2 vemos un ejemplo de un evento (punto rojo), que puede ser la explosión de una supernova en otra galaxia, cuya luz tarda un tiempo $t_1 - t_0$ en llegar a la Tierra (punto azul).

En este sentido, podemos agrupar los vectores no nulos de tipo temporal y tipo luz en los **vectores causales** (aquellos para los que $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$), pues son, como veremos, los que representan trayectorias que están conectados causalmente con p .

Por último, decimos que un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es una **isometría** si, y sólo si, $\varphi_*\mathbf{g} = \mathbf{g}$, o sea, que conserva el tensor métrico en toda la variedad \mathcal{M} .

A.2. Hipersuperficies

La aplicación $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ entre dos variedades diferenciables suaves \mathcal{M} y \mathcal{M}' es un **embebimieto** si, y sólo si, es un difeomorfismo en su imagen $\theta(\mathcal{M})$.

Una **hipersuperficie** $\theta(\mathcal{I})$ de \mathcal{M} es una variedad $(n - 1)$ -dimensional \mathcal{I} embebida en \mathcal{M} mediante el embebimiento $\theta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{M}$. Si y^i son coordenadas de un punto p en \mathcal{I} , y x^μ coordenadas en \mathcal{M} , entonces θ induce la aplicación $x^\mu(y^i)$, coordenadas de $\theta(p)$ en $\theta(\mathcal{I})$.

A continuación vamos a definir la uno-forma normal a una hipersuperficie, que nos

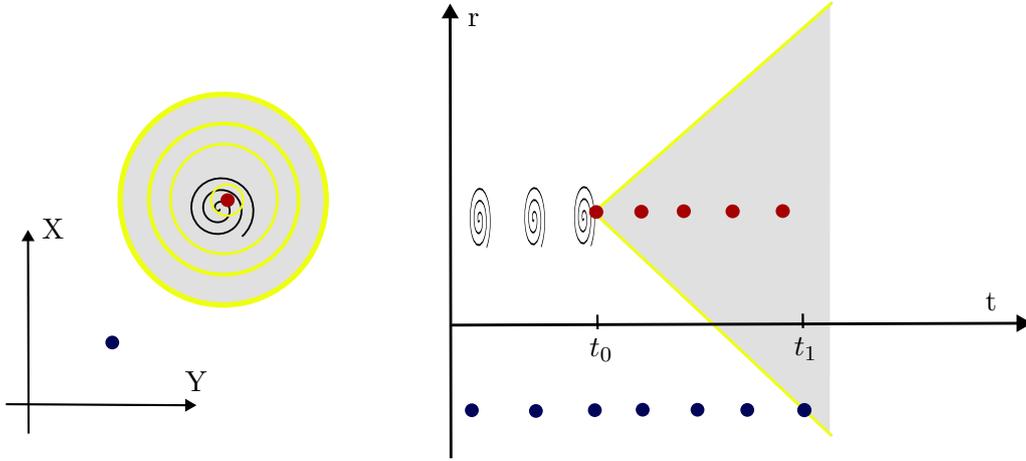


Figura A.1.2 En la parte izquierda de la imagen representamos dos coordenadas espaciales en un instante de tiempo entre t_0 y t_1 , en el cual la luz de la explosión aún no ha llegado a la Tierra. En la parte derecha tenemos una coordenada espacial y una temporal. En el instante t_0 se produce la explosión, formando un cono de luz. Hasta que no transcurre un tiempo $t_1 - t_0$ este evento está causalmente desconectado de un observador en la Tierra. Posteriormente, cuando la Tierra entra en el cono de luz del evento, un observador verá la explosión. Por simplicidad hemos tomado posiciones constantes.

servirá para clasificar las hipersuperficies y las métricas inducidas por un embebimiento (primera forma fundamental).

Por la definición de embebimiento, θ es un difeomorfismo sobre $\theta(\mathcal{S})$, luego dado un punto $p \in \mathcal{S}$, el *push-forward* θ_* establece un isomorfismo entre el espacio tangente $T_p\mathcal{S}$ (que, recordemos, tiene la misma dimensión que \mathcal{S}) y el subespacio $(n - 1)$ -dimensional $H_{\theta(p)}\mathcal{M} := \theta_*(T_p\mathcal{M}) \subset T_{\theta(p)}\mathcal{M}$. Recordemos que los elementos del espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ son los vectores tangentes $\mathbf{v}|_p$, que son operadores sobre las funciones suaves de \mathcal{M} . Los vectores de la base de $T_p\mathcal{M}$ se suelen denotar ∂_i . Sean \mathbf{E}_i las imágenes por θ_* de ∂_i :

$$\partial_i \in T_p\mathcal{M} \mapsto \theta_*(\partial_i) = \mathbf{E}_i \in H_{\theta(p)}\mathcal{M} \subset T_{\theta(p)}\mathcal{M} \quad (\text{A.2.1})$$

Son vectores tangentes de \mathcal{M} , luego podemos escribir $\mathbf{E}_i = E_i^\mu \mathbf{e}_\mu$, con $E_i^\mu = \partial x^\mu / \partial y^i$ (como decíamos, el embebimiento θ induce la aplicación $x^\mu(y^i)$). Por lo tanto, existe un vector covariante (uno-forma) $\mathbf{n} \in T_{\theta(p)}^*\mathcal{M}$, que llamamos **normal** a la hipersuperficie, tal que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{E}_i \rangle = n_\mu E_i^\mu = 0$, esto es, que aniquila todos los vectores de $H_{\theta(p)}\mathcal{M}$.

El embebimiento θ induce, a través del *pull-back*, una métrica $\mathbf{h} = \theta^*\mathbf{g}$, denominada **primera forma fundamental**, en \mathcal{S} , donde \mathbf{g} es una métrica en \mathcal{M} . A través de esta definición establecemos una clasificación para las hipersuperficies $\theta(\mathcal{S})$ según el carácter de la normal:

- \mathbf{h} es riemanniana si \mathbf{n} es de género tiempo. Decimos entonces que la hipersuperficie $\theta(\mathcal{S})$ es **espacial**.
- \mathbf{h} es lorentziana si \mathbf{n} es de género espacial. Decimos entonces que la hipersuperficie $\theta(\mathcal{S})$ es **temporal**.

- h es degenerada si n es de género luz. Decimos entonces que la hipersuperficie $\theta(\mathcal{S})$ es *nula*.

A.3. La variedad espacio-temporal

Definimos el *espacio-tiempo* como el conjunto de todos los sucesos, y está descrito por una variedad diferenciable lorentziana conexa cuatridimensional (\mathcal{M}, g) de clase \mathcal{C}^∞ . O lo que es lo mismo, por una variedad diferenciable pseudoriemanniana conexa (\mathcal{M}, g) de clase \mathcal{C}^∞ , con g una métrica lorentziana. Esta métrica tiene, por tanto, signatura $(1, 3)$. Un espacio riemanniano cuatridimensional tiene signatura $(0, 4)$, y no es un espacio-tiempo. Dos ejemplos básicos son, respectivamente, el espacio-tiempo de Minkowski, con métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ y el espacio euclídeo \mathbb{R}^4 , con métrica la identidad.

Cuando hemos definido el cono de luz lo hemos dividido en dos partes, el cono de luz «futuro» y el cono de luz «pasado». Sin embargo, en un espacio-tiempo que no sea simplemente conexo estas asignaciones no se pueden hacer de forma satisfactoria. Si es posible hacer tal asignación de forma continua en todos los puntos de la variedad, diremos que (\mathcal{M}, g) es *temporalmente orientable*. En un espacio-tiempo que no sea temporalmente orientable tendremos el grave problema de no poder distinguir de forma consistente las nociones de «adelante en el tiempo» y «atrás en el tiempo», por lo que a partir de ahora trabajaremos siempre con variedades temporalmente orientables. En la figura A.3.1 mostramos un ejemplo de variedad lorentziana que no es orientable temporalmente (para una explicación detallada véase [11]).

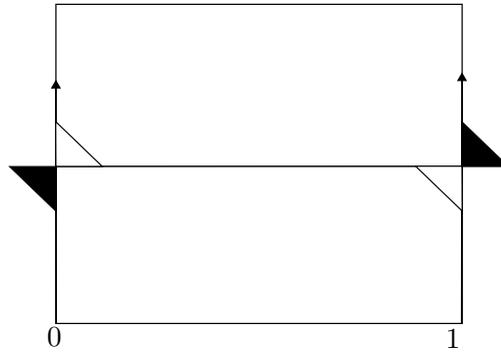


Figura A.3.1 El cono de luz futuro es el blanco. En \mathbb{R}^2 , con la métrica $ds^2 = -\text{sen}(\theta)\cos(\theta)dx^2 - dx dy - \text{sen}(\theta)\cos(\theta)$, $\theta = \pi x/2$, identificando los bordes $\{0\} \times (-1, 1)$ y $\{1\} \times (-1, 1)$, tenemos una variedad bidimensional lorentziana que no es orientable temporalmente.

Como también comentábamos en el apartado relativo a la métrica, la presencia de una métrica lorentziana separa el espacio tangente en vectores temporales, espaciales y nulos.

Diremos que un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) es *extensible analíticamente* si, y sólo si, existe otro espacio-tiempo (\mathcal{M}', g') en el que el primero está embebido isométricamente.

Un espacio-tiempo es la *extensión analítica máxima* de otro espacio-tiempo si es una extensión analítica suya que no es extensible. Cuando tenemos un espacio-tiempo con alguna singularidad de coordenadas (singularidades aparentes de la métrica debido

al uso ciertas coordenadas; o sea, no físicas), entonces es necesario realizar una extensión analítica para eliminarlas. Para ello debemos extender máximamente todas las geodésicas (agotando todo el recorrido de sus parámetros afines) mediante cambios de coordenadas adecuados.

Por la definición de espacio-tiempo, éste debe contener a *todos* los puntos no singulares. Pero, si fuera extensible, entonces los puntos de la extensión deben ser considerados puntos del espacio-tiempo. Por ello, para mantener la coherencia con la definición, debemos exigir que un espacio-tiempo no puede ser extensible analíticamente.

Apéndice B

Horizontes

Tratamos en este segundo apéndice los horizontes de Killing, los horizontes de sucesos, así como los agujeros negros, y los horizontes cosmológicos. Para un desarrollo más amplio puede consultarse [17] y [1].

B.1. Horizontes de Killing

Recordemos que la derivada de Lie evalúa el cambio de un campo tensorial a lo largo de un flujo definido por otro campo vectorial. En este sentido, nos permite decidir si un tensor es invariante bajo difeomorfismos en cierta dirección: si, y sólo si, su derivada de Lie en esa dirección se anula. Por lo tanto, pedir que la métrica se conserve en toda la variedad bajo un campo vectorial dado k^μ (isometría) es lo mismo que pedir que su derivada de Lie a lo largo de ese campo se anule. Esta ecuación, asumiendo que estamos en la conexión de Levi-Civita, es la *ecuación de Killing*:

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0 \tag{B.1.1}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones diferenciables para los campos vectoriales k^μ cuyas curvas integrales son direcciones isométricas de $g_{\mu\nu}$. Los campos vectoriales que satisfacen la ecuación de Killing se denominan *vectores de Killing*.

Un *horizonte de Killing* es una hipersuperficie que admite un vector de Killing normal nulo ξ . En otras palabras, un hipersuperficie nula que admite un vector normal de Killing.

Proposición B.1.1. Dada una hipersuperficie nula \mathcal{N} cualquiera tal que su normal \mathbf{n} es nulo, entonces el vector \mathbf{n} es también tangente a \mathcal{N} , y las curvas tangentes a \mathbf{n} son geodésicas contenidas en \mathcal{N} .

Demostración. Por ser \mathbf{n} de tipo nulo, entonces su norma es nula, luego $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$, lo que implica que es un vector tangente a \mathcal{N} . Por lo tanto, $n^\mu = dx^\mu/d\lambda$ para alguna curva $x^\mu(\lambda)$ en \mathcal{N} . Para una familia de hipersuperficies $S = cte$, el campo vectorial normal es

$$n = f(x)(g^{\mu\nu} \partial_\nu S) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{B.1.2}$$

, donde f es una función arbitraria no nula. Tomemos \mathcal{N} el miembro $S = 0$ de la familia. Entonces $n^\mu = fg^{\mu\nu}\partial_\nu S$. Se trata de probar que este vector tangente está transportado paralelamente a lo largo de la curva, y entonces ésta será una geodésica. Los detalles están en [17], pero teniendo en cuenta la compatibilidad de la métrica y operando, se llega a:

$$n^\rho \nabla_\rho n^\mu \propto n^\mu \quad (\text{B.1.3})$$

, lo cual prueba que $x(\lambda)$ es una geodésica. Se puede escoger el parámetro afín: $n^\rho \nabla_\rho n^\mu = 0$ \square

Sea \mathcal{N} un horizonte de Killing y sea ξ su vector normal. Como hemos visto, ξ también es tangente al horizonte de Killing. Las curvas tangentes a él son geodésicas nulas contenidas en el horizonte, y las denominamos **generatrices** de \mathcal{N} . Definimos la **gravedad de superficie** $\kappa_H \geq 0$ de un horizonte de Killing mediante la proporcionalidad entre la derivada covariante de ξ a lo largo de la curva, $\xi^\rho \nabla_\rho \xi^\mu$ y ξ , o sea:

$$\xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu := \pm \kappa_H \xi^\nu \quad (\text{B.1.4})$$

La gravedad de superficie representa lo lejos que está el parámetro s ($\xi = \partial_s$) de ser el parámetro afín λ . Se puede demostrar esta fórmula:

$$\kappa_H^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu \xi^\nu)(\nabla_\mu \xi_\nu)|_{\mathcal{N}} \quad (\text{B.1.5})$$

Si \mathcal{N} es un horizonte de Killing de ξ con gravedad de superficie κ , entonces es también un horizonte de Killing de $c\xi$ con gravedad de superficie $c^2\kappa_H$ (de la fórmula B.1.5) para cualquier constante c . Por lo tanto la gravedad de superficie no es una propiedad exclusiva de \mathcal{N} , sino que depende de la normalización (y no tiene una «natural» en general) de ξ .

Diremos que un horizonte de Killing es **degenerado** si, y sólo si, su gravedad de superficie se anula.

B.2. Singularidades

Una singularidad de una métrica es un punto en el que su determinante, o su inverso, se anula. Sin embargo, es posible que una singularidad de la métrica sea debida simplemente a un fallo en el sistema de coordenadas; diremos que es una **singularidad de coordenadas**. Un ejemplo sencillo es el origen en un plano en el sistema de coordenadas polares. De hecho, la singularidad del radio de Schwarzschild es de este tipo. Sin embargo, si es imposible remover la singularidad, o sea, si persiste para todo sistema de coordenadas, entonces es una **singularidad de curvatura/física**. Por ejemplo, la singularidad $r = 0$ en la métrica de Schwarzschild. La manera de reconocer una singularidad física es encontrar un **invariante de curvatura** (una función escalar independiente de las coordenadas formada por contracción del tensor de Riemann) que diverja.

Si tratásemos de quitar las regiones espacio-temporales que contienen singularidades físicas nos topáramos con el problema de qué hacer con las curvas que llegan al borde de esa región. La imposibilidad de continuar todas las curvas para todos los valores de

su parámetro afín es quizás una buena definición característica de «singularidad espacio-temporal». Podemos ajustar la definición a las geodésicas, pues si hay una singularidad, siempre hay alguna que no puede ser continuada para todos los valores de su parámetro afín. Definimos una singularidad en términos de esta «incompletitud geodésica»:

Un espacio-tiempo es **no singular** si, y sólo si, todas las geodésicas pueden extenderse a todos los valores de su parámetro afín.

Los teoremas de singularidad, desarrollados por Penrose y Hawking, demuestran que la incompletitud geodésica es una característica habitual de un colapso gravitacional realista, y no una característica especial del colapso gravitacional simétrico.

Para las siguientes definiciones trabajamos ya en torno a la compactificación conforme de un espacio-tiempo. Sea $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ un espacio-tiempo asintóticamente plano con $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ su espacio-tiempo no físico asociado. Decimos que $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ es **fuertemente asintóticamente predecible** si, y sólo si, existe una región abierta $\tilde{V} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ con $\overline{\mathcal{M} \cap J^-(\mathcal{I}^+)} \subset \tilde{V}$ ¹ tal que $(\tilde{V}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ es globalmente hiperbólico.

Notemos que el requerimiento de que la región $(\tilde{V}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ del espacio-tiempo no físico sea globalmente hiperbólico implica que $(\mathcal{M} \cap \tilde{V}, g_{\mu\nu})$ es una región globalmente hiperbólica del espacio-tiempo físico².

Por ser globalmente hiperbólico, podemos foliar $\mathcal{M} \cap \tilde{V}$ con hipersuperficies de Cauchy Σ_t . Tenemos pues que, para todo $q \in \mathcal{M} \cap \tilde{V}$ y para todo Σ_t con $q \in J^+(\Sigma_t)$, toda curva causal inextensible dirigida al pasado desde q interseca Σ_t . Podemos interpretar esto como que no hay singularidades³ «visibles» para ningún observador en $\mathcal{M} \cap \tilde{V} \supset \overline{\mathcal{M} \cap J^-(\mathcal{I}^+)}$. Esto ocurre en cualquier espacio fuertemente asintóticamente predecible.

Un espacio-tiempo asintóticamente plano que no es fuertemente asintóticamente predecible posee una **singularidad desnuda**. Esta definición no excluye la posibilidad de «singularidades iniciales» visibles, como podría ser el Big Bang.

Hay evidencias fuertes de que las singularidades desnudas no son físicamente aceptables, la mayor de las cuales proviene del estudio de las perturbaciones lineales del espacio-tiempo de Schwarzschild. Y, por lo que parece, cualquier colapso gravitatorio de una estrella suficientemente masiva produce siempre un agujero negro y no una singularidad desnuda. Todos los intentos teóricos de buscar contraejemplos han fracasado, como si la naturaleza «conspirase» para evitar las singularidades desnudas. De aquí las conjeturas de censura cósmica (efectuamos a continuación una formulación física no precisa; para una formulación formal véase [18]).

- **Conjetura de censura cósmica débil:** En los espacios-tiempos físicamente razonables todo colapso gravitacional resulta siempre en un agujero negro en lugar de

¹La adherencia se toma en el espacio-tiempo no físico $\tilde{\mathcal{M}}$, luego en particular $i^0 \in \tilde{V}$.

²Para demostrarlo basta notar que la imagen de la variedad por el embebimiento es $\varphi(\mathcal{M}) = \tilde{M} - [J^+(i^0) \cup J^-(i^0)]$. Por lo tanto, una superficie de Cauchy de $(\tilde{V}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ que pasa por i^0 será una superficie de Cauchy de $(\mathcal{M} \cap \tilde{V}, \tilde{g}_{\mu\nu})$. Como tenemos que $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$, la estructura causal de ambas métricas es la misma, luego $(\mathcal{M} \cap \tilde{V}, g_{\mu\nu})$ es globalmente hiperbólico.

³Para un estudio extenso sobre el concepto de «singularidad», véase [18], cap. 9.

en una singularidad desnuda. Esto es, todas las singularidades están cubiertas por horizontes de sucesos estables.

- **Conjetura de censura cósmica fuerte:** Los espacios-tiempos físicamente razonables no pueden tener horizontes de Cauchy (deben desaparecer por ser inestables).

B.3. Agujeros negros: el horizonte de sucesos

Tratemos de dar una definición precisa de agujero negro. Básicamente queremos definirlo como una región del espacio-tiempo $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ donde la gravedad es tan fuerte que nada puede salir de ella. Podríamos pensarlo como que, para cualquier punto $p \in \mathcal{B}$, se tiene que $J^+(p) \subset \mathcal{B}$.

Pero esto no es correcto, pues entonces cualquier futuro causal de un conjunto, al contener al futuro causal de todos sus puntos, sería un agujero negro. Debemos refinar nuestra noción de «escapar» de la gravedad.

Para un espacio asintóticamente plano, la imposibilidad de escapar al infinito nulo futuro \mathcal{I} (o dicho de otro modo, $J^-(\mathcal{I})$, siendo no singular, no incluye el espacio-tiempo físico total) es una caracterización apropiada para un agujero negro.

Sea \mathcal{M} un espacio-tiempo fuertemente asintóticamente predecible. Definimos un **agujero negro** como la región \mathcal{B} de \mathcal{M} , si existe, que no está contenida en $J^-(\mathcal{I}^+)$, el pasado causal del infinito conforme futuro nulo. Esto es

$$\mathcal{B} = \mathcal{M} - J^-(\mathcal{I}^+). \quad (\text{B.3.1})$$

A la frontera de un agujero negro \mathcal{B} , $\partial\mathcal{B}$, la llamamos **horizonte de sucesos futuro** \mathcal{H}^+ (también denominado horizonte de eventos)

$$\mathcal{H}^+ = \partial\mathcal{B} = \mathcal{M} \cap \partial J^-(\mathcal{I}^+).^4 \quad (\text{B.3.2})$$

A continuación veamos algunas propiedades del horizonte de sucesos (véase la figura B.3.1):

1. i^0 y \mathcal{I}^- están contenidos en $J^-(\mathcal{I}^+)$, luego no son parte de \mathcal{H}^+ .
2. \mathcal{H}^+ es una hipersuperficie ácrona nula (cualesquiera dos puntos del horizonte de sucesos están unidos por geodésicas nulas). Irónicamente, los agujeros negro son «bolas de luz» fijadas por la gravedad.
3. Las geodésicas nulas generatrices de \mathcal{H}^+ pueden tener puntos finales pasados en el sentido de que la continuación de la geodésica hacia el pasado ya no está en \mathcal{H}^+ . Esto quiere decir que las geodésicas nulas pueden entrar en el horizonte de eventos \mathcal{H}^+ .

⁴Véase [5].

4. Si una geodésica nula generatriz de \mathcal{H}^+ tuviera un punto final futuro, la continuación de la misma más allá de cierto punto saldría de \mathcal{H}^+ . Esto no puede ocurrir. Esto quiere decir que las geodésicas nulas no pueden salir del horizonte de eventos \mathcal{H}^+ .

Teorema B.3.1. (Penrose) Las geodésicas nulas generatrices de \mathcal{H}^+ no tienen puntos finales futuros.⁵

5. Por último, el teorema de Hawking identifica el horizonte de eventos con un horizonte de Killing:

Teorema B.3.2. (Hawking) El horizonte de eventos en un espacio-tiempo asintóticamente plano estacionario es un horizonte de Killing (pero no necesariamente de $\partial/\partial t$).⁶

De manera análoga a lo anteriormente expuesto, pero tratando el pasado en lugar del futuro, podemos establecer los siguientes conceptos:

- Sea $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ un espacio-tiempo asintóticamente plano con $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ su espacio-tiempo no físico asociado. Decimos que $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ es **fuertemente asintóticamente retrocedible** si, y sólo si, existe una región abierta $\tilde{V} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ con $\overline{\mathcal{M} \cap J^+(\mathcal{I}^-)} \subset \tilde{V}$ tal que $(\tilde{V}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ es globalmente hiperbólico.
- Sea \mathcal{M} un espacio-tiempo fuertemente asintóticamente predecible. Definimos un **agujero blanco** como la región \mathcal{W} de \mathcal{M} , si existe, que no está contenida en $J^+(\mathcal{I}^-)$, el futuro causal del infinito conforme pasado nulo. Esto es

$$\mathcal{W} = \mathcal{M} - J^+(\mathcal{I}^-). \quad (\text{B.3.3})$$

- A la frontera de un agujero blanco \mathcal{W} , $\partial\mathcal{W}$, la llamamos **horizonte de sucesos pasado** \mathcal{H}^-

$$\mathcal{H}^- = \partial\mathcal{W} = \mathcal{M} \cap \partial J^+(\mathcal{I}^-). \quad (\text{B.3.4})$$

Para ampliar la información sobre singularidades y agujeros negros pueden verse los clásicos [18] y [13], o el reciente artículo de Landsmann dedicado a Roger Penrose [10], donde repasa los conceptos más importantes que ha introducido en RG, a saber, el infinito nulo, las superficies atrapadas, las singularidades espacio-temporales y la conjetura del censor cósmico. También, para unos apuntes de agujeros negros extremadamente detallados, [5].

B.4. Horizontes cosmológicos

La cosmología moderna trata de estudiar la dinámica del universo entero a través de las ecuaciones de Einstein. Tenemos dos principios básicos que nos permiten realizar modelos bastante realistas (bastante de acuerdo con las observaciones).

⁵Una demostración sencilla puede encontrarse en [4].

⁶Un espacio-tiempo es estacionario si es invariante bajo traslaciones temporales $t \rightarrow t + \Delta t$.

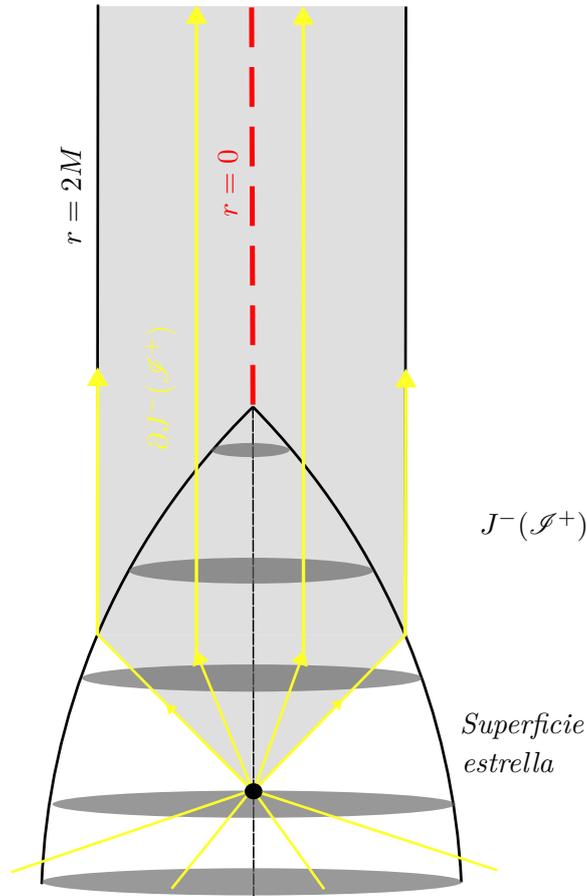


Figura B.3.1 Colapso gravitacional de una estrella más allá de su radio de Schwarzschild, formando el horizonte de sucesos futuro $\partial J^-(\mathcal{I}^+)$ de un agujero negro. Hemos marcado las generatrices del mismo en amarillo (son geodésicas nulas). En el punto negro, llamado «punto caústico» (de los cuales podría haber varios), las generatrices entran en $\partial J^-(\mathcal{I}^+)$ desde $J^-(\mathcal{I}^+)$; son la última bola de luz que emite la superficie de la estrella, que queda estática en el horizonte de eventos. Una vez una generatriz entra en $\partial J^-(\mathcal{I}^+)$, ya nunca sale. En rojo hemos marcado la singularidad del agujero negro.

- **Principio cosmológico:** En cualquier instante el universo es homogéneo e isótropo a muy grandes escalas.
- **Postulado de Weyl:** A escalas cosmológicas, la materia se comporta como un fluido perfecto, cuyas componentes se mueven a lo largo de geodésicas temporales, las cuales no intersecan salvo quizás en un punto singular en el pasado.

El principio cosmológico nos está diciendo que el universo es esféricamente simétrico. Además, un espacio homogéneo e isótropo es *máximamente simétrico*, es decir, tiene el número máximo de simetrías, en este caso, como $n = 4$, tendrá 10 isometrías o vectores de Killing. También deducimos que podemos describir la variedad-espacio temporal como una foliación de hipersuperficies espaciales de curvatura constante.

Por otra parte, el principio de Weyl, que pretender modelar el contenido de materia del universo, asegura que las velocidades propias de las galaxias individuales, los cúmulos, y demás, es pequeña respecto al movimiento cosmológico. Todo se deja arrastrar por la evolución del fluido perfecto. En este sentido, postula la existencia de un sistema de referencia «privilegiado»: el de los observadores que están en reposo con respecto al fluido cosmológico. Son los llamados **observadores comóviles**, que tendrán un tiempo propio asociado, el **tiempo cosmológico**, en términos del cual se puede parametrizar el universo.

La métrica para un universo homogéneo e isótropo se puede escribir de la siguiente forma (métrica de Friedmann-Robertson-Walker)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\tilde{g}_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad (\text{B.4.1})$$

donde $\tilde{g}_{ij}(x)$ es la métrica de las secciones espaciales de curvatura constante

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\varphi^2), \quad (\text{B.4.2})$$

y $a(t)$ es el factor de escala, que representa, en cierto modo, el tamaño de las secciones espaciales en cierto instante de tiempo.

- **Distancia comóvil:** Mide la separación entre dos puntos en la métrica tridimensional \tilde{g}_{ij} , esto es, entre las coordenadas x^i de las secciones espaciales. Por definición no toma en cuenta el factor de escala, luego no cambia con la evolución del universo. No tiene por tanto un significado físico real.

$$d = \int d\tilde{s} = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr' = \int_0^\chi d\chi' = \chi. \quad (\text{B.4.3})$$

En la segunda igualdad hemos tomado el desplazamiento como puramente radial, $d\Omega_2^2 = 0$, para lo cual basta considerar un punto cualquiera como el origen. Luego hemos hecho un cambio de coordenadas $r \rightarrow \chi$ dependiendo de la curvatura. Si $k = 1$ (curvatura constante positiva), hacemos $r = \text{sen}(\chi)$; si $k = -1$ (curvatura constante negativa), hacemos $r = \text{senh}(\chi)$; y si $k = 0$ tomamos simplemente $r = \chi$.

- **Distancia geométrica o instantánea:** Distancia física a un tiempo t constante. Para ello utilizamos la métrica de Friedmann-Robertson-Walker B.4.1, teniendo en cuenta el factor de escala. Así, al expandirse o contraerse el universo, las distancias geométricas entre disintos eventos varían.

$$D(t) = \int ds = \int_0^r \frac{a(t)}{\sqrt{1 - kr^2}} dr' = a(t) \int_0^\chi d\chi' = a(t)\chi. \quad (\text{B.4.4})$$

La distancia instantánea nos permite calcular la velocidad de receso de las galaxias. Derivando en B.4.4 respecto a t ,

$$v_{rec} = \dot{D}(t) = \dot{a}(t)\chi = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}D(t). \quad (\text{B.4.5})$$

La velocidad de receso es proporcional a $D(t)$, la distancia geométrica, con constante de proporcionalidad

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (\text{B.4.6})$$

denominada **parámetro de Hubble**, que mide la velocidad de expansión o contracción del universo en comparación con su escala. Evaluada en la actualidad, $t = t_0$, H_0 se denomina **constante de Hubble**, y la ecuación B.4.5, la **Ley de Hubble**

$$v_{rec} = \dot{D}(t_0) = \dot{a}(t_0)\chi = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}D(t_0) = H_0D, \quad (\text{B.4.7})$$

que sabemos que se da efectivamente en nuestro universo en expansión.

El parámetro de Hubble tiene dimensión \mathbf{L}^{-1} , luego marca una escala de distancia en el modelo cosmológico. Tiene sentido definir el **radio de Hubble** como la distancia (geométrica) a la cual la velocidad de receso es exactamente la velocidad de la luz⁷. En las coordenadas naturales en las que trabajamos, $v_{rec} = 1$ y el radio de Hubble será

$$R_H(t) = H^{-1}(t). \quad (\text{B.4.8})$$

Sin embargo la distancia geométrica no es una magnitud muy útil, pues no podemos medir distancias en este instante, sino que recibimos la luz que emitieron en el pasado. Para tratar esta cuestión introducimos la **distancia de cono de luz** l , que es la distancia espacial que ha recorrido (o el tiempo que ha tardado en llegar) la luz entre su emisión y su detección. Tomando de nuevo $d\Omega_2^2 = 0$

$$l = \int_0^\chi d\chi' = \int_{t_e}^{t_d} \frac{1}{a(t)} dt, \quad (\text{B.4.9})$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que para la luz $ds = 0$ y $d\tilde{s} = d\chi$ (mismos cambios de coordenadas que para B.4.3), y, de la ecuación B.4.1, tenemos $0 = dt^2 - a^2(t)d\chi^2$.

- Una solución cosmológica tiene un **horizonte de partículas** si la integral B.4.9 evaluada entre el origen del universo, $t = 0$, o en $t = -\infty$ si no tiene tal origen, y la actualidad t , converge a un valor finito,

$$l_{HP}(t) = \int_0^t \frac{1}{a(t')} dt' < \infty. \quad (\text{B.4.10})$$

Esto significa, por definición, que la luz de las galaxias a una distancia mayor a $l_{HP}(t)$ aún no ha llegado a nosotros, y por lo tanto estamos causalmente desconectados de ellas. En otras palabras, sólo la luz de las galaxias que se encuentran a una distancia menor a $l_{HP}(t)$ de nosotros ha tenido tiempo de llegarnos. La frontera del universo observable forma el horizonte de partículas, que con el tiempo se expande. Si la integral diverge, entonces no habrá horizonte de partículas, y todas las líneas de universo intersecan nuestro cono de luz pasado (véase figura B.4.1).

⁷No es la velocidad cinética, sino geométrica, que bien puede alcanzar la velocidad de la luz.

- Una solución cosmológica tiene un *horizonte cósmico de eventos* si la integral B.4.9 evaluada entre el instante actual t y $t = +\infty$, o $t = t_f$ si el universo recae en un tiempo finito, converge a un valor finito,

$$l_{HE}(t) = \int_t^\infty \frac{1}{a(t')} dt' < \infty. \quad (\text{B.4.11})$$

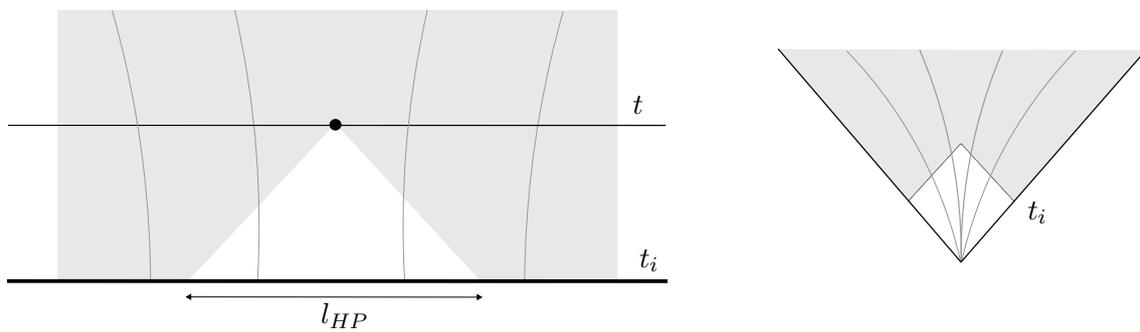


Figura B.4.1 Izquierda: si la expansión inicial del universo es demasiado rápida, el cono de luz pasado (en blanco) no intersecta las líneas de universo de todas las galaxias. Estamos causalmente desconectados de una parte del universo (zona gris). El tamaño del horizonte de partículas, que crece con el tiempo, es la anchura del cono de luz pasado en cierto instante t_i . A la derecha, un universo donde no hay horizonte de partículas, pues cualquier cono de luz pasado intersecta todas las líneas de universo (i^- es puntual). El universo entero es observable.

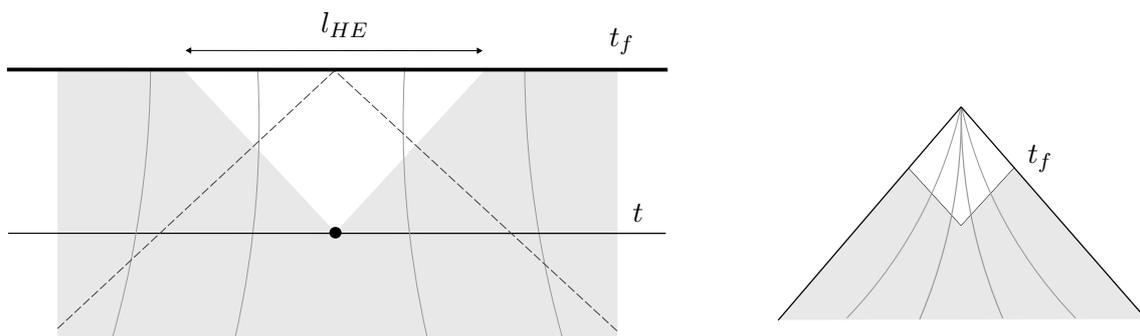


Figura B.4.2 A la izquierda, un espacio que recae con un horizonte cosmológico. El observador en el punto negro nunca podrá influenciar causalmente a ciertas galaxias (a cualquier evento en la zona oscura), pues nunca llega a cortar su línea de universo. El tamaño del horizonte cosmológico es la anchura del cono de luz futuro, que decrece con el tiempo a medida que se acerca el instante final $t = t_f$. A la derecha un espacio donde no hay horizonte de eventos cosmológico, pues el cono de luz de cualquier observador cruza la línea de universo de cualquier galaxia.

Esto quiere decir que las influencias causales de nuestro presente no pueden llegar arbitrariamente lejos; nuestro cono de luz no interseca a todas las líneas de universo. Por contra, si la integral diverge, entonces no habrá horizonte, y cualquier evento «aquí y ahora» tendrá influencia causal, tarde o temprano, en cualquier línea de universo. Se puede entender el horizonte de partículas (de eventos, cosmológico) de una curva causal inextensible como el borde de su pasado (futuro) cronológico.

Por último, recordemos que las ecuaciones que rigen la velocidad de expansión del universo $\dot{a}(t)$ en relación con la densidad de energía y la curvatura de las secciones, así como la ecuación de movimiento de $a(t)$, son las **ecuaciones de Friedmann**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\kappa\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (\text{B.4.12})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{1}{2}\kappa P - \frac{k}{2a^2}, \quad (\text{B.4.13})$$

donde $\kappa = 8\pi G_N$, y P y ρ son, respectivamente, la presión y la densidad total (de todos los tipos de energía y materia presentes en el universo) del fluido perfecto cósmico. A veces conviene escribir la métrica de FRW en las **coordenadas conformes**, en las cuales el factor de escala aparece en la métrica como factor conforme. Para conseguir esto debemos reparametrizar la coordenada temporal de la siguiente manera

$$d\tau = a^{-1}(t)dt \iff dt = a(\tau)d\tau, \quad (\text{B.4.14})$$

, donde a la coordenada τ la llamamos **tiempo conforme**. De esta manera podemos escribir la métrica de FRW, efectivamente, como una métrica conforme con factor conforme el factor de escala, que ahora es una función del tiempo conforme $a(\tau) = a(\tau(t))$:

$$ds^2 = a^2(\tau)[d\tau^2 - \tilde{g}_{ij}dx^i dx^j]. \quad (\text{B.4.15})$$

El tipo de energía o materia viene especificado por la presión P_α y la densidad ρ_α , y se expresa en la **ecuación de estado**

$$P_\alpha = w_{(\alpha)}\rho_\alpha, \quad (\text{B.4.16})$$

donde $w_{(\alpha)}$ es el **parámetro de estado**. El principio cosmológico, o, en este caso, la homogeneidad y la isotropía de la métrica FRW (ecuación B.4.1), obliga a que $w_{(\alpha)}$ sea independiente de las coordenadas. También lo tomamos independiente respecto a t , pues es más útil describir distintos fluidos perfectos en distintas épocas, dominados por un tipo de energía u otra, que tomar un parámetro variable en el tiempo. Así, tendremos que cada fluido perfecto está caracterizado por un parámetro de estado constante.

- $w = 0$ corresponde a un fluido perfecto únicamente con densidad de materia, sin presión. Describe la materia fría, sin interacciones o polvo.
- $w = 1/3$ corresponde a un fluido perfecto dominado por radiación, materia relativista y materia muy caliente.

- $w = -1$ corresponde a una constante cosmológica. Recordemos que la expresión más general del tensor de Einstein es

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} + \kappa\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.4.17})$$

La constante cosmológica representa, o bien una fuerza universal repulsiva si $\Lambda > 0$, o bien una fuerza universal atractiva si $\Lambda < 0$. Se puede interpretar como la energía del vacío. Sabemos que el tensor de Einstein representa la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein. Pues bien, en realidad se puede considerar el sumando relativo a la constante cosmológica como parte del tensor energía momento, $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \Lambda g_{\mu\nu}$. Las observaciones de nuestro universo parecen indicar la presencia de una constante cosmológica ligeramente positiva.

Para la solución de FRW tenemos

$$\mathcal{T}_{tt} = \rho, \quad \mathcal{T}_{ij} = a^2 \tilde{g}_{ij} P, \quad (\text{B.4.18})$$

, donde hemos tenido en cuenta el principio de Weyl (tratamos el universo como un fluido perfecto) y \tilde{g}_{ij} representa la métrica de las secciones espaciales escrita en B.4.1. Sustituyendo esto y los símbolos de Christoffel de la métrica en la ecuación de conservación de la energía (más precisamente, en la ecuación de la componente temporal)

$$\nabla_{\mu} \mathcal{T}^{\mu\nu}, \quad (\text{B.4.19})$$

llegamos a la ecuación

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (\text{B.4.20})$$

Si sustituimos en ella la ecuación de estado B.4.16, llegamos a la siguiente ecuación diferencial para la densidad $\rho_{(\alpha)}$ en términos del factor de escala

$$\rho_{(\alpha)} \dot{\rho}_{(\alpha)} + 3(w_{(\alpha)} + 1)\frac{\dot{a}}{a}\rho_{(\alpha)} = 0. \quad (\text{B.4.21})$$

Resolviendo, tenemos que la densidad varía con el tiempo de esta manera

$$\rho_{(\alpha)}(t) = \rho_0 \left[\frac{a(t)}{a_0} \right]^{-3(w_{(\alpha)}+1)}, \quad (\text{B.4.22})$$

donde ρ_0 y a_0 representan la densidad y el factor de escala en un momento $t = t_0$, por ejemplo la actualidad.

Bibliografía

- [1] S. M. CARROLL, *Spacetime and Geometry. An introduction to General Relativity*, University of Chicago, 2004.
- [2] S. CHAKRABORTY & K. LOCHAN, «Black Holes: Eliminating Information or Illuminating New Physics?», *Universe*, 2021, DOI: 10.3390/universe3030055.
- [3] J. FRAUENDIENER, «Conformal Infinity», *Living Reviews in Relativity*, 2000.
- [4] L. J. GARAY, «Notas de Relatividad general», 2022: <https://sites.google.com/site/luisjgaray/lecture-notes>.
- [5] E. GOURGOULHON, «Geometry and physics of black holes. Lecture Notes», 2023: <https://relativite.obspm.fr/blackholes/>.
- [6] S. W. HAWKING & G. F. R. ELLIS, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.
- [7] N. HICKS, *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand, Princeton, 1965.
- [8] B. JANSSEN, *Gravitación y Geometría*, Editorial Universidad de Granada, 2022.
- [9] C. LAN, H. YANG et al., «Regular black holes: A short topic review», arXiv 2023: <https://arxiv.org/abs/2303.11696>.
- [10] K. LANDSMAN, «Singularities, Black Holes, and Cosmic Censorship: A Tribute to Roger Penrose», *Foundations of Physics*, 51:42, 2021.
- [11] E. MINGUZZI, «Lorentzian causality theory», *Living Reviews in Relativity*, 22:3, 2019.
- [12] C. W. MISNER, K. S. THORNE & J. A. WHEELER, *Gravitation*, Princeton University Press, 1973.
- [13] M. S. MORRIS & K. S. THORNE, «Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity», *American Journal of Physics*, 56, 395-412, 1987: <https://www.pas.rochester.edu/~tim/introframe/AmJPhysBlackHoles.pdf>.
- [14] R. PENROSE, «Singularities and Time Asymmetry», en *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, ed. S. W. Hawking y W. Israel, Cambridge University Press, 1979.

- [15] A. ROUSSEL, [ScienceClic]. Le Rayonnement de Hawking [Archivo de Vídeo]. YouTube, 2021: <https://www.youtube.com/watch?v=QpppDWL3z-w>.
- [16] A. SIMPSON & M. VISSER, «Black-bounce to traversable wormhole», arXiv 2019: <https://arxiv.org/abs/1812.07114>.
- [17] P. K. TOWNSEND, «Black Holes», 1997, arXiv: [arXiv:gr-qc/9707012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9707012).
- [18] R. M. WALD, *General Relativity*, The University of Chicago, 1984.