Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Valladolid

Crecimiento Económico, Comercio Norte-Sur y Conservación de la Biodiversidad

Directora:

Dra. Guiomar Martín Herrán
(Universidad de Valladolid)

Doctorando:

Francisco José Cabo García
(Universidad de Valladolid)

Valladolid, Marzo 2000

Agradecimientos

Agradezco especialmente el constante apoyo prestado por la profesora Dña. Guiomar Martín Herrán, sin cuya "cooperación" no hubiese sido posible la realización de este trabajo.

Asimismo, deseo hacer constar mi agradecimiento a todos aquellos que con sus ideas, su ánimo y, sobre todo, su paciencia, me han ayudado en esta tarea: Elena Escudero Puebla, Ana García Gonzalez, Angel Luis Martín Román, Francisco José Peláez Fermoso, Juan Pablo Rincón Zapatero, Graciela Chichilnisky, Aart de Zeeuw y Christian Zimmermann.

A mi padre, a Ana y a Guiomar

Capítulo 1
Introducción

En este primer capítulo se ofrece una breve revisión de la literatura relacionada con el trabajo desarrollado a lo largo de los capítulos subsiguientes. Dicho trabajo mezcla cuatro grandes bloques teóricos: comercio internacional, crecimiento económico, juegos diferenciales y biodiversidad. Existe poca bibliografía que relacione el último bloque con cualquiera de las anteriores. No obstante, sí se puede encontrar abundante literatura que conecte cualquiera de los tres primeros temas con la economía medioambiental en sentido amplio. Por esta razón, se distinguen tres secciones dentro de esta introducción. En primer lugar se presenta un "survey" que conecta los problemas de comercio internacional y del medio ambiente, en particular aquéllos que hacen referencia a las relaciones de comercio Norte-Sur. A continuación se revisa brevemente a la literatura existente sobre crecimiento económico y, dentro de ésta, la que trata temas medioambientales, como la polución o la extracción de recursos naturales. La última sección está dedicada a aquellos trabajos que utilizan la teoría de juegos diferenciales, ya sea para tratar modelos de comercio entre países, o alternativamente, para analizar problemas medioambientales. En cada una de estas secciones se pone de manifiesto la relación existente entre la bibliografía revisada y los modelos presentados en los restantes capítulos.

1.1 Comercio internacional y medio ambiente

En este apartado se revisa parte de la bibliografía que relaciona comercio internacional y medio ambiente. En primer lugar, se presenta la literatura sobre comercio internacional y recursos naturales, relacionándose, posteriormente, los artículos sobre comercio y problemas medioambientales globales. En ambos tipos de trabajos dos, son los temas más recurrentes: el efecto de la liberalización comercial, tratado tanto desde un punto de vista de equilibrio parcial como de equilibrio general, y los problemas medioambientales transfronterizos. Ulteriormente, se comentan algunas referencias sobre comportamiento estratégico de los países, negociación y formación de coaliciones. Finalmente, se establece la conexión entre la bibliografía comentada y el trabajo desarrollado en los capítulos subsiguientes.

Antes de repasar parte de la bibliografía existente sobre comercio internacional y medio ambiente, es importante disponer de una definición exacta del concepto de externalidad. Siguiendo a Verhoef (1999), "una externalidad se produce cuando la función de utilidad de un agente (el receptor) contiene una variable que depende del comportamiento de otro agente (el ofertante) que no tiene en cuenta el efecto de este comportamiento en su proceso de toma de decisiones". Estas externalidades constituyen una de las principales formas de "fallo de mercado", que hacen que éste no pueda alcanzar un óptimo de Pareto. Asimismo, en el estudio de problemas medioambientales plurinacionales es interesante resaltar que los bienes medioambientales son, en gran medida, bienes públicos (o, véase Proost (1999), males públicos). Éstos se caracterizan por la propiedad de no rivalidad o no agotamiento, así como la de no exclusión de beneficiarios, lo que da lugar a la aparición de "free-riders".

En primer lugar, siguiendo el magnífico "survey" de Long (1999), se presentan algunas de las contribuciones más importantes a la literatura de comercio internacional y recursos naturales[1]. La teoría neoclásica de equilibrio general aplicada a la economía internacional se plasma en el modelo de Heckscher-Ohlin (para una revisión del mismo, consúltese Bhagwati & Srinivasan (1983), capítulos 5-7). Kemp & Long (1984) generalizan este modelo dentro de un marco dinámico, considerando recusos naturales tanto exhaustibles como no-exhaustibles. El estudio se lleva a cabo asumiendo, en primer lugar, competencia perfecta y, posteriormente, admitiendo la posibilidad de creación de "cartels". Aunque incorpora la dinámica de los recursos, la acumulación de capital no se tiene en cuenta y sólo será tratada a partir de Chiarella (1980). En este artículo se especifica un juego diferencial entre países con capital y aquéllos que poseen recursos naturales, y se asume que el progreso tecnológico crece a una tasa exógena. Entre los artículos que relacionan comercio y recursos renovables cabe citar a Chichilnisky (1994a), que muestra, desde un punto de vista estático, cómo la mala definición de los derechos de propiedad en el Sur intensifica el comercio, en el que el Norte consume bienes intensivos en recursos producidos por el Sur a precios bajos. El imponer un impuesto sobre la utilización del recurso en el Sur lleva a una sobreexplotación aún mayor. La eficiencia ha de venir acompañada de la correcta definición de los derechos de propiedad en el Sur. Chichilnisky (1994b) generaliza este modelo incluyendo la dinámica de los recursos renovables.

También desde un punto de vista estático, Brander & Taylor (1995) desarrollan un modelo de equilibrio general con dos bienes en el que un país pequeño posee un recurso renovable de acceso libre. Estos autores estudian y comparan los estados estacionarios bajo los supuestos de libre comercio y autarquía. En la mayor parte de los casos analizados, la utilidad alcanzada por dicho país en el estado estacionario es menor bajo el supuesto de libre comercio. Por otra parte, Copeland & Taylor (1994, 1995), también desde un punto de vista estático, estudian la relación entre el comercio internacional y la polución, incorporando esta última dentro de la función de bienestar como un mal público. Únicamente se consideran dos países (o dos coaliciones de países) y se prueba que la liberalización del comercio llevaría al país con mayor nivel de renta a elegir una mayor protección medioambiental y a especializarse en bienes poco contaminantes, al contrario que el país con menor nivel de renta. En conjunto, la liberalización del comercio incrementará los niveles globales de polución. Cuando se permiten coaliciones entre países, aquella coalición con mayores niveles de renta, el Norte, tiene incentivo para transferir parte de su renta al Sur con objeto de reducir la polución, pudiendo aumentar así su bienestar.

En la literatura de recursos naturales y comercio internacional se plantean dos interrogantes. En primer lugar, si es posible el mantenimiento de un nivel de consumo constante indefinidamente en el caso de que el recurso sea un recurso esencial. Cuando se asumen funciones de producción Cobb-Douglas en las que el exponente del capital sea superior al del recurso y, que no se produce depreciación del capital (véase Solow (1974) y Dasgupta & Heal (1979)), entonces la respuesta a esta pregunta es afirmativa. Según la regla de Hartwick (Hartwick (1977)), para asegurar este consumo constante, las rentas obtenidas por el recurso deben ser invertidas en su totalidad. Dixit et al. (1980) establecen una formulación más general de la regla de Hartwick, según la cual, manteniendo constante a lo largo del tiempo el valor descontado de las inversiones netas, bajo competencia per-

[1] Para una revisión de la teoría económica sobre recursos renovables, véanse, por ejemplo, Clark (1990) y Dasgupta & Heal (1979).

fecta, se obtiene una trayectoria maximin de utilidad constante. Finalmente, cabe citar a Sefton & Weale (1996), quienes presentan, para una economía abierta e intensiva en recursos naturales, una definición de renta nacional que tiene en cuenta la disminución de estos recursos. Esta medida de la renta depende de los consumos futuros y de los tantos de interés. Según esta medida, en el país exportador de recursos hay que imputar la renta que se deriva del hecho esperado de que el precio del recurso aumente al tanto real de interés. Esta renta se puede entender como una transferencia de los países importadores de recursos a los exportadores.

Siguendo a Long (1999), la segunda pregunta que se plantea es si es posible un crecimiento continuado del consumo per-cápita cuando los recursos naturales son esenciales en la producción. La respuesta a esta pregunta en el marco de comercio entre países con alta y baja dotación en recursos naturales motiva gran parte del presente trabajo.

Un segundo bloque en la literatura sobre medio ambiente y su relación con el comercio internacional, es el que se refiere a los problemas medioambientales globales: cambio climático, reducción de la capa de ozono, pérdida de biodiversidad, lluvia ácida y explotación de los océanos, entre otros. Siguiendo a Pearce (1999), dos son las características básicas de los bienes medioambientales globales. En primer lugar, la carencia de derechos de propiedad para estos bienes. Llegado a este punto, conviene distinguir entre bienes de acceso libre y de propiedad común. En los primeros no existe propietario, mientras en los segundos la propiedad es de toda la comunidad. La famosa "tragedia de los comunes" (Hardin (1968)), debe entenderse más bien como la tragedia de los bienes de acceso libre. La segunda característica de estos bienes es su carácter de bien público, que da lugar a la aparición de "free-riders" y a la necesidad de diseñar acuerdos internacionales vinculantes. En este contexto, según Verbruggen (1999), un tema fundamental es el reparto tanto inter como intrageneracional de los recursos medioambientales globales entre el Norte y el Sur. La cuestión básica estriba en el nivel al que deben homogeneizarse los estándares medioambientales. Mientras que el Norte demanda esta homogeneización para un comercio justo, el Sur apela al derecho soberano de los países para explotar sus recursos medioambientales sin que se le impongan las regulaciones vigentes en el Norte. Dada esta controversia entre regiones, resulta imprescindible llegar a acuerdos globales sobre el medio ambiente y comercio internacional. Algunos pasos ya se han dado, como el protocolo de Montreal sobre la emisión de CFCs, la regulación del comercio de especies en peligro de extinción mediante la convención CITES, o la moratoria sobre la explotación de la Antártida. En esta negociación, mientras que el Norte pondera en mayor medida la sostenibilidad, el Sur está más preocupado por su propio desarrollo económico. La coordinación de políticas internacionales necesita que las transferencias del Norte al Sur sean más equitativas y "enforceable". En particular, Barret (1994a) analiza la habilidad de los países desarrollados para mantener un acuerdo de cooperación, compensando a los países en vías de desarrollo por el coste incremental que supone la conservación de la biodiversidad. En el mismo sentido, Stähler (1996) muestra que, en el caso de que el Norte esté dispuesto a pagar un precio por el mantenimiento del recurso inversamente proporcional a su stock, la conducta óptima del Sur, que es quien produce el recurso, puede implicar que el nivel de equilibrio de éste sea menor que si el Norte no estuviese dispuesto a realizar estos pagos.

En el contexto del comercio internacional, tanto cuando se estudian recursos naturales como cuando se aborda el tema de bienes medioambientales globales, dos son las cuestiones más recurrentes en la literatura: el efecto del libre comercio sobre el medio ambiente y los problemas medioambientales transfronterizos (por ejemplo, problemas de polución). Especialmente entre los modelos que tratan el primero de los problemas, es interesante distinguir entre los de equilibrio parcial y los de equilibrio general.

Los modelos de equilibrio parcial, en el contexto de comercio y medio ambiente, se utilizan, en particular, para estudiar las consecuencias de determinadas políticas sobre el precio relativo y sobre el medio ambiente. En concreto, pretenden analizar el efecto en el tránsito de la autarquía al libre comercio. Krutilla (1991 y 1999) estudia el efecto de la liberalización comercial sobre una pequeña economía, tanto cuando ésta decide eliminar barreras al comercio, como cuando son los países poderosos los que liberalizan el comercio internacional. En ambos casos, se estudia el daño medioambiental de esta liberalización, así como los efectos de la misma sobre su precio relativo.

Siguiendo a Steininger (1999), los modelos de equilibrio general estudian las trayectorias de comercio internacional teniendo en cuenta las distintas dotaciones y uso que cada país hace del medio ambiente y de los recursos naturales. Asimismo, se estudia tanto el efecto de políticas medioambientales sobre el comercio como la relación entre políticas comerciales y el medio ambiente. Como ya se ha comentado, un modelo básico en economía internacional cuando se consideran problemas medioambientales es el de Heckscher-Ohlin (H-O), que se centra en las diferentes dotaciones de factores entre países. Como conclusiones de este modelo en su formulación habitual, cabe decir que, en primer lugar, cada país se especializa en la producción (y exportación) del bien intensivo en el factor abundante en dicho país. Una política medioambiental en ese país tendería a cambiar la producción hacia el bien "limpio". En segundo lugar, bajo libre comercio, en este modelo se produce la igualdad de los precios de los factores y, por consiguiente, también se igualan los precios sombra de los bienes medioambientales (tasas medioambientales). El modelo H-O se basa en supuestos muy restrictivos y posibles desviaciones implican que no se cumpla la igualdad de los precios de los factores. Si existen rendimientos crecientes a escala en lugar de constantes, las diferencias de tamaño entre países son decisivas (Markusen y Melvin (1981)). Si se asume competencia imperfecta, la variable decisiva es el poder de negociación de cada país. Si las funciones de producción no son indénticas entre países, las diferencias en el nivel tecnológico de los países o las industrias son determinantes. En tercer lugar, bajo el caso más restrictivo del modelo H-O, si los derechos de propiedad de los bienes medioambientales se definen adecuadamente, la protección del medio ambiente beneficia a los poseedores de dichos derechos. Finalmente, es importante destacar que la multitud de interdependencias en un modelo de equilibrio general establece un alto grado de complejidad que, a menudo, impide su resolucion analítica, haciéndose necesario un estudio numérico, lo que da lugar a los modelos de equilibrio general computable (para este tipo de modelos, véase, por ejemplo, el "survey" de Conrad (1999)).

Los problemas medioambientales transfronterizos aparecen cuando el medio ambiente en un país se ve "directamente" afectado por las acciones tomadas en otro u otros países. Este tipo de problemas está estrechamente vinculado con problemas medioambientales globales, como la lluvia ácida, la reducción de la capa de ozono o el cambio climático. Aun cuando en estos casos los problemas son causados por emisiones físicas, también es posible hablar de problemas transfronterizos pero con un carácter no-físico, siendo el ejemplo más obvio el de la biodiversidad. Si a un país le preocupa la pérdida de biodiversidad, el hecho de que cualquier otro país contribuya a esta pérdida tiene un impacto medioambiental negativo en el primero (véase Barret (1992)). Hoel (1999) presenta un modelo transfronterizo para n países, donde la utilidad de cada uno depende positivamente de sus emisiones y negativamente de las emisiones del resto de países. Tiene en cuenta, como en gran parte de los problemas medioambientales, que la preocupación medioambiental se centra más en el stock que en el flujo de contaminantes. Además, se admiten transferencias de capital entre países. En el supuesto de que no exista cooperación ni transferencias de capital entre países, en el equilibrio de Nash para el caso de dos países, si el país 1 aumenta sus emisiones ello incrementa el coste marginal medioambiental en el país 2, lo que lleva a este último a reducir sus emisiones. Cuando no existe cooperación entre países, el resultado generalmente no es óptimo de Pareto, excepto en el caso de un problema medioambiental transfronterizo unilateral (por ejemplo, los vertidos de un país a un río que afectan a otro corriente abajo). Por el contrario, si se permiten pagos entre países, siempre hay resultados que son óptimos de Pareto que son preferidos al equilibrio de Nash y que pueden alcanzarse eligiendo estos pagos adecuadamente. El llegar a acuerdos internacionales es tan importante como difícil de conseguir, debido al problema de "free-riders".

La necesidad de llegar a acuerdos entre países ya se ha puesto de manifiesto tanto al hacer referencia a los problemas medioambientales globales como a los transfronterizos. Esta necesidad lleva a un proceso de negociación entre países, lo que hace surgir la posibilidad de que éstos puedan actuar de forma estratégica en sus relaciones internacionales. En este contexto, especialmente por el lado de los investigadores en medio ambiente, se temía que la liberalización llevase a los gobiernos a relajar sus políticas medioambientales como una forma de competir en el mercado mundial, lo que se conoce como "dumping" ecológico. Rauscher (1994) presenta varias definiciones de este concepto y analiza bajo qué circunstancias es óptimo emplear este tipo de medidas. Por contra, también en la literatura sobre política medioambiental estratégica, la hipótesis de Porter (Porter (1991)) establece que los gobiernos pueden fijar políticas medioambientales muy duras para obligar a las empresas a innovar en tecnologías ecológicas que les diesen una ventaja competitiva en el largo plazo. Barret (1994b) muestra que cuando la industria exportadora está formada por una única empresa, la industria exterior es de competencia imperfecta y la competencia internacional es Cournot (competencia en cantidad producida), entonces el gobierno tiene incentivo para imponer estándares medioambientales débiles. Sin embargo, esta conclusión puede variar si se asume más de una empresa en la industria exportadora o si los mercados internacionales compiten en precio en lugar de en cantidades. Ulph (1999) recoge las condiciones bajo las que el gobierno estará interesado en fijar políticas medioambientales más o menos fuertes que las de "first best" (resultado de la maximización del bienestar), distinguiendo según el grado de competitividad de la industria exportadora y relajando otros supuestos iniciales del modelo (como el número de empresas, homogeneidad de productos,...).

Asimismo, en el contexto de estos acuerdos internacionales, es preciso explicar hasta qué punto estos acuerdos son "self-enforcing" y cuál es su grado de estabilidad, conceptos estrechamente vinculados a la posibilidad de "free-riders". Según Carraro (1999), una coalición es estable cuando, para cada miembro, la ganancia de pertenecer a la misma es mayor que la ganancia si la coalición existiese pero se comprometiesen todos los miembros menos él. Aunque no exenta de críticas, esta es la definición habitualmente utilizada en la literatura sobre cooperación y conflicto medioambiental. Según esta literatura, la presencia de asimetrías entre países y el incentivo para comportarse como un "free-rider" hace muy improbable la existencia de acuerdos "self-enforcing" y, cuando éstos se producen son firmados por un número reducido de países, véase, por ejemplo, Barret (1994c). Este autor estudia las propiedades de acuerdos medioambientales internacionales utilizando teoría de juegos asumiendo, por un lado, un modelo en el que tanto los términos del acuerdo como el número de firmantes se determinan endógenamente y, por otro lado, un modelo de juegos repetidos. Carraro (1999) y Carraro & Siniscalco (1993) muestran qué mecanismos de compensación entre los firmantes pueden proporcionar la base para que el acuerdo sea "self-enforcing", pero estas transferencias sólo cumplen su cometido si están asociadas a cierto grado de compromiso. En la literatura sobre negociación aparece la idea de unir las negociaciones medioambientales con otro objetivo, como puede ser la liberalización comercial o la cooperación en I+D. De esta forma, la firma de un acuerdo puede hacer ganar a algunos países en el primer objetivo y a otros en el segundo. Esta unión de objetivos no garantiza la aparición de una gran coalición internacional debido al conflicto entre optimalidad y estabilidad.

La literatura sobre comercio internacional y medio ambiente presenta en numerosos modelos la posibilidad, ya comentada, de transferencias de capital entre países. Buchholz & Konrad (1995) y Ihori (1996) estudian este proceso de transferencias a través de la teoría de juegos. El primero de ellos asume un juego no-cooperativo en dos etapas entre dos países con distintas tecnologías, que comparten un bien medioambiental, que es un bien público. El resultado principal es que, aquel país que presenta una menor productividad en la elaboración de dicho bien, tiene incentivo para transferir capital al otro. La conclusión de Ihori es similar pero generalizada a más de dos países.

Interesantes exposiciones del problema de la pérdida de biodiversidad, considerada como un bien medioambiental global que requiere una intervención y regulación internacionales, son los trabajos de Swanson (1994, 1997). Este autor trata el concepto de derechos de desarrollo transferibles, anteriormente presentado por Panayotou (1994). Este último pone de manifiesto la importancia de la dimensión Norte-Sur con referencia al problema de conservación de la biodiversidad, que requiere la conservación del hábitat de las especies, localizado, en su mayor parte, en los países en vías de desarrollo. Se trata, por consiguiente, de un problema de utilización de la tierra y, siendo éste el principal factor de producción en el Sur, de un problema de posibilidades de desarrollo. El conflicto aparece porque la conservación produce beneficios globales y de largo plazo, mientras que el coste de la pérdida de oportunidades de desarrollo lo soportan únicamente aquéllos países en vías de desarrollo. Para solucionar este conflicto, Panayotou sugiere el uso de derechos de desarrollo transferibles, cuya utilización requiere la definición de áreas de conservación y la creación de un mercado internacional. Compañías farmacéuticas, universidades, gobiernos de países desarrollados, etc., comprarían estos derechos a gobiernos de países donde se localicen estas áreas. Estos derechos obligan a los poseedores de la tierra a no explotarla en actividades "tradicionales" y, en contraposición, los compradores de los derechos tienen derecho a las ganancias de capital asociadas a la biodiversidad, como por ejemplo, el descubrimiento de nuevas especies o nuevos usos de especies ya conocidas. Sin embargo, es improbable que exista demanda suficiente para que estos derechos puedan preservar todos los hábitats. Se hace necesario que los gobiernos de los países desarrollados intervengan en este mercado, proporcionando créditos para la compra de estos derechos, o bien, imponiendo "impuestos de conservación" que puedan ser pagados con la compra de estos derechos.

También Swanson (1996), relaciona las economías del Norte con la biodiversidad existente en el Sur. Este autor asigna un papel importante a la biodiversidad como un input en los proceso de I+D en las economías desarrolladas y, en particular, en las industrias agrícola y farmacéutica. Estas idustrias se entienden como sistemas dinámicos de defensa contra un mundo biológico hostil (plagas o gérmenes). El principal input para estas industrias no es la biodiversidad en sí, sino la información que se deriva de cómo han evolucionado las especies dentro de un determinado ecosistema. Esta información puede utilizarse directamente para desarrollar nuevos productos, lo que es habitual en la industria farmacéutica, o puede modificarse el material genético para crear, por ejemplo, nuevas semillas.

Tras esta revisión bibliográfica sobre comercio internacional y medio ambiente, a continuación se comentan algunos de los aspectos tratados con aquéllos abordados en los distintos capítulos de este trabajo. En el capítulo 2 se presenta un modelo estático de equilibrio general de comercio Norte-Sur, en el cual el Norte, que posee capital, se especializa en la producción de un bien intensivo en este input, mientras que el Sur, que es rico en biodiversidad, produce un bien intensivo en recursos naturales. Similar especificación se mantiene en los capítulos 3 y 4, pero estudiando la relación de comercio desde un punto de vista dinámico, utilizando la teoría de juegos diferenciales. En todo el estudio se admite como válido el supuesto de competencia perfecta. Por lo que se refiere a la función de utilidad, en el capítulo 2 se considera que es no separable entre consumo y biodiversidad, mientras que en los siguientes capítulos el consumo ya se especifica como función de la biodiversidad. Al mismo tiempo, en este capítulo, la conservación de la biodiversidad se entiende como un coste en el proceso productivo del Sur. A lo largo del trabajo se estudia la relación entre comercio internacional y biodiversidad, vista ésta como un problema medioambiental global. En el capítulo 2, que trata un modelo estático, se hace hincapié en el efecto de determinadas políticas medioambientales y cambios en la estructura de las preferencias sobre los precios relativos en cada región. Este capítulo parece evidenciar que, en lugar de "dumping" ecológico, los países menos desarrollados tienen incentivo para cambiar sus procesos productivos hacia otros que permitan una mayor conservación de la biodiversidad. En el capítulo 3 se estudia la relación Norte-Sur, permitiendo la acumulación de capital, lo que lleva a estudiar la posibilidad de crecimiento económico y su efecto sobre la biodiversidad. En este contexto conviene señalar que la biodiversidad se puede considerar como un problema transfronterizo pues, aunque el Sur se preocupe por su desarrollo económico, ha de tener en cuenta que sus decisiones sobre el grado de conservación de la biodiversidad afectan a las decisiones de ahorro en el Norte y, por tanto, al crecimiento económico en ambas regiones. El capítulo 4 se construye sobre la base del capítulo 3, incorporando al modelo la dinámica de las especies naturales y la posibilidad de transferencias de capital del Norte al Sur que, si bien ya se incluyeron en el capítulo anterior, es en éste en el que se especifica la forma en que el Sur utiliza esas transferencias para mejorar la conservación de la biodiversidad. En ocasiones, la complejidad de los modelos hace necesario recurrir a métodos numéricos para su resolución. Finalmente, indicar que en los capítulos 3 y 4, no se estudian problemas de negociación colectiva. Únicamente se comparan los resultados del modelo cuando las regiones no cooperan, y cuando sí se produce la cooperación entre el Norte y el Sur.

1.2 Crecimiento económico y medio ambiente

En esta sección se presenta, en primer lugar, la bibliografía básica sobre modelos neoclásicos de crecimiento (o crecimiento exógeno) y modelos de crecimiento endógeno. A continuación se comentan algunos de los artículos más citados en la literatura sobre crecimiento y medio ambiente. Finalmente, se contrastan las ideas presentadas por estos autores con las expuestas a lo largo de la presente memoria de investigación.

En la teoría de crecimiento económico cabe distinguir, por un lado, la desarrollada por los economistas neoclásicos de la segunda mitad de siglo, y por otro, la teoría de crecimiento endógeno, nacida a mediados de los 80 tras la publicación de la Tesis Doctoral de Paul Romer. La teoría neoclásica de crecimiento se basa en los trabajos de Solow (1956) y Swan (1956). Estos trabajos se complementan con los de Cass (1965) y Koopmans (1965), que introducen la teoría de óptimización intertemporal desarrollada por Ramsey (1928).

Para los autores neoclásicos todos los modelos de crecimiento son modelos de equilibrio general y asumen funciones de producción Cobb-Douglas con rendimientos constantes pero decrecientes en cada input. Estos modelos predicen la convergencia entre países. Además, el crecimiento no se puede mantener indefinidamente, a menos que se produzca un crecimiento exógeno de la tecnología. Romer (1986) realiza una doble crítica de estos modelos: por un lado, es insatisfactorio que el crecimiento no venga explicado por el modelo, sino que sea externo a él; y por otro lado, los datos no muestran esa convergencia entre países pobres y ricos. Rebelo (1991) presenta lo que se denomina modelo AK, que conlleva rendimientos constantes a escala en el factor que va a ser acumulado, el capital. De esta manera se consigue crecimiento endógeno. Lucas (1988) incorpora el factor trabajo a la función de producción, pero elimina los rendimientos decrecientes a escala a través del capital humano. En esta misma línea de eliminación de los rendimientos decrecientes a escala cabe citar a Barro (1991). Por su parte, Romer (1990), Aghion & Howitt (1992) y Grossman & Helpman (1991) dan cabida a procesos de inversión en I+D, lo cual genera progreso tecnológico de forma endógena. Para una revisión de la teoría sobre crecimiento económico véase el trabajo de Barro & Sala-i-Martín (1995).

La metodología matemática clásica para la resolución de problemas dinámicos, conocida como cálculo de variaciones, se generaliza, por un lado, en el método de programación dinámica, habitualmente utilizado en problemas discretos, y por otro, a partir del principio del máximo de Pontryagin (Pontryagin et al. (1962)), en la teoría de control óptimo. Estas metodologías tienen un papel central en el tratamiento de problemas de crecimiento económico. En particular, para una revisión de la teoría de control óptimo, véanse, por ejemplo, Chiang (1992), Burghes & Graham (1980) y Fleming & Rishel (1975).

Son numerosos los autores que tratan problemas medioambientales desde un punto de vista de crecimiento económico. A continuación se comentan los artículos de algunos de ellos, por su relevancia para el trabajo que aquí se presenta.

Gruver (1976), asumiendo un modelo neoclásico de crecimiento, incorpora la polución como variable flujo con un efecto negativo dentro de la función de utilidad. El objetivo es maximizar la utilidad descontada durante un periodo finito de tiempo. La inversión puede dedicarse a incrementar el capital destinado a controlar la polución, o bien al capital productivo. La política óptima consiste en especializar la inversión, en un primer periodo, en capital productivo y, posteriormente, en capital para controlar la polución.

Ploeg & Withagen (1991) consideran a la polución como resultado de la producción y la incluyen dentro del modelo neoclásico de Ramsey, teniendo en cuenta tanto su efecto stock como flujo. Se muestra que pueden emplearse impuestos Piguvianos para alcanzar el óptimo social en una economía descentralizada. También se considera el problema de inversiones en tecnologías limpias y en reducción de emisiones. Dado que la limpieza del medio ambiente no se produce a través del mercado, es preciso que el gobierno imponga un impuesto sobre las emisiones, lleve a cabo estas actividades y proporcione incentivos para invertir en tecnologías limpias.

Tahvonen & Kuuluvainen (1993) utilizan un modelo neoclásico de crecimiento en el que las emisiones son consideradas como un input productivo y substitutivo del capital. La utilidad depende del consumo y del stock de polución. Se prueba que si la utilidad marginal del consumo disminuye con la polución, entonces el estado estacionario óptimo es único. El nivel de consumo y renta en el estado estacionario son menores cuando hay control de la polución. Los recursos naturales se incorporan posteriormente en el modelo. En este caso, el control de polución puede tanto aumentar como reducir el nivel de consumo en el estado estacionario.

Por su parte, Rowthorn & Brown (1995) introducen la biodiversidad dentro de un modelo neoclásico de crecimiento, asumiendo que el número de especies naturales es función inversa de la proporción de tierra destinada a la agricultura. La producción es función del capital, el trabajo y la tierra, mientras que la utilidad depende tanto del consumo como de la biodiversidad. El planificador maximiza la utilidad descontada a un determinado tanto, sometido a la dinámica del capital y a la evolución exógena de la población. El sistema converge hacia un estado estacionario en el que consumo, output, capital y población crecen a la misma tasa exógena, mientras que la utilización de la tierra se estabiliza, lo que permite una reserva permanente para la conservación de las especies. Aunque la tasa de crecimiento no se ve afectada por variaciones en el tanto de descuento, un aumento de éste disminuye la utilización de la tierra, permitiendo una mayor conservación de la biodiversidad. El mismo resultado acontece si el tanto de interés es bajo y se produce un incremento en la tasa de crecimiento de la población. Por contra, el progreso técnico provoca una mayor utilización de la tierra y una peor conservación de la biodiversidad.

Barret (1995) también incorpora la biodiversidad dentro de un modelo neoclásico de crecimiento, en el que población y progreso técnico crecen a tasas exógenas. En este artículo, la tierra se divide en dos partes, la dedicada a actividades productivas y la tierra salvaje. Esta última se puede interpretar como el stock de biodiversidad, ya que se asume que ésta es función creciente del área de tierra salvaje. La conservación de la biodiversidad implica un sacrificio en términos de producción, aunque también supone un beneficio al aumentar la utilidad social. Esta utilidad social, descontada a lo largo de un horizonte temporal infinito, constituye el funcional objetivo del problema. Barret investiga la condición bajo la cual es óptimo conservar más biodiversidad de la indicada por el análisis estático coste-beneficio. Esta condición se materializa en una desigualdad que depende de parámetros objetivos, como la tasa de crecimiento de la población y la tecnología, pero también de parámetros éticos como son las elasticidades de las utilidades marginales de la biodiversidad y del consumo.

Gradus & Smulders (1993) estudian el efecto de un aumento en la preocupación medioambiental sobre la polución y el crecimiento económico, distinguiendo entre tres tipos de modelos de crecimiento. Se considera a la polución como función del stock de capital y se estudia el efecto de ésta como variable flujo. La polución, junto con el consumo, influye en la utilidad de los agentes, sin embargo, no afecta a la función de producción. En un modelo neoclásico de crecimiento del tipo Cass-Koopmans, la tasa de crecimiento viene dada exógenamente por la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo y el cambio tecnológico, por consiguiente, no se ve afectada por una mayor preocupación medioambiental. No obstante, la producción se hace menos intensiva en capital y, por tanto, menos contaminante. En un modelo AK de crecimiento endógeno este cambio de preferencias implica un menor crecimiento económico. Esto se debe a que las actividades de disminución de la contaminación se llevan a cabo a expensas de una reducción en consumo e inversión. En el modelo de Lucas de crecimiento endógeno la producción depende del capital físico y el humano, por lo que las preferencias medioambientales no influyen en el crecimiento a largo plazo. Finalmente, en este último modelo, si la productividad del trabajo disminuye con la polución, entonces el crecimiento económico se ve incrementado al producirse un mayor interés por el medio ambiente.

Smulders (1995) investiga las consecuencias de una política medioambiental sobre el crecimiento del bienestar, el consumo y la producción. En este modelo, el crecimiento de los recursos naturales es limitado, siendo la creación de conocimiento una condición necesaria para que el crecimiento sea sostenido. La utilidad no sólo depende del consumo, sino también de la calidad medioambiental. Por su parte, la función de producción presenta rendimientos constantes en el capital pero, asimismo, depende del conocimiento y de la calidad medioambiental. Los productores maximizan beneficios y los consumidores la utilidad intertemporal. El efecto de una política medioambiental se estudia analíticamente para un modelo con un único sector, y numéricamente asumiendo dos sectores, uno para la creación de bienes de consumo y otro para la de conocimiento.

A diferencia de autores como Dasgupta & Heal (1979), que asumen una vida infinita de los agentes, al igual que de la economía, John & Pecchenino (1994) estudian un modelo de generaciones solapadas en el que individuos con un periodo corto de vida toman decisiones que tienen efectos de largo plazo. De hecho, se supone que la economía tiene un horizonte temporal infinito, mientras que cada generación vive únicamente dos periodos. En el primer periodo, los agentes ganan un salario que destinan a ahorro para consumo futuro, o a inversión en el mantenimiento del medio ambiente. En el segundo periodo consumen lo ahorrado, lo cual produce deterioro medioambiental. Las empresas maximizan beneficios, donde la función de producción depende, tanto del capital del periodo presente como del pasado. Los agentes maximizan su función de utilidad intertemporal, que depende tanto del consumo como de la calidad medioambiental; es decir, se considera que esta última es una externalidad sobre la utilidad pero no sobre la producción. En el artículo se muestra la posibilidad de que existan múltiples equilibrios de Pareto. Asimismo, se comprueba que los resultados pueden ser Pareto superiores cuando se supone un agente planificador que perdura en el largo plazo.

Ligthart & Ploeg (1994) presentan un modelo de crecimiento en el que el gobierno debe lograr dos metas: por un lado, debe aumentar la recaudación para financiar el bien público y, por otro, debe internalizar las externalidades medioambientales para corregir los "fallos de mercado". Este doble objetivo ha de conseguirse actuando a través de impuestos distorsionantes, dando como resultado un "second-best". Estos autores consideran una función de producción AK y una función de utilidad que depende del consumo del bien público y privado, así como de la calidad medioambiental. Esta última se mide a través de la polución, que es tratada como una variable flujo y que es un resultado inevitable de la producción. El modelo estudia el efecto de una política medioambiental sobre las cuentas públicas, el crecimiento económico y los daños sobre el medio ambiente. Asimismo, se muestra cómo un cambio de preferencias que considere el medio ambiente en mayor medida, conduce a una mejoría en la calidad de éste, pero a un menor crecimiento económico. El mismo estudio se lleva a cabo cuando se permite al gobierno que dedique gasto público, bien a la reducción de polución, o bien a promover el crecimiento económico.

En Michel & Rotillon (1995), partiendo de un modelo de crecimiento endógeno basado en externalidades positivas del tipo "learning by doing", la introducción de la polución no es más que otra externalidad, en este caso negativa. Esta externalidad negativa, en el supuesto de mercados competitivos, no afecta al resultado de crecimiento ilimitado de este tipo de modelos de crecimiento endógeno. La novedad radica en que también la polución crece ilimitadamente. En el estudio de un óptimo social es importante la definición de la utilidad como función del capital y la polución. Cuando esta utilidad es separable entre consumo y polución, así como cuando es no separable, pero un aumento de la polución disminuye la utilidad marginal del consumo, el crecimiento tanto del capital como de la polución es finito. Por otro lado, cuando existe efecto compensación (un aumento de la polución incrementa a su vez la utilidad marginal del consumo), si este efecto es lo suficientemente grande, puede dar lugar a crecimiento ilimitado. Asimismo, se prueba que si se permiten procesos de reducción de polución, el óptimo social puede llevar a la economía a crecimiento ilimitado, con independencia de la forma funcional de la utilidad.

En esta línea resulta interesante el estudio efectuado por Bovenberg & Mooij (1997), sobre el efecto de un cambio impositivo, aumentando la intensidad con la que se grava la polución y disminuyendo la de la producción. Las economías domésticas maximizan su flujo de utilidades, dependientes tanto del consumo como de la calidad medioambiental. Estos autores asumen una producción dependiente del capital físico, el gasto público, la polución, los gastos en reducción de contaminantes y los servicios proporcionados por el medio ambiente (la calidad medioambiental no sólo es un bien de consumo sino también un input productivo). Las empresas maximizan el valor actual de los dividendos futuros, sin tener presente la externalidad medioambiental derivada de la producción. El gobierno grava la producción y la polución, dedicando sus fondos a inversión pública y subsidios para reducir emisiones. Según este trabajo, un aumento impositivo en las actividades más contaminantes, reduciendo al mismo tiempo los impuestos distorsionantes sobre la renta, puede dar lugar a un doble dividendo: un medio ambiente más limpio y un sistema impositivo menos distorsionado, lo que estimula el crecimiento económico. En este caso, la mejora medioambiental incentivaría la producción y, por otro lado, el cambio de impuestos podría mejorar la eficiencia del sistema impositivo.

Withagen (1995) marca la necesidad de observar, no ya el flujo, sino el stock de polución como externalidad que puede afectar a la tasa óptima de crecimiento. A partir del modelo de Rebelo, incluye el stock de polución como una externalidad negativa en la función de bienestar. Adicionalmente, permite que una parte de la renta se dedique a reducir las emisiones netas. Una conclusión importante del modelo es la imposibilidad de garantizar siempre una tasa de crecimiento constante.

Bovenberg & Smulders (1995) presentan un modelo en el que la calidad medioambiental o capital natural se trata como un recurso renovable. Se presenta un modelo de crecimiento endógeno (basado en Lucas (1988) y Rebelo (1991)) con dos sectores productivos. El primer sector se dedica a la producción de bien final, que depende del stock de capital natural, el capital físico y los recursos naturales extraídos. El segundo sector desarrolla conocimiento técnico que permite una producción menos contaminante. Se considera que este conocimiento es función del capital físico y la polución. La utilidad, de nuevo, es función tanto del consumo como de la calidad medioambiental. Los autores consideran que si son unitarias tanto las elasticidades de substitución entre servicios medioambientales y consumo en el lado de la utilidad como entre los primeros y el capital físico en el lado de la producción, entonces se produce crecimiento sostenido, manteniéndose constante la calidad medioambiental. Mientras que en este artículo se estudian los estados estacionarios, en Bovenberg & Smulders (1996) se analiza la dinámica transicional tras un endurecimiento de la política medioambiental.

En contra de la idea de que el crecimiento de los países menos desarrollados provocará un incremento irreparable del nivel de polución, Grossman & Krueger (1994) presentan un estudio empírico que relaciona la renta "per cápita" de un país con varios indicadores del nivel medioambiental (contaminación del aire en las ciudades, nivel de oxígeno, de contaminantes fecales y de metales pesados en las cuencas de los ríos). No encuentran evidencia empírica de que la calidad medioambiental se deteriore permanentemente con el crecimiento económico. De hecho, para la mayor parte de los indicadores estudiados, el crecimiento provoca deterioro medioambiental en una primera fase, seguida de otra de mejora en el medio ambiente. Esto es, una relación en forma de "U invertida". Por contra, en el artículo se reconoce la limitación de estos indicadores para medir la calidad global del medio ambiente. En ese mismo sentido, Arrow et al. (1995) critican la relación en forma de "U invertida". Aunque puede aceptarse que el gasto de los agentes en calidad medioambiental crezca en mayor proporción que su nivel de renta, ello no implica que el crecimiento económico sea suficiente para mejorar el medio ambiente, ni tampoco que los recursos de la tierra sean capaces de soportar un crecimiento indefinido. Las evidencias sobre la relación en forma de "U invertida" deben estudiarse con cautela. La mayor parte de los estudios se centran en consecuencias de corto y no de largo plazo, así como en emisiones más que en cantidades acumuladas. Además, no se suelen estudiar las consecuencias que la reducción de un contaminante en un país tiene para el resto del globo, ni cómo afectan al conjunto del sistema las reducciones en una determinada emisión. Por otro lado, estos autores ponen de manifiesto que la base de recursos naturales y, por ende, la capacidad del planeta es limitada. No obstante, esta capacidad no es fija, sino que varía con el nivel tecnológico, las preferencias y las estructuras productiva y de consumo. Desde un punto de vista empírico, Shafik (1994) también concluye que, si bien para algunos indicadores medioambientales se puede admitir la relación en forma de "U invertida", otros indicadores empeoran con el nivel de renta "per cápita", e incluso otros mejoran a cualquier nivel de renta. Es cierto que la mayor parte de las sociedades adoptan políticas e invierten para reducir los daños medioambientales asociados con el crecimiento económico. Es posible frenar e incluso revertir el deterioro para algunos problemas medioambientales, pero esto no se cumple para todos de forma automática.

Un modelo que genera una relación en forma de "U invertida" entre la renta "per cápita" y el deterioro medioambiental es el propuesto por Stokey (1998). Se supone una función de utilidad separable entre consumo y polución. El efecto de esta última se estudia primero considerándola como variable flujo y, posteriormente, como stock. Se estudia el problema del planificador social, según el cual el gobierno maximiza la utilidad de la economía doméstica representativa. Si la utilidad marginal del consumo es elástica, la polución y el bien de consumo son substitutivos, dando siempre lugar a una relación de tipo "U invertida". No obstante, para analizar el crecimiento de largo plazo se distinguen tres modelos. En un modelo de crecimiento endógeno de tipo AK, el crecimiento sostenido no es óptimo si se incluye el efecto de la polución. En un modelo de crecimiento exógeno, tanto considerando la polución como variable flujo o como stock, es posible mantener ilimitadamente el crecimiento del capital con estándares medioambientales cada vez más estrictos.

Verdier (1995) desarrolla un modelo de crecimiento endógeno en el cual, de nuevo, la polución, como variable flujo, influye negativamente en la función de utilidad. El crecimiento se produce como consecuencia de una expansión en la variedad de productos (véase Grossman & Helpman (1991)). Mediante inversiones en I+D las empresas disminuyen el ratio output-emisión de cada uno de los nuevos productos. Se comparan los resultados del modelo bajo dos tipos de política medioambiental: impuestos sobre emisiones y estándares tecnológicos. En el caso de una economía con "fallos de mercado", los estándares tecnológicos pueden dominar la política de impuestos sobre emisiones cuando los objetivos sobre polución son muy rigurosos, y viceversa. Adicionalmente, si se impone un impuesto bajo sobre emisiones, ello no implica necesariamente un efecto negativo sobre el crecimiento económico, sino que puede incluso impulsar un aumento en el número de productos desarrollados en la economía.

Con respecto a este segundo bloque de literatura, centrado en el crecimiento económico y el medio ambiente, y en relación al trabajo que se presenta, hay que hacer referencia a los capítulos 3 y 4. En ambos capítulos se considera una función de producción en el Norte de tipo AK. La calidad medioambiental, medida a través del nivel de conservación de la biodiversidad en el Sur, aparece en la función de utilidad de ambas regiones como variable stock. Al mismo tiempo, la biodiversidad también afecta a la función de producción en el Sur, pues esta región debe decidir el número de especies naturales a utilizar en su proceso productivo. Por consiguiente, el número de especies utilizadas aumenta con la producción e indirectamente con el stock de capital. El horizonte temporal del juego se asume finito en la primera parte del capítulo 3, e infinito en la segunda parte del capítulo 3 y en el 4. En el capítulo 3 se comparan los resultados cuando las regiones deciden actuar de forma cooperativa y cuando no cooperan. Se concluye un mayor crecimiento económico y una mejor conservación de la biodiversidad en el supuesto cooperativo. En el siguiente capítulo, se asumen dos sectores. Así, el Norte dedica una parte de su capital a la inversión productiva y el resto es transferido al Sur con objeto de que la producción en esta región conserve la biodiversidad en una mayor medida, o incluso para ser invertido directamente en las especies naturales. Esto permite la aparición de crecimiento económico al mismo tiempo que la conservación del medio ambiente.

1.3 Juegos diferenciales: comercio internacional y medio ambiente

En esta sección no se pretende proporcionar una visión general tanto de la teoría como de las aplicaciones de los juegos diferenciales, para ello, véanse, por ejemplo, Başar & Olsder (1995), Melhmann (1988) y Leitmann (1974). Por contra, se revisan aquellos artículos que se encuentran más estrechamente relacionados con el trabajo realizado, pudiendo clasificarse éstos en dos grupos. Primero se comentan aquellos artículos que utilizan la teoría de juegos diferenciales para tratar problemas medioambientales, poniendo especial énfasis en aquéllos que supongan externalidades internacionales. El segundo grupo comienza con el trabajo de Lancaster (1973), que aunque no trata problemas medioambientales ni de comercio internacional, sirve de inspiración a numerosos artículos que sí consideran estos problemas, entre ellos los modelos objeto de estudio en los capítulos 3 y 4 del presente trabajo. Finalmente, al igual que en los apartados precedentes, se comentan las conexiones entre la literatura presentada y la memoria de investigación.

Para un repaso sobre las aplicaciones económicas de los juegos diferenciales y, en particular, con respecto a modelos que consideran recursos naturales tanto renovables como exhaustibles, véase Clemhout & Wan (1994). En la mayor parte de los problemas a tratar mediante un enfoque de juegos diferenciales, el análisis dinámico puede ser extremadamente difícil, a menos que se restrinja la clase de las posibles estrategias dinámicas. Entre las restricciones más habituales, la más drástica consiste en asumir estrategias de ciclo abierto, y la menos restrictiva viene referida a estrategias de ciclo cerrado. En el primer caso la única información que poseen los individuos es el valor de las variables de estado al comienzo del juego; mientras que en el segundo conocen el valor de estas variables en cada momento, aunque no tienen "memoria" sobre las observaciones pasadas. Estos autores presentan los equilibrios de Nash perfectos en los subjuegos para un juego no-cooperativo con varios jugadores. En primer lugar estudian el ejemplo de la extracción de un recurso exhaustible de acceso libre. Consideran que N jugadores compiten por la extracción del mismo bajo utilidades estrictamente cóncavas e información perfecta. Se presentan las estrategias de equilibrio de ciclo cerrado bajo diferentes supuestos, así como las estrategias de ciclo abierto. A continuación, estudian un juego similar pero en el que se extrae un recurso renovable. La diferencia principal radica en que en este caso, en lugar de la extinción, es posible que el stock del recurso converja hacia un estado estacionario positivo. Como resultado central se indica que si existe un equilibrio de ciclo abierto, entonces también existe todo un continuo de equilibrios entre los cuales se encuentra éste. Adicionalmente, se presenta la forma general de un modelo con una función cuadrática de pérdidas y una dinámica lineal. Aunque estos modelos son los más atractivos desde el punto de vista de su resolución, en ocasiones presentan problemas en su interpretación económica.

Una primera aproximación a las tendencias más importantes que ponen en relación la teoría de juegos y los problemas medioambientale puede encontrarse en Folmer & Zeeuw (1999). La característica básica de los problemas medioambientales a nivel internacional, como ya se ha señalado anteriormente, es la existencia de externalidades, habitualmente polución generada en un país y depositada en otro. En este tipo de problemas el stock de polución suele tener mayor importancia que el flujo, por lo que para tratarlos se prefieren los modelos dinámicos. Autores como Chander & Tulkens (1992) y Dockner & Long (1993) muestran que el bienestar social en el caso cooperativo es igual o superior al obtenido en el marco no-cooperativo. Esta es una conclusión ampliamente consensuada en la literatura económica de juegos transfronterizos de polución (véase Missfeldt (1999)). Por otro lado, autores como los ya mencionados Carraro & Siniscalco (1993), u otros como Hanley & Folmer (1998), estudian la posibilidad de creación de coaliciones estables a través de medios como pagos colaterales, estrategias de amenaza, posibilidad de enlazar problemas, etc. Por su relación con el trabajo aquí presentado, se comentarán en mayor profundidad los primeros, aunque sin olvidar problemas de negociación colectiva y creación de coaliciones.

También el artículo de Zeeuw (1998) proporciona una introducción a la utilización de juegos diferenciales en problemas internacionales de polución. Este autor explica la doble característica dinámica de este tipo de problemas, primero, por la importancia de la polución como variable stock, y segundo, por el tiempo necesario para que los países se adapten a niveles sostenibles de polución. Además define los conceptos de comportamiento cooperativo y no-cooperativo, anunciando que el primero ofrece un mayor bienestar social pero carece de mecanismos que lo hagan "self-enforcing". En primer lugar, presenta el problema cooperativo de control cuando se tiene en cuenta la polución como una externalidad, definiendo funciones de acumulación de polución, de utilidad y de bienestar social, siendo esta última, cuadrática. Antes de estudiar el problema no-cooperativo, lleva a cabo un breve repaso de la teoría de juegos diferenciales de horizonte finito e infinito, explicando la diferencia entre equilibrios de ciclo abierto y feedback, así como su forma de obtención. Seguidamente, calcula las soluciones del juego no-cooperativo probando que, en el equilibrio feedback el stock de polución es mayor que en el de ciclo abierto y, a su vez, éste es mayor que en el caso cooperativo.

Chander & Tulkens (1992) estudian un juego en el que N países comparten un recurso medioambiental. La utilidad de cada uno es función tanto del consumo como de la calidad del recurso que comparten, mientras que su producción es función del bien y del flujo de polución que su producción genera. Se permite la transferencia de bienes entre países. El equilibrio de Nash en el caso no-cooperativo no es un óptimo de Pareto (considerando aquéllos que se pueden alcanzar cooperando). Los autores proponen un método gradual de análisis coste-beneficio para pasar de la solución no-cooperativa a un óptimo de Pareto. En cada paso del proceso negociador, los países exponen sus deseos y costes de reducir emisiones. Con esta información y considerando costes y beneficios, se fijan las emisiones de cada uno y, con ello, las producciones y transferencias entre países. Cada ronda negociadora da lugar a mejoras en el sentido de Pareto, de forma que, tras sucesivos pasos el sistema se encuentra arbitrariamente cerca del óptimo de Pareto. Finalmente, se presenta una regla de reparto entre los países, tanto de los costes de reducción de emisiones, como de los beneficios resultado de una mayor cooperación. La porción de cada país se corresponde con el ratio entre su disposición a pagar por una mejora medioambiental y la disposición global de todos los países.

Clemhout & Wan (1985) calculan las estrategias de equilibrio de ciclo cerrado para un juego diferencial en el que N jugadores deben extraer recursos de m especies. En un primer ejemplo, se estudia el juego asumiendo una única especie cuya evolución no sólo depende de su stock y de la tasa de extracción, sino que también se admite un componente estocástico. El riesgo, aunque influye en los pagos a cada jugador, no afecta a la tasa de extracción. A continuación, se estudia el caso determinista para dos especies, asumiento un sistema depredador-presa. Se observa que las trayectorias de equilibrio de las especies pueden converger, diverger, girar alrededor del estado estacionario, o llevar a la extinción de las especies. También prueban que es posible alcanzar soluciones óptimas de Pareto a través de esquemas impositivos sobre la explotación.

Dockner & Long (1993) formulan un juego dinámico de control de la polución entre dos países. Cada uno produce el bien consumido dentro de sus fronteras, y por tanto, no hay comercio. No obstante, las emisiones derivadas del proceso productivo incrementan el stock de polución, que es común para ambos países. Los consumidores obtienen utilidad del consumo pero soportan un coste asociado a la polución. Dado que se supone que el beneficio total viene dado por una función cuadrática, en este caso es más fácil obtener las estrategias de ciclo cerrado. En primer lugar, aunque se trata de un escenario improbable en la práctica, debido al incentivo para la aparición de "free-riders", se calcula el estado estacionario óptimo cuando los países cooperan, que es el resultado de maximizar el bienestar de ambos países conjuntamente. En segundo lugar, se estudia el caso no-cooperativo, entendiéndose este equilibrio como el resultado de negociaciones internacionales donde las estrategias para cada país son "self-enforcing". Este requisito lo cumplen las llamadas estrategias perfectas de Markov, que dan lugar a soluciones perfectas en los subjuegos. Si se asumen estrategias lineales de Markov el stock de polución es mayor y el bienestar menor que en el caso cooperativo. Por contra, si se consideran estrategias no lineales de Markov y el tanto de descuento es suficientemente bajo, es posible obtener soluciones eficientes de Pareto que aproximen los resultados del caso cooperativo, tanto desde el punto de vista del stock de polución como del bienestar alcanzado.

Levhari & Mirman (1980) estudian el problema de la explotación de recursos pesqueros por dos países. Se trata de un juego formulado en tiempo discreto, en el que los jugadores actúan como duopolistas de tipo Cournot, tomando las decisiones del otro participante como dadas, y en el que no se contempla la posibilidad de estrategias de amenaza. Aunque el equilibrio en cada periodo es Cournot-Nash, interesa conocer si el stock poblacional de peces alcanza un equilibrio en sentido dinámico, esto es, el estado estacionario. Las políticas Cournot-Nash de horizonte infinito se determinan a través de las de horizonte finito cuando éste tiende hacia infinito. Se presenta un ejemplo y se calcula la forma cerrada de las políticas Cournot-Nash y las expresiones para los estados estacionarios, comparándolas con los valores cuando los países cooperan y maximizan una combinación convexa de sus utilidades descontadas. En este último caso, el consumo es menor y el tamaño de las poblaciones de peces mayor. De hecho, en el equilibrio Cournot-Nash el stock poblacional de peces puede tender a su extinción, mientras que en el caso cooperativo tiende hacia infinito.

Sobre la base del modelo propuesto por Levhari & Mirman (1980), el trabajo de Dutta & Sundaram (1993) demuestra que los equilibrios perfectos de Markov no llevan necesariamente a la "tragedia de los comunes". Esta "tragedia" se debe al hecho de que las estrategias de los agentes no tienen en cuenta la historia pasada. Al contrario que en los juegos repetidos, en los de propiedad común las estrategias dependen de la variable de estado y, aunque no directamente, sí indirectamente de la historia pasada. Estos autores definen la "tragedia de los comunes" como una sobreexplotación del recurso en relación al "first best". Prueban que bajo estrategias perfectas de Markov la "tragedia" puede o no suceder, pero en cualquier caso, éstas son estrictamente subóptimas. Finalmente, presentan condiciones suficientes que garantizan la aparición de la "tragedia de los comunes" bajo este tipo de estrategias.

Tornell & Velasco (1992) también estudian el problema de la "tragedia de los comunes", el crecimiento económico y las transferencias de capital entre países. En un país en el que los derechos de propiedad están mal definidos, se estudia un juego diferencial de horizonte infinito, en el que los grupos de interés compiten por un bien de acceso libre. En primer lugar, se comprueba que la propensión a consumir es mayor en el régimen de acceso común que en la solución cooperativa o "first best", lo que lleva a la "tragedia de los comunes". En segundo lugar, se incorpora en el modelo una tecnología o activo inferior, que proporciona una tasa de rendimiento menor, pero de acceso privado (se puede asociar con una cuenta corriente en un país rico). Si esta tasa de rendimiento es lo suficientemente alta, puede actuar como un freno a la sobreexplotación de recursos, pero si es baja, puede empeorar la "tragedia de los comunes". La incorporación de este nuevo activo puede dar lugar a transferencias de capital de los países con derechos de propiedad mal definidos hacia aquéllos con activos de acceso privado. No obstante, estas transferencias no implican necesariamente una disminución en el crecimiento económico, sino que si el activo de acceso libre actúa como una herramienta disciplinaria, puede conducir a una reducción en la tasa de apropiación del bien de propiedad común, así como a un aumento de la tasa de ahorro y del bienestar.

Brander & Taylor (1998) desarrollan un modelo de comercio entre dos países. Cada uno de ellos tiene una determinada dotación de recursos naturales y trabajo, pudiendo producir dos bienes: por un lado bien recurso y, por otro, manufacturas o bien numerario. El recurso natural es de acceso libre para los nacionales de cada país y su dinámica viene regida por el modelo logístico (Clark (1990)). Este trabajo no considera el capital como input y, por lo tanto, no estudia la posibilidad de crecimiento económico. Se suponen mercados competitivos y libre entrada de empresas, lo que proporciona una expresión del precio del bien recurso en función del stock de recurso y del salario. En un estado estacionario de comercio diversificado los salarios y los stocks de recursos son idénticos en ambos países. Además, en este estado estacionario la utilidad es menor para el país con recursos abundantes y mayor para el que presenta abundancia de trabajo, en comparación con los resultados bajo autarquía. Asimismo, durante todo el periodo de transición hacia dicho estado estacionario, también el país con recursos abundantes sufre pérdidas de utilidad, al contrario que el país con trabajo abundante. La incompleta especificación de los derechos de propiedad en el sector de recursos renovables puede minar la presunción de que la liberalización del comercio necesariamente lleva a mejoras de bienestar. La política de "first best" sería establecer derechos de propiedad apropiados. No obstante, la imposición de tarifas a la importación de recursos en el país abundante en trabajo, o de tasas a la exportación en el abundante en recursos, hace que aquél que es importador de recursos empeore y el exportador mejore. Sin embargo, aunque en principio el país importador empeora, cuando es él quien recibe la recaudación de los impuestos (en el caso de tarifas a la importación), es muy posible que ésta consiga, finalmente, mejorar su utilidad.

El enfoque presentado por Yeung & Cheung (1994), aunque estudia el crecimiento del capital, no considera el comercio entre dos países. Estos autores plantean un juego diferencial de acumulación de capital sujeto al control de la polución dentro de un país. La industria en dicho país utiliza capital para producir su output, provocando, al mismo tiempo, polución. Por su parte, el gobierno puede fijar una tasa sobre esta producción, mediante la cual financiar proyectos de reducción de polución. El sector empresarial decide la estrategia de inversión con objeto de maximizar su flujo de beneficios, sujeto a la dinámica del stock de capital. Por su parte, el gobierno escoge la estrategia impositiva que maximiza el bienestar social descontado, el cual es función tanto del consumo como del nivel de polución, que también es una variable dinámica. Del cálculo de las soluciones de equilibrio feedback se concluyen varias propiedades. Un aumento en la productividad eleva el output y el nivel de polución. Un incremento del peso de la polución en la función de bienestar social o del tanto de depreciación del capital, hace disminuir los niveles del stock de capital y de la polución. Una disminución de la polución por unidad de producción aumenta el stock de capital, pero su efecto sobre la polución es indeterminado. Finalmente, se comprueba que los estados estacionarios, tanto de la polución como del capital, son mayores en la solución de equilibrio de Nash de ciclo abierto, que en el caso feedback.

Por su parte, Ploeg & Ligthart (1994) sí consideran el problema del crecimiento económico dentro de un modelo de extracción de un recurso común. Plantean un modelo en el que dos países explotan un recurso común, sin estar definidos los derechos de propiedad en ninguno de ellos. Se trata de un recurso natural renovable, cuya dinámica viene definida a través de una función logística de crecimiento. Ambos países producen, bajo competencia perfecta, un bien de consumo interno, no existiendo flujos de capital o de comercio entre ambos. Definiendo el capital en sentido amplio, agrupando capital físico y humano, se pueden distinguir tres tipos de externalidades entre países: (i) "knowledge spillovers", de forma que el conocimiento almacenado en un país beneficia también a las empresas del otro país; (ii) las inversiones de un gobierno incrementan la productividad del capital privado, no sólo en dicho país, sino también en el exterior; (iii) la calidad medioambiental es un bien público que afecta tanto a la utilidad como a la producción en ambos países, ya que los recursos naturales son un input productivo. Se define un juego diferencial de horizonte infinito, siendo las variables de control, el consumo y la utilización del recurso, mientras que el stock de capital y la calidad medioambiental son las variables de estados. Se calculan las soluciones en los casos cooperativo y no-cooperativo, asumiendo estrategias de ciclo abierto. La solución no-cooperativa es subóptima porque los países no internalizan las externalidades. Por contra, el planificador supranacional, en el caso cooperativo, sí las internaliza, lo que lleva a una mayor calidad medioambiental. No obstante, la coordinación entre países también puede llevar a una peor calidad ambiental y mayor tasa de crecimiento económico, si las externalidades que afectan a la producción son más fuertes que las medioambientales.

En este segundo apartado, se repasa parte de la literatura inspirada en el trabajo de Lancaster (1973). En este último se plantea un juego diferencial entre trabajadores y capitalistas. Los primeros deciden la proporción de la producción total a consumir y a ahorrar, entre una cota inferior y una superior. Se supone que la parte ahorrada revierte directamente en los capitalistas, quienes deben decidir en que proporción invertir y consumir esa renta. El dilema de los trabajadores consiste en si tras hacer el esfuerzo de ahorrar parte de la renta, ésta se dedicará a inversión, obteniendo mayores consumos en el futuro, o bien será consumida por los capitalistas. Pero estos últimos también afrontan el dilema de invertir, sin saber en qué proporción podrán disfrutar de la mayor renta futura. Cada uno de estos dos grupos controla una variable, pudiéndose establecer un juego diferencial entre ambos, donde tanto los trabajadores como los capitalistas buscan maximizar su flujo de consumos durante un periodo finito de tiempo. Se comparan los resultados obtenidos cuando cada jugador toma sus decisiones de forma separada, con los del juego en el caso de que hubiese un planificador que maximizase el bienestar social. Conviene indicar que, dada la especificación del problema, no es posible llegar a una solución socialmente óptima mediante pagos compensatorios. También se prueba que el periodo de acumulación de capital y el bienestar final alcanzado son superiores en el óptimo social.

Partiendo del artículo de Lancaster, Hoel (1978) presenta un modelo similar, pero asumiendo una función de utilidad más general. No obstante, Hoel compara la solución del juego, no con el óptimo social sino con todas las soluciones óptimas de Pareto, obtenidas maximizando la combinación convexa de los funcionales objetivo de ambos jugadores. En este modelo se mantiene la conclusión, ya presentada por Lancaster, de que la solución del juego no-cooperativo es ineficiente al diferir del óptimo social. La condición necesaria para que la solución del juego sea un óptimo de Pareto es que la inversión sea nula durante todo el juego. En caso de que esta condición no se dé, si bien en algunas ocasiones todas las soluciones óptimas de Pareto presentan mayor acumulación de capital que la solución del juego no-cooperativo, existen casos en los cuales, aun siendo ésta ineficiente, muestra una mayor acumulación de capital que algunas de las soluciones óptimas de Pareto.

Tomando como marco los artículos de Lancaster (1973) y Hoel (1978), el trabajo de Kaitala & Pohjola (1990) introduce la posibilidad de estrategias de amenaza que permitan un acuerdo cooperativo sostenible, asumiendo un horizonte temporal infinito. La función de producción especificada por Lancaster es separable en los estados, por lo que (siguiendo a Dockner et al. (1985)), los equilibrios de ciclo abierto también son feedback. Por contra, Kaitala & Pohjola suponen que esta función es no lineal y que permite la substitución entre capital y trabajo. En primer lugar, se comparan las estrategias feedback en el supuesto no-cooperativo con los resultados en el caso cooperativo. En ausencia de cooperación, no sólo no habrá crecimiento, sino que el stock de capital disminuirá a lo largo del juego. En el modelo de Lancaster se asume la existencia de acuerdos que obligan a ambos jugadores desde el comienzo, lo que conlleva que el juego sea esencialmente estático, además de tratarse de un supuesto poco realista. Por su parte, Kaitala & Pohjola eliminan estos acuerdos vinculantes, pero admiten la posibilidad de comunicación entre jugadores. Estos autores demuestran que existen políticas de crecimiento óptimas de Pareto, respecto de las cuales los jugadores pueden llegar a un acuerdo. La eficiencia se logra si cada jugador sigue estas políticas óptimas cooperativas y amenaza con pasar a jugar las estrategias feedback del supuesto no-cooperativo durante el resto del juego, en el caso de que el otro jugador se desvíe. Esta amenaza es creíble porque se trata de estrategias de equilibrio, y es tanto más creíble cuanto mayor sea el desarrollo económico.

Las estrategias de amenaza, con objeto de alcanzar equilibrios eficientes, también son utilizadas por Benhabib & Radner (1992). Estos autores interpretan el modelo de Lancaster como la explotación conjunta, por trabajadores y capitalistas, de los activos de una empresa. Del mismo modo, en este contexto se podría estudiar, como un juego diferencial, la explotación conjunta de cualquier recurso medioambiental. En particular, estos autores asumen un juego con dos agentes y un horizonte temporal infinito, donde los agentes explotan conjuntamente un activo y observan el estado del sistema con un determinado retardo. Primero se calculan las políticas óptimas, como aquéllas que maximizan el consumo de ambos jugadores conjuntamente. Estas políticas óptimas consisten en no consumir nada hasta que el stock alcanza un determinado nivel y, a partir de entonces, consumir de manera que el stock del recurso se mantenga estacionario. Posteriormente, utilizando estrategias de Markov, se calculan los equilibrios de Nash perfectos en los subjuegos. Bajo ciertas condiciones y si el stock inicial es lo suficientemente alto, las trayectorias óptimas pueden mantenerse mediante estrategias de amenaza. Estas estrategias consisten, para cada jugador, en consumir de forma óptima hasta que detecten, tras el periodo de retardo, que el otro jugador ha traicionado el pacto y, a partir de entonces, consumir lo máximo posible.

Rustichini (1992), siguiendo el modelo presentado por Benhabib & Radner, demuestra la existencia de "first best" (solución que proporciona mayor valor para la combinación convexa de utilidades de ambos jugadores) y de "second best" (solución al problema de "first best", pero considerando sólo los consumos que dan lugar a equilibrios perfectos en los subjuegos). Para que ambos existan, debe cumplirse que una vez que el stock del activo toma el valor cero, se mantenga en ese valor en adelante. Esta condición la satisfacen los recursos naturales, tanto renovables como no renovables. Este "second best" se puede alcanzar siguiendo el equilibrio de estrategias de amenaza del mismo modo que se definieron en Benhabib & Radner.

Asimismo, Galor (1986), a partir del modelo de Lancaster, plantea un juego dinámico de comercio Norte-Sur. El Norte produce un bien de consumo utilizando como inputs, trabajo, capital y recursos naturales. Esta región comercia con el Sur vendiéndole este bien y comprando las materias primas que necesita. El Sur produce estas materias primas y posee un exceso de oferta de trabajo. Ambos jugadores buscan maximizar su flujo de consumos descontados durante un intervalo finito de tiempo. El Norte controla la proporción de su renta a ahorrar y consumir, lo cual determina la inversión y, con ello, el crecimiento económico, no sólo del Norte, sino también del Sur. Por su parte, esta última región decide el precio de las materias primas. Este precio incide directamente en el consumo actual del Sur pero, al mismo tiempo, sobre los beneficios y, por tanto, sobre la inversión en el Norte, afectando al crecimiento económico y al consumo futuro de ambas regiones. Las trayectorias óptimas de equilibrio del juego no-cooperativo conllevan un primer periodo de crecimiento seguido de otro de estancamiento. Galor prueba la ineficiencia de esta solución con respecto al supuesto de un planificador que maximiza el bienestar mundial. En este último caso, tanto el periodo de crecimiento como el bienestar alcanzado son superiores a los obtenidos por la solución del juego no-cooperativo.

Alemdar & Özyildirim (1998) extienden el modelo de comercio Norte-Sur planteado por Galor (1986), introduciendo el hecho de que la extracción de recursos en el Sur provoca polución y con ello desutilidad en el Sur. Asimismo, el stock de capital se entiende en sentido amplio, como el conocimiento técnico que se acumula en el Norte y se extiende sin coste alguno hacia el Sur. Adicionalmente, se permite a las autoridades del Sur imponer una tasa a la exportación a través de la cual internalizar el coste social de la polución. La complejidad del modelo y la dificultad de su tratamiento analítico, lleva a los autores a discretizar el modelo y plantear un algoritmo genético de resolución (basado en principios Darwinianos), para encontrar soluciones de ciclo abierto para el juego diferencial con horizonte infinito, tanto en el caso cooperativo como en el no-cooperativo. Como resultado de la cooperación, ambas regiones, y en especial el Sur, obtienen mejoras en sus niveles de bienestar, produciéndose también una disminución en el nivel de polución en el Sur. Además, los aumentos en el bienestar son mayores cuanto mayor sea el nivel de difusión del conocimiento del Norte al Sur. No obstante, aun si las partes no mantienen la cooperación, pueden conseguirse mejoras en el nivel global de bienestar y en el nivel de polución incrementando los flujos de conocimiento del Norte al Sur.

Centrándose en el problema de la biodiversidad, Barret (1994a) estudia un juego en el que los países en vías de desarrollo deben incorporar la conservación de la diversidad biológica dentro de sus planes de desarrollo, mientras que los países industrializados deben proporcionar recursos financieros a los primeros por el coste que les supone esta conservación. Se entiende por coste incremental, la compensación, desde los países desarrollados a aquéllos en vías de desarrollo, que garantiza que el bienestar de estos últimos no decrezca a causa de un acuerdo internacional. Cada país desarrollado debe decidir la cantidad de pagos compensatorios a realizar, existiendo un problema evidente de "free-rider" para establecer acuerdos de cooperación. Bajo comportamiento cooperativo, tanto las transferencias de capital del Norte al Sur, como la biodiversidad conservada son superiores que bajo el no-cooperativo. Con vistas a encontrar el número de integrantes de la coalición y las condiciones que garantizan que el acuerdo sea "self-enforcing", se estudia el juego de modo repetido. Este autor prueba que para garantizar la cooperación son necesarios castigos que impidan "free-riders" y que los países no tengan incentivo para renegociar el acuerdo en cada jugada. El acuerdo es "self-enforcing" cuando la distancia entre los resultados bajo los supuestos cooperativo y no-cooperativo es muy pequeña; por contra, precisamente cuando los beneficios de cooperar son altos, no es posible alcanzar la cooperación con este tipo de acuerdos.

Una vez realizada esta revisión bibliográfica, pasamos a comentar aquellos aspectos más estrechamente conectados con el trabajo que aquí se presenta, en particular con los capítulos 3 y 4. En estos dos capítulos se estudia un modelo de comercio entre dos países a través de un juego diferencial que también considera la conservación de la biodiversidad. Cada país está especializado en la producción de un bien. El Norte produce un bien de consumo utilizando trabajo, capital y un bien intermedio "natural". Además, debe decidir la proporción de su renta a ahorrar y, por consiguiente, a invertir en acumulación de capital, aunque encara el dilema de no saber qué parte de la renta futura podrá disfrutar. El Sur selecciona un número de especies naturales de las cuales extrae recursos para producir el bien intermedio "natural". El supuesto de mercados competitivos y libre entrada de empresas proporciona una expresión del precio en función del salario y el número de especies naturales elegidas por el Sur. En esta región el dilema consiste en la incógnita sobre si el Norte invertirá su renta llevando a un crecimiento económico, o si bien la consumirá. La función de utilidad en el Sur depende tanto del consumo como del stock de biodiversidad conservada, y esta conservación también afecta indirectamente a la utilidad del Norte, a través del precio del bien intermedio. La dificultad en encontrar soluciones de ciclo cerrado, debido a que las funciones de utilidad no son cuadráticas, hace que se busquen soluciones de ciclo abierto, resolviendo tanto el caso no-cooperativo como el cooperativo, en el cual se maximiza la combinación convexa de los funcionales objetivo de ambos jugadores. La solución óptima en ambos casos conlleva un primer periodo de crecimiento del capital seguido de otro de estancamiento. Cuando el horizonte temporal es infinito se estudia la posibilidad de crecimiento económico sostenido. La dificultad del estudio analítico hace necesario, en ocasiones, llevar a cabo el análisis utilizando algoritmos numéricos. En el capítulo 3 se concluye que el crecimiento del capital es mayor y la biodiversidad se conserva mejor en el caso cooperativo. En el capítulo 4, sobre la base del modelo construído en el capítulo 3, se añade, por un lado, la dinámica de las especies naturales, definida mediante una función logística, y por otro lado, la posibilidad de transferencias de capital del Norte al Sur. Este capital se puede entender en sentido amplio, englobando tanto el capital físico como el humano. Se supone que estas transferencias pueden ser utilizadas de dos formas distintas, bien para incrementar la productividad del capital en el Sur, o bien para aumentar la capacidad máxima de las especies naturales. Si se produce un aumento en el nivel de transferencias o en la tasa intrínseca de crecimiento de las especies, el crecimiento del capital y la conservación de la biodiversidad es mejor en el caso de que este incremento se destine a acrecentar la capacidad máxima de las especies naturales. Aunque en el artículo de Tornell & Velasco (1992) se concluye la posibilidad de que el capital fluya de los países menos desarrollados a los países ricos, la causa de este tipo de transferencias hay que buscarla en la nula especificación de los derechos de propiedad en los primeros, que hace que cada agente pueda apropiarse de los rendimientos de la inversión de otros agentes, mientras que en los países ricos los activos son de acceso privado. En los modelos presentados en los capítulos 3 y 4 los derechos de propiedad están igualmente definidos, tanto en el Norte como en el Sur.

Capítulo 2
Biodiversidad y Comercio Norte-Sur: un Modelo de Equilibrio General

En numerosas ocasiones, la literatura ha recogido el contraste entre modos de producción intensivos en recursos naturales (véase, por ejemplo, Chichilnisky (1994a) o Brander & Taylor (1998)), típicos de países en vías de desarrollo, y aquellas industrias propias de países desarrollados que son intensivas en capital, entendido éste último en sentido amplio, englobando tanto el capital físico como el humano. Esta disparidad es a menudo puesta de manifiesto por el notorio crecimiento económico seguido por los países llamados Dragones, cuyas economías se basan en el capital humano, frente al estancamiento de las economías basadas en los recursos naturales, como son las de los países Latino-Americanos o Africanos.

En este capítulo se desarrolla un modelo Arrow-Debreu de equilibrio general, que denominamos modelo de comercio Norte-Sur. Se supone que existe un acuerdo de libre comercio entre ambas regiones[2], bajo el cual los países industrializados se especializan en la producción de bienes intensivos en capital. Por su parte, los países en vías de desarrollo se especializan en bienes que utilizan intensivamente recursos naturales[3] en sus procesos productivos.

En este modelo se introduce la biodiversidad como el número de especies naturales que son conservadas en el ecosistema que soporta la producción de un determinado bien. Un supuesto básico en este modelo establece que el proceso productivo intensivo en capital es actualmente más respetuoso con el medio ambiente y conserva, por tanto, un mayor número de especies que el intensivo en recursos naturales. Conviene recordar que el capital no sólo se entiende como capital físico, sino que es un agregado que incluye también capital humano. Otra hipótesis esencial es que la utilidad del agente representativo no sólo procede de la cantidad de bien consumida, sino también de la "calidad" del medio ambiente donde ese bien es producido. A nuestros efectos, el índice de "calidad" medioambiental viene dado por la diversidad biológica. Según esto, la biodiversidad afecta a la utilidad y, por lo tanto, al modelo económico por el lado de la demanda. Por otra parte, se asume la existencia de un trade-off entre la producción de un bien y el número de especies conservadas. Una producción más respetuosa con el medio ambiente implica un mayor coste, dado por la inversión necesaria para cambiar la estructura productiva de modo que sea capaz de afectar a un menor número de especies naturales. La oferta de bienes está, de esta forma, relacionada negativamente con la biodiversidad.

Los agentes incluyen en su función de utilidad una valoración del bienestar obtenido del disfrute de todas y cada una de las especies dentro de un ecosistema. Aparte del con-

[2] Para un estudio de los efectos de la transición desde la autarquía hasta el libre comercio ver Grossman & Krueger (1991), Perroni & Wigle (1994), así como Copeland & Taylor (1994).

[3] Para un análisis de hasta qué punto tiene el Sur ventaja comparativa en la producción de bienes intensivos en recursos naturales o ésta es debida a derechos de propiedad mal definidos y, consecuentemente, debida a externalidades insuficientemente internalizadas, véase Chichilnisky (1991).

sumo directo, las especies naturales suministran muchos otros servicios: absorción de residuos, atenuación de los efectos de sequías e inundaciones, estabilización del clima, mantenimiento del ciclo del carbón, ecoturismo,etc (para una lista más completa de servicios del ecosistema vease Daily (1996)). Siguiendo a Blamey & Common (1992), el valor que cada una de las especies representa para los agentes económicos puede dividirse en cuatro categorías: *valor de uso*, derivado de la utilización actual de la especie o de la planeada para el futuro por el agente; *valor de existencia*, dado por el valor intrínseco o ético de las especies "per se"; *valor de opción*, proviene de la certidumbre de que la especie estará disponible en el futuro (es muy probable que sea un valor positivo cuando la incertidumbre es alta por el lado de la oferta y el recurso es único, lo cual sucede con la mayor parte de las especies en peligro de extinción); *valor de quasi-opción*, definido como el valor esperado de la información que se consigue por el hecho de retardar una decisión irreversible. Aún cuando el valor de cada una de las especies puede cambiar, se asume que la suma total se mantiene constante. Por esta razón, se utiliza una función de distribución estadística como función de pesos para las especies.

En Weitzman (1992; 1993) se define una función valor de la biodiversidad según la cual las especies se ordenan atendiendo a la distancia genética que las separa. La elección de esta distancia es arbitraria y no tiene en cuenta valores como el de uso o el de existencia. En este capítulo asumimos que los individuos ordenan las especies dándo un peso diferente según la utilidad que cada una de ellas les reporta. Esta utilidad no sólo considera el valor asociado con la diversidad biológica, sino las cuatro categorías descritas anteriormente.

El número actual de especies catalogadas es desconocido. Las estimaciones más frecuentemente citadas oscilan desde los 1.4 millones estimados por Southwood (1978), hasta los 1.8 millones de Stork (1988). Las estimaciones sobre el número total de especies son aún más dispares. El total se estima que oscila desde 3 millones hasta 30 o incluso 50 millones en May (1988), o de 10 a 100 millones según Simpson & Sedjo (1996). El número total de especies catalogadas, además de ser incierto, crece continuamente (por ejemplo, en referencia a las especies de arácnidos y crustáceos, May (1988) muestra que de las especies catalogadas hasta 1970, la mitad lo fueron desde 1960). Así mismo, la estimación sobre el total de especies crece también rápidamente. Todas las especies conocidas son consideradas por los agentes con independencia de que actualmente posean o no valor de uso, dado el hecho de que pueden ser útiles en el futuro. Adicionalmente, los agentes también tienen en cuenta la existencia de especies que aunque son desconocidas en la actualidad, pudieran descubrirse en el futuro. Dada esta incertidumbre, no sólo de las especies realmente existentes sino incluso de aquellas especies conocidas o catalogadas hasta el momento y, por supuesto, aquellas especies que puedan ser descubiertas en el futuro, suponemos que los agentes incorporan un rango infinito de especies en su función de utilidad.

Aplicaciones nuevas, tanto para especies recientemente descubiertas como para aquéllas conocidas con anterioridad, generan nuevas utilidades (por ejemplo, nuevos fármacos). Al mismo tiempo, el conocimiento sobre cómo las especies interactúan dentro de un ecosistema aumenta la certidumbre sobre el efecto negativo que la extinción de una cualquiera de ellas puede tener sobre dicho ecosistema (por ejemplo, hasta muy recientemente no se conocía que muchos microorganismos descomponen residuos orgánicos en el suelo y en los lechos de hojarasca, lo cual es crucial para el funcionamiento del ecosistema). Un concepto muy relacionado con la idea de interacción de las especies es el concepto de resistencia de un sistema, definido como la cantidad de perturbación que éste puede absorber antes de cambiar su estructura. Una característica de los sistemas ecológicos es su complejidad, por ello habitualmente vienen representados por sistemas no lineales, lo cual da lugar a múltiples equilibrios estables e inestables. Cuando el sistema se encuentra cercano a un equilibrio inestable, una pequeña perturbación puede llevar aparejadas consecuencias catastróficas. En este punto es cuando se rebasa la capacidad de resistencia del sistema ecológico. Una disminución en la diversidad biológica lleva a una reducción de la resistencia de un determinado ecosistema. Según esto, la conservación de la biodiversidad se convierte en un seguro contra la posibilidad de cambios catastróficos[4]. El problema fundamental es establecer el papel que juega cada especie en el mantenimiento de la resistencia de los ecosistemas. Bajo condiciones cambiantes, puede darse el caso de que varias especies que antes no guardaban relación entre sí, desarrollen algún tipo de afinidad que les confiera un caracter crucial en la futura estructura del ecosistema, ver Holling et al. (1995) y Perrings (1995). Si los agentes tienen en cuenta las condiciones medioambientales cambiantes, entonces especies escasamente valoradas podrían pasar a tener un papel más significativo.

Al mismo tiempo, si admitimos que se está produciendo un incremento sistemático del valor moral o ético de cada una de las especies y, sin embargo, imponemos que el valor total no varíe, entonces se está dando un crecimiento relativo del peso de las especies poco valoradas en comparación con las más valoradas.

Adicionalmente siguiendo a Swanson (1993), asumimos que las especies peor valoradas son precisamente aquéllas que se están extinguiendo más rápidamente y, por tanto, sus poblaciones se están reduciendo en comparación con las especies mejor valoradas. Estas especies coinciden con aquéllas que no son utilizadas o que lo son en escasa medida. El nivel de información que se puede esperar de explorar las especies con más baja valoración está creciendo con respecto a las más altamente valoradas. Esto es así debido a que las especies menos valoradas y utilizadas en menor medida son, al mismo tiempo, las más desconocidas. Según Swanson (1995), es precisamente lo poco que se conoce de ellas, lo que lleva a que el valor de información de explorarlas sea relativamente más alto.

De todo este razonamiento se puede concluir que, si se mantienen las condiciones actuales, al menos en el futuro próximo se incrementarán los valores de opción, quasi-opción y existencia de las especies con menor valoración frente a aquéllas con una valoración más alta. De esta forma, los pesos asignados al conjunto infinito de especies se distribuirán más homogéneamente[5].

Aunque el valor global que proporciona el ecosistema se mantiene constante, si se da una distribución más homogénea de los pesos asignados a las diversas especies, el peso de las mejor valoradas, que son precisamente las que se conservan, disminuye en relación a las menos valoradas, y ello hace que para conseguir la misma utilidad, deba conservarse

[4] Otros autores como Joseph (1990), no encuentran relación entre la complejidad del sistema y la estabilidad.

[5] Por otro lado, siguiendo a Rowthorn y Brown (1995), también se puede argumentar que el gasto en educación, que incida en el por qué es necesaria la preservación de las especies, puede tener influencia en los parámetros de la función de utilidad.

un mayor número de especies. El valor de la biodiversidad, por lo tanto, ha aumentado.

En este capítulo se trata de dar respuesta a dos preguntas fundamentales: ¿de qué modo se ve afectado el comercio Norte-Sur si ambas regiones deciden conservar un mayor número de especies naturales? y, ¿cómo influye en este comercio una distribución más homogénea de los pesos asignados a las especies?

El Sur exporta un bien intensivo en recursos naturales bajo cuya producción se conserva un menor número de especies que bajo el bien exportado por el Norte. La utilidad marginal de la conservación de una especie adicional disminuye con el número de especies ya conservadas y es, por lo tanto, mayor en el Sur. De esta forma, el Sur presenta "ventaja comparativa" en la conservación de las especies naturales. Es decir, bajo determinadas condiciones generales, si el Sur decide aumentar el número de especies conservadas bajo la producción del bien que exporta, su relación de intercambio aumentará (por ejemplo, agricultura ecológica y todo tipo de productos ecológicos tales como cosméticos, pesticidas,...). Esto es cierto incluso si el Norte decide, a su vez, incrementar en la misma cuantía el número de especies conservadas. La respuesta a la primera pregunta es que si se incrementa el número de especies conservadas bajo la producción de ambos bienes, la relación de intercambio que mejora es la del Sur.

El otro aspecto a tratar es el efecto de una distribución de pesos más homogénea. Aquí nos interesa un cambio de preferencias que implique, no una más alta valoración del ecosistema global, sino únicamente una valoración más uniforme entre las especies e indirectamente una mayor valoración de la biodiversidad. El Sur saldría perjudicado en su relación de intercambio tras un cambio de esta naturaleza, el cual se considera probable. Por lo tanto, en la situación actual, el Sur se ve sometido al riesgo que este tipo de cambio supone. En décadas recientes, los países en vías de desarrollo han visto cómo su relación de intercambio ha ido disminuyendo paulatinamente, lo cual se ha visto reflejado en un descenso de los precios internacionales de los productos agrícolas.

En la sección 2.1 se especifica un modelo de equilibrio general de comercio Norte-Sur en el que la biodiversidad conservada entra a formar parte de la función de utilidad, pues los individuos no sólo obtienen utilidad del consumo del bien, sino también del conocimiento de que éste ha sido producido de forma respetuosa con el medio ambiente. De esta forma, la diversidad biológica afecta a la demanda de bienes. En la sección 2.2 se muestra cómo un cambio en el número de especies conservadas afecta a la relación de intercambio. Si los productores de uno de los bienes mejoran la producción de modo que se conserve más biodiversidad, ello incrementa el precio relativo de ese bien. Si son los productores de ambos bienes los que deciden dar este paso y lo hacen en la misma cuantía, entonces el bien exportado por el Sur ve aumentado su precio relativo en relación al exportado por el Norte. Al mismo tiempo, se prueba cómo una distribución más homogénea de pesos reduce la relación de intercambio en el Sur. En la sección 2.3 se realiza el mismo estudio pero teniendo en cuenta que la biodiversidad no sólo afecta a la función de demanda, sino que también actúa sobre la función de oferta. En la sección 2.4 se resuelve el modelo y se lleva a cabo una simulación del comportamiento del precio relativo del Sur cuando los productores de ambos bienes incrementan en la misma cuantía el número de especies conservadas. Finalmente, en la sección 2.5 se presentan las conclusiones del capítulo, así como las posibles críticas al modelo analizado incluyendo propuestas de mejora, algunas de las cuales se desarrollarán en capítulos subsiguientes. El contenido de este capítulo puede encontrarse, en parte, en Cabo (1999).

2.1 Biodiversidad como fuente de utilidad

En esta sección revisamos un modelo Arrow-Debreu de equilibrio general de comercio Norte-Sur siguiendo a Chichilnisky (1991). Esta autora establece un modelo de equilibrio general en el que dos regiones comercian entre sí, no obstante, no introduce explícitamente ninguna variable medioambiental. Por el contrario, en este capítulo se tendrá en cuenta el medio ambiente, medido a través de la diversidad biológica que es conservada en cada región. En un primer momento, suponemos que la biodiversidad entra a formar parte de la función de utilidad, entendiendo que el consumidor obtiene un beneficio por mantener inalteradas las poblaciones de las diversas especies dentro de un ecosistema.

En este modelo dos regiones comercian entre sí: el Norte, constituido por los países desarrollados y el Sur, integrado por los países en vías de desarrollo. Estas regiones producen y consumen dos tipos de bienes, A y B, utilizando como inputs recursos naturales y capital, entendiendo por capital un agregado que incluye capital físico y humano. El bien A es intensivo en capital, mientras que el bien B lo es en recursos naturales. De esta forma, una de las regiones, el Norte, exporta bien A y se dice que es intensiva en capital, mientras que el Sur exporta bien B y es, por tanto, intensiva en recursos naturales. Cada región presenta una especialización incompleta en uno de los bienes.

Como se ha señalado anteriormente, la utilidad de los agentes no sólo se deriva de la cantidad consumida de cada bien, sino también de la biodiversidad conservada. Esta última viene medida como el número de especies naturales cuya población se mantiene inalterada dentro del ecosistema que soporta la producción de cada uno de los bienes.

El agente decide las cantidades a consumir de ambos bienes, A y B, teniendo en cuenta el impacto que esta decisión tiene sobre la biodiversidad. Esto nos lleva a elegir una función de utilidad no separable entre bienes de mercado y biodiversidad. Este tipo de funciones de utilidad está relacionado con la literatura de "green marketing", vease Polonsky & Mintu-Wimsatt (1995) y Mintu-Wimsatt & Lozada (1996). Esta utilidad puede definirse mediante la siguiente función Cobb-Douglas:

$$U(A,B) = A^{l(n_A)} B^{l(n_B)},$$

donde

$$l(n) = \int_0^n e^{-x/\mu}/\mu dx = 1 - e^{-n/\mu}. \tag{2.1}$$

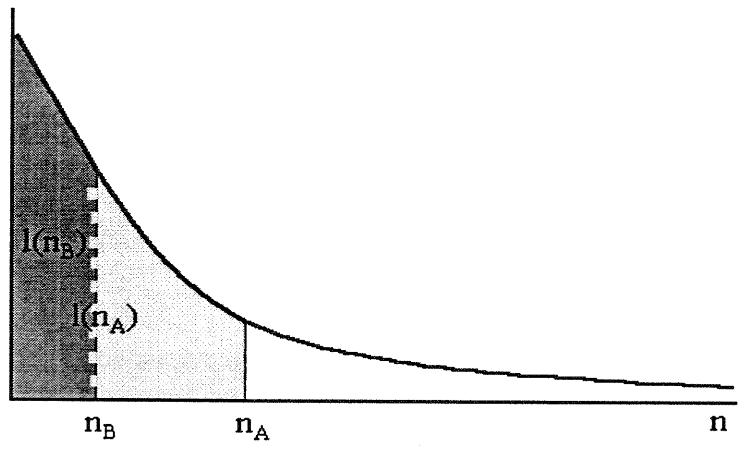

Figura 2.1

Aquí, $n_A\,(n_B)$ denota el número de especies naturales cuya población no se ve afectada por el proceso productivo de $A(B)$. Esta cifra mide la biodiversidad conservada en el ecosistema que soporta el proceso productivo de $A(B)$. Los individuos confieren un peso distinto a cada una de las especies según la utilidad que les reporta Atendiendo a estos pesos, las infinitas especies se ordenan en el eje de abscisas en orden descendente. La figura 2.1 muestra la función de pesos dependiente del valor del parámetro μ: cuanto mayor sea el valor de este parámetro más homogénea es la distribución de pesos, lo que implica una curva más plana. Dentro de su función de utilidad los agentes no incorporan las infinitas especies existentes en el ecosistema, sino sólo aquéllas que son efectivamente conservadas por el proceso productivo de cada bien. La agregación de estas especies se realiza mediante la función de distribución exponencial denotada por $l\,(n)$. Se trata de una función cóncava y creciente con el número de especies conservadas, n, y que depende del parámetro μ; esto es, del grado de homogeneidad con que se distribuyen los pesos entre las infinitas especies. De esta forma, el exponente de la función de utilidad, $l\,(n_A)\,(l\,(n_B))$, mide el valor de las $n_A\,(n_B)$ especies conservadas bajo el proceso productivo del bien $A\,(B)$.

El valor del ecosistema global se define como la suma ponderada del valor de cada una de las infinitas especies en el mismo. Suponemos que este valor se mantiene constante, independientemente de cual sea el grado de homogeneidad con que los agentes valoran las infinitas especies. Para que este supuesto se cumplase ha elegido como función de pesos la función de densidad asociada a la distribución exponencial. El área por debajo de la curva de pesos es siempre igual a la unidad aún cuando varíe el grado de homogeneidad de los pesos[6]. Con ésto se garantiza que si se produce un cambio de preferencias plasmado en una variación de μ, ello no implica que los agentes valoren el medio ambiente en mayor o menor medida, por el contrario, su interés respecto al medio ambiente en su conjunto se mantiene constante.

[6] $\int_0^\infty e^{-x/\mu}/\mu\,dx = 1, \quad \forall \mu > 0.$

Dado que el bien B es intensivo en recursos naturales, mientras que el bien A utiliza capital físico y humano como input principal, de ahora en adelante asumiremos que el proceso productivo del bien A es más respetuoso con el medio ambiente que el de B. Así, el número de especies conservadas es mayor bajo la producción de A que bajo la producción de B, es decir, $n_A > n_B$. Este supuesto implica, por tanto, que el bien exportado por el Sur conserva menos especies que el exportado por el Norte. Si bien suele admitirse que la diversidad biológica es más rica en los países en vías de desarrollo, conviene aclarar que este supuesto no rebate dicha afirmación, sino que únicamente indica que es en estos países donde, además, la pérdida de biodiversidad es más rápida.

Esta especificación de la función de utilidad, presenta dos propiedades razonables y que serán esenciales en la obtención de los resultados que se muestran en la siguiente sección:

- La distribución de pesos está gobernada por el valor esperado, μ. Un valor bajo de μ indica que los agentes confieren una gran importancia a un número reducido de especies, mientras que un valor alto de este parámetro implica una curva más plana. Si el grado de homogeneidad, μ, aumenta, el número de especies conservadas bajo la producción de ambos bienes debe aumentar para que los exponentes y, por lo tanto la utilidad, se mantengan constantes. Esto significa un aumento en el interés por la biodiversidad. No debe olvidarse que un incremento de μ no implica una mayor valoración de los ecosistemas, sino únicamente una valoración más homogénea de las especies que los habitan.
- El hecho de que la función de distribución exponencial, $l(n)$, sea cóncava, junto con el supuesto $n_A > n_B$, lleva inmediatamente a que el efecto marginal de la conservación de la biodiversidad bajo la producción de A sea menor que bajo la de B : $l'(n_A) < l'(n_B)$. Parece lógico admitir este punto, la conservación de una especie adicional proporcionará un mayor crecimiento de la utilidad cuanto menor número de especies se estén conservando.

Además se tienen en cuenta otros dos supuestos adicionales. En primer lugar, el número de especies conservadas es una característica de cada bien, pero no de la región en la que éste es producido. Por lo tanto, n_A (resp.n_B) son iguales en el Norte y en el Sur. No obstante, dado que el Norte exporta A mientras que el Sur exporta B, n_A se encuentra intrínsecamente unido y es representativo del Norte y n_B del Sur. En segundo lugar, la biodiversidad proporciona utilidad a los consumidores, independientemente de que ésta sea conservada en la región en la que vive el consumidor o en el extremo opuesto del globo. Así, un consumidor del Norte verá incrementada su utilidad en la misma medida cuando aumenta la conservación de la biodiversidad en su región o cuando lo hace en el Sur y viceversa.

Los consumidores deben decidir las cantidades a consumir de ambos bienes, A y B, para maximizar su utilidad. La teoría de decisión del consumidor establece que los consumos óptimos se deducen de la igualdad entre el cociente de utilidades marginales y el cociente de precios

$$U'_B(A,B)/U'_A(A,B) = \theta A^D/B^D = P_B/P_A, \tag{2.2}$$

donde $\theta = l(n_B)/l(n_A)$, mide el valor relativo de las n_B especies conservadas bajo la producción de B con respecto a las n_A conservadas bajo la producción de A; $A^D\left(B^D\right)$ es la demanda de bien $A(B)$; $P_A(P_B)$ es el precio del bien $A(B)$. Debido al supuesto $n_A > n_B$, se tiene $0 < \theta < 1$. De esta forma, la relación de precios debe ser igual al producto del ratio θ por la inversa del cociente de las demandas de ambos bienes. Esta relación es la misma para ambas regiones dado que n_A, n_B, P_A y P_B no varían de una región a otra.

Por el contrario, por el lado de la oferta, los parámetros que definen las funciones de producción de ambos bienes, así como la oferta de los inputs, son diferentes en el Norte y en el Sur. En adelante mostramos las ecuaciones que definen la economía del Sur. De forma idéntica, se podrían hacer explícitas las ecuaciones para el Norte.

Se considera que ambos bienes se producen con arreglo a una función de producción de coeficientes fijos

$$\begin{aligned} A^S &= \min\left(E^A/a_2, K^A/c_2\right), \\ B^S &= \min\left(E^B/a_1, K^B/c_1\right), \quad a_1,\, a_2,\, c_1,\, c_2 > 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

El input E representa recursos naturales y K un agregado tanto de capital físico como humano; el exponente de cada input indica la producción del bien en el que cada input es utilizado. Como ya se ha señalado, se supone que existe una economía de tipo dual, es decir, el bien A es intensivo en input capital, mientras que el bien B es intensivo en recursos naturales. Esta dualidad se representa a través de un valor positivo de $D = a_1c_2 - a_2c_1$. Cuanto mayor sea la dualidad entre las tecnologías de ambos bienes, mayor es el valor de D. Asumiendo mercados de competencia perfecta, para cada bien, el coste de los inputs iguala los ingresos por ventas, a partir de (2.3) puede obtenerse la relación entre precios de inputs y outputs,

$$P_E = \left(c_2P_B - c_1P_A\right)/D, \tag{2.4}$$
$$r = \left(a_1P_A - a_2P_B\right)/D, \tag{2.5}$$

donde P_E es el precio de los recursos naturales y r es el precio del capital.

La oferta de factores productivos se define como una función lineal de su precio, de pendiente positiva y valor en el origen también mayor que cero. Estos valores en el origen, $\overline{E}$ y $\overline{K}$, se denominam oferta autónoma de recursos naturales y capital, respectivamente.

$$E^S = \alpha \cdot P_E + \overline{E}, \tag{2.6}$$
$$K^S = \beta \cdot r + \overline{K}, \qquad \overline{E},\, \overline{K},\, \alpha,\, \beta > 0. \tag{2.7}$$

La oferta final de ambos bienes se puede definir como función de la demanda de factores

$$\left.\begin{aligned} E^D = E^A + E^B = a_2A^S + a_1B^S \\ K^D = K^A + K^B = c_2A^S + c_1B^S \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$B^S = \left(c_2E^D - a_2K^D\right)/D, \tag{2.8}$$

$$A^S = \left(a_1 K^D - c_1 E^D\right)/D. \tag{2.9}$$

En equilibrio todos los mercados se vacían, teniendo las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} E^D &= E^S, &(2.10)\\ K^D &= K^S, &(2.11)\\ B^S &= B^D + X_B^S, &(2.12)\\ A^D &= A^S + X_A^D, &(2.13)\\ P_B X_B^S &= P_A X_A^D. &(2.14) \end{aligned}$$

Cuando la cantidad ofrecida de un bien es mayor que la cantidad demandada, la diferencia se exporta. En el caso de que la cantidad demandada sea mayor, será necesario importar dicho bien. Según ésto, X_B^S es la cantidad de bien B que es producida pero no consumida en el Sur, es decir, exportaciones al Norte; y X_A^D es la cantidad de bien A consumida pero no producida en el Sur, esto es, importaciones procedentes del Norte. Las ecuaciones deducidas para la economía del Sur son aplicables de forma análoga a la economía del Norte[7]. El equilibrio de los mercados internacionales asegura un precio idéntico en ambas regiones. Asimismo, las cantidades exportadas por una región igualan las cantidades importadas por la otra. Por ello se tiene:

$$\begin{aligned} P_B(S) &= P_B(N), &(2.15)\\ P_A(S) &= P_A(N), &(2.16)\\ X_B^S(S) &= X_B^D(N). &(2.17) \end{aligned}$$

Dado que la ecuación (2.14) se cumple en ambas regiones y, teniendo en cuenta al mismo tiempo las igualdades (2.15) a (2.17), es fácil concluir

$$X_A^D(S) = X_A^S(N). \tag{2.18}$$

Con objeto de simplificar el análisis llevamos a cabo una normalización de precios. En concreto, se iguala el precio del bien A a uno, $P_A = 1$. Debido a esta normalización, P_B pasa a ser un precio relativo que representa la relación de intercambio del Sur, dada por el cociente entre el precio del bien B y el precio del bien A.

Teniendo en cuenta la ley de Walras,

$$P_B B + P_A A = rK + P_E E = Y,$$

donde Y es la renta total en el Sur. Si por otro lado se considera la relación (2.2) entre precios y utilidades marginales, pueden deducirse la función de demanda de cada uno de

[7] El Norte se caracteriza por un menor valor de α y mayor de β. Asimismo, en el Norte, la oferta autónoma de capital, $\overline{K}$, es mayor o igual y la oferta autónoma de recursos naturales, $\overline{E}$, menor o igual que sus correspondientes valores en el Sur:

$$\overline{K}(N) \geq \overline{K}(S); \qquad \overline{E}(N) \leq \overline{E}(S).$$

Según esto, la oferta de capital es mayor en el Norte, mientras que la oferta de recursos naturales es mayor en el Sur. Esto explica, desde el punto de vista de la oferta, porqué el Sur exporta bien B y el Norte bien A.

los bienes en el equilibrio

$$
\begin{aligned}
A^D &= (rK + P_E E) / (1 + \theta), && (2.19)\\
B^D &= \theta (rK + P_E E) / [(1 + \theta) P_B]. && (2.20)
\end{aligned}
$$

El parámetro θ afecta a la demanda de ambos bienes, negativamente al bien A y positivamente al bien B. De nuevo, este mismo razonamiento se podría emplear para deducir las demandas de ambos bienes en la economía del Norte.

Las ecuaciones (2.4), (2.5), (2.6) y (2.7), las igualdades que se derivan de que los mercados estén en equilibrio y el supuesto de la normalización de precios permiten obtener la oferta y la demanda de ambos bienes en el Sur como función del precio relativo, P_B, del ratio θ y de los parámetros del modelo. Idénticamente se podrían obtener estas funciones para el Norte, cambiando únicamente el valor de determinados parámetros. Centrándonos en el bien A, en equilibrio el exceso de oferta en el Norte debe ser igual al exceso de demanda en el Sur, como muestra la ecuación (2.18). De esta forma, el exceso de demanda "mundial" del bien A, denotado por $F(P_B)$, debe ser idénticamente igual a cero. Así,

$$
\begin{aligned}
&A^D(S) - A^S(S) = A^S(N) - A^D(N) \Rightarrow\\
&F(P_B) \equiv P_B^2 \{(\Gamma(N) + \Gamma(S)) / (1 + \theta)\} +\\
&P_B \{[\Phi(N) + \Phi(S) + (\theta - 1)(\Psi(N) + \Psi(S))] / (1 + \theta)\} - \qquad (2.21)\\
&\theta [\Lambda(N) + \Lambda(S) + \Omega(N) + \Omega(S)] / (1 + \theta) = 0,
\end{aligned}
$$

donde $\Lambda = (\alpha c_1^2 + \beta a_1^2)/D^2$, $\Omega = \left(a_1\overline{K} - c_1\overline{E}\right)/D$, $\Psi = (\alpha c_1 c_2 + \beta a_1 a_2)/D^2$, $\Gamma = (\alpha c_2^2 + \beta a_2^2)/D^2$ y $\Phi = \left(c_2\overline{E} - a_2\overline{K}\right)/D$. Cabe notar que, en ambas regiones, los coeficientes Λ, Ψ y Γ son positivos por definición. Por su parte, Ω y Φ representan la oferta de los bienes A y B, respectivamente, si los precios de los inputs capital y recursos naturales fuesen nulos. Suponemos que estas ofertas son positivas. Para ello es necesario asumir que las ofertas autónomas de cada uno de los inputs, $\overline{K}$ y $\overline{E}$, toman valores que garantizan que Ω y Φ son positivos simultaneamente[8].

Dado que $F(P_B)$ es un polinomio de grado dos en el que los coeficientes de primer y segundo grado son positivos mientras que el término independiente es negativo, es evidente que existe una única raíz real positiva de la ecuación (2.21). Esta raíz será el precio relativo de equilibrio del bien B, P_B^*, que únicamente depende de los parámetros del modelo así como del ratio θ. Una vez que se conoce el precio de equilibrio, pueden calcularse los valores de equilibrio de todas las variables del modelo. De este modo el modelo de equilibrio general se resuelve completamente en función únicamente del número de especies conservadas bajo la producción del bien exportado por una y otra región, así como del parámetro μ que define la función de pesos.

---

[8] La distancia entre $\overline{K}$ y $\overline{E}$ depende de cuáles sean los coeficientes de Leontief, es decir, de cuán intensamente sean empleados el capital en la producción de A y los recursos naturales en la de B. Cuanto más duales sean las tecnologías de ambos bienes ($a_1 >> c_1$ y $c_2 >> a_2$) mayor podrá ser la diferencia entre la oferta autónoma de cada uno de los inputs, $\overline{K}$ y $\overline{E}$.

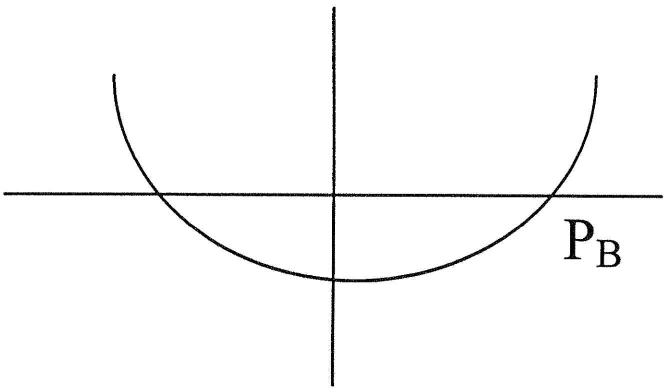

Figura 2.2

2.2 Efecto de biodiversidad y preferencias sobre la relación de intercambio

2.2.1 Efecto de n_A y n_B sobre la relación de intercambio

En esta sección se prueba que si los productores de bien B, principalmente radicados en el Sur, deciden incrementar el número de especies conservadas bajo su proceso productivo, n_B, entonces crece la utilidad de los agentes económicos, así como el cociente de sus utilidades marginales. Consecuentemente, atendiendo a la ecuación (2.2), también aumentará el precio relativo, P_B^*, y, por tanto, su relación de intercambio. Para los productores del bien A, esencialmente establecidos en el Norte, se puede aplicar el mismo razonamiento. Aumentando el número de especies conservadas, n_A, estos productores conseguirán disminuir el cociente de utilidades marginales y, por tanto, el precio relativo del bien B, es decir, aumentar su propia relación de intercambio. De esta forma, incrementando el número de especies conservadas bajo su proceso productivo, los productores consiguen incrementar el precio relativo del bien que producen. Adicionalmente se demuestra que este efecto es más poderoso cuando es aplicado por los productores del bien B, es decir, aquéllos que producen en los países en vías de desarrollo. La demostración de este resultado se basa en el diferente efecto que la conservación de una especie adicional produce sobre la utilidad del consumidor, siendo más fuerte este efecto para el bien B. Según esto, podemos decir que el Sur muestra una "ventaja comparativa" en la conservación de especies naturales pues, aumentando su número, la relación de intercambio crece en mayor cuantía que en el Norte.

El siguiente teorema recoge el efecto sobre el precio relativo de B, P_B, de un incremento en el número de especies conservadas bajo la producción tanto del bien A, n_A, del bien B, n_B, así como el efecto conjunto:

Teorema 2.1 *El precio relativo de un determinado bien, se ve incrementado aumentando el número de especies conservadas bajo el proceso productivo de dicho bien. Si los productores de ambos bienes incrementan, al unísono y en la misma cuantía, la biodiversidad* *conservada, aumentará el precio relativo del bien exportado por el Sur, B.*

$$\begin{aligned} &\partial P_B/\partial n_A{=}\partial P_B/\partial\theta\cdot\partial\theta/\partial n_A<0,\\ &\partial P_B/\partial n_B{=}\partial P_B/\partial\theta\cdot\partial\theta/\partial n_B>0,\\ &\partial P_B/\partial n_A{+}\partial P_B/\partial n_B{=}\partial P_B/\partial\theta{\cdot}\partial\theta/\partial n_A{+}\partial P_B/\partial\theta{\cdot}\partial\theta/\partial n_B>0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Demostración

Para calcular estas derivadas, en primer lugar se obtiene la derivada del precio relativo, P_B, con respecto al ratio θ (cociente de los exponentes de la función de utilidad) y posteriormente se aplica la regla de la cadena. Teniendo en cuenta el teorema de existencia de la función implícita, se puede probar que la ecuación (2.21) define a P_B como función implícita de θ, pudiendose obtener la siguiente derivada[9]:

$$\begin{aligned} &\partial P_B/\partial\theta=-\left[\partial F\left(P_B\right)/\partial\theta\right]/\left[\partial F\left(P_B\right)/\partial P_B\right]=-1/\left(1+\theta\right)\\ &[-P_B^2\Gamma{+}P_B\left(2\Psi{-}\Phi\right){-}(\Lambda{+}\Omega)]/[2P_B\Gamma{+}(\Phi{+}(\theta{-}1)\Psi)]>0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

En la ecuación (2.19), la función de demanda del bien A presenta una relación negativa con θ. Por otro lado, la función de oferta de A, como muestra la ecuación (2.9), no depende de este ratio. En consecuencia, el exceso de demanda de este bien, expresado a través del polinomio $F(P_B)$, está necesariamente relacionado de forma negativa con el ratio θ, siendo por tanto positivo el numerador de la expresión (2.23). Por otro lado, en equilibrio, el exceso de demanda del bien A muestra una pendiente positiva con respecto a P_B (véase la figura 2.2) y por lo tanto, el denominador de (2.23) es también positivo. Esto es sencillo de demostrar dado que el precio de equilibrio es la raíz positiva del polinomio $F(P_B)$, que siempre es mayor que el valor de P_B en el que el polinomio se hace mínimo, $-\left(\Phi+(\theta-1)\Psi\right)/2\Gamma$ (precios por debajo de este valor implican pendientes negativas del polinomio, mientras que para precios por encima la función muestra pendiente positiva). De esta forma hemos probado, que el precio relativo está relacionado positivamente con θ.
Una vez que sabemos que $\partial P_B/\partial\theta$ tiene signo positivo, sólo resta conocer el signo de las derivadas de θ con respecto al número de especies conservadas bajo la producción de A y de B respectivamente, así como el de su suma. Dado que se ha supuesto $n_A > n_B$, y que $l(n)$ es una función cóncava, puede concluirse de forma inmediata que el efecto positivo de un incremento de n_B es más fuerte que el efecto negativo causado por una unidad adicional de n_A. De este modo se tienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} &\partial\theta/\partial n_A=-e^{-n_A/\mu}\left(1-e^{-n_B/\mu}\right)/\left[\mu\left(1-e^{-n_A/\mu}\right)^2\right]<0,\\ &\partial\theta/\partial n_B=e^{-n_B/\mu}/\left[\mu\left(1-e^{-n_A/\mu}\right)\right]>0,\\ &\partial\theta/\partial n_A+\partial\theta/\partial n_B=\left(e^{-n_B/\mu}-e^{-n_A/\mu}\right)/\left[\mu\left(1-e^{-n_A/\mu}\right)^2\right]>0. \end{aligned}$$

[9] A partir de ahora, con el objeto de que la notación resulte más manejable, la suma de los valores para el Norte y el Sur se representará por una única letra griega mayúscula. Así, por ejemplo: $\Phi = \Phi(N) + \Phi(S)$.

Estas últimas derivadas, junto con (2.23) prueban los signos de las derivadas que aparecen en la exrpesión (2.22).□

Nótese que P_B no sólo es el precio relativo del bien B, sino que igualmente es el inverso del precio relativo de A. Por lo tanto, la primera desigualdad en (2.22) implica que un incremento en el número de especies conservadas bajo la producción de A reduce el precio relativo de B, o lo que es lo mismo, aumenta el precio relativo de A. Asimismo, por la segunda desigualdad en (2.22), si los productores de B conservan mayor diversidad biológica, crece el precio relativo de este bien.

Si la industria del bien de exportación en cualquiera de las regiones decide reducir el número de especies que son dañadas por su proceso productivo, entonces la relación de intercambio de esa región se ve mejorada. Cuando las dos regiones deciden reducir, al unísono, el número de especies naturales perjudicadas por su producción, entonces el aumento en el precio relativo del bien B, exportado por el Sur, es mayor que el incremento en el precio relativo del bien A, exportado por el Norte.

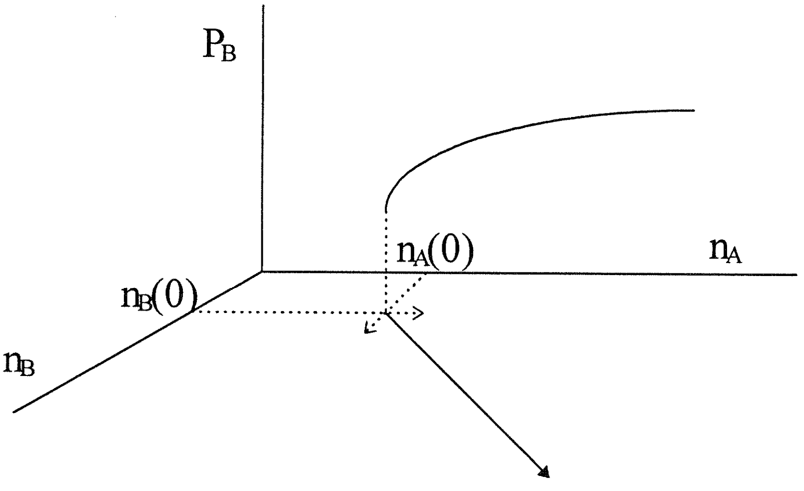

Figura 2.3

El signo de la última desigualdad en (2.22) se mantendrá positivo siempre que se cumpla el supuesto $n_A > n_B$. Si ambas cifras creciesen en la misma cuantía entonces, aún cuando la diferencia se mantiene constante en términos absolutos, disminuye tendiendo hacia cero en términos relativos. La "ventaja comparativa" del Sur converge hacia cero según ambas regiones aumenten continuadamente el número de especies conservadas tendiendo hacia infinito.

Suponiendo que n_A y n_B aumentan en la misma cuantía, el polinomio (2.21) puede reescribirse como una función de n_A y la constante λ, siendo $\lambda = n_A - n_B$. La raíz positiva de esta ecuación es el precio relativo de equilibrio, $P_B^* [n_A, \lambda, \mu, \zeta]$, donde ζ es el vector de parámetros $(a_1, a_2, c_1, c_2, \overline{E}, \overline{K}, \alpha, \beta)$. Este precio converge hacia una constante positiva cuando n_A tiende hacia infinito,

$$\lim_{n_A \to \infty} P_B^* = -\Phi / [2\Gamma] + \sqrt{(\Phi/2\Gamma)^2 + [\Omega + \Lambda]/\Gamma} > 0.$$

Por lo tanto, la derivada de este precio con respecto a n_A tiende hacia cero cuando n_A tiende hacia infinito. De esta forma, la variación en el precio relativo del Sur, P_B^*, es siempre positiva, aunque converge hacia cero como se muestra en la figura 2.3. La velocidad de convergencia de este proceso depende de los parámetros del modelo[10].

2.2.2 Efecto de μ sobre la relación de intercambio

En este apartado se estudia el efecto de una valoración más homogenea de las especies naturales sobre el comercio Norte-Sur, toda vez que se ha supuesto probable un cambio de las preferencias de los agentes en esta dirección. Los consumidores no valoran el medio ambiente en mayor medida, lo que sí varía es cómo estos agentes distribuyen el valor global que asignan a un ecosistema, entre las infinitas especies que lo componen. Esta redistribución produce un cambio en los precios relativos de los bienes intercambiados entre el Norte y el Sur. En particular, se asume que en el futuro es muy probable que los individuos valoren de forma más homogénea el conjunto de infinitas especies en un ecosistema, aún cuando la valoración global del mismo se mantenga constante. Este cambio en las preferencias se muestra por medio de un mayor μ. Una distribución más homogénea de precios implica que los pesos asignados a las especies menos valoradas crecen, en comparación con los pesos de las especies más valoradas. El exponente $l\,(n_B)$ en la función de utilidad, que sólo tiene en cuenta un pequeño conjunto que contiene a las especies más valoradas, disminuirá en términos comparativos con respecto a $l\,(n_A)$ que tiene en cuenta un rango más amplio de especies, vease la figura 2.1. De esta forma, un incremento en μ reducirá el valor de θ y, consecuentemente, el precio relativo de B, P_B. Teniendo en cuenta el supuesto de que la producción del bien B afecta a más especies que la producción del bien A, el Sur, que exporta B, corre el riesgo de una caída de su precio relativo[11]. Este resultado se pruba en el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Si los agentes económicos valoran las infinitas especies naturales de forma más homogenea, disminuirá el precio relativo del bien exportado por el Sur, B.*

$$\partial P_B/\partial\mu = \partial P_B/\partial\theta \cdot \partial\theta/\partial\mu < 0. \tag{2.24}$$

Demostración

Como ya se ha visto en la demostración del teorema 2.1, $\partial P_B/\partial\theta > 0$. Por lo tanto, resta únicamente calcular la derivada del ratio θ respecto al parámetro μ :

$$\partial\theta/\partial\mu = \left[n_A e^{-n_A/\mu} - n_B e^{-n_B/\mu} + (n_B - n_A)\, e^{-(n_A+n_B)/\mu}\right] / \left[\mu^2 \left(1 - e^{-n_A/\mu}\right)^2\right].$$

[10] En particular, nuestras simulaciones muestran en la sección 2.4.2 que cuanto mayor sea el grado de homogeneidad de los pesos otorgados al conjunto de especies, μ, menor será la velocidad de convergencia.

[11] Obviamente, el aumento en el precio relativo es mayor cuanto mayor sea la diferencia relativa entre el número de especies conservadas en la producción de los bienes A y B. Si se produce un proceso de crecimiento paralelo de n_B y n_A, de manera que su diferencia relativa tienda hacia cero, la caída en el precio relativo, como consecuencia del cambio de preferencias expresado, es cada vez mas pequeña, tendiendo también a cero.

De la expresión anterior se tiene:

$$\partial\theta/\partial\mu < 0 \Leftrightarrow n_A e^{-n_A/\mu}/\left(1 - e^{-n_A/\mu}\right) < n_B e^{-n_B/\mu}/\left(1 - e^{-n_B/\mu}\right).$$

Dado que $n_A > n_B$, basta con probar que

$$\phi(x) = x \exp[-x/\mu]/(1 - \exp[-x/\mu])$$

es una función decreciente con μ. Para ello calculamos su derivada:

$$\phi'(x) = (\exp[x/\mu] - x/\mu \exp[x/\mu] - 1) / (\exp[x/\mu] - 1)^2.$$

$\phi'(x)$ es negativo si y solo si el numerador lo es. Realizando el cambio de variable $y = x/\mu$, esta condición se puede reescribir

$$\exp[y](1 - y) - 1 < 0. \tag{2.25}$$

Al ser y siempre positivo, pueden presentarse dos casos:

- $y \geq 1$: la desigualdad (2.25) se cumple.
- $y \in (0,1)$: escribiendo el desarrollo de Taylor de segundo orden de $\exp[-y]$ alrededor de $y = 0$,

  $$\exp[-y] \simeq 1 - y + y^2/2,$$

  se tiene que

  $$\exp[-y] > (1 - y),$$

  con lo que se prueba que en este caso también se cumple la desigualdad (2.25).□

Los resultados que se muestran en esta sección indican que, según aumenta el número de especies conservadas bajo el proceso productivo del bien B, la posición de comercio del Sur mejora. Esto se debe a dos efectos: en primer lugar, aumenta el precio relativo del bien B, incluso si los productores de A incrementan n_A en la misma cuantía; en segundo lugar, disminuye el riesgo asociado a un probable aumento de μ[12].

No obstante, para llegar a esta conclusión no se ha considerado el efecto de una mayor conservación de la biodiversidad sobre el lado de la oferta. Se está asumiendo implícitamente que las empresas pueden cambiar su proceso productivo sin coste alguno. De "algún modo", se produce un cambio tecnológico que permite producir la misma cantidad de cada bien pero afectando a un menor número de especies naturales. En la siguiente sección se tiene en cuenta que una mayor conservación de la diversidad biológica no sólo afecta a la demanda de bienes a través de la función de utilidad, sino que también tiene un efecto sobre la función de oferta.

2.3 Biodiversidad y la función de oferta

En esta sección tenemos en cuenta que si los productores deciden conservar un mayor número de especies, esto va a repercutir sobre la función de oferta de bienes. En concreto,

[12] Aunque la probabilidad de que se produzca un incremento de μ no varía, sí disminuye el perjuicio que este hecho provoca.

un aumento en la conservación de la biodiversidad bajo la producción de un determinado bien, sólo se podrá llevar a cabo si va asociado a un aumento en las cantidades de inputs utilizados para la producción de dicho bien. Este incremento de inputs se dedicará, bien a la consecución de una tecnología que permita una producción más ecológica, o bien a paliar los efectos del proceso productivo sobre el ecosistema: tratamiento de residuos, limpieza de la polución... De esta forma, se produce un trade-off entre el número de especies conservadas y la producción de bienes. La función de oferta de bienes está relacionada negativamente con el número de especies conservadas, mientras que la función de demanda presenta una relación positiva. Para modelizar este trade-off asumimos que los coeficientes de Leontief que definen la función de producción no son constantes sino que crecen exponencialmente con el número de especies conservadas en el proceso productivo de ese bien. A continuación se especifican estos coeficientes para los dos bienes en el Norte:

$$\begin{array}{ll} a_1^N(n_B) = a_1(N)\exp[n_B], & a_2^N(n_A) = a_2(N)\exp[n_A], \\ c_1^N(n_B) = c_1(N)\exp[n_B], & c_2^N(n_A) = c_2(N)\exp[n_A]. \end{array} \tag{2.26}$$

De la misma forma se definen los coeficientes para el Sur.

Aunque en principio, esta especificación requiere de un parámetro de escala adicional, η, en todos los coeficientes, por ejemplo, $a_1^N(n_B) = a_1(N)\exp[n_B/\eta]$, llevamos a cabo una nomalización: $\eta = 1$. El lado de la demanda no se ve afectado por dicha normalización:

$$l\,(n) = 1 - \exp[-\,(n/\eta)\,/\,(\mu/\eta)] = 1 - \exp[-n/\mu].$$

Por tanto, el ratio $\theta = l\,(n_B)\,/l\,(n_A)$ es independiente de η.

Por otro lado, cabe notar que, el número de especies conservadas no afecta al grado de intensidad con el que los inputs son empleados en el proceso productivo de uno u otro bien. Así,

$$\begin{array}{l} c_2^N(n_A)/a_2^N(n_A) = c_2(N)/a_2(N), \\ a_1^N(n_A)/c_1^N(n_A) = a_1(N)/c_1(N). \end{array} \tag{2.27}$$

Con esto, estamos asumiendo que la conservación de un mayor número de especies se consigue a costa de un aumento proporcional en los dos inputs, de forma que la intensidad con que ambos se emplean se mantiene constante. Este supuesto garantiza que sea posible incrementar la conservación de la biodiversidad, aún cuando el Sur siga exportando bienes intensivos en recursos y el Norte bienes intensivos en capital. No es necesario que el Sur intensifique el uso de capital en la producción de B para conservar mayor número de especies.

Las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.26) muestran que, "ceteris paribus", la oferta de un bien está relacionada negativamente con el número de especies cuya población no es alterada por la producción de dicho bien.

Utilizando el modelo definido por las ecuaciones (2.2) a (2.20) pero considerando los nuevos coeficientes de Leontief definidos en (2.26), se obtiene de nuevo un polinomio de orden dos, $F(P_B)$, para representar el exceso de demanda del bien A, donde

$$\begin{aligned}
&F(P_B) = A^D(N) + A^D(S) - \left[A^S(N) + A^S(S)\right] = \\
&1/(2-\mathbb{A}-\mathbb{B})\left\{P_B^2\left[(\Gamma(N)+\Gamma(S))(1-\mathbb{A})\right]/\exp[2n_B] + \right. \\
&P_B\left[(\Phi(N)+\Phi(S))(1-\mathbb{A})\exp[n_A] + (\Psi(N)+\Psi(S))(\mathbb{A}-\mathbb{B})\right]/\exp[n_A+n_B] + \\
&\left.((\mathbb{B}-1)\left[(\Lambda(N)+\Lambda(S)) + (\Omega(N)+\Omega(S))\exp[n_A]\right])/\exp[2n_A]\right\} = \\
&a[n_A, n_B, \mu, \zeta]\,P_B^2 + b[n_A, n_B, \mu, \zeta]\,P_B + c[n_A, n_B, \mu, \zeta],
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
&0 < \mathbb{A} \equiv \exp[-n_A/\mu] < \mathbb{B} \equiv \exp[-n_B/\mu] < 1, \\
&0 < \mathbb{A} < \mathbb{B} \rightarrow 0 \text{ cuando } n_A > n_B \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

El coeficiente de segundo grado, $a[n_A, n_B, \mu, \zeta]$, es positivo, mientras que el término independiente, $c[n_A, n_B, \mu, \zeta]$, es negativo. El polinomio tiene, por tanto, una única raíz positiva. Esta raíz constituye, de nuevo, el precio relativo de equilibrio del bien B, P_B^*. Una vez que se conoce el valor de este precio de equilibrio, se puede calcular el valor del resto de variables. El modelo está así completamente resuelto sin más que calcular el valor de dicha raíz positiva.

2.3.1 Efecto de n_A y n_B sobre la relación de intercambio

La cuestiones que se suscitan son de nuevo las mismas que en la sección 2.2.1: en primer lugar, ¿pueden los productores del bien B, incrementar el precio relativo de este bien aumentando el número de especies que no se ven afectadas por su proceso productivo?; y, en segundo lugar, ¿se mantendrá este crecimiento del precio relativo cuando los productores del bien A aumentan igualmente la biodiversidad conservada? En la sección 2.2.1 se contestó a estas preguntas cuando se suponía que la biodiversidad conservada acrecentaba la demanda de un determinado bien, al aumentar la utilidad que éste proporcionaba. La respuesta ahora es más difícil de encontrar, cuando la conservación de la biodiversidad también incide sobre la oferta de los bienes.

Como en la sección 2.2.1, los productores de cualquiera de los dos bienes pueden incrementar el precio relativo del mismo, sin más que aumentar el número de especies conservadas bajo su proceso productivo. Para probar esto, hay que demostrar que el precio relativo de B, P_B crece con n_B y disminuye con n_A.

Lema 2.1 *La derivada del precio relativo del bien B, P_B, respecto a una cualquiera de las variables de las que depende, tiene signo opuesto a la derivada del polinomio que representa el exceso de demanda del bien A, $F(P_B)$, respecto a dicha variable.*

Demostración

Aplicando el teorema de existencia de la función implícita, puede obtenerse la derivada de P_B con respecto a cualquiera de las variables de las que depende implícitamente a través de la ecuación $F(P_B) = 0$. Se tiene,

$$\partial P_B/\partial x = -\left[\partial F(P_B)/\partial x\right]/\left[\partial F(P_B)/\partial P_B\right].$$

Cuando P_B toma valores en la recta real positiva, A^D es una función creciente de P_B, mientras que A^S es una función decreciente de dicho precio. De esta forma, podemos asegurar que el denominador es positivo en el precio de equilibrio y, por lo tanto, la derivada del precio respecto de cualquiera de las variables de las que depende tiene signo opuesto a la derivada de $F(P_B)$ respecto de dicha variable.□

Teorema 2.3 *El precio relativo de cada uno de los dos bienes se incrementa cuando los productores de dicho bien aumentan el número de especies conservadas bajo su proceso productivo.*

$$\partial P_B / \partial n_A < 0,$$
$$\partial P_B / \partial n_B > 0.$$

Demostración

En primer lugar, escribimos las expresiones que definen la oferta y la demanda mundiales del bien A :

$$A^D = (1-\mathbb{A})\,\Theta / (2-\mathbb{A}-\mathbb{B}),$$
$$A^S = \Omega \exp[-n_A] + \Lambda \exp[-2n_A] - P_B \Psi \exp[-n_A] \exp[-n_B],$$

donde $\Theta = P_B^2 \Gamma \exp[-2n_B] + P_B\left[(\exp[-n_B]\Phi - 2\Psi \exp[-n_A - n_B])\right] + (\Lambda \exp[-2n_A] + \Omega \exp[-n_A])$. La demanda del bien A ha de ser una función positiva y creciente con el precio relativo de B, P_B, en el equilibrio. De esta forma, $\Theta > 0$ y,

$$\partial A^D / \partial P_B = (1-\mathbb{A}) / (2-\mathbb{A}-\mathbb{B}) \{2P_B \Gamma \exp[-2n_B] + (\exp[-n_B]\Phi - 2\Psi \exp[-n_A - n_B])\} > 0.$$

Esta última desigualdad estará garantizada sea cual sea el precio de equilibrio si se cumple la condición siguiente:

$$(\exp[n_A]\Phi - 2\Psi) > 0. \tag{2.28}$$

Es fácil demostrar separadamente el efecto de n_B y de n_A sobre P_B.

1. $\underline{\partial P_B / \partial n_B > 0}$

Diferenciamos el efecto de n_B sobre la oferta de A,

$$\partial A^S / \partial n_B = \Psi \exp[-n_A] \exp[-n_B] > 0,$$

y el efecto sobre la demanda de A. Para este último calculamos primero la derivada de Θ respecto de n_B

$$\partial \Theta / \partial n_B = -P_B \{2P_B \Gamma \exp[-2n_B] + [(\exp[-n_B]\Phi - 2\Psi \exp[-n_A - n_B])]\}.$$

El signo de esta última derivada es negativo dado que el término entre corchetes tiene el mismo signo que la pendiente de A^D con respecto a P_B, la cual debe ser necesariamente positiva en el equilibrio. De ahí,

$$\partial A^D/\partial n_B{=}-\,(1{-}\mathbb{A})\,\mathbb{B}\Theta/\left[(2{-}\mathbb{A}{-}\mathbb{B})^2\,\mu\right]{+}(1{-}\mathbb{A})/(2{-}\mathbb{A}{-}\mathbb{B})\,\partial\Theta/\partial n_B{<}\,0.$$

Esto prueba que $\partial F\,(P_B)\,/\partial n_B\,<0$ y, por tanto, por el lema 2.1,

$$\partial P_B/\partial n_B>0.$$

Así, un incremento de n_B conduce a un mayor precio relativo del bien B, P_B.

2. $\underline{\partial P_B/\partial n_A<0}$

Dado que Θ es positivo,

$$\begin{aligned}
&\partial F\,(P_B)\,/\partial n_A=\\
&1/\left[\mu\,(2{-}\mathbb{A}-\mathbb{B})^2\right]\,\left\{\ P_B^2\,[\Gamma\,(\mathbb{A}-\mathbb{A}\mathbb{B})\,/\exp[2n_B]]+\right.\\
&P_B\,[\Phi\exp[n_A]\,(\mathbb{A}-\mathbb{A}\mathbb{B})\,/\,(\exp[n_A]\exp[n_B])\;+\\
&\Psi\,[2\,(\mathbb{A}\mathbb{B}-\mathbb{A})+\mu\,(\mathbb{B}-\mathbb{A})\,(2{-}\mathbb{A}-\mathbb{B})]\,/\,(\exp[n_A]\exp[n_B])]+\\
&\Lambda(1-\mathbb{B})\,[2\,(2{-}\mathbb{A}-\mathbb{B})\,\mu+\mathbb{A}]\,/\exp[2n_A]+\\
&\left.\Omega(1-\mathbb{B})\,[(2{-}\mathbb{A}-\mathbb{B})\,\mu+\mathbb{A}]\,/\exp[n_A]\right\}=\\
&1/\left[\mu\,(2{-}\mathbb{A}-\mathbb{B})^2\right]\,\{\Theta+\Psi\mu\,(\mathbb{B}-\mathbb{A})\,(2{-}\mathbb{A}-\mathbb{B})\,/\,(\exp[n_A]\exp[n_B])\\
&+\Lambda(1{-}\mathbb{B})2\,(2{-}\mathbb{A}{-}\mathbb{B})\,\mu/\exp[2n_A]+\Omega(1{-}\mathbb{B})\,(2{-}\mathbb{A}{-}\mathbb{B})\,\mu/\exp[n_A]\}{>}\,0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto teniendo en cuenta el lema 2.1,

$$\partial P_B/\partial n_A<0.$$

Esto prueba que un incremento de n_A, reduce el precio relativo de B, P_B, y, por lo tanto, incrementa el precio relativo de A.□

La pregunta que aún falta por responder es si el efecto de n_B es o no más fuerte que el de n_A. Para ello debemos resolver la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
&\partial F\,(P_B)\,/\partial n_A+\partial F\,(P_B)\,/\partial n_B=\\
&a'\,[n_A,n_B,\mu,\zeta]\,P_B^2+b'\,[n_A,n_B,\mu,\zeta]\,P_B+c'\,[n_A,n_B,\mu,\zeta]\,.
\end{aligned}\tag{2.29}$$

La suma de derivadas parciales un polinomio que puede tomar tanto valores positivos como negativos. Aparte del supuesto de $n_A>n_B$, buscaremos la condición que asegure que (2.29) toma un valor positivo en el precio de equilibrio, P_B^*. De esta forma se garantiza que un incremento de n_B afectará en mayor medida a la relación de intercambio, P_B, que un incremento de n_A.

Desgraciadamente, no es inmediato encontrar esta condición. Se puede obtener aquélla que garantiza que (2.29) es negativo en el equilibrio, pero no para nuestro caso general, $n_A>n_B$, sino para el caso particular $n_A=n_B$. Si esa condición se cumple, en el caso general probamos que el precio de equilibrio, P_B^*, se encuentra por debajo de una cota superior. Esta cota es el valor límite del precio de equilibrio cuando el número de especies conservadas bajo la producción de ambos bienes, n_A y n_B, crecen en idéntica cuantía tendiendo hacia infinito. De esta forma, si los productores de ambos bienes deciden incrementar en la misma cuantía la conservación de la biodiversidad, la relación de intercambio será, en el límite, mayor que la actual. La mayor dificultad radica en demostrar que el proceso de convergencia hacia el valor en el límite es un proceso de crecimiento monótono. Este comportamiento se mostrará mediante técnicas numéricas.

Proposición 2.1 *En el caso particular, $n_A = n_B$, una condición necesaria y suficiente para que el polinomio (2.29) sea negativo, viene dada por:*

$$(\Omega/\Phi)^2 > \Lambda/\Gamma. \tag{2.30}$$

Demostración

Cuando $n_A = n_B$, tanto el exceso de demanda del bien A, $F(P_B)$, como su derivada parcial con respecto a n_A, son polinomios de segundo orden que pueden escribirse como:

$$F\left(P_B\right) = [\Gamma P_B^2 + \Phi \exp[n_A] P_B - (\Lambda + \Omega \exp[n_A])]/(2\exp[2n_A]),$$
$$\partial F\left(P_B\right)/\partial n_A = [-2\Gamma P_B^2 - \Phi \exp[n_A] P_B + (2\Lambda + \Omega \exp[n_A])]/(2\exp[2n_A]).$$

Ambos polinomios presentan una única raíz positiva, que denominamos P_B^* y P_B', respectivamente (véanse figuras 2.2 y 2.4).

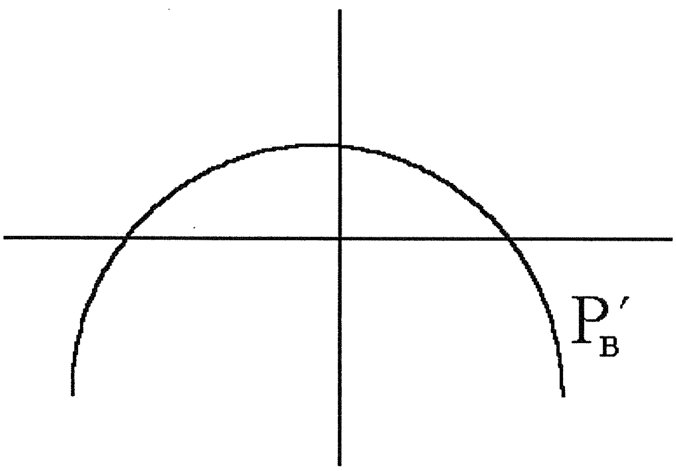

Figura 2.4

Si pudiésemos encontrar una condición sobre los parámetros que asegurase que P_B^* es siempre superior a P_B', entonces habríamos encontrado una condición bajo la cual $\partial F\left(P_B\right)/\partial n_A$ es negativa en el precio de equilibrio, P_B^*. Para simplificar la notación se definen los siguientes coeficientes: $a = \Phi \exp[n_A]/(2\Gamma)$, $b = \Phi\exp[n_A]/(4\Gamma) = a/2$, $\alpha = [2\Lambda + \Omega \exp[n_A]]/(2\Gamma)$ y $\varepsilon = \Omega\exp[n_A]/(2\Gamma)$. Se busca la condición bajo la cual se cumple la desigualdad

$$P_B^* = -a + \sqrt{a^2 + \alpha + \varepsilon} > -b + \sqrt{b^2 + \alpha} = P_B'.$$

Operando en esta expresión, se obtiene:

$$\sqrt{4b^2 + \alpha + \varepsilon} - \sqrt{b^2 + \alpha} > a - b = b \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon^2 > 4b^2 (\alpha - \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$(\Omega \exp[n_A]/ (2\Gamma))^2 > 4 (\Phi \exp[n_A]/ (4\Gamma))^2 (2\Lambda) / (2\Gamma) .$$

De donde se obtiene la condición (2.30):

$$(\Omega/\Phi)^2 > \Lambda/\Gamma. \qquad \square$$

Para dar una interpretación del significado de esta condición, desarrollamos la expresión (2.30) y agrupamos los parámetros del Norte y del Sur para simplicar la notación,

$$\left[\left(a_1\overline{K} - c_1\overline{E}\right) / \left(c_2\overline{E} - a_2\overline{K}\right)\right]^2 > \left(\alpha c_1^2 + \beta a_1^2\right) / \left(\alpha c_2^2 + \beta a_2^2\right) .$$

Esta desigualdad pone de manifiesto la imposibilidad de las dos siguientes situaciones extremas[13]:

1. Fijándonos en el lado izquierdo de la desigualdad, si $a_1 - c_1$ es lo suficientemente pequeño en relación con $c_2 - a_2$, lo cual, atendiendo a las funciones de producción de Leontief establecidas en (2.3), indicaría que B es, proporcionalmente menos intensivo en recursos naturales de lo que A es en capital, entonces el lado izquierdo de la desigualdad podría ser lo suficientemente pequeño como para que ésta no se cumpliese.
2. En la expresión de la derecha de la desigualdad, α aparece multiplicado por c_1^2 en el numerador y por c_2^2 en el denominador; del mismo modo, β viene multiplicado por a_1^2 en el numerador y por a_2^2 en el denominador. Teniendo en cuenta que asumimos una economía dual dada por un valor positivo de $D = a_1c_2 - a_2c_1$, entonces un valor bajo de α (la pendiente de la oferta de recursos naturales) y alto de β (la pendiente de la oferta de capital) podrían hacer que el lado derecho de la desigualdad fuese lo suficientemente grande como para que no se cumpliese la condición (2.30).

La condición (2.30) se cumplirá cuando no se dé ninguna de las dos situaciones extremas expuestas anteriormente. La negación de ambos puntos significa que la producción del bien B debe ser lo "suficientemente" intensiva en recursos naturales, respecto a como lo es en capital la producción del bien A.

Cuando se cumple la condición (2.30), si los productores de los bienes A y B incrementan en la misma cuantía el número de especies conservadas bajo su proceso productivo, el precio relativo, P_B^*, aumentará en el Sur. Esta condición viene completamente determinada por los parámetros del modelo y, no depende de cuál sea el número de especies que actualmente conserva cada productor. Para que esto sea así, hemos supuesto que el número de especies conservadas por ambos productores coincide, $n_A = n_B$. Sin embargo, nuestro modelo parte del supuesto de que la producción del bien A es más respetuosa con el medio ambiente que la del bien B, $n_A > n_B$. El estudio de este caso más general se realiza en dos fases:

[13] Dado que se han agrupado los parámetros del Norte con los del Sur, cada una de estas situaciones extremas, se puede producir, bien en ambas regiones conjuntamente, o bien en una única región, pero con una intensidad tal que al agrupar los parámetros aún prevalezca la desigualdad.

Fase 1

En adelante suponemos que los productores adoptan en cada momento la tecnología existente, y que el progreso tecnológico permite a los productores de ambos bienes incrementar en cada periodo de tiempo en una unidad el número de especies conservadas. Como resultado de esto, la distancia entre el número de especies conservadas en una y otra región se mantiene constante, $n_A - n_B = \lambda$, pudiendo expresar la ecuación (2.29) como función únicamente de la variable n_A y del parámetro λ. En este primer paso, se demuestra que la variación del precio de equilibrio, P_B^*, ante este incremento del número de especies conservadas, tiende hacia cero cuando n_A tiende hacia infinito.

Como ya se ha indicado, P_B^* es la raíz positiva del polinomio $F(P_B)$, mientras que P_B' es la raíz positiva del polinomio $\partial F(P_B)/\partial n_A$.

Teorema 2.4 *El límite de P_B^* cuando n_A y n_B crecen idénticamente, viene dado por la expresión*

$$\Omega \exp[-\lambda]/\Phi,$$

que únicamente depende de la distancia λ, entre el número de especies conservadas bajo la producción de uno y otro bien, así como de los parámetros del modelo.

Demostración

Suponiendo que se produce un incremento continuado e idéntico en n_A y n_B y denotando $\lambda = n_A - n_B$ podemos reescribir el polinomio $F(P_B)$ únicamente como función de la variable n_A y del parámetro λ:

$$\begin{aligned} &1/\left[(2-\mathbb{A} - \mathbb{A}\exp[\lambda/\mu])\exp[2n_A - 2\lambda]\right]\{\ P_B^2\Gamma(1-\mathbb{A})+ \\ &P_B\left[\Phi(1-\mathbb{A})\exp[n_A] + \Psi\mathbb{A}(1-\exp[\lambda/\mu])\right]\exp[-\lambda]+ \\ &(\mathbb{A}\exp[\lambda/\mu]-1)(\Lambda + \Omega\exp[n_A])\exp[-2\lambda]\} = \\ &P_B^2 g_2 + P_B g_1 + g_0, \text{ donde } g_i = g_i(n_A, \lambda, \mu, \zeta). \end{aligned}$$

El precio de equilibrio puede entonces escribirse como

$$P_B^* = -g_1/(2g_2) + \left([g_1/(2g_2)]^2 - g_0/g_2\right)^{1/2}.$$

Buscando obtener el valor límite de este precio cuando n_A tiende hacia infinito, multiplicamos y dividimos este precio por la expresión

$$g_1/(2g_2) + \left([g_1/(2g_2)]^2 - g_0/g_2\right)^{1/2},$$

obteniendo

$$P_B^* = [-g_0/g_2]/\left[g_1/(2g_2) + \left([g_1/(2g_2)]^2 - g_0/g_2\right)^{1/2}\right].$$

Multiplicando numerador y denominador por el término $\exp[-n_A]$ y calculando el límite del cociente, se obtiene que éste sólo es función de la distancia, λ,

$$\lim_{n_A \to \infty} P_B^* = \lim_{n_A \to \infty} \{-g_0/g_2 \exp[-n_A]\} /$$
$$\lim_{n_A \to \infty} \left\{ \left[g_1/(2g_2) + \left([g_1/(2g_2)]^2 - g_0/g_2 \right)^{1/2} \right] \exp[-n_A] \right\} =$$
$$\Omega \exp[-\lambda]/\Phi. \qquad \square$$

Proposición 2.2 *El límite de la raíz positiva, P_B', del polinomio $\partial F(P_B)/\partial n_A$ cuando n_A y n_B crecen idénticamente coincide con el límite de precio relativo de equilibrio, P_B^* :*

$$\Omega \exp[-\lambda]/\Phi.$$

Demostración

La demostración se lleva a cabo de forma idéntica a la del teorema 2.4, pero trabajando con $\partial F(P_B)/\partial n_A$ en lugar de con el polinomio $F(P_B)$.□

Atendiendo al teorema 2.4 y la proposición 2.2, en el límite, la raíz positiva de la ecuación $F(P_B) = 0$, que es el precio relativo, P_B^*, y la raíz positiva de $\partial F(P_B)/\partial n_A = 0$, P_B', convergen hacia la misma constante. Esto significa que $\partial F(P_B^*)/\partial n_A$ converge hacia cero. El efecto que la variación en el número de especies conservadas tiene sobre el precio relativo de equilibrio, P_B^*, tiende hacia cero cuando n_A (y por consiguiente n_B) tiende hacia infinito.

Fase 2

Falta demostrar que en cada instante, el precio relativo, P_B^*, crece al aumentar la conservación de las especies bajo los procesos productivos de ambos bienes. Aunque no podemos demostrar que al darse un proceso de crecimiento de las especies conservadas tenga lugar un crecimiento continuado del precio relativo, sí se ha visto que se produce una convergencia hacia el valor límite, $\Omega \exp[-\lambda]/\Phi$, y probamos en el siguiente teorema, que este valor es mayor al precio relativo en cada momento. Es decir, para un precio relativo dado, tras un proceso de conservación de la biodiversidad, aunque no podemos aseverar que el crecimiento de este precio sea monótono, sí estamos seguros de que en el límite tendrá un valor más alto. Para mostrar la monotonía de este proceso recurriremos a métodos numéricos.

Teorema 2.5 *Cuando se cumple la condición (2.30), el precio de equilibrio en cualquier instante se encuentra por debajo de su valor en el límite, $\Omega \exp[-\lambda]/\Phi$. Esto es cierto, con independencia del número de especies que estén siendo conservadas en dicho instante.*

Demostración

Debemos probar que el precio relativo es siempre inferior a su valor en el límite y por lo tanto es cierta la siguiente desigualdad:

$$P_B^* = -g_1/\left(2g_2\right) + \left(\left[g_1/\left(2g_2\right)\right]^2 - g_0/g_2\right)^{1/2} < \Omega \exp[-\lambda]/\Phi,$$
$$-g_0/g_2 - \Omega \exp[-\lambda] g_1/\left(\Phi g_2\right) < \left(\Omega \exp[-\lambda]/\Phi\right)^2.$$

Tras operar, se obtiene la desigualdad,

$$\Omega \mathbb{A} \left(1 - \exp[\lambda/\mu]\right) \left(\Phi \exp[n_A] - \Psi\right) / \left[\Gamma \left(1 - \mathbb{A}\right) \Phi\right] +$$
$$\Lambda \left(1 - \mathbb{A} \exp[\lambda/\mu]\right) / \left[\Gamma \left(1 - \mathbb{A}\right)\right] < \left[\Omega/\Phi\right]^2.$$

Llegado este punto, es fácil ver que cuando se cumple la condición (2.30) también es cierta esta desigualdad para el caso general, puesto que por la expresión (2.28) el primer término del lado izquierdo de la desigualdad es negativo.□

De los enunciados anteriormente demostrados, se puede concluir:

1. Cuando se cumple la condición (2.30) se puede asegurar que el precio relativo en el equilibrio, P_B^*, es una función creciente del número de especies conservadas bajo el bien A, n_A. Esto es cierto en el caso $n_A = n_B$.
2. Para el caso general, $n_A > n_B$, esta condición (2.30) asegura que P_B^* es inferior a una cota superior, $\Omega \exp[-\lambda]/\Phi$, hacia la que converge cuando crece en la misma medida el número de especies conservadas bajo el proceso productivo de ambos bienes.
3. Mediante la utilización de simulaciones numéricas, en la tabla 2.4 se muestra que este proceso de convergencia es monótono; es decir, que P_B^* crece monótonamente según n_A y n_B aumentan en la misma cantidad.

Según esto, en la figura 2.5, se muestra como ante un incremento continuado del número de especies conservadas bajo el proceso productivo del bien A, n_A, y suponiendo que el crecimiento de especies conservadas es idéntico bajo el proceso productivo de B, el precio relativo en equilibrio de este último bien, P_B^*, aumenta de forma monótona pero convergiendo hacia un valor en el límite que sólo depende de la distancia entre las especies conservadas por uno y otro bien, λ.

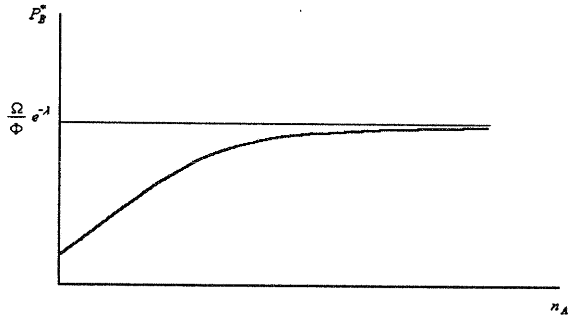

Figura 2.5

Por último, conviene resaltar en esta sección que por la expresión (2.27), se sabe que la conservación de especies adicionales no precisa de un cambio en la intensidad con que se utilizan uno y otro inputs. Es decir, que este incremento en el precio relativo del bien exportado por el Sur, se consigue sin necesidad de que la producción de dicho bien pase a ser más intensiva en capital. Únicamente es necesario que, aun siendo igual de intensiva en recursos naturales, conserve un mayor número de especies. Ejemplos de esta transformación productiva serían: aprovechamiento del turismo relacionado con la naturaleza, ya sean actividades como la caza y la pesca o de ecoturismo como safaris fotográficos, atendiendo, en cualquier caso, a criterios de sostenibilidad; explotación de productos agrícolas en cuya producción se hayan empleado métodos que garanticen una mejor conservación del hábitat,...etc.

2.3.2 Efecto de μ sobre la relación de intercambio

La pregunta que se plantea es la misma que en la sección 2.2.2: ¿cuál sería el efecto que un cambio de preferencias, hacia una valoración más homogénea del conjunto de especies, tendría sobre el precio relativo o relación de intercambio? Es fácil ver que cuando se considera el efecto negativo de esta conservación sobre la función de oferta, además del anteriormente explicado efecto positivo sobre la demanda, un incremento el grado de homogeneidad, μ, reduce el precio relativo en el Sur como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 2.6 *Teniendo en cuenta que la conservación de la biodiversidad afecta tanto a la función de demanda como a la de oferta. Si los agentes económicos valoran las infinitas especies naturales de forma más homogenea, disminuirá el precio relativo del bien exportado por el Sur, B.*

$$\partial P_B / \partial \mu < 0.$$

Demostración

Para conocer el efecto de μ sobre el precio relativo, basta con estudiar el signo de la derivada de $F(P_B)$ respecto de μ:

$$\partial F(P_B) / \partial \mu = \partial A^D / \partial \theta \cdot \partial \theta / \partial \mu - \partial A^S / \partial \mu > 0. \tag{2.31}$$

$\partial A^D / \partial \theta$ es negativa por (2.19) y además en la sección 2.2.2 que se ha probado que $\partial \theta / \partial \mu$ también tiene signo negativo. Finalmente, por (2.9) y (2.26) se sabe que A^S no depende de μ. En consecuencia, $\partial F(P_B) / \partial \mu$ es positiva y, por el lema 2.1, un aumento de μ tendrá un efecto negativo sobre P_B.□

Como sucedía en la sección 2.2.2, en la que únicamente se consideraba que la biodiversidad actuaba por el lado de la demanda, dado que entraba en la función de utilidad de los agentes, si se supone ahora que la conservación de la biodiversidad también influye sobre la oferta de bienes y, lo hace negativamente, sigue siendo cierto que una valoración más homogénea de las distintas especies naturales, lleva a un empeoramiento de la posición de mercado del Sur. Por consiguiente, teniendo en cuenta nuestro supuesto de que un cambio de preferencias de este tipo es probable, el Sur se ve obligado a reducir la distancia que separa el número de especies conservadas bajo la producción del bien que exporta, B, de la del bien exportado por el Norte, A. Esto deberá hacerlo para reducir el riesgo, que actualmente soporta, de una caída en el precio relativo de B, que seguiría a este cambio de preferencias.

2.4 Resolución y simulación numérica

Para llevar a cabo la simulación numérica del modelo han elegido los valores de los parámetros del modelo a partir de los establecidos por Chichilnisky en (1991). Estos valores se recogen en la tabla 2.1.

	α	β	a_1	a_2	c_1	c_2	$\overline{K}$	$\overline{E}$
Norte	6	9.7	2	.015	1	1.7	6	3
Sur	75	.025	4.5	.02	.01	3	3	6

Tabla 2.1

La oferta de recursos naturales es mayor en el Sur (mayores valores de α y $\overline{E}$); por el contrario, la oferta de capital es superior en el Norte (valores más altos de β y $\overline{K}$). Al mismo tiempo se ha supuesto que la producción de bien A es intensiva en capital, mientras que la de bien B es intensiva en recursos naturales. La condición (2.30) se satisface, lo cual significa que la producción de bien B es lo suficientemente intensiva en recursos naturales, respecto a cómo lo es en capital la producción de A. Finalmente, los valores fijados de los parámetros muestran que la dualidad, medida en términos del valor de D, es más fuerte en el Sur.

Para estos valores de los parámetros se resuelve, en primer lugar, el modelo, calculando cómo afectan al precio relativo, la biodiversidad conservada y el grado de homogeneidad a la hora de valorar las diversas especies. En segundo lugar, se lleva a cabo una simulación numérica suponiendo que los productores de ambos bienes incrementan la biodiversidad conservada en una unidad en cada intervalo de tiempo.

2.4.1 Resolución del modelo

En este apartado calculamos la relación de intercambio de equilibrio, P_B^*, su derivada cuando n_A y n_B crecen idénticamente, y su derivada con respecto a μ. Estos valores se comparan para situaciones de larga y corta distancia entre el número de especies conservadas por uno y otro bien, n_A y n_B ($\lambda = 0.1$ y 0.8). Asimismo se distingue entre diversos grados de homogeneidad, es decir, diferentes valores del parámetro μ (0.1, 0.5, 1 y 4). Los resultados se muestran en las Tablas 2.2 y 2.3

μ	$\partial P_B/\partial n_A +$ $\partial P_B/\partial n_B$	$\partial P_B/\partial \mu$	P_B^*	$\partial P_B/\partial n_A +$ $\partial P_B/\partial n_B$	$\partial P_B/\partial \mu$	P_B^*
.1	1.85936	−1.15353	.742477	1.39004	−1.37663	.346153
.5	1.86927	−.067535	.628089	1.05667	−.136499	.157204
1	1.83347	−.017424	.610931	.872266	−.033893	.122993
4	1.80145	−.001112	.59772	.719844	−.002000	.098184
	$n_A = .2, n_B = .1(\lambda = .1)$			$n_A = .9, n_B = .1(\lambda = .8)$		

Tabla 2.2

μ	$\partial P_B/\partial n_A +$ $\partial P_B/\partial n_B$	$\partial P_B/\partial \mu$	P_B^*	$\partial P_B/\partial n_A +$ $\partial P_B/\partial n_B$	$\partial P_B/\partial \mu$	P_B^*
.1	.0490426	−.022897	.496351	.092361	−.000050	1.00019
.5	.197418	−.18835	.418818	.107746	−.034602	.991785
1	.20492	−.071715	.359448	.11473	−.019457	.97822
4	.18032	−.003482	.299706	.114083	−.001921	.959501
	$n_A = 1.5, n_B = .7(\lambda = .8)$			$n_A = 1.5, n_B = 1.4(\lambda = .1)$		

Tabla 2.3

De la observación de estos resultados se llega a una serie de conclusiones:

1. Un incremento en el grado de homogeneidad con que las diversas especies son valoradas, μ, reduce el precio relativo en el Sur. No obstante, si n_A y n_B crecen continuadamente en la misma cuantía, cuanto mayores sean sus valores, menor será la distancia entre ellos en términos relativos y, por lo tanto, menos pronunciada será la caída del precio relativo como consecuencia de este incremento de μ. El riesgo asociado a este posible cambio de preferencias es, por tanto, cada vez menor.
2. Se observa que cuanto menor sea la distancia relativa que separa el número de especies conservadas por uno y otro bien, λ, mayor será el precio relativo del Sur. Según esto, si la distancia en términos absolutos no varía, cuanto mayores sean n_A y n_B, menor será la distancia relativa entre ambos y, por lo tanto, mayor será la relación de intercambio o precio relativo en el Sur, P_B^*.
3. El último efecto que se observa es que, toda vez que se cumple la condición (2.30), conforme aumenten n_A y n_B en la misma cantidad, también lo hará el precio relativo, P_B^*. No obstante, esta tasa de crecimiento en el precio relativo no se mantiene constante sino que, aunque positiva, es cada vez menor según crece el número de especies conservadas. Esto muestra la existencia de un proceso de convergencia.

Se concluye de este modo que, si n_A y n_B crecen en la misma cantidad y de forma continuada, el Sur verá mejorada su situación por dos razones: en primer lugar, porque la distancia relativa entre las cantidades conservadas por uno y otro bien se está viendo reducida y, por lo tanto, el precio relativo del bien B, P_B^*, está creciendo y en segundo lugar, porque el efecto perjudicial para el Sur de un incremento de μ es cada vez menor.

2.4.2 Simulación numérica

Para los valores de los parámetros recogidos en la tabla 2.1, se lleva a cabo una simulación numérica. Se supone que n_A y n_B aumentan en una unidad en cada periodo de tiempo. De esta forma, puede fijarse $n_B = n_A - \lambda$ y efectuar la simulación considerando como variable únicamente a n_A. Los resultados de esta simulación numérica, presentados en la tabla 2.4, muestran el precio relativo de equilibrio, P_B^*, conforme aumenta n_A. Este proceso se detiene cuando el incremento marginal de P_B^* pasa a ser menor que un nivel de tolerancia.

En primer lugar, sabemos que, independientemente de lo grande que sea la diferencia entre el número de especies conservadas por uno y otro bien, el precio relativo de equilibrio siempre converge hacia $\Omega \exp[-\lambda]/\Phi$. Este hecho se pone de manifiesto tomando diferentes valores de este parámetro y estudiando el proceso de convergencia. Se consideran dos escenarios: uno con una larga distancia entre n_A y n_B ($\lambda = 0.8$), y el otro con una corta distancia entre ambas cifras ($\lambda = 0.1$). Para ambos casos, se tienen en cuenta diferentes valores de μ, desde distribuciones de pesos con una gran disparidad ($\mu = 0.1$), hasta otras mucho más homogéneas ($\mu = 2$). En cualquiera de los casos considerados se observa que el precio relativo de equilibrio, P_B^*, crece monótonamente convergiendo hacia el valor en el límite. Dado que el proceso es monótono, un incremento idéntico del número de especies conservadas por ambos bienes siempre lleva a un aumento del precio relativo del bien exportado por el Sur. Pero como el proceso converge, este incremento en el precio es cada vez menor.

En las figuras de la tabla 2.4 se muestra, en ordenadas, el valor del precio relativo, P_B^*, y, en abscisas, el número de especies conservadas bajo el proceso productivo de A, n_A. Se lleva a cabo la simulación asumiendo que n_A y n_B están creciendo en la misma cantidad. En la primera columna, la distancia entre n_A y n_B es grande mientras que la segunda columna recoge el caso de una corta distancia entre estos valores. Por $\overline{n}_A$ denominamos el número de especies conservadas, a partir del cual el incremento del precio relativo, como consecuencia de una mayor conservación de la biodiversidad, está por debajo de un determinado nivel de tolerancia. Dado que el número de especies conservadas bajo el proceso productivo de A, en el instante inicial, n_{A0}, es el mismo para todas las simulaciones, $\overline{n}_A - n_{A0}$ indica el número de pasos que tarda la simulación en converger. Según esto, se puede decir que $\overline{n}_A$ es una medida de la velocidad de convergencia hacia el valor límite. Cuanto mayor sea $\overline{n}_A$ más iteraciones han sido precisas para alcanzar el nivel de tolerancia y,por tanto, menor es la velocidad de convergencia.

$n_A = .9, n_B = .1,$

$\mu = .1 \ (\overline{n}_A = 152)$

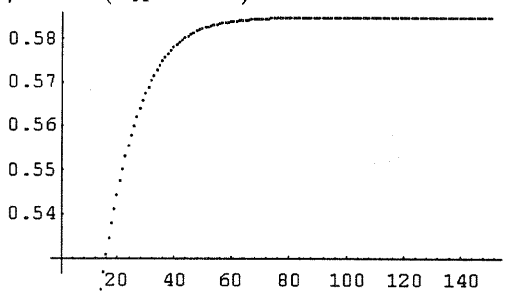

Figura 2.6.1a

$\mu = .5 \ (\overline{n}_A = 152)$

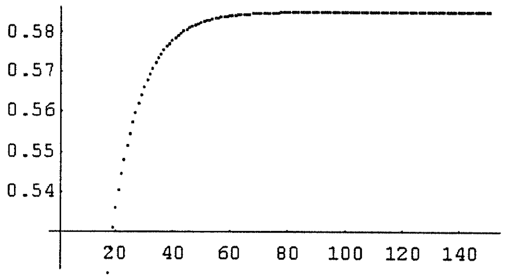

Figura 2.6.2a

$\mu = 1 \ (\overline{n}_A = 158)$

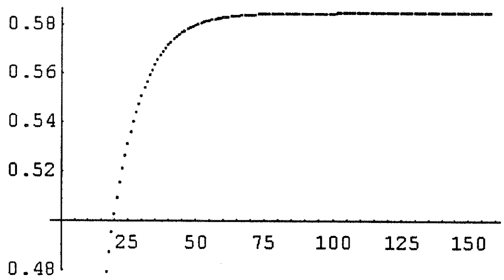

Figura 2.6.3a

$\mu = 2 \ (\overline{n}_A = 290)$

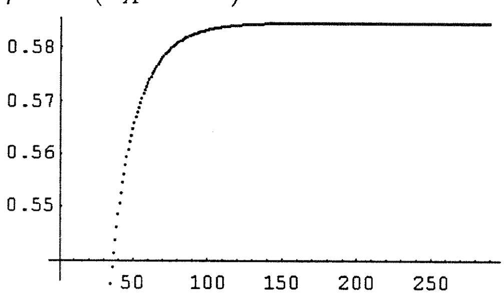

Figura 2.6.4a

$n_A = .2, n_B = .1$

$\mu = .1 \ (\overline{n}_A = 166)$

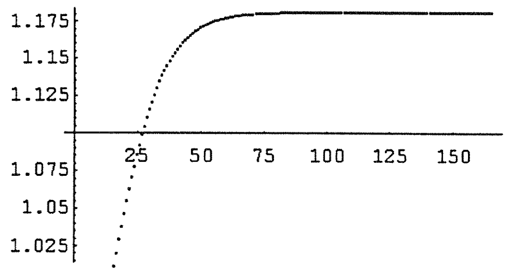

Figura 2.6.1b

$\mu = .5 \ (\overline{n}_A = 166)$

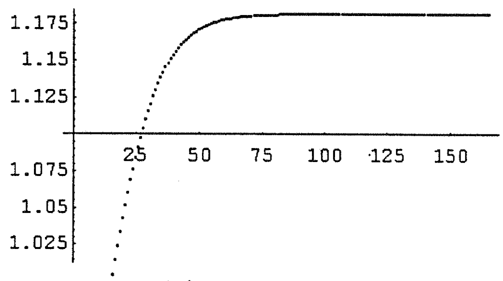

Figura 2.6.2b

$\mu = 1 \ (\overline{n}_A = 166)$

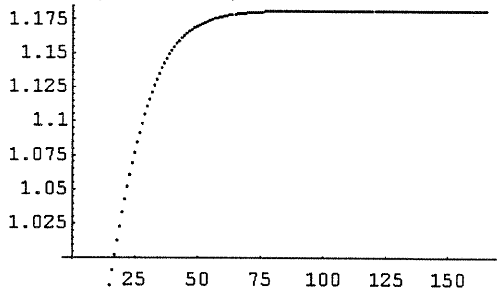

Figura 2.6.3b

$\mu = 2 \ (\overline{n}_A = 266)$

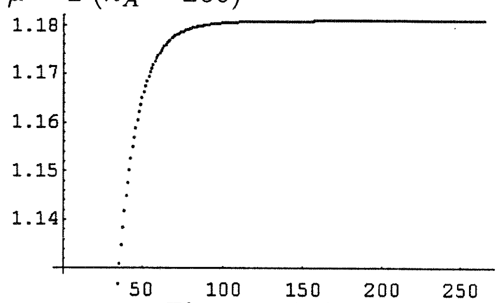

Figura 2.6.4b

Tabla 2.4

Las trayectorias para el precio relativo difieren tanto en los niveles inicial y final, como en la velocidad de convergencia.

En primer lugar, se consideran diferencias en la distancia, λ, entre la biodiversidad conservada por los procesos productivos de uno y otro bien, es decir comparamos los resultados por columnas. Cuanto mayor sea esta distancia, mayores son los valores inicial y final del precio relativo de equilibrio, P_B^*, pero, del mismo modo, también es menor la variación total que experimenta este precio. Al mismo tiempo, cuanto mayor es esta distancia, λ, también se comprueba que más rápido es el proceso de convergencia, pues $\overline{n}_A$ es más pequeño.

En segundo lugar, se tienen en cuenta las diferencias en el valor de μ, es decir en el grado de homogeneidad en los pesos asignados a las especies, se están comparando los resultados por filas. Mayores grados de homogeneidad de esta distribución de pesos, es decir mayores valores de μ, llevan aparejados procesos de convergencia más lentos, siendo precisos un mayor número de iteraciones para traspasar el umbral de tolerancia. Además, la distancia entre el valor incial y final del precio relativo de equilibrio, P_B^*, se hace cada vez más estrecha conforme aumenta μ.

Según este razonamiento, los movimientos más fuertes en el precio relativo de equilibrio tienen lugar cuando la distancia relativa entre el número de especies conservadas bajo la producción de uno y otro bien, λ, es mayor y cuando la distribución de pesos entre las especies es más desigual, esto es, cuando μ es muy pequeño. En esta situación es en la que el Sur tiene una mayor "ventaja comparativa".

2.5 Conclusiones

En este capítulo hemos utilizado un modelo de equilibrio general para caracterizar la relación comercial que liga Norte y Sur. La biodiversidad entra dentro de este modelo desde una doble vertiente. Por el lado de la demanda, se supone que la utilidad del individuo no sólo depende de las cantidades de bien que consume, sino que éstas se escalan por el número de especies conservadas bajo el proceso productivo de cada uno de estos bienes. La utilidad marginal de conservar una especie adicional disminuye con el número de ellas que actualmente están siendo conservadas. Por el lado de la oferta, se asume una relación negativa de la biodiversidad con la oferta de bienes.

Hemos mostrado las condiciones bajo las cuales el Sur mejora, una vez que los productores de ambos bienes deciden incrementar en la misma cuantía el número de especies que se conservan bajo su proceso productivo. El precio relativo del Sur aumenta cuando se incrementa el número de especies conservadas bajo la producción del bien B, que es el exportado por esta región. Del mismo modo este precio relativo disminuye y, por tanto, aumenta el precio relativo del Norte, cuando el incremento en la conservación de la biodiversidad se produce bajo el bien exportado por el Norte, el bien A. Dado que se ha supuesto que el número de especies afectadas bajo la producción de A es menor que aquéllas afectadas por B, el efecto marginal de la conservación de una especie adicional bajo la producción de B es más fuerte que bajo la de A. Por lo tanto, si se aumenta al mismo tiempo la conservación de la biodiversidad bajo la producción de uno y otro bien, el precio relativo que aumenta es el de B, esto es, el del Sur. Este proceso converge cuando el número de especies conservadas por los productores de ambos bienes se hace cada vez mayor, toda vez que aunque la diferencia entre ambos se mantiene en términos absolutos, converge hacia cero en términos relativos. Como conclusión, podemos decir que la "ventaja comparativa" del Sur tiende hacia cero según el número de especies conservadas por los productores de ambos bienes tiende hacia infinito.

El segundo tema que se ha tratado es el efecto de un cambio de preferencias hacia una valoración más homogénea de las especies. Esta variación se considera como algo probable. Si se produjese este cambio, el precio relativo del Sur disminuiría. Esta región está soportando, por lo tanto, un riesgo al mantenerse en esta situación. La integral que representa el área bajo la función de pesos para las infinitas especies es siempre constante e igual a uno, lo que significa que la valoración que los individuos confieren al ecosistema en su conjunto no varía. No obstante, debido a que se hace necesario conservar más especies para conseguir mantener el nivel de utilidad anterior, puede concluirse que la importancia de la biodiversidad sí se ha visto incrementada.

Desde ambos puntos de vista, el Sur mejora su situación incrementando el número de especies conservadas bajo la producción del bien que exporta. Su precio relativo aumenta en mayor medida de lo que lo hace el del Norte y, por tanto, el Sur muestra "ventaja comparativa" conservando biodiversidad. Al mismo tiempo, disminuye el riesgo de una caída en su precio relativo, como consecuencia de un cambio hacia una distribución más "plana" de pesos.

El principal interés de este capítulo radica en que se introduce la biodiversidad como parte de la utilidad del consumidor, la cual se ha supuesto no separable entre bienes de mercado y biodiversidad. Con esto se está presuponiendo que los mercados internalizan de modo perfecto el deseo de los consumidores de una mayor conservación de la biodiversidad a través de su función de utilidad. Desgraciadamente existen fallos de mercado para internalizar este deseo por completo, véase Panayotou (1996). Algunos de los beneficios de la existencia de diversidad biológica son variables flujo cuya apropiación es muy difícil, no sólo por parte de los individuos sino incluso por parte de los gobiernos. Atendiendo a este hecho, el supuesto de perfecta internalización de los mercados no es realista. No obstante, esto no invalida el resultado obtenido, sino que las conclusiones serán ciertas en la medida en que los mercados puedan, aunque no de modo completo, internalizar los beneficios de la biodiversidad.

Si la función de utilidad fuese separable entre bienes de mercado y biodiversidad, entonces las decisiones sobre la cantidad de biodiversidad a conservar no afectarían a las decisiones de consumo y por lo tanto no existiría efecto sobre los precios por el lado de la demanda.

Otra crítica que se puede esgrimir acerca de cómo se plantea el modelo es que no parece un supuesto muy realista el asumir que los consumidores se preocupen por la biodiversidad de la misma forma cuando ésta es conservada en la región en que viven o lo es en otra región. Un supuesto más ajustado a la realidad distinguiría entre los consumidores del Norte, que de hecho pueden estar preocupados por el medio ambiente del Sur, aunque quizá no en la misma medida que por el del Norte, y los consumidores del Sur, que pueden estar hasta cierto punto preocupados por la conservación de la biodiversidad en el Sur pero que, parece lógico asumir, su interés por la biodiversidad del Norte sea, en cualquier caso, escasa.

Relajar este supuesto, implicaría tener que definir una función de utilidad para el Norte y otra para el Sur. Dentro de la función de utilidad del Norte, habría que distinguir entre la cantidad de bien B producido "in situ" y la importada, asimismo, en la función de utilidad del Sur, se diferenciaría la catidad producida e importada de bien A. Cada una de las cantidades consumidas de un determinado bien, estaría elevada a un exponente que mide la cantidad de biodiversidad conservada durante su proceso productivo, del mismo modo que se definió en la sección 2.1. No obstante, estos exponentes vendrían ponderados por unos coeficientes, que serían mayores en el Norte que en Sur y, asimismo, serían mayores cuando el bien al que se refieren es producido "in situ" y no en el exterior. Esta distinción entre bienes producidos en la región donde son consumidos o bienes importado que a su vez lleva a distinguir cuatro exponentes distintos en lugar de dos, llevará a una mayor complejidad del modelo.

Otra posible extensión del modelo presentado en este capítulo podría referirse a cómo producir conservando un mayor número de especies. Hemos reseñado que para que esto sea posible, es necesario incrementar los inputs capital y recursos naturales y, se ha asumido que este aumento es simétrico para ambos inputs. Podría argumentarse que este crecimiento en los inputs debería realizarse de forma asimétrica, en concreto aumentando el capital en mayor medida. Parece lógico admitir que la forma eficiente de perjudicar a un menor número de especies es precisamente reduciendo la intensidad con la que se usan los recursos naturales e incrementando la del capital.

Se podría incluir esta diferenciación del efecto de una mayor conservación de la biodiversidad para los dos inputs, sin más que asumir que los coeficientes de Leontief asociados a los recursos naturales, a_1 y a_2, dependen de la cantidad de biodiversidad conservada de forma distinta a los coeficientes asociados al capital, c_1 y c_2. Los primeros crecen en menor cuantía que los últimos ante un incremento de la conservación de la diversidad biológica. Para recoger esta idea, los coeficientes de Leontief se pueden expresar como:

$$a_i(n) = a_i \exp(n/\eta_1); \qquad c_i(n) = c_i \exp(n/\eta_2), \qquad \eta_1 > \eta_2 > 0.$$

Al conserva mayor número de especies, varía la proporción de inputs en la producción de ambos bienes, creciendo la intensidad con la que se usa el capital.

Del mismo modo, sería posible asumir además de que el efecto sea diferente para cada input, al mismo tiempo tambien hay diferencias entre uno y otro bien. Es decir, la intensidad con la que se usan los input para el bien A, varía en cuantía distinta al bien B. En concreto, parece lógico suponer que las intensidades varíen en mayor proporción para el bien exportado por el Sur, B. Este planteamiento, requiere la introducción de cuatro nuevos parámetros, uno para cada coeficiente de Leontief, lo cual conlleva una mayor complicación en el estudio del modelo.

La limitación más fuerte que, a nuestro juicio, presenta este capítulo es la especificación estática del problema. De ahora en adelante, nuestro objetivo se centrará en plantear y analizar un modelo que explique la interrelación entre el comercio Norte-Sur y la conservación de la diversidad biológica desde un punto de vista dinámico. La dificultad que acarrea el estudio de este problema desde una perspectiva dinámica hace preciso supuestos más simples que los realizados en este capítulo en el que se ha llevado a cabo un análisis estático. Como mostramos en los capítulos 3 y 4, aun bajo hipótesis simplificadoras, no siempre puede llevarse a cabo la resolución analítica de los modelos planteados siendo necesario en estos casos, recurrir a la utilización de métodos y técnicas numéricas.

Capítulo 2 Biodiversidad y Comercio Norte-Sur: un Modelo de Equilibrio General

Capítulo 3
Biodiversidad y crecimiento económico: un juego diferencial Norte-Sur

Una de las críticas principales que se recogen en las conclusiones del capítulo anterior se refiere al hecho de estudiar el problema de comercio y medio ambiente desde un punto de vista estático. En el presente capítulo se pretende modelizar, desde una perspectiva dinámica, la relación de comercio Norte-Sur, así como su conexión con la problemática medioambiental, la cual viene recogida por medio de la diversidad biológica. Para llevar a cabo esta tarea, es preciso alcanzar un equilibrio entre el deseo de mantener, en la medida de lo posible, los supuestos básicos expresados en el capítulo 2, y la necesidad de simplificación en la búsqueda de resultados en el estudio de un modelo dinámico, en particular cuando se trabaja en el ámbito de la teoría de juegos diferenciales.

Con este objetivo, a lo largo del presente capítulo se mantiene la existencia de dos regiones, el Norte y el Sur, cada una de las cuales produce un bien diferenciado que exporta a la otra región. Ambas regiones exportan el bien que producen, aunque en este caso, el Sur vende toda su producción al Norte, que éste utiliza como input para producir un bien de consumo, parte del cual vende al Sur. Asimismo, se mantiene el supuesto de dualidad de los procesos productivos en una y otra región. De hecho el Sur únicamente utiliza recursos naturales y trabajo como inputs productivos, mientras que el Norte precisa de trabajo, capital y el bien intermedio "natural" previamente elaborado por el Sur. Por tanto, el capital es utilizado únicamente en el Norte, mientras que las especies naturales lo son, en exclusiva, en el Sur. Además, se sigue suponiendo que los agentes ordenan el conjunto de infinitas especies atendiendo a la valoración que le adjudican a cada una de ellas. De nuevo se asume la existencia de competencia perfecta y libre entrada de empresas.

Frente al modelo de equilibrio general analizado en el capítulo anterior, en éste se buscan las soluciones de un juego diferencial entre el Norte y el Sur basado en Galor (1986). Aquí, sólo se definen, de la forma más sencilla posible, las funciones de producción que determinan la renta de cada una de las regiones. A partir de esta renta, se obtienen las cantidades dedicadas a pagar cada uno de los inputs, así como la cantidad a consumir. En el modelo de Galor, que no incluye variables medioambientales, introducimos, dentro de un marco dinámico, la problemática medioambiental mediante una variable que mide la biodiversidad. No obstante, a diferencia del capítulo 2 en el cual se supone que ambas regiones poseen un stock de especies naturales y deciden la cantidad a conservar, ahora la conservación o no de la biodiversidad se lleva a cabo únicamente en el Sur, que es quien posee la totalidad de la diversidad biológica. Si bien la utilidad en cada región depende principalmente de su consumo, la conservación de una mayor o menor diversidad biológica afecta de modo directo a la utilidad del Sur y de forma indirecta a la del Norte.

En el capítulo previo, la biodiversidad conservada se define como el número de especies que son conservadas en el ecosistema que soporta la producción de un determinado bien. La variable que se incluye en el modelo que estudiamos en este capítulo representa el número de especies a utilizar en el proceso productivo del Sur. De este modo, un concepto es el complementario del otro y, por lo tanto, la biodiversidad se incorpora de forma semejante en uno y otro modelo. Implícitamente, se está suponiendo que al utilizar una cantidad de individuos de una determinada especie en su proceso productivo, la población de dicha especie se ve mermada en ese número. Es decir, no existe ningún proceso de inversión en esa especie, por lo que el Sur se limita a llevar a cabo una actividad meramente recolectora. Entendemos un ecosistema como un conjunto de infinitas especies ordenadas atendiendo a su valor económico. En el capítulo 2 la biodiversidad se concreta como el número de especies cuya población no se ve afectada por el proceso productivo. Este número es finito y, siendo infinito el conjunto de especies, será igualmente infinito el número de ellas a las que sí afecta el proceso productivo. Por el contrario, en este capítulo, la biodiversidad se introduce como el número de especies utilizadas en el proceso productivo del Sur, y siendo este número finito, entonces el número de especies que no se utilizan es, por fuerza, infinito. Según ésto, aunque ambos conceptos son, en cierto modo, complementarios, conviene resaltar que la biodiversidad conservada es una cantidad finita en el primer caso e infinita en el segundo

La inclusión de la perspectiva medioambiental en el modelo de comercio Norte-Sur, aun conservando las funciones de producción planteadas por Galor, hace mucho más compleja y dificulta enormemente la obtención de resultados analíticos. En ocasiones, incluso resulta obligado recurrir a métodos numéricos para llevar a cabo el análisis del modelo.

El objetivo principal del estudio de este modelo es doble. Por un lado, se pretende encontrar las condiciones bajo las cuales es posible la aparición de crecimiento económico, entendido éste como acumulación de capital físico. El interés principal se centra en la consecución de crecimiento económico sostenido y, de modo secundario, la aparición de crecimiento durante al menos un periodo finito de tiempo. Por otro lado, se persigue determinar las relaciones que ligan el crecimiento económico con la conservación de la biodiversidad, y establecer las condiciones bajo las cuales es posible una mejor conservación de la biodiversidad coincidente con una mayor tasa de crecimiento económico.

En los modelos habituales de crecimiento económico, un único agente "tipo", que maximiza su función de utilidad, sirve para representar al conjunto de la economía. Este agente es idéntico con independencia del país en el que resida y no interacciona con sus vecinos. A partir de esta premisa, se contrasta la convergencia entre las economías de diversos países. La herramienta matemática utilizada es la teoría de control óptimo. En el presente modelo se pretende representar no un único agente "tipo", idéntico para todos los países, sino dos, uno representativo de los países desarrollados, y el otro de los países en vías de desarrollo. Estos agentes están diferenciados e interaccionan entre sí a través del comercio. El problema es necesariamente más complejo y se requiere de supuestos que lo hagan lo más simple posible. La herramienta matemática utilizada, en este caso, es la teoría de juegos diferenciales.

Cada uno de los jugadores, Norte y Sur, tiene capacidad de decisión sobre una variable de control. Ambos deben maximizar el flujo de utilidades descontadas a un determinado tanto. El Norte puede decidir la tasa de ahorro, mientras que el Sur establece la cantidad de especies naturales a utilizar en su proceso productivo, e indirectamente, a través del mercado, el precio del bien que vende al Norte. Aunque únicamente el Norte posee capital, la tasa a la cual se acumula éste se ve afectada por las variables de control de ambos jugadores. Se considera que, aun cuando el Sur puede elegir el número de especies que considere óptimo en su producción, hay un mínimo por debajo del cual la producción no es posible. Por otro lado, distinguimos dos escenarios, según se asuma que el Sur puede o no utilizar especies por encima de un máximo, es decir, si existe o no límite a la cantidad de biodiversidad utilizada para producir el bien en los países en vías de desarrollo. Considerar uno u otro escenario, no sólo tiene efecto sobre la biodiversidad conservada, sino también sobre la posibilidad de aparición de crecimiento económico, así como sobre la duración de éste.

En los diferentes análisis recogidos en este capítulo, el horizonte temporal para ambas regiones se considera idéntico. Asimismo, en todos los casos, las soluciones se obtienen asumiendo estrategias de ciclo abierto, es decir, la estructura de información es tal que los jugadores toman sus decisiones para todo el horizonte temporal en el instante inicial, considerando la información existente en ese momento. Por el contrario en las de ciclo cerrado, los jugadores deciden su jugada en cada instante de tiempo, teniendo en cuenta la información hasta ese instante.

En la sección 3.1 se establecen las principales hipótesis y se construye el modelo matemático a estudiar. Al mismo tiempo, se definen los dos escenarios que se van a considerar en el análisis realizado.

En la sección 3.2, asumiendo que el tiempo es una variable continua, se define el juego diferencial y se resuelve para cada uno de los dos escenarios, considerando un horizonte temporal finito. Primero se calculan las soluciones asumiendo un comportamiento no-cooperativo de los jugadores, lo que implica que éstos no pueden comunicarse o establecer acuerdos vinculantes antes de comenzar el juego. Posteriormente, se estudian las soluciones cuando esta comunicación o acuerdos entre jugadores sí es posible, es decir, en el caso cooperativo. Para ambos tipos de comportamiento se calculan las estrategias óptimas y, con ellas, las trayectorias temporales de equilibrio. Se encuentra, para cada escenario, la condición bajo la cual es óptimo, bien mantener constante el stock de capital o, por el contrario, ahorrar y acumular capital. En el caso de que sí se produzca acumulación del capital, el crecimiento se produce durante un primer periodo, seguido de un segundo de estancamiento. Para el caso cooperativo, no siempre es posible calcular la solución analítica del juego, debiendo recurrir en este caso a métodos numéricos. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos cuando los agentes cooperan o no, teniendo en cuenta que el comportamiento de las soluciones en el caso cooperativo depende de cual sea el poder de negociación de cada región. Al hablar de resultados, nos centramos tanto en la cantidad de biodiversidad conservada, como en la viabilidad o no del crecimiento económico, así como la medida en la cual se acumula el capital.

Posteriormente, en la sección 3.3 se pasa a resolver el juego considerando un horizonte temporal infinito. De nuevo se diferencia entre comportamiento cooperativo y no-cooperativo. En el caso no-cooperativo, se distinguen tres clases de soluciones: estancamiento finito, crecimiento finito y crecimiento sostenido. Este último tipo de solución nunca proporciona un máximo del problema. De estas soluciones, es posible encontrar la forma analítica de la primera. En el caso de crecimiento finito, en ocasiones, puede establecerse la solución analítica, pero cuando ésto no es factible, sí es posible tener una idea del comportamiento cualitativo de la solución mediante el estudio del diagrama de fase. Se establecen, de nuevo, las condiciones bajo las cuales es posible que el capital crezca durante un periodo finito o bien se mantenga constante indefinidamente. En el caso cooperativo, se estudian las soluciones tanto de estancamiento infinito, como de crecimiento sostenido, y se establece la condición, sobre el poder de negociación de ambas regiones, bajo la cual es óptima una u otra solución. Al mismo tiempo, se prueba que soluciones mixtas que impliquen un periodo de crecimiento y otro de estancamiento no son óptimas. De nuevo, es posible encontrar la expresión analítica de la solución de estancamiento infinito y, en ocasiones, también lo es en el caso de la solución de crecimiento sostenido. Cuando esto último no es posible, el comportamiento de la solución de crecimiento sostenido se desprende del estudio del diagrama de fase y del sistema dinámico. Como en el caso finito, se comparan los resultados obtenidos bajo el comportamiento cooperativo y el no-cooperativo, siendo la principal diferencia que el crecimiento sostenido no puede ser un máximo del problema, a menos que los jugadores cooperen.

Finalmente, en la sección 3.4 se muestran las conclusiones del modelo, así como las críticas y posibles propuestas de mejora o líneas de investigación futuras.

La primera parte del capítulo, en la cual se analiza el juego cuando se supone un horizonte temporal finito, aparece en Cabo & Martín-Herrán (1999).

3.1 El modelo

A lo largo de este capítulo, la relación dinámica de comercio Norte-Sur se estudia, siguiendo a Galor (1986), mediante el análisis de un juego diferencial entre ambas regiones. Dentro de este juego se incluye la diversidad biológica como variable medioambiental. En la línea de este autor, se supone que en el Norte se produce un bien de consumo mediante la siguiente función de producción de coeficientes fijos:

$$y(t) = \min\left[aR(t), bK(t), zL_C(t)\right], \qquad b > 1, a > 0, z > 0, \tag{3.1}$$

donde $y(t)$ es la cantidad producida de dicho bien de consumo, y $R(t)$, $K(t)$ y $L_C(t)$ son los inputs bien intermedio "natural", capital y trabajo, respectivamente, utilizados para producir este bien en el instante t. Se considera, asimismo, que la fuerza laboral en el Norte es constante a lo largo del tiempo y viene dada por $\overline{L}$. No obstante, existe una oferta ilimitada de trabajadores en el Sur que están dispuestos a emigrar al Norte cobrando un salario real de subsistencia (en términos de consumo) dado por $\overline{w}$. Atendiendo a ésto, puede decirse que la oferta de trabajo es de tipo Lewis (véase Lewis (1954)). El trabajo empleado para producir el bien de consumo en el Norte, $L_C\,(t)$, viene dado por la suma de la fuerza de trabajo existente en el Norte, $\overline{L}$, más la oferta de trabajadores inmigrantes desde el Sur, $L_C^S\,(t)$,

$$L_C\,(t) = \overline{L} + L_C^S\,(t)\,.$$

Una vez fijado el salario de subsistencia, el Norte dispone de una oferta ilimitada de trabajo. Por otro lado, como se verá a continuación, una vez que el Sur decide la cantidad de especies naturales a utilizar en su proceso productivo, el mercado fija el precio del bien intermedio "natural". A este precio de mercado, el Norte dispone de toda la cantidad que precise de este bien intermedio. Según estos dos supuestos, la función de producción no depende de las cantidades de trabajo ni de bien intermedio, sino únicamente del capital, es decir,

$$y(t) = bK(t). \tag{3.2}$$

A partir de esta ecuación, dado que la función de producción es de coeficientes fijos, pueden calcularse la cantidad de trabajo y de bien intermedio "natural" empleados en el proceso productivo del Norte:

$$L_C(t) = bK(t)/z \quad \text{y} \quad R(t) = bK(t)/a. \tag{3.3}$$

Se supone que existe pleno empleo en el Norte en el instante inicial, es decir,

$$K_0 > z\overline{L}/b,$$

donde K_0 es el stock de capital en el instante inicial. Siendo esto así, el pleno empleo se mantiene siempre que el capital no descienda por debajo de K_0.

Por otra parte, en el Sur suponemos que existe un conjunto infinito de especies naturales y que éstas se encuentran ordenadas atendiendo a su valor económico[14] en orden descendente. Con este conjunto de especies naturales el Sur debe producir el bien intermedio "natural", $R(t)$. Para ello, puesto que se ha supuesto una economía de tipo Lewis, el Sur cuenta con un número infinito de trabajadores. Esta fuerza de trabajo se encuentra distribuida entre las infinitas especies, siendo esta distribución proporcional al valor de cada una de ellas. Suponemos que esta última viene definida por medio de una función de distribución exponencial, de forma que la oferta de trabajo para la especie i viene dada por:

$$l_i(t) = R(t)\exp\left(-i/\mu\right)/\mu^2, \tag{3.4}$$

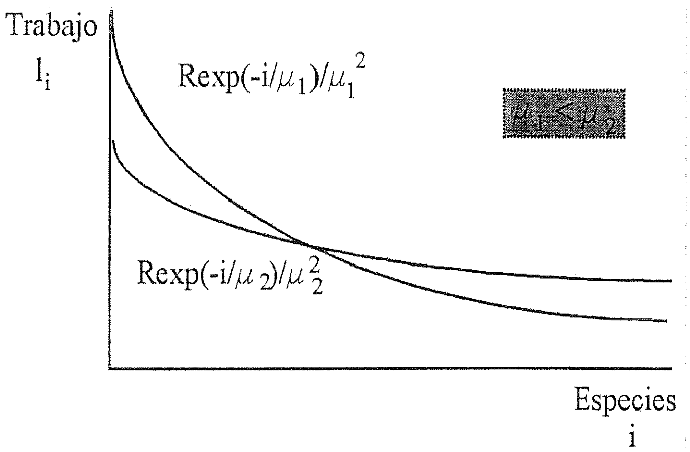

Figura 3.1

[14] En la introducción del Capítulo 2 se comentaron las categorías en las que podía dividirse el valor que cada especie proporcionaba a los agentes económicos.

donde el parámetro μ representa el nivel tecnológico existente. Al mismo tiempo, μ define la función de distribución; en concreto determina la curvatura de dicha distribución, es decir, el grado de homogeneidad con que se valoran las diversas especies. La figura 3.1 muestra en el eje de ordenadas el trabajo y en el de abscisas las infinitas especies colocadas en orden descendente atendiendo a su valor económico. Las curvas dibujadas, representan la distribución de los trabajadores , $l_i(t)$, por cada una de las infinitas especies, i, suponiendo dos valores distintos del parámetro μ. El área total comprendida bajo la curva es independiente del valor de este parámetro e igual a la cantidad de bien intermedio "natural" demandado por el Norte, $R(t)$.

El Sur debe decidir el número de especies a utilizar para producir este bien y, en consecuencia, la cantidad de trabajo. Obviamente elegirá las especies con mayor valor económico, las cuales explota en mayor cantidad, debiendo dedicarles una mayor cantidad de trabajo. Cuanto menor sea el número de especies utilizadas, dada la forma de la curva exponencial, mayor será el número de trabajadores por especie, y viceversa.

Se suponen economías de escala y, de este modo, cuanto mayor sea el número de trabajadores por especie, mayor será, a su vez, la productividad de esa especie en particular. Adicionalmente, para simplificar el modelo, una vez que el Sur decide el número de especies a utilizar, no se habla de un proceso productivo y una productividad diferentes para cada una de estas especies, sino que se aglutinan en una única función de producción, cuya productividad es el promedio de las productividades en el conjunto de las especies elegidas.

Según estos supuestos, decidiéndose a utilizar pocas especies, el Sur está usando una gran cantidad de trabajadores por especie y, por lo tanto, su función de producción presentará una alta productividad. Por otro lado, dado que μ también simboliza la tecnología existente, un aumento de este parámetro provocará, además de una distribución más homogénea de los trabajadores entre las infinitas especies, un aumento de la productividad. De este modo, la productividad en el Sur depende negativamente del número de especies que estén siendo utilizadas por el proceso productivo y positivamente del grado tecnológico.

La función de producción del Sur puede escribirse como,

$$R(t) = \beta(n(t))\, L_R(n(t)), \tag{3.5}$$

donde $n(t)$ es el número de especies naturales que el Sur decide utilizar para producir el bien intermedio "natural", $\beta(n(t))$ es la productividad y

$$L_R(n(t)) = \int_0^{n(t)} l_i(t)\, di = \int_0^{n(t)} R(t)\exp(-i/\mu)/\mu^2, \tag{3.6}$$

es el trabajo total, resultado de agregar el trabajo por cada una de las $n(t)$ especies utilizadas.

Teniendo en cuenta la forma en la que se distribuye el trabajo entre las infinitas especies dada por (3.4) y la expresión de la función de producción en (3.5), puede inmediatamente concluirse la forma funcional de la productividad:

$$\beta\left(n\left(t\right)\right)=\mu/\left[1-\exp\left(-n(t)/\mu\right)\right]. \tag{3.7}$$

Esta función, como se ha señalado anteriormente, decrece ante un aumento de $n\left(t\right)$ y crece cuando disminuye el parámetro tecnológico, μ. Además, esta especificación asegura que la producción por el Sur del bien intermedio "natural" siempre iguala la demanda de este bien efectuada por el Norte.

Una vez se han determinado las funciones de producción en ambas regiones, pasamos a estudiar cuál es la función de consumo para cada una de ellas. Es conveniente indicar en este punto que se supone que el Norte lleva a cabo un proceso de inversión, debiendo decidir la proporción de su renta a invertir y a consumir. Por su parte, se considera que el Sur no invierte, sino que consume toda la renta obtenida de sus ventas de bien intermedio al Norte.

Respecto al Norte, se ha asumido que en el instante inicial se encuentra en una situación de pleno empleo. Suponemos que los trabajadores del Norte consumen todos sus ingresos, dados por el salario de subsistencia, $\overline{w}\overline{L}$. Además, consideramos que esta región está dispuesta a pagar un sobreprecio, medido por d_1, por encima del precio de mercado del bien intermedio "natural", $p\left(t\right)$. Este pago se realiza con la condición de que el Sur utilice estos ingresos extra para una mejor conservación de la biodiversidad. La renta total del Norte se distribuye entre el pago de salarios, $\overline{w}L_C(t)$, pago del input bien intermedio "natural", $p(t)\left(1+d_1\right)R(t)$, y retribuciones al capital. De esta última parte, esta región debe decidir la cantidad a consumir y a ahorrar. El consumo total en el Norte es la suma de los consumos de los trabajadores más la parte no ahorrada de quienes reciben los rendimientos del capital:

$$c_N(t)=\left[y(t)-\overline{w}L_C(t)-p(t)\left(1+d_1\right)R(t)\right]\left(1-s(t)\right)+\overline{w}\overline{L}, \tag{3.8}$$

donde $s\left(t\right)$ denota la tasa de ahorro del Norte en el instante t. La expresión anterior puede reescribirse en función del stock de capital, $K\left(t\right)$:

$$c_N(t)=bK(t)\left[1-\theta-p(t)\left(1+d_1\right)/a\right]\left(1-s(t)\right)+\overline{w}\overline{L}, \tag{3.9}$$

donde $\theta=\overline{w}/z$.

Se considera que en el Sur no se da un proceso de acumulación de capital, sino que los ingresos que se obtienen de la venta del bien intermedio "natural" al Norte se consumen en su totalidad. No obstante, de los ingresos obtenidos, $p(t)\left(1+d_1\right)R(t)$, los ligados al sobreprecio pagado por el Norte, $p(t)d_1R(t)$, no son consumidos, sino que se dedican a la conservación del medio ambiente, ya que es esta razón la que ha llevado al Norte a pagar el sobreprecio. Asimismo, se incluye como parte del consumo del Sur lo que consumen los trabajadores de esta región emigrados al Norte, $L_C^S\left(t\right)$. Por tanto, la función de consumo del Sur viene dada por:

$$c_S\left(t\right)=p\left(t\right)R\left(t\right)+\overline{w}L_C^S\left(t\right),$$

pudiéndose escribir, en términos del stock de capital,

$$c_S\left(t\right)=p\left(t\right)bK\left(t\right)/a+\left(b\theta K\left(t\right)-\overline{w}\overline{L}\right). \tag{3.10}$$

En adelante, para simplificar la notación, se omite el referente temporal, t, en todas las variables, excepto cuando ello impida la comprensión del texto.

Suponemos competencia perfecta y libre entrada de empresas en la industria que produce el bien intermedio "natural" en el Sur. De esta forma, la renta obtenida de la venta al Norte de este bien, contabilizando únicamente los ingresos procedentes del precio de mercado y no la parte que debe ir dedicada a la mejora en la conservación del medio ambiente, debe igualar los costes de producción, es decir, los salarios pagados a los trabajadores del Sur,

$$pR = \overline{w} L_R(n) .$$

De esta igualdad y la expresión de trabajo del Sur, $L_R(n)$, recogida en (3.6), se puede deducir cómo el mercado fija el precio de competencia perfecta, una vez el Sur decide el número de especies naturales a utilizar en su función de producción. De esta forma se tiene una relación que liga el número de especies utilizadas por el Sur con el precio de mercado del bien intermedio "natural",

$$p(n) = \overline{w}\left[1 - \exp\left(-n/\mu\right)\right]/\mu. \tag{3.11}$$

Esta expresión define el precio de mercado como una función creciente del número de especies utilizadas en el proceso productivo. Parece lógico asumir que para poner en marcha su industria productora de bien intermedio "natural", el Sur debe utilizar especies naturales por encima de un mínimo, que denotamos por $n_{\min}$. Esta cota inferior establece inmediatamente, a través de (3.11), un mínimo para el precio de mercado de este bien, $p_{\min}$. Además, se exige como una condición adicional que el consumo en el Norte no sea inferior al consumo de subsistencia, $\overline{wL}$. Es decir, si se define

$$\delta(n) = b\left(1 - \theta - p(n)\left(1 + d_1\right)/a\right), \tag{3.12}$$

atendiendo a la expresión del consumo del Norte en (3.9), debe cumplirse la condición

$$\delta(n) \geq 0. \tag{3.13}$$

Por (3.11) se tiene que el precio oscila entre $p_{\min}$ y $\overline{w}/\mu$, cuando n es $n_{\min}$ o tiende hacia infinito, respectivamente. Del mismo modo, dado que $\delta(n)$ depende negativamente de n, se hace máximo cuando el número de especies es mínimo, $n_{\min}$, mientras que su valor decrece conforme crece el número de especies utilizadas. Es decir, $\delta(n)$ toma valores comprendidos entre $\delta_{\max}$, que es su valor cuando el número de especies es el mínimo posible, $n_{\min}$, y por lo tanto, el precio es $p_{\min}$,

$$\delta_{\max} = b\left(1 - \theta - p_{\min}\left(1 + d_1\right)/a\right),$$

y el valor $\underline{\delta}$ cuando n tiende hacia infinito o lo que es lo mismo, cuando el precio tiende hacia $\overline{w}/\mu$,

$$\underline{\delta} = \lim_{n(t)\to\infty} \delta(n) = b\left(1 - \theta - \overline{w}\left(1 + d_1\right)/\left(a\mu\right)\right).$$

Cuando el precio se mueve en el rango $[p_{\min}\ \overline{w}/\mu)$; entonces $\delta(n)$ toma valores en el intervalo $(\underline{\delta}\ \delta_{\max}]$. Según que $\underline{\delta}$ sea positivo y, consecuentemente, todos los valores de este último intervalo lo sean, o bien $\underline{\delta}$ sea negativo, y por ello exista un primer subintervalo de valores negativos, surgen dos posibles situaciones: una, en la que la condición (3.13) se cumple para algunos precios, pero no para aquéllos por encima de una determinada cota; y otra, en la que esta condición siempre es cierta. Denotamos estas situaciones por Escenario I y Escenario II, respectivamente.

1. Escenario I:

$$\underline{\delta} < 0 \Leftrightarrow 1 - \theta - \overline{w}\,(1 + d_1)\,/\,(a\mu) < 0.$$

   Existe un precio del bien intermedio "natural" por encima del cual la condición (3.13) no se cumple. En este caso, si el Sur fijara el número de especies a utilizar en su proceso productivo por encima de una determinada cota, el consumo en el Norte sería inferior al nivel de subsistencia y el Norte dejaría de producir. Para que esto no ocurra, el Sur debe fijar el número de especies por debajo de esa cota superior, que denominamos $n_{\max}$. Esta cota es el valor de n para el cual $\delta\,(n)$ es igual a cero. El valor de esta cota superior, teniendo en cuenta (3.11) y (3.12), viene dado por:

$$n_{\max} = -\mu \ln\left[1 - \mu\,(1 - \theta)\,a/\left(\overline{w}\,(1 + d_1)\right)\right]. \tag{3.14}$$

2. Escenario II:

$$\underline{\delta} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \theta - \overline{w}\,(1 + d_1)\,/\,(a\mu) \geq 0.$$

   La condición (3.13) se cumple independientemente de cual sea el precio del bien intermedio "natural". La utilización de especies en el proceso productivo del Sur puede aumentar indefinidamente, creciendo con ello el precio de mercado de dicho bien, pero, dado que este precio siempre está por debajo de $\overline{w}/\mu$, el Norte consumirá siempre por encima del nivel de subsistencia.

A lo largo de este capítulo, para los distintos modelos analizados, tanto cuando el juego es no-cooperativo, como cuando es cooperativo, bien para un horizonte finito, o bien para uno infinito, siempre se realiza un estudio separado para cada uno de estos dos escenarios.

El modelo de comercio Norte-Sur se plantea como un juego diferencial con dos jugadores, el Norte y el Sur. Cada una de estas dos regiones tiene capacidad de decisión sobre el valor de una variable de control. La variable de estado, por el contrario, es la misma para las dos regiones.

El Norte debe decidir, en cada instante de tiempo, la proporción de sus ingresos a ahorrar y, consecuentemente a invertir, con el objeto de maximizar su flujo de utilidades descontadas al tanto r. Aunque su utilidad viene dada exclusivamente por su consumo, el Norte tiene en cuenta el problema de la conservación de las especies naturales, toda vez que está dispuesto a pagar un sobreprecio por el bien intermedio "natural", que a la postre es el que produce la pérdida de biodiversidad. Los ingresos que obtenga el Sur por este sobreprecio, deben ir destinados a mejorar la conservación de la diversidad biológica.

Por su parte, el Sur no ahorra, pero sí tiene capacidad de elección sobre la cantidad de especies a utilizar en su proceso productivo. Al igual que el Norte, en cada instante de tiempo decide su variable de control con el objeto de maximizar su flujo de utilidades, descontadas al mismo tanto que en el Norte, r. La utilidad en esta región no viene dada únicamente por el consumo, sino que también se valora la conservación de la biodiversidad. En concreto, suponemos que la utilización de especies naturales para producir el bien intermedio "natural" produce una desutilidad a los agentes del Sur. Este efecto se recoge a través de un término negativo en la función de utilidad, $-d_2 n$ (véase, por ejemplo, Yeung & Cheung (1994)). Asimismo, la biodiversidad afecta al consumo en ésta región a través del efecto que ésta tiene sobre el precio del bien intermedio "natural".

3.2 Juego diferencial con horizonte finito

El funcional objetivo para cada región cuando se considera un horizonte temporal finito, T, viene dado por el valor de su flujo de utilidades descontado al tanto r,

$$W_N = \int_0^T e^{-rt} c_N dt; \qquad W_S = \int_0^T e^{-rt} \left(c_S - d_2 n\right) dt.$$

Sustituyendo el consumo del Norte y del Sur por su expresión en (3.9) y (3.10) respectivamente, el juego diferencial vendrá definido:

$$\max_s \left\{ W_N = \int_0^T e^{-rt} \left[K\delta\left(n\right)\left(1-s\right) + \overline{w}\overline{L}\right] dt \right\}, \tag{3.15}$$

$$\max_n \left\{ W_S = \int_0^T e^{-rt} \left[\left(p\left(n\right)b/a + b\theta\right)K - \overline{w}\overline{L} - d_2 n\right] dt \right\}, \tag{3.16}$$

$$\text{s.a.:} \qquad \dot{K} = K\delta\left(n\right)s, \qquad K\left(0\right) = K_0 > 0 \tag{3.17}$$

Como se ha señalado anteriormente, el Norte elige el valor de la tasa de ahorro, s, para maximizar su funcional objetivo. Esta tasa toma valores en el intervalo $[0\ 1]$. Por su parte, el Sur selecciona el número de especies a utilizar en su proceso productivo, n. Dicho número se mueve en el intervalo $[n_{\min}\ n_{\max}]$ en el Escenario I, cuando la condición (3.13) es vinculante, y dentro del intervalo $[n_{\min}\ \infty)$ en el Escenario II, cuando dicha condición no lo es.

Aunque se consideran dos regiones: el Norte, que maximiza W_N, y el Sur, que maximiza W_S, con objeto de conseguir un modelo analíticamente tratable, se supone que existe una única variable de estado, el stock de capital en el Norte, K. De esta forma, ambos jugadores maximizan sus funcionales objetivos sujetos a la misma ecuación diferencial que define el crecimiento del stock de capital en el Norte. Esta ecuación dinámica, dada por (3.17), depende de las variables de control de ambos jugadores, s y n. De esta ecuación es interesante resaltar que $\delta\left(n\right)$ representa la tasa de crecimiento de capital cuando la tasa de ahorro es la unidad[15].

[15] La expresión $\delta\left(n\right)$ es la tasa de crecimiento del capital únicamente cuando $s = 1$. Dado que, como veremos a continuación, la tasa de ahorro óptima es siempre uno o cero, en el primer caso, cuando se produce

Cuando se asume, por parte de los jugadores, tanto un comportamiento cooperativo, como uno no-cooperativo, se buscan aquellas soluciones que se derivan de las condiciones necesarias de optimalidad del principio del máximo de Pontryagin. Además de éstas, debe garantizarse el cumplimiento de las de transversalidad que, en el caso de horizonte finito, son también condiciones necesarias. En general, estas condiciones no son suficientes, no obstante, bajo ciertas condiciones de convexidad, si se puede asegurar que proporcionan un máximo de la función valor óptimo. Las condiciones suficientes más comúnmente utilizadas vienen dadas por el teorema de suficiencia de Mangasarian, (véase Mangasarian (1966)), o por el teorema de suficiencia de Arrow (una demostración del mismo puede encontrarse en Kaimen & Schwartz (1971)). No es posible probar que el problema especificado cumpla las condiciones de convexidad establecidas en los dos teoremas de suficiencia. Por esta razón, de ahora en adelate y por abuso de lenguaje, se denominarán soluciones óptimas, aquéllas que cumplan las condiciones necesarias del principio del máximo y las de transversalidad, pero teniendo presente las limitaciones que impone el no cumplimiento de las condiciones suficientes.

Con respecto al interés que cada una de las regiones muestra sobre el problema medioambiental, en el Norte, el sobreprecio que esta región está dispuesta a pagar por el bien intermedio "natural" comprado al Sur, d_1, afecta a la dinámica seguida por el stock de capital y, por tanto, a la evolución temporal de todas las variables del modelo, incluida la cantidad de consumo, c_N. De este modo, aunque la biodiversidad conservada no afecta directamente a la función de utilidad del Norte, sí lo hace de modo indirecto a través del precio pagado por el bien intermedio "natural" y, por tanto, a través de la tasa de crecimiento del capital, $\delta(n)$. En cuanto al Sur, su interés sobre el medio ambiente se refleja directamente en el nivel de utilidad que esta región alcanza en cada instante de tiempo. La utilidad del Sur se ve directamente afectada por la diversidad biológica conservada, pero también indirectamente a través del precio del bien intermedio "natural", $p(n)$.

3.2.1 Equilibrios dinámicos no-cooperativos

En esta sección nos centramos en el análisis del modelo planteado anteriormente, desde una perspectiva de no-cooperación entre ambas regiones. Los equilibrios dinámicos se determinan como la solución del juego diferencial definido por (3.15), (3.16) y (3.17). Una solución vendrá dada por el par de repuestas óptimas de los jugadores, el Norte y el Sur (véase, por ejemplo, Mehlmann (1988)). Este par muestra, por un lado, la trayectoria temporal de la tasa de ahorro en el Norte y, por otro, la trayectoria temporal del número de especies que son utilizadas en el proceso productivo del Sur. Cuando se supone que los jugadores no cooperan, estos equilibrios dinámicos del juego se determinan resolviendo separadamente cada uno de los dos problemas de control óptimo definidos por (3.15) y (3.16), ambos sujetos a la restricción dinámica dada por la evolución temporal del stock de capital, (3.17).

crecimiento del capital, su tasa de crecimiento siempre es $\delta(n)$. Por esta razón nos referimos genéricamente a esta expresión como la tasa de crecimiento del stock de capital.

3.2.1.1 Trayectorias óptimas del Norte

Para obtener las trayectorias óptimas del Norte, se construye la función hamiltoniana para esta región,

$$H_N\left[K, s, n, m_N\right] = K\delta(n)(1-s) + \overline{w}\overline{L} + m_N K\delta(n)\, s, \tag{3.18}$$

siendo m_N la variable de coestado del Norte asociada a la única variable de estado, K.

Las condiciones necesarias de optimalidad del principio del máximo de Pontryagin, establecen el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \dot{K} &= K\delta(n)\, s, \qquad K(0) = K_0, \\ \dot{m}_N &= \left[r - \delta(n)\, s\right] m_N - \delta(n)(1-s), \end{aligned} \tag{3.19}$$

junto con la condición de transversalidad, que exige que la variable de coestado se anule al final del horizonte temporal,

$$m_N(T) = 0.$$

Maximizando la función hamiltoniana con respecto a la variable de control de esta región, esto es, la tasa de ahorro, s, se obtiene una función de tipo bang-bang como solución óptima,

$$s^* = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m_N < 1, \\ \widetilde{s} \in [0\ 1] & \text{si} \quad m_N = 1, \\ 1 & \text{si} \quad m_N > 1. \end{cases} \tag{3.20}$$

El Norte ahorra a la tasa máxima cuando su variable de coestado se encuentra por encima de uno y no ahorra nada en caso contrario. Cuando la variable de coestado vale uno, la tasa de ahorro óptima puede tomar cualquier valor en el intervalo [0 1].

3.2.1.2 Trayectorias óptimas del Sur

Las trayectorias óptimas para el Sur se calculan a partir de su función hamiltoniana,

$$H_S\left[K, s, n, m_S\right] = bKp(n)/a + \left(b\theta K - \overline{w}\overline{L}\right) - d_2 n + m_S K\delta(n)\, s, \tag{3.21}$$

siendo m_S la variable de coestado en el Sur asociada a la variable de estado, que es, de nuevo, el stock de capital en Norte, K.

Al igual que en el Norte, las condiciones necesarias de optimalidad establecen, de nuevo, un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para la variable de coestado y otra, ya conocida, para la de estado,

$$\begin{aligned} &\dot{K} = K\delta(n)\, s, \qquad K(0) = K_0, \\ &\dot{m}_S = (r - \delta(n)\, s)\, m_S - bp(n)/a - b\theta, \end{aligned} \tag{3.22}$$

así como la condición de transversalidad,

$$m_S(T) = 0.$$

La maximización de la función hamiltoniana con respecto a la variable de control del Sur, es decir, el número de especies a utilizar, n, proporciona la siguiente función truncada como solución óptima,

$$n^* = \begin{cases} n_{\min}, & \text{si} \quad \Omega K\left[1 - m_S\left(1+d_1\right)s\right] < \exp\left(n_{\min}/\mu\right), \\ n_{\max}, & \text{si} \quad \Omega K\left[1 - m_S\left(1+d_1\right)s\right] > \exp\left(n_{\max}/\mu\right), \\ \mu \ln\left(\Omega K\left[1 - m_S\left(1+d_1\right)s\right]\right), & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{3.23}$$

con $\Omega = b\overline{w}/\left(a\mu^2 d_2\right)$.

El número óptimo de especies a utilizar en el proceso productivo del Sur, n^*, es función de la variable de estado en ambas regiones, K, de la variable de coestado del Sur, m_S, así como de la variable de control en el Norte, s. En particular, se observa que cuanto mayor sea la tasa de ahorro que decida el Norte, menor será el número de especies que el Sur utilice y, sabiendo, por (3.11), que $p\left(n\right)$ depende positivamente de n, menor será el precio que el Sur cargue al Norte por la compra del bien intermedio "natural". No obstante, dado que se ha supuesto que existe un mínimo de especies necesarias para producir este bien, la función n^* está truncada inferiormente por este número, $n_{\min}$. Igualmente, cuando suponemos que rige el Escenario I, entonces también existe un máximo de especies que pueden ser utilizadas y, por tanto, la función está también truncada superiormente por $n_{\max}$. Obviamente, cuando rige el Escenario II, esta última cota no existe.

3.2.1.3 Estrategias óptimas de ciclo abierto

Cuando se trata de un juego no-cooperativo, las estrategias óptimas de ciclo abierto vienen definidas por un par de funciones definidas a trozos, (s^*, n^*), resultado de agrupar las trayectorias óptimas para el Norte y el Sur, descritas en (3.20) y (3.23) respectivamente. Estas trayectorias pueden reescribirse como,

$$s^* = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m_N < 1, \\ 1, & \text{si} \quad m_N > 1, \end{cases} \qquad n^* = \begin{cases} n_0^*, & \text{si} \quad m_N < 1, \\ n_1^*, & \text{si} \quad m_N > 1, \end{cases}$$

con

$$n_0^* = \begin{cases} n_{\min}, & \text{si} \quad \Omega K < \exp\left(n_{\min}/\mu\right), \\ n_{\max}, & \text{si} \quad \Omega K > \exp\left(n_{\max}/\mu\right), \\ \mu \ln\left[\Omega K\right], & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{3.24}$$

y

$$n_1^* = \begin{cases} n_{\min}, & \text{si} \quad \Omega K\left[1 - m_S\left(1+d_1\right)\right] < \exp\left(n_{\min}/\mu\right), \\ n_{\max}, & \text{si} \quad \Omega K\left[1 - m_S\left(1+d_1\right)\right] > \exp\left(n_{\max}/\mu\right), \\ \mu \ln\left(\Omega K\left[1 - m_S\left(1+d_1\right)\right]\right), & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.25}$$

Nótese que, tanto en (3.24) como en (3.25), la segunda de las expresiones sólo puede escribirse bajo el Escenario I.

De esta forma, se tienen dos pares de estrategias óptimas dependiendo del valor de la variable de coestado en el Norte, m_N :

$$\begin{aligned} &(0, n_0^*), \quad \text{si} \quad m_N < 1, &(3.26)\\ &(1, n_1^*), \quad \text{si} \quad m_N > 1. &(3.27)\end{aligned}$$

Cuando la variable de coestado en el Norte se encuentra por debajo de la unidad, el Norte decide una tasa de ahorro nula y, al mismo tiempo, el Sur decide el número de especies a utilizar según la función n_0^*, que únicamente depende del capital y de los parámetros del modelo. Por el contrario, cuando la variable de coestado del Norte sobrepasa el valor uno, esta región decide ahorrar al máximo y elige una tasa de ahorro igual a uno. En esta situación, el Sur decide su variable de control a través de la función n_1^*, expresión que no sólo depende del capital sino también de la variable de coestado del Sur. A partir de ahora denominaremos a cada uno de estos pares, estrategia 0 o de ahorro nulo y estrategia 1 o de ahorro pleno, respectivamente.

Lema 3.1 *Un arco singular en el que m_N tome el valor unitario durante un intervalo no trivial de tiempo no es posible.*

Demostración

Véase Apéndice A.

Del supuesto de competencia perfecta, en (3.11) se expresa el precio como función del número de especies utilizadas en el proceso productivo del Sur. Sustituyendo en esta expresión, n por su valor óptimo, n^*, se obtiene el precio óptimo como la siguiente función definida a trozos:

$$p(n^*) = \begin{cases} p(n_0^*), & \text{si} \quad m_N < 1, \\ p(n_1^*), & \text{si} \quad m_N > 1. \end{cases} \tag{3.28}$$

Una vez que se conocen las estrategias óptimas, el siguiente paso es calcular las trayectorias temporales de equilibrio de las variables de estado y de coestado. Para ello es preciso resolver los sistemas dinámicos (3.19) y (3.22), sustituyendo s y n por las estrategias de control óptimo, s^* y n^*. Tras este cambio, el sistema dinámico a resolver es:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= K\delta(n^*)s^*, \\ \dot{m}_N &= (r - \delta(n^*)s^*)m_N - \delta(n^*)(1 - s^*), \\ \dot{m}_S &= (r - \delta(n^*)s^*)m_S - bp(n^*)/a - b\theta, \end{aligned} \tag{3.29}$$

sometido a una condición inicial y dos finales:

$$K(0) = K_0, \; m_N(T) = 0, \; m_S(T) = 0. \tag{3.30}$$

La condición inicial viene dada por el valor de la variable de estado, K, en el instante inicial, mientras que las condiciones finales son las condiciones de transversalidad, que establecen que el valor de cada una de las variables de coestado se anula al final del horizonte temporal.

El estudio de este sistema se lleva a cabo distinguiendo los Escenarios I y II, según exista o no un número máximo de especies naturales que el Sur pueda utilizar en su proceso productivo. El sistema dinámico (3.29) presenta comportamientos diferentes dependiendo de cuál de estos dos escenarios se asuma.

Debido al hecho de que las variables s^* y n^* son funciones continuas a trozos, para analizar este sistema dinámico, estudiamos por separado las estrategias 0 y 1, establecidas en (3.26) y (3.27), respectivamente. En cualquier caso, por la condición de transversalidad del Norte, que impone que la variable de coestado de esa región se anule al final del horizonte temporal, se puede asegurar que siempre se juega la estrategia 0 en este instante. A partir de este hecho, pueden establecerse tres posibilidades. Primera, jugar la estrategia 0 durante todo el horizonte temporal; segunda, jugar la estrategia de ahorro pleno durante un primer periodo y la de ahorro nulo en adelante; y tercera, jugar alternativamente ambas estrategias, terminando siempre con la de ahorro nulo. A continuación probamos que esta última alternativa nunca es óptima, mientras que las dos primeras sí pueden serlo.

3.2.1.4 Stock de capital constante

Cuando el Norte decide no ahorrar nada, se puede encontrar una solución analítica del sistema dinámico (3.29). Por el contrario, si la tasa óptima de ahorro es uno, ésto no ha sido posible, haciéndose necesario el recurrir a técnicas y métodos numéricos. Por esta razón, estudiamos en primer lugar el supuesto de que el Norte decida una tasa nula de ahorro durante todo el intervalo temporal. En este caso, tanto para el Escenario I como para el II, la solución analítica del sistema, para todo $t \in [0\ T]$ viene dada por:

$$\begin{aligned} K(t) &= K_0, \\ m_N(t) &= (1-\exp(r[t-T]))\,\delta(n_0^*)/r, \\ m_S(t) &= (1-\exp(r[t-T]))\,[b(1+\theta d_1)-\delta(n_0^*)]\,/\,[r(1+d_1)]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

El stock de capital se mantiene constante[16], dado que no hay ahorro y por consiguiente no hay inversión. A su vez, ambas variables de coestado son funciones no crecientes en el tiempo que toman el valor cero en el instante final, T. Este tipo de solución sólo es óptima cuando los parámetros del modelo son tales que m_N se mantiene por debajo de uno todo el horizonte temporal, $[0\ T]$.

Obviamente, existen valores de los parámetros para los cuales esto no ocurre, sino que por el contrario, existe un instante, t^*, en el cual $m_N(t^*) = 1$. En este caso, los agentes jugarán la estrategia de ahorro pleno además de la de ahorro nulo.

3.2.1.5 Crecimiento del stock de capital

Lema 3.2 *Cuando la variable de coestado del Norte cruza el valor uno con pendiente negativa, es decir, pasa de un valor superior a la unidad a uno inferior, nunca vuelve a ser*

[16] Dado que cuando se juega la estrategia 0, el capital se mantiene constante, lo mismo sucederá con el número de especies conservadas que, según (3.24), es únicamente función del capital. De esta forma, n_0^* no depende del tiempo. Igualmente, por la expresión del precio en (3.11), se concluye que $p(n_0^*)$ es una constante, lo mismo que $\delta(n_0^*)$, que denotamos por p_0^* y δ_0^*, respectivamente.

mayor que uno.

Demostración

Si la variable de coestado del Norte disminuye hasta alcanzar la unidad, toda vez que hemos demostrado la imposibilidad de un arco singular durante un periodo no trivial, m_N no puede mantenerse igual a uno, sino que cruza la unidad, pasando a tomar valores por debajo. Hay un intervalo en el cual se está jugando la estrategia de ahorro nulo y a su vez, la variable de coestado del Norte disminuye. La expresión de la derivada temporal de la variable de coestado cuando se juega la estrategia 0, viene dada por,

$$\dot{m}_N = rm_N - \delta_0^*.$$

Si en un primer intervalo, $\dot{m}_N$ es menor o igual a cero, dado que bajo la estrategia 0 el capital es constante y, por lo tanto, también lo son n_0^* y δ_0^*, es inmediato concluir que m_N seguirá siendo una función no creciente del tiempo en adelante y, por tanto, se seguirá jugando la estrategia de ahorro nulo.□

A partir del lema 3.2 y la condición de transversalidad, $m_N(T) = 0$, se concluye que, además de la solución de ahorro nulo durante todo el horizonte temporal, también puede ser óptima una solución en la que se ahorre a la tasa máxima durante un primer periodo, y no se ahorre nada desde un instante, t^*, hasta el final del horizonte temporal. Por el contrario, una solución en la que ambas estrategias se jueguen repetidamente de forma alternativa no será óptima.

A continuación se analiza el sistema dinámico (3.29), suponiendo que se presentan ambas estrategias. En primer lugar se juega la de ahorro pleno, hasta que m_N pase a estar por debajo de uno, es decir, durante el intervalo $[0\ t^*]$. En el instante t^*, cuando esta variable de coestado iguala la unidad, la tasa de ahorro del Norte puede tomar cualquier valor entre cero y uno. En cualquier caso, la variable de coestado del Norte, cruza la unidad hacia valores inferiores y, dado que no es posible que vuelva a crecer, durante todo este segundo periodo, $[t^*\ T]$, se juega la estrategia 0 o de ahorro nulo. En el instante final, T, la variable de coestado del Norte se anula.

Cuando los jugadores siguen la estrategia 1, no podemos resolver analíticamente el sistema de ecuaciones diferenciales, (3.29). Por el contrario, sí se ha encontrado la solución analítica del sistema cuando se juega la estrategia 0, lo cual sucede en el segundo periodo a considerar. Esto, junto con el hecho de que las condiciones de transversalidad son condiciones finales, nos lleva a tratar de resolver el problema en tiempo inverso.

Dado que el tiempo inverso transcurre de T a 0, el primer caso a estudiar es el de la estrategia 0 desde T hasta t^*. Para encontrar una solución analítica del sistema en este intervalo, se precisa de tres condiciones frontera. Las dos condiciones de transversalidad, $m_N(T) = m_S(T) = 0$, se convierten ahora en condiciones iniciales, sin embargo la condición $K(0) = K_0$, no se puede aplicar ya que no pertenece al intervalo de estudio. Es necesario establecer una tercera condición frontera. Se fija el valor del capital en T, $K(T) = K_T$, aunque el valor de este parámetro, K_T, es desconocido. Se dispone, por lo tanto, de tres condiciones iniciales, con lo cual, es inmediato resolver analíticamente el problema. Conocida la forma funcional de m_N, se puede calcular el instante t^* en el cual la variable de coestado del Norte se hace igual a uno, que viene dado por:

$$t^*{=}T+\ln\left(1-r/\delta_0^*\right)/r= \tag{3.32}$$
$$\begin{cases} \overline{t^*}=T{+}\ln\left(1{-}r/[b\left(1{-}\theta{-}p_{\min}\left(1{+}d_1\right)/a\right)]\right)/r, & \text{si } n_0^*=n_{\min}, \\ T{+}\ln\left(1{-}r/[b\left(1{-}\theta{-}\overline{w}\left(1{+}d_1\right)[1{-}1/\left(\Omega K_T\right)]/(a\mu)\right)]\right)/r, & \text{si } n_{\min}{<}n_0^*{<}n_{\max}. \end{cases}$$

En el Escenario I, en el caso de que la estrategia óptima del Sur fuese elegir $n_{\max}$, se anula δ_0^*, por lo que la variable de coestado del Norte nunca alcanza el valor uno y no hay cambio de estrategias, sino que ambas regiones juegan la estrategia 0 durante todo el horizonte temporal.

Proposición 3.1 *Cuanto mayor sea el tanto al que ambos jugadores descuentan sus utilidades, r, más corto es el intervalo de crecimiento del capital,* $[0\ t^*]$.

Demostración

La expresión del instante de cambio, t^* viene dada por la ecuación (3.32), siendo su derivada con respecto al tanto de descuento,

$$\partial t^*/\partial r=-\ln\left(1-r/\delta_0^*\right)/r^2-1/\left[r\delta_0^*\left(1-r/\delta_0^*\right)\right].$$

Esta derivada es negativa si y sólo si

$$-\ln\left(1-r/\delta_0^*\right)<\left(r/\delta_0^*\right)/\left(1-r/\delta_0^*\right).$$

Para que el logaritmo esté definido es preciso que r/δ_0^* sea menor que uno. Denotando $\sigma=r/\delta_0^*$, la inecuación anterior puede escribirse:

$$-\ln\left(1-\sigma\right)<\sigma/\left(1-\sigma\right).$$

Utilizando el desarrollo de Taylor de $\ln\left(1-\sigma\right)$, alrededor de $\sigma=0$, hasta orden 2, se puede asegurar que siempre que σ sea menor que 1,

$$-\ln\left(1-\sigma\right)<\sigma+\sigma^2/2,$$

ya que siempre es cierta la desigualdad

$$\sigma+\sigma^2/2<\sigma/\left(1-\sigma\right).$$

entonces, se ha probado que el intervalo de crecimiento del capital es más corto cuando el tanto de descuento es mayor. Es decir, cuanto más impacientes sean los jugadores, antes dejará de ahorrar el Norte para empezar a consumir a la tasa máxima.□

Llegado este punto, se conoce la longitud del intervalo en el que se juega la estrategia de ahorro nulo, $T-t^*$, así como las trayectorias temporales de las variables de estado y de coestado desde T hasta t^*. El problema no está completamente determinado, pues todas estas variables son función del valor del stock de capital en T, K_T, que como se ha indicado anteriormente, es desconocido. Durante este intervalo, $[t^*\ T]$, las variables de estado y coestado se comportan de modo equivalente a cuando se suponía que únicamente se jugaba la estrategia 0 durante todo el horizonte temporal. Observando el tiempo, ahora hacia adelante, el capital se mantiene constante y ambas variables de coestado decrecen hasta alcanzar el valor cero, véanse las figuras 3.2 y 3.3. Además, la estrategia óptima del Sur, n_0^*, también es constante al ser función exclusivamente del capital que permanece invariante.

El caso que nos interesa es aquél en el que los agentes juegan la estrategia 1 durante un subintervalo, en el cual crece el stock de capital. Para que esto suceda, el tiempo de cambio, t^*, en el que la variable de coestado del Norte se hace igual a uno, debe necesariamente encontrarse entre 0 y T. Se ha supuesto que el Norte consume por encima de su nivel de subsistencia, dado por $\overline{w}\overline{L}$, lo cual implica que $\delta(n)$ es mayor o igual que cero. Si además se tiene en cuenta la expresión (3.32) del tiempo de cambio, t^*, es inmediato concluir que este tiempo siempre es menor que T. Resta encontrar una condición que garantice que este tiempo de cambio, además, es positivo. De la expresión de t^* cuando el número óptimo de especies utilizadas por el Sur es un valor interior del intervalo $[n_{\min}\ n_{\max}]$, se deduce la siguiente condición para que t^* sea positivo:

$$\lambda_T < 1/(\Omega K_T), \tag{3.33}$$

donde

$$\lambda_T = 1 + a\mu/(\bar{w}(1+d_1))\left[r/(b[1-\exp(-rT)]) - (1-\theta)\right]. \tag{3.34}$$

Nótese que el valor de λ_T decrece con la amplitud del horizonte temporal considerado, T.

Lema 3.3 *λ_T depende positivamente del tanto de descuento, r.*

Demostración

De la expresión de λ_T en (3.34), es fácil calcular la derivada,

$$\partial\lambda_T/\partial r = a\mu\left(1-(1+rT)/\exp(rT)\right)/\left[b\left(1-\exp(-rT)\right)^2\left(\bar{w}(1+d_1)\right)\right],$$

cuyo signo coincide con el de la expresión,

$$1-(1+rT)/\exp(rT).$$

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial alrededor de cero, se puede asegurar el cumplimiento de la siguente inecuación:

$$\exp(rT) > 1 + rT + (rT)^2/2,$$

con lo que se prueba que

$$1-(1+rT)/\exp(rT) > 0$$

y por ello,

$$\partial\lambda_T/\partial r > 0. \qquad \square$$

Si, por el contrario, el Sur juega $n_{\min}$ como estrategia óptima, entonces el tiempo de cambio viene dado por $\overline{t^*}$, que es una cota superior para t^*. La condición (3.33) será, por tanto, aplicable también en este caso. La condición (3.33) es válida independientemente de que el sistema evolucione bajo el Escenario I ó el II. Conviene, no obstante, examinar esta condición diferenciando entre ambos escenarios.

Bajo el Escenario I, cuando existe una cota superior para el número de especies utilizadas en el Sur, $n_{\max}$, se puede probar que λ_T toma siempre valores positivos. En este caso, la desigualdad (3.33) se puede reescribir como una condición sobre el valor del stock de capital en T:

$$K_T < 1/\left(\Omega\lambda_T\right) = \widetilde{K}_T. \tag{3.35}$$

En este escenario, habrá un periodo de crecimiento económico si y sólo si el valor del stock de capital en T está por debajo de una cota superior, $\widetilde{K}_T$. Esta cota depende positivamente de T. Así, cuanto mayor sea la longitud del horizonte temporal, mayor podrá ser el stock de capital alcanzado en T compatible con un periodo de crecimiento del capital. Asimismo, del lema 3.3 es inmediato deducir que $\widetilde{K}_T$ depende negativamente del tanto de descuento, r. Cuanto mayor sea esta última, menor será el capital final alcanzado en el caso de que se produzca crecimiento económico. Desafortunadamente el valor del capital en el instante T es desconocido y, por lo tanto, esta condición no es operativa. Por esta razón, en la siguiente proposición, se reescribe la condición (3.35) en términos de la tasa de crecimiento del capital.

Por lo que respecta al Escenario II, el signo de λ_T no está completamente determinado. Cuando este parámetro presenta valores positivos, se concluye, de nuevo, la condición (3.35) que garantiza la existencia de un periodo de crecimiento económico.

Proposición 3.2 *Tanto para el Escenario I como para el Escenario II con $\lambda_T > 0$, la condición (3.35) se puede reinterpretar atendiendo al comportamiento de la variable de coestado del Norte, m_N. Cuando no se cumple esta condición no se produce crecimiento del stock de capital debido a que el pseudoprecio del Norte, m_N, toma siempre valores por debajo de la unidad.*

Demostración

Cuando se juega la estrategia 0, la variable de coestado del Norte, por (3.31), viene dada por la expresión:

$$m_N(t) = \left(1 - \exp\left(r\left[t - T\right]\right)\right)\delta_0^*/r, \quad \forall t \in \left[0\, T\right].$$

Como se ha señalado anteriormente, la función $\delta(n)$ toma valores entre un mínimo, $\underline{\delta}$, cuando n tiende hacia infinito y un máximo, $\delta_{\max}$, cuando n toma el valor mínimo, $n_{\min}$. Tanto en el Escenario I, cuando $\underline{\delta}$ es negativo, como en el Escenario II, cuando es positivo y además se cumple $\lambda_T > 0$, la condición (3.35) se puede reescribir en función de $\delta(n)$. Cuando esta última condición no se cumple, entonces

$$\delta_0^* < r/\left(1 - \exp\left(r\left[t - T\right]\right)\right).$$

De esta forma, la variable de coestado decrece desde un valor menor a la unidad hasta cero en el instante final. Nunca sobrepasa el valor uno y, por lo tanto, nunca se llega a jugar la estrategia de ahorro pleno. El capital se mantiene constante durante todo el horizonte temporal.□

Por lo que respecta al Escenario II cuando λ_T es negativo o nulo la condición (3.33) es siempre cierta, garantizándose que en cualquier caso habrá crecimiento del capital durante un intervalo de tiempo, independientemente de cuál sea el valor del capital en el instante, T, K_T. Esta situación es la que presenta mayor interés, pues se produce crecimiento económico sin limitación para el valor del capital en el instante final.

En el Escenario II, el hecho de que λ_T sea negativo equivale a la siguiente desigualdad:

$$r / \left(1 - \exp\left(-rT\right)\right) \leq \underline{\delta},$$

de donde se deduce

$$r \leq b\left(1 - \theta - \overline{w}\left(1 + d_1\right) / \left(a\mu\right)\right) = \underline{\delta}. \tag{3.36}$$

Esta última desigualdad establece que la tasa de crecimiento del capital cuando n tiende a infinito, $\underline{\delta}$, no sólo es positiva, sino que es mayor o igual que el tanto de descuento, r. De esta forma, cualquiera que sea el número de especies que utilice el Sur, la tasa a la que crece el capital supera al tanto de descuento.

Con arreglo a lo expuesto hasta el momento, conviene resaltar la diferencia sustancial inducida al asumir que exista o no un número máximo de especies de las que el Sur puede hacer uso para producir el bien intermedio "natural". En el Escenario I, donde se tiene en cuenta la cota superior, $n_{\max}$, cuanto mayor es la duración del horizonte temporal, mayor es $\widetilde{K}_T$ y, por ello, más alta es la probabilidad de que se produzca crecimiento del stock de capital. En el Escenario II, donde el número de especies a utilizar no está acotado, el valor de λ_T puede ser positivo o negativo, debiendo cumplirse (3.35) para garantizar el crecimiento económico en el primer caso, y no requiriéndose ninguna condición para que exista crecimiento cuando λ_T es negativo. La posibilidad de que λ_T sea negativo o cero también crece con el horizonte temporal, T, estando asociada con políticas de largo plazo y viceversa. No obstante, si λ_T es positivo, de nuevo el valor de $\widetilde{K}_T$ y la posibilidad de crecimiento económico están positivamente relacionados con T. Esto quiere decir que, sea cual sea el escenario en el que se encuentre el sistema, cuanto mayor sea el horizonte temporal del juego, más probable es la aparición de crecimiento económico. En la tabla 3.1 se muestra cuándo es necesaria la condición (3.35) para garantizar crecimiento económico.

	Signo de λ_T	Condición para el crecimiento
Escenario I	$\lambda_T > 0$ (Siempre)	$K_T < \widetilde{K}_T$
Escenario II	$\begin{cases} \lambda_T > 0 \ (T \text{ pequeño}) \\ \lambda_T \leq 0 \ (T \text{ grande}) \end{cases}$	$K_T < \widetilde{K}_T$ No condición

Tabla 3.1

En adelante, nos centraremos en los casos en los que sí se produce crecimiento económico. Bien sea porque se cumple la condición (3.35) para uno u otro escenario, estando acotado el stock de capital al final del horizonte temporal[17], o bien porque en el Escenario II, el valor de λ_T es negativo o cero, con lo cual el stock de capital crece sin cota para su valor en T. En cualquiera de estos casos, razonando en tiempo inverso, los jugadores siempre cambian de la estrategia de ahorro nulo, que se juega desde T hasta t^*, a la de pleno ahorro, que mantienen desde t^* hasta 0. En el primer subintervalo, de T a t^*, el número de especies utilizadas por el Sur se mantiene constante y viene dado por n_0^*, donde se reemplaza K por su valor, que es constante durante todo este periodo e igual a K_T. En el segundo subintervalo, de t^* a 0, estudiamos el comportamiento de la variable de estado y las de coestado cuando los dos jugadores se rigen según la estrategia 1, de ahorro pleno. Desgraciadamente, cuando se juega esta estrategia no se ha encontrado una solución analítica del sistema (3.29).

Proposición 3.3 *Razonando en tiempo inverso, si existe un instante $t^* \in (0\ T)$, en el cual los jugadores cambian de la estrategia de ahorro nulo a la de ahorro pleno, entonces el número óptimo de especies naturales utilizadas en el proceso productivo del Sur desde t^* hasta 0 es constante e igual a $n_{\min}$. Esto es siempre cierto en el Escenario I, y bajo unas condiciones suficientes en el Escenario II.*

Demostración

Véase Apéndice B.

Bajo las condiciones que aseguran la tesis de la última proposición, la variable de control del Sur es constante y, por consiguiente, también lo es el precio, pudiéndose reescribir el sistema dinámico (3.29), cuando se juega la estrategia de ahorro pleno en el intervalo $[0\ t^*]$ como:

$$\dot{K} = \delta_{\max} K,$$

[17] Si no estuviese acotado, es decir, si el capital pudiese crecer por encima de $\widetilde{K}_T$, entonces $K_T > \widetilde{K}_T$, no cumpliéndose la condición (3.35), con lo cual, la solución que lleva al stock de capital a crecer por encima de $\widetilde{K}_T$ no es una solución óptima.

$$\begin{aligned} \dot{m}_N &= (r - \delta_{\max})\, m_N, \\ \dot{m}_S &= (r - \delta_{\max})\, m_S - bp_{\min}/a - b\theta. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Se conoce t^* por la expresión (3.32), así como los valores $m_S(t^*), m_N(t^*)$ y $K(t^*)$, los dos últimos con valor 1 y K_T, respectivamente. Se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales y se conocen los valores finales de las tres variables para el intervalo $[0\ t^*]$. Es posible, por lo tanto, calcular las soluciones analíticas. Del sistema (3.37) se puede concluir que el capital crece a la tasa máxima, dado que el precio es mínimo, mientras que las variables de coestado disminuyen para ambos jugadores, como muestran las figuras 3.2 y 3.3.

La evolución del stock de capital, K, así como del resto de variables del modelo, es función de K_T, cuyo valor es desconocido. Por el contrario, el problema se ha establecido en función del valor del stock de capital en el instante inicial, K_0. Sin más que resolver la primera ecuación diferencial del sistema (3.37), se tiene una función implícita que establece una relación entre los valores del stock de capital en los instantes inicial y final,

$$K_0 = K_T \exp\left(-\delta_{\max} t^*\right). \tag{3.38}$$

Con esta última ecuación, la solución del problema, que se expresaba como función de K_T, puede escribirse como función de K_0, cuyo valor sí es conocido. De esta forma, dado K_0, la ecuación (3.38) junto con la expresión de t^*, establecida en (3.32), proporciona el valor del stock de capital durante el intervalo $[t^*\ T]$, es decir, K_T. Una vez determinado el valor de K_T, se obtiene el del instante de cambio, t^*, y las trayectorias temporales cuando las dos regiones juegan la estrategia 0. A partir de ahí, se resuelve el sistema (3.37) para el intervalo $[0\ t^*]$, cuando ambas regiones juegan la estrategia de ahorro pleno y el número de especies es constante e igual a $n_{\min}$. De esta forma, el sistema (3.29) queda completamente resuelto.

Se ha indicado anteriormente que, tanto bajo el Escenario I como bajo el Escenario II y un valor positivo de λ_T, para que aparezca un periodo de crecimiento económico es preciso que se cumpla la condición (3.35), que establece una cota superior, $\widetilde{K}_T$, para K_T, cuyo valor es desconocido a priori. No obstante, si se tiene en cuenta la ecuación (3.38), según la cual $K_0 \leq K_T$, la cota superior que era válida para K_T, también lo es para K_0. En consecuencia, la condición (3.35), que no era operativa por estar referida a K_T, ahora sí lo es, al poder establecerse en términos del valor del capital al comienzo del horizonte temporal. Por otro lado, en el Escenario II, con λ_T negativo o cero, se tiene garantizado un periodo de crecimiento del capital con independencia de cuál sea el valor del stock de capital en 0, K_0.

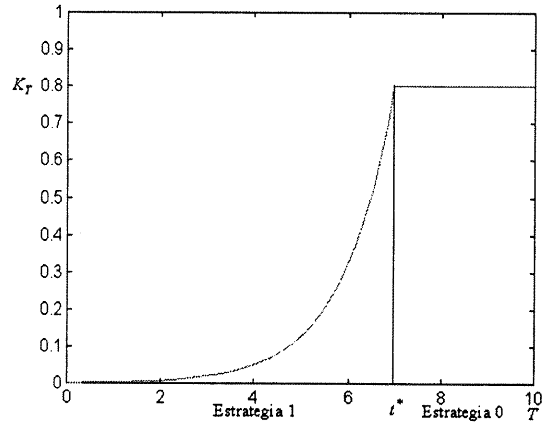

Figura 3.2

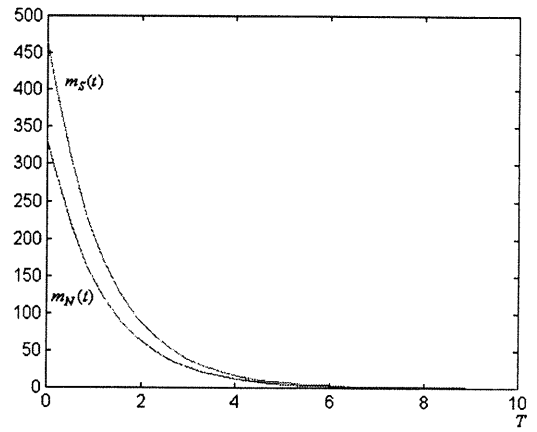

Figura 3.3

Una vez caracterizadas analíticamente, se recoge la interpretación económica para este tipo de soluciones. En ellas, los jugadores deciden seguir la estrategia 1 en un primer subintervalo, durante el cual el Norte decide ahorrar a la tasa máxima. Al mismo tiempo, el Sur decide fijar un número mínimo de especies para producir el bien intermedio "natural", lo que implica que el mercado establezca un precio mínimio para este bien. Esto hace que la tasa de acumulación del capital sea máxima. Cuando el valor del capital, medido a través del precio sombra de la región que lo posee, el Norte, disminuye por debajo de uno, el ahorro de una unidad adicional de capital conlleva mayores costes que beneficios y, por tanto, la tasa de ahorro se hace cero a partir de ese instante, t^*, y hasta el final del horizonte temporal. Durante este segundo intervalo, como se deduce de (3.11) y (3.24), el Sur maximiza su utilidad fijando el número de especies y con ello el precio de R, como función del stock de capital. Cuanto mayor sea el capital alcanzado, mayor será el precio que el Norte debe pagar al Sur por la compra de ese input productivo. En cualquier caso, durante este segundo intervalo, dado que el ahorro es nulo, también lo es la acumulación de capital y, consecuentemente, el número de especies utilizadas en la producción del bien intermedio "natural", así como su precio, se mantienen constantes.

Si el stock de capital crece durante un primer periodo, el número de especies a utilizar en el proceso productivo del Sur es mínimo durante el intervalo en el que los jugadores deciden seguir la estrategia 1 de ahorro pleno. Durante el segundo periodo, cuando se juega la estrategia de ahorro nulo, el capital se mantiene constante, así como el número óptimo de especies, el cual es mayor o igual al mínimo, como muestra la figura 3.4. Si no hay crecimiento económico, el número de especies es constante durante todo el intervalo temporal.

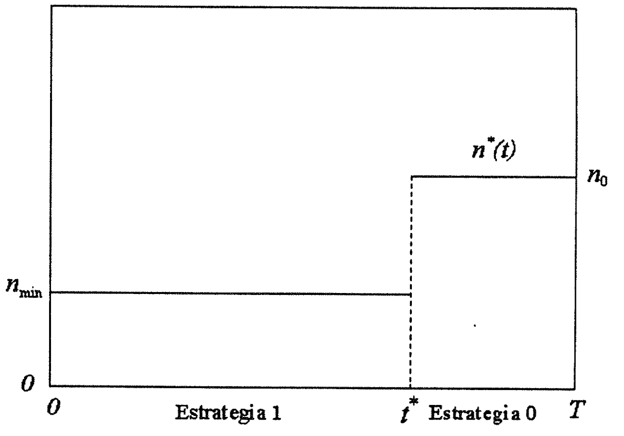

Figura 3.4

3.2.2 Equilibrios dinámicos cooperativos

En esta sección se estudia un juego diferencial en el que ambas regiones, en lugar de establecer sus trayectorias dentro de un marco no-cooperativo y maximizar separadamente sus respectivos funcionales objetivo, cooperan con objeto de conseguir maximizar un funcional objetivo común. Esta solución será un óptimo de Pareto (véase, por ejemplo, Hoel (1978) o Chander & Tulkens (1992)). El primer paso consiste en definir el funcional objetivo del juego como la combinación convexa de los funcionales objetivo de ambos jugadores, definidos al comienzo de la sección 3.2 (véase Hoel (1978)). Para obtener las estrategias cooperativas basta resolver el problema de control óptimo que se plantea a continuación y que consiste en maximizar el funcional objetivo restringido, al igual que en el caso no-cooperativo, a la evolución temporal del stock de capital. Así, el problema se puede escribir:

$$\max_{s,\, n} \ \alpha W_N + (1-\alpha) W_S,$$
$$\text{s.a.} \ : \qquad \dot{K} = K\delta(n)\, s, \qquad K(0) = K_0 > 0, \tag{3.39}$$

donde la tasa de ahorro puede tomar valores en el intervalo $[0\ 1]$, mientras que el número de especies a utilizar en el proceso productivo del Sur, n, debe ser mayor o igual a un número mínimo, $n_{\min}$. A su vez, si se asume que el sistema evoluciona bajo el Escenario I, n no puede superar un máximo, $n_{\max}$, y por el contrario, si se supone que lo hace bajo el Escenario II, entonces no hay cota superior para este número. El parámetro α, comprendido entre 0 y 1, proporciona una medida del peso asignado a cada jugador[18].

El comportamiento cooperativo es resultado de algún proceso de negociación entre las partes, previo al comienzo del juego. El peso α puede definirse como un índice del poder

[18] En concreto, α mide el peso asignado al Norte, pero dado que la suma de los pesos para ambos jugadores debe ser igual a la unidad, también es una medida indirecta del peso asignado al Sur, $(1-\alpha)$.

de negociación del Norte. Es resultado de las negociaciones entre el Norte y el Sur y depende de cuál sea la capacidad que cada una de las regiones tiene de amenazar a la región competidora, así como de las ganancias que cada una obtiene como resultado de la cooperación.

La función hamiltoniana cuando los jugadores cooperan viene dada por:

$$\begin{gathered} H_C\left[K, s, n, m_C\right] = \alpha\left[K\delta\left(n\right)\left(1-s\right)+\overline{w}\overline{L}\right]+ \\ \left(1-\alpha\right)\left[bKp\left(n\right)/a+\left(bK\theta-\overline{w}\overline{L}\right)-d_2 n\right]+m_C K\delta\left(n\right)s, \end{gathered} \tag{3.40}$$

siendo m_C la variable de coestado asociada al stock de capital en el juego cooperativo.

Las condiciones necesarias de optimalidad del principio del máximo de Pontryagin establecen el sistema de ecuaciones diferenciales que determina la evolución temporal de las variables de estado y coestado, así como la condición de transversalidad.

$$\begin{aligned} \dot{K} &= K\delta\left(n\right)s, \\ \dot{m}_C &= \left(r-\delta\left(n\right)s\right)m_C-\delta\left(n\right)\alpha\left(1-s\right)-\left(1-\alpha\right)\left(bp\left(n\right)/a+b\theta\right), \\ K(0) &= K_0, \qquad\qquad m_C(T)=0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Al mismo tiempo, la maximización de la función hamiltoniana con respecto a las variables de control del Norte y del Sur, proporciona las trayectorias óptimas para cada una de estas variables:

$$s_C^* = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m_C < \alpha, \\ 1 & \text{si} \quad m_C > \alpha. \end{cases} \tag{3.42}$$

$$n_C^* = \begin{cases} n_{\min}, \ \text{si} \ \ \Omega K\left(\phi-\left(1+d_1\right)s\left(m_C-\alpha\right)/\left(1-\alpha\right)\right) < \exp\left(n_{\min}/\mu\right), \\ n_{\max}, \ \text{si} \ \ \Omega K\left(\phi-\left(1+d_1\right)s\left(m_C-\alpha\right)/\left(1-\alpha\right)\right) > \exp\left(n_{\max}/\mu\right), \\ \mu\ln\left[\Omega K\left(\phi-\left(1+d_1\right)s\left(m_C-\alpha\right)/\left(1-\alpha\right)\right)\right], \quad \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{3.43}$$

siendo

$$\phi = \left(1-\alpha-\alpha\left(1+d_1\right)\right)/\left(1-\alpha\right).$$

Esta última expresión decrece conforme aumenta el parámetro α. Además, es siempre inferior a la unidad, y es positiva cuando α se mueve en el intervalo $(0\ \ 1/\left(2+d_1\right))$, mientras que toma valores negativos cuando α pertenece al intervalo, $(1/\left(2+d_1\right)\ \ 1)$. En este último caso, por (3.43), se deduce que el Sur selecciona un número mínimo de especies, $n_{\min}$, como óptimo, preservando la biodiversidad lo máximo posible. Esto lleva a su vez a un precio mínimo, $p_{\min}$, para el bien intermedio "natural", durante todo el horizonte temporal. Al ser constante y conocido este valor, el sistema puede resolverse analíticamente y, además, se puede asegurar que la tasa de crecimiento del capital es máxima.

Al igual que en el caso no-cooperativo, el número óptimo de especies viene dado por una función continua a trozos. Esta función está truncada, inferiormente por $n_{\min}$, en ambos escenarios, y superiormente por $n_{\max}$, únicamente en el Escenario I. Por su parte, la tasa de ahorro óptima es una función bang-bang que depende del valor de la variable de coestado. Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso no-cooperativo, se puede probar la imposibilidad de un arco singular durante un intervalo no trivial de tiempo.

A partir de las expresiones (3.42) y (3.43), se obtienen las estrategias óptimas, dadas por s_C^*, que no depende del número de especies utilizadas en el Sur, y n_C^*, en el que se substituye la tasa de ahorro por su expresión óptima. Así, n_C^* puede reescribirse como:

$$n_C^* = \begin{cases} n_{0C}^*, & \text{si} \quad m_C < \alpha, \\ n_{1C}^*, & \text{si} \quad m_C > \alpha, \end{cases}$$

con

$$n_{0C}^* = \begin{cases} n_{\min}, & \text{si} \quad \Omega K \phi < \exp\left(n_{\min}/\mu\right), \\ n_{\max}, & \text{si} \quad \Omega K \phi > \exp\left(n_{\max}/\mu\right), \\ \mu \ln\left[\Omega K \phi\right], & \text{en otro caso}, \end{cases} \tag{3.44}$$

$$n_{1C}^* = \begin{cases} n_{\min}, \ \text{si} \quad \Omega K \left(1-\alpha-(1+d_1)\, m_C\right) / \left(1-\alpha\right) < \exp\left(n_{\min}/\mu\right), \\ n_{\max}, \ \text{si} \quad \Omega K \left(1-\alpha-(1+d_1)\, m_C\right) / \left(1-\alpha\right) > \exp\left(n_{\max}/\mu\right), \\ \mu \ln\left[\Omega K \left(1-\alpha-(1+d_1)\, m_C\right) / \left(1-\alpha\right)\right], \quad \text{en otro caso}. \end{cases} \tag{3.45}$$

Del mismo modo que en el caso no-cooperativo, dependiendo del valor de la variable de coestado, m_C, se tienen dos pares de estrategias óptimas:

$$\left(0, n_{0C}^*\right), \quad \text{si} \quad m_C < \alpha, \tag{3.46}$$

$$\left(1, n_{1C}^*\right), \quad \text{si} \quad m_C > \alpha, \tag{3.47}$$

a las que denominamos estrategia 0 o de ahorro nulo y estrategia 1 o de ahorro pleno. Por consiguiente, el precio óptimo del bien intermedio "natural" también depende de cuál sea el valor de la variable de coestado,

$$p_C\left(n_C^*\right) = \begin{cases} p_C\left(n_{0C}^*\right), & \text{si} \quad m_C < \alpha, \\ p_C\left(n_{1C}^*\right), & \text{si} \quad m_C > \alpha. \end{cases} \tag{3.48}$$

En el caso de que se juegue la estrategia de ahorro nulo, dada por (3.46), es posible encontrar una solución analítica del sistema de ecuaciones diferenciales (3.41), para cada $t \in [0\, T]$

$$\begin{aligned} K(t) &= K_0, \\ m_C(t) &= B\left(1 - \exp\left(r\left[t - T\right]\right)\right), \end{aligned} \tag{3.49}$$

donde $B > 0$ viene dado por,

$$B = \begin{cases} \overline{B} = b\overline{w}\left(1-\alpha\right)\left(\left[1-\exp\left(-n_{\max}/\mu\right)\right] / \left(a\mu\right) + 1/z\right)/r, & \text{si } n_{0C}^* = n_{\max}, \\ \widehat{B} = b\left(\left(1-\theta\right)\alpha + \overline{w}\phi\left(1-\alpha\right)/\left(a\mu\right)\left[1-1/\left(\phi\Omega K_0\right)\right] + \left(1-\alpha\right)\theta\right)/r, & \text{si } n_{\min} < n_{0C}^* < n_{\max}, \\ \underline{B} = b\left(\left(1-\theta\right)\alpha + \overline{w}\phi\left(1-\alpha\right)/\left(a\mu\right)\left[1-\exp\left(-n_{\min}/\mu\right)\right] + \left(1-\alpha\right)\theta\right)/r, & \text{si } n_{0C}^* = n_{\min}. \end{cases}$$

La expresión $\overline{B}$ es aplicable cuando el juego se desarrolla bajo el Escenario I, en el cual existe una cota máxima para el número de especies a utilizar en el proceso productivo del Sur[19].

[19] Al igual que en el caso no-cooperativo, cuando se juega la estrategia 0 el capital se mantiene constante, y lo mismo sucede con el número de especies conservadas, n_{0C}^*. Igualmente, el precio, $p_C\left(n_{0C}^*\right)$, y

Por el contrario, cuando los jugadores eligen la estrategia (3.47) de ahorro pleno, no hemos encontrado una solución analítica, siendo necesario acudir a la implementación de métodos numéricos. Al igual que en el caso no-cooperativo, nos interesa que a lo largo del horizonte temporal considerado se jueguen ambas estrategias. Esto es, durante un primer periodo, de 0 a t_C^*, los jugadores elijan la estrategia 1 o de ahorro pleno, y a partir de ese instante, t_C^*, y hasta el final del juego, T, seleccionen la estrategia 0. Para encontrar la solución del juego, cuando los jugadores se comportan según este esquema, se resuelve el sistema (3.41) en tiempo inverso. En consecuencia, se integra este sistema comenzando por el instante T y suponiendo que los jugadores eligen la estrategia (3.46) de ahorro nulo, para la que se conoce la solución analítica. La condición de transversalidad obliga a que la variable de coestado sea igual a cero en T. No obstante, se desconoce el valor de la variable de estado en ese instante, por lo que es preciso resolver el sistema en función de cuál sea este valor que denominamos K_{TC}. Llegado un determinado momento, t_C^*, los jugadores cambian sus estrategias pasando a jugar (3.47) hasta el momento 0. El instante en el que ambas regiones deciden cambiar sus estrategias, t_C^*, es aquél en el que la variable de coestado m_C alcanza el valor α. Este tiempo también se determina como una función de K_{TC}. Finalmente, desde este instante y hasta 0, se resolverá el sistema suponiendo que ambas regiones eligen la estrategia (3.47), utilizando como condiciones iniciales los valores de las variables de estado y de coestado que son conocidos en t_C^*. No obstante, como ya se ha comentado, cuando se juega esta estrategia hay que recurrir a métodos numéricos para conocer el comportamiento de la solución.

En primer lugar, de la igualdad $m_C\left(t_C^*\right) = \alpha$, se calcula el instante de cambio de estrategias, t_C^*. Dado que de T a t_C^* se está jugando la estrategia 0, y que en este caso se puede resolver analíticamente el sistema de ecuaciones diferenciales (3.41), la forma funcional de la variable de coestado se calcula de forma idéntica a (3.49) pero trabajando en tiempo inverso, siendo T el instante de partida y K_{TC} el capital inicial. La expresión del tiempo de cambio viene dada por:

$$t_C^* = \begin{cases} \overline{t_C^*}, & \text{si} \quad n_{0C}^* = n_{\max}, \\ \widehat{t_C^*}, & \text{si} \quad n_{\min} < n_{0C}^* < n_{\max}, \\ \underline{t_C^*}, & \text{si} \quad n_{0C}^* = n_{\min}, \end{cases} \tag{3.50}$$

siendo,

$$\begin{aligned} \overline{t_C^*} &= T + \ln\left\{1 - \alpha r/[b\overline{w}\,(1-\alpha)[1 - \exp\left(-n_{\max}/\mu\right)]/(a\mu) + 1/z]\right\}/r, \\ \widehat{t_C^*} &= T + \ln\{1 - \alpha r/[b((1-\theta)\alpha + \overline{w}\phi(1-\alpha)/(a\mu)[1 - 1/(\phi\Omega K_{TC})] + (1-\alpha)\theta)]\}/r, \\ \underline{t_C^*} &= T + \ln\{1 - \alpha r/[b\left((1-\theta)\alpha + \overline{w}\phi\,(1-\alpha)/(a\mu)[1 - \exp\left(-n_{\min}/\mu\right)] + (1-\alpha)\theta\right)]\}/r. \end{aligned}$$

Esta expresión para el tiempo de cambio depende de que ϕ sea positivo o negativo. Es decir, de si el poder de negociación del Norte, α, es menor que $1/\left(2 + d_1\right)$, (que a su vez es menor que $1/2$, valor para el cual el poder de negociación estaría equilibrado para las dos regiones) o es superior a esta cota.

$\delta\left(n_{0C}^*\right)$ también son constantes, denotándose por p_{0C}^* y δ_{0C}^*, respectivamente.

1. Si $\alpha < 1/(2+d_1)$ (es decir, $\phi > 0$), se deduce que $\overline{t_C^*}$ es una cota superior para el tiempo de cambio, mientras que $\underline{t_C^*}$ es un cota inferior. Esto es,

$$\underline{t_C^*} < t_C^* < \overline{t_C^*}.$$

2. Si, por el contrario, $\alpha > 1/(2+d_1)$ (es decir, $\phi < 0$), entonces el Sur siempre escoge $n_{\min}$ y, por ende, el tiempo de cambio de una a otra estrategia viene dado por $\underline{t_C^*}$.

Al igual que en el caso no-cooperativo, existen dos tipos diferenciados de soluciones. Un primer tipo consiste en jugar la estrategia 0 durante todo el horizonte temporal, manteniéndose constante el stock de capital. El segundo tipo consta de una sucesión de las dos estrategias. Así, durante un primer periodo se ahorra a la tasa máxima, creciendo el capital durante este tiempo, y a partir de un determinado momento y hasta el final del horizonte temporal se juega la estrategia 0, deteniéndose el proceso de crecimiento económico. De estos dos tipos de soluciones la que conlleva un periodo de crecimiento del stock de capital es la que presenta mayor interés. Es decir, surge la necesidad de encontrar las condiciones bajo las cuales el tiempo de cambio, t_C^*, es positivo pero inferior al horizonte temporal, T. Es decir, la variable de coestado, m_C, cruza el valor α en algún momento del juego.

Teorema 3.1 *En el marco de un juego cooperativo, independientemente de cual sea el valor inicial del capital, siempre existe un rango del poder de negociación de ambas regiones, para el que se produce ahorro pleno y crecimiento del capital durante un primer periodo, seguido de otro de ahorro nulo y estancamiento.*

Demostración

La expresión de la variable de coestado, dada en (3.49), se puede reescribir como:

$$m_C(t) = B\left(1 - \exp\left(r\left[t - T\right]\right)\right), \quad \forall t \in [0\, T],$$

donde,

$$B = \begin{cases} \overline{B} = b\,(1-\alpha)\,(1+\theta d_1)/[r(1+d_1)], & \text{si } n_{0C}^* = n_{\max}, \\ \underline{B} = (-\phi\,(1-\alpha)\,\delta_{\max} + b\,(1-\alpha)\,(1+\theta d_1))\,/[r(1+d_1)], & \text{si } n_{0C}^* = n_{\min}, \\ \widehat{B} = (-\phi\,(1-\alpha)\,\delta_{0C}^* + b\,(1-\alpha)\,(1+\theta d_1))\,/[r(1+d_1)], & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.51}$$

Nótese que dado que el máximo para el número de especies naturales sólo existe en el Escenario I, la expresión $\overline{B}$ no es aplicable en el Escenario II.

El valor de δ_{0C}^* cuando se juega la estrategia 0 es constante y viene dado por,

$$\delta_{0C}^* = b\left[1 - \theta - \overline{w}\,(1+d_1)\left[1 - 1/\left(\phi\Omega K_0\right)\right]/\left(a\mu\right)\right].$$

Se estudia si la solución óptima implica necesariamente una tasa de ahorro nula durante todo el horizonte temporal, no habiendo crecimiento del stock de capital, o si por el contrario, existe alguna condición que garantiza que la politica óptima de los jugadores conlleva un primer periodo de ahorro pleno, dando lugar a la aparición de crecimiento económico. La condición de transversalidad establece que el valor final de la variable de coestado debe ser cero, $m_C\,(T) = 0$. De esta condición se deriva que el Norte decide una tasa de ahorro nula, al menos en ese instante final. Dado que la variable de coestado es una función monótona y decreciente con el tiempo, se presentan dos posibles situaciones. Si el valor inicial de la variable de coestado, $m_C(0)$, es positivo pero menor que α, esta variable siempre estará por debajo de α. Esto significa que no hay ahorro en ningún momento, y el capital se mantiene constante desde el principio y hasta el final del horizonte temporal. Por el contrario, si el valor inicial de m_C es mayor que α, entonces durante un primer periodo la variable de coestado toma valores por encima de este parámetro hasta un momento en el que lo alcanza. A partir de entonces, su valor está por debajo hasta llegar a cero en el instante final, T. Durante el primer periodo se juega la estrategia de ahorro pleno, produciéndose un incremento continuado en el stock de capital. Por tanto, para asegurar que se produce crecimiento económico, basta probar que la variable de coestado alcanza un valor superior a α al principio del juego, esto es, $m_C(0) > \alpha$. Toda vez que la variable de coestado es una función truncada inferiormente por la expresión obtenida cuando se juega $n_{\min}$, es decir, cuando $B = \underline{B}$, es suficiente probar que

$$\underline{B}\left(1 - \exp\left(-rT\right)\right) > \alpha.$$

Esta desigualdad es equivalente a

$$(1-\alpha)\left[b\left(1+\theta d_1\right) - \delta_{\max}\right] / \left(1+d_1\right) > \alpha\left(r/\left(1-\exp\left(-rT\right)\right)-\delta_{\max}\right). \tag{3.52}$$

Para estudiar esta condición es necesario distinguir dos rangos de valores de α, atendiendo al signo de la constante C, donde

$$C = r/\left(1 - \exp\left(-rT\right)\right) - \delta_{\max} + \left[b\left(1+\theta d_1\right) - \delta_{\max}\right] / \left(1+d_1\right).$$

Si $C < 0$, la condición (3.52) se cumple siempre. En este caso, independientemente del peso o poder de negociación de cada una de las regiones, el crecimiento en el stock de capital está garantizado.

Si $C > 0$, la condición (3.52) implica una cota superior para el poder de negociación del Norte:

$$\alpha < \overline{\alpha}(T), \tag{3.53}$$

donde,

$$\overline{\alpha}\left(T\right) = 1/\left\{1+(1+d_1)\left[r/\left(1-\exp\left(-rT\right)\right)-\delta_{\max}\right] / \left(b\left[\left(1+\theta d_1\right)-\delta_{\max}\right]\right)\right\},$$

Nótese que el valor de esta última cota crece al aumentar el horizonte temporal.

Si el poder de negociación del Norte, α, no supera la cota $\overline{\alpha}(T)$, por la condición (3.53), se tiene garantizada la aparición de crecimiento económico. Esta cota, a su vez, puede ser mayor o menor que $1/(2+d_1)$, que es el valor de α para el cual ϕ se anula. La desigualdad $\overline{\alpha}(T) > 1/(2+d_1)$ se cumple si y sólo si:

$$\left[r\left(1 - \exp\left(-rT\right)\right) - \delta_{\max}\right] / \left(b\left[\left(1+\theta d_1\right) - \delta_{\max}\right]\right) < 1. \tag{3.54}$$

Pueden presentarse dos casos:

(a) La desigualdad (3.54) se cumple siempre si $r/\left(1 - \exp\left(-rT\right)\right) - \delta_{\max} \leq 0$.

(b) Por ser r un tanto de descuento, toma valores entre 0 y 1, y como θ y d_1 son positivos, se tiene que $r < b(1+\theta d_1)$. Entonces existe un horizonte temporal lo suficientemente largo, T^*, tal que

$$r/\left(1-\exp\left(-rT^*\right)\right) = b\left(1+\theta d_1\right).$$

Si $r/\left(1-\exp\left(-rT\right)\right) - \delta_{\max} > 0$, entonces la condición (3.54) se cumple siempre para horizontes temporales, T, superiores a T^*.

La condición (3.54) garantiza un periodo de crecimiento económico para cualquier $\alpha \leq 1/\left(2+d_1\right)$ (es decir, $\phi > 0$). Adicionalmente, existe otro intervalo de valores de α, $[1/\left(2+d_1\right)\ \overline{\alpha}\left(T\right)]$ (donde $\phi < 0$ y el Sur juega $n_{\min}$), en el que también se produce crecimiento en el stock de capital.

Cuando, por el contrario, no se cumple la condición (3.54), entonces no es posible el crecimiento económico para valores del poder de negociación del Norte, α, por encima de $1/\left(2+d_1\right)$, es decir, para $\phi < 0$. Incluso valores de α para los cuales $\phi > 0$, no siempre garantizan la aparición de crecimiento económico. No obstante, éste siempre es posible para algún rango de valores del poder de negociación del Norte, $0 < \alpha < \overline{\alpha}\left(T\right) < 1/\left(2+d_1\right)$. Dado que, como se ha señalado, $\overline{\alpha}\left(T\right)$ depende positivamente de la longitud del horizonte temporal, T, cuanto mayor sea éste, mayor amplitud tendrá el intervalo $\left(0\ \overline{\alpha}\left(T\right)\right)$, por lo que habrá un mayor rango de valores de los niveles de negociación de los jugadores para los cuales se produce crecimiento económico.□

Sea cual sea el horizonte temporal considerado, siempre existe un conjunto de valores de α para el cual se elige la estrategia de ahorro pleno durante un primer intervalo. Esto significa que si los jugadores cooperan, siempre hay un rango de valores de α o relación de pesos, para el cual se produce crecimiento del stock de capital, al menos durante un primer periodo, manteniéndose constante desde entonces hasta el final del horizonte temporal, T. El conjunto de valores de α para los cuales esto es posible, es menor cuanto menor sea el horizonte temporal. Si el horizonte temporal es muy corto, para que aparezca un periodo de crecimiento económico, es preciso que el poder de negociación del Norte, α, sea muy débil, siendo entonces muy fuerte el poder de negociación del Sur, $(1-\alpha)$.

Analizando el nivel de consumo del Norte, que representa la utilidad de los agentes económicos de esta región, se observa que cuando se juega la estrategia de ahorro pleno, el nivel de consumo se iguala al de subsistencia. Por el contrario, cuando la estrategia elegida es la de ahorro nulo, además del consumo de subsistencia, también se consumen los rendimientos del capital, en lugar de ser ahorrados. De esta forma, el Norte está dispuesto a consumir únicamente al nivel de subsistencia y ahorrar las cantidades correspondientes a los rendimientos de capital durante un primer periodo, si y sólo si esto posibilita un crecimiento económico, y por ende de los rendimientos de capital, de tal forma que el beneficio de consumir estos rendimientos durante un segundo periodo supere a las pérdidas de no consumirlos al principio.

En lo concerniente al Sur, su consumo depende positivamente del precio que, indirectamente a través del mercado, fije del bien intermedio "natural", así como del stock de capital. Esta región está dispuesta a producir utilizando un número pequeño de especies y, por tanto, a inducir un precio reducido del bien intermedio y con ello un nivel de consumo bajo durante un primer periodo, si esto permite un crecimiento del stock del capital que implique una mayor demanda de bien intermedio "natural", así como de trabajadores por parte del Norte. Es decir, tanto el Norte como el Sur están dispuestos a consumir menos en el presente, si de esta forma se consigue un incremento del stock de capital y un mayor consumo futuro, que compense la pérdida de consumo durante el primer periodo.

Para ciertos valores de los parámetros, $C < 0$, siempre se produce crecimiento del stock de capital, independientemente de cuál sea el poder de negociación de una y otra región. A ambos jugadores les compensa una reducción en el consumo actual que permita un crecimiento económico y con ello un mayor consumo futuro. Por el contrario, para otros valores de los parámetros, $C > 0$, si el Norte posee un elevado poder de negociación, $\alpha > \overline{\alpha}(T)$, es óptimo no ahorrar nada, no produciéndose crecimiento del stock de capital. Esto se debe a que en este caso, aunque el Sur mejora si se produce un periodo de crecimiento, no sucede lo mismo con el Norte, que prefiere no ahorrar nada durante todo el horizonte temporal. Cuanto menor sea el horizonte temporal, menos le compensa al Norte ahorrar durante un primer periodo y, por lo tanto, mayor debería ser el poder de negociación del Sur, $1 - \alpha$, para hacer posible un periodo de crecimiento económico, en contra de los deseos del Norte de no ahorrar.

3.2.3 Comportamiento cooperativo "versus" no-cooperativo

El primer punto que interesa comparar es la aparición o no de un periodo de crecimiento del stock de capital. En la sección 3.2.1 se prueba que cuando los jugadores muestran un comportamiento no-cooperativo, en el caso de encontrarnos en el Escenario I o en el Escenario II y λ_T positivo, para la aparición de un periodo de crecimiento económico es necesario que el stock capital final, y por ende el inicial, no sea superior a la cota $\widetilde{K}_T$, dada en (3.35). Por el contrario, la sección 3.2.2 muestra que cuando los jugadores cooperan, siempre existe un rango de pesos para ambas regiones, dentro del cual aparece un periodo de crecimiento económico.

Un segundo punto, que se desarrolla más adelante, consiste en comparar las trayectorias seguidas por las variables de estado y los controles, cuando los jugadores siguen un comportamiento cooperativo "versus" uno no-cooperativo (véase Dockner & Long (1993)). En esta sección nos centramos en el caso en el que se produce crecimiento del stock de capital para ambos modos de juego. Suponemos, por tanto, que, bajo comportamiento no-cooperativo, en el Escenario I el capital inicial es lo suficientemente pequeño, según indica la condición (3.35), para que se produzca crecimiento del capital. Igualmente se supone cierta esta condición cuando considerando el Escenario II el valor de λ_T es positivo. De este modo se tiene garantizado que se produce un cambio de estrategias, desde la de ahorro pleno, (3.27), a la de ahorro nulo, (3.26). Con objeto de comparar ambos comportamientos, se considera que el capital final es el mismo para los dos, es decir, $K_T = K_{TC}$.

En primer lugar, comparamos la longitud del primer periodo en el que se da crecimiento en el stock de capital, es decir, se compara el tiempo de cambio. Cuando el Sur decide como estrategia óptima el número mínimo de especies, $n_{\min}$, el tiempo de cambio es mayor en el caso cooperativo que en el no-cooperativo, $\underline{t_C^*} > \overline{t^*}$. Dado que $\underline{t_C^*}$ es una cota inferior para el tiempo de cambio en el modo de juego cooperativo, mientras que $\overline{t^*}$ es una cota superior para el no-cooperativo, es inmediato concluir que el tiempo de cambio es siempre mayor cuando los jugadores cooperan:

$$t^* \leq \overline{t^*} < \underline{t_C^*} \leq t_C^*.$$

Así, se tiene que el periodo de crecimiento del capital es mayor cuando el Norte y el Sur siguen un comportamiento cooperativo.

Como ya se ha señalado, cuando los jugadores se comportan de modo no-cooperativo, es posible calcular la solución analítica del sistema cuando la estrategia óptima es la de ahorro nulo; también es factible, aun cuando la solución óptima sea jugar la estrategia 1 un primer periodo y la de ahorro nulo en adelante, siempre que se pueda garantizar, por la proposición 3.3, que el Sur utiliza un número mínimo de especies. Por el contrario, no se ha encontrado la expresión analítica de una solución de este tipo cuando el Norte y el Sur deciden cooperar. A la hora de comparar ambos modos de comportamiento, se hace preciso recurrir a la implementación de métodos numéricos. Se llevan a cabo experimentos numéricos utilizando la rutina ODE23 de Matlab, mediante la cual se integran sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando una fórmula Runge-Kutta de segundo y tercer orden, (véase, por ejemplo, Keller (1992); Judd (1998) y MATLAB (1996)). Estos experimentos muestran que para alcanzar el mismo valor final del stock de capital, el valor inicial de esta variable en el caso cooperativo, K_{0C}, es menor que en el caso no-cooperativo, K_0. La figura 3.5 ilustra este resultado. El crecimiento del stock de capital en términos absolutos es mayor en el caso cooperativo.

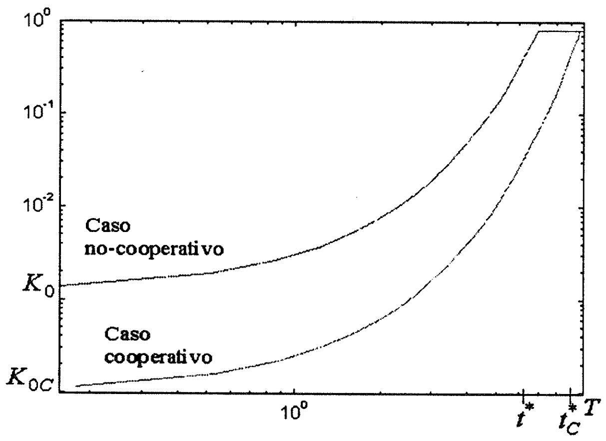

Figura 3.5

Con vistas a cotejar los resultados del juego cuando las regiones se comportan de modo no-cooperativo y cuando deciden cooperar, se está suponiendo que se produce crecimiento del stock de capital durante un primer periodo y estancamiento en un segundo intervalo, por lo que se está asumiendo que en ambos casos los tiempos de cambio, t^* y t_C^*, pertenecen al intervalo $(0\ T)$.

Por lo que se refiere al comportamiento no-cooperativo, bajo las hipótesis de la proposición 3.3, se ha demostrado que los jugadores deciden seguir la estrategia 1 de ahorro pleno en un primer intervalo, durante el cuál el capital crece a la tasa máxima y el número de especies utilizadas es el mínimo, $n_{\min}$. A partir de un instante de cambio, t^*, juegan la estrategia de ahorro nulo, con lo que el capital se mantiene constante, así como el número óptimo de especies, el cual es mayor o igual al mínimo, como se recoge en la figura 3.4.

Los resultados en el caso del modo de juego cooperativo se cotejan con los no-cooperativos distinguiendo tres casos, según cual sea el poder de negociación de cada una de las partes, es decir, dependiendo del valor de α :

1. $\alpha \in [1/(2+d_1)\ 1)$, es decir, $\phi \leq 0$.

Proposición 3.4 *El número de especies utilizadas en el proceso productivo del Sur cuando los agentes cooperan es el mínimo, $n_{\min}$, con independencia de que se juegue la estrategia de ahorro pleno o nulo.*

Demostración

Mientras se juega la estrategia 0, la demostración es inmediata por la expresión de n_{0C}^*, establecida en (3.44). Al jugar la estrategia 1 debe cumplirse que $m_C > \alpha$. Esta última desigualdad, junto con

$$\partial\left[\left(1-\alpha-\left(1+d_1\right)m_C\right)/\left(1-\alpha\right)\right]/\partial m_C < 0, \tag{3.55}$$

y el hecho de que $\phi \leq 0$, obligan a que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\left(1-\alpha-\left(1+d_1\right)m_C\right)/\left(1-\alpha\right) < 0.$$

Por la expresión de n_{1C}^*, recogida en (3.45), se tiene que también en este caso se juega $n_{\min}$.□

Cuando el poder de negociación del Norte, α, es muy fuerte, el número de especies utilizadas en el proceso productivo del Sur es mínimo, siendo máxima la conservación de la biodiversidad.

Adicionalmente, a medida que este poder de negociación se acerca a uno, es decir, cuando el peso del Sur se aproxima a cero, el tiempo de cambio en el caso cooperativo, t_C^*, tiende hacia la cota superior para el tiempo de cambio en el no-cooperativo, $\overline{t^*}$. Esto significa que, aunque el periodo de crecimiento económico es siempre más prolongado si los agentes cooperan, la diferencia entre la duración de los periodos de crecimiento en ambos modos de juego converge hacia cero, según el peso del Sur tiende a cero.

2. $\alpha \in [\hat{\alpha}(K_T)\ 1/(2+d_1))$, para estos valores, $0 < \phi < 1$.

Proposición 3.5 *Con independencia de cuál sea el valor del stock de capital al final del horizonte temporal, $K_T = K_{TC}$, siempre existe un valor del poder de negociación del Norte, $\hat{\alpha}(K_T)$, tal que para valores más altos de α, si los jugadores cooperan, entonces el número óptimo de especies cuando se juega la estrategia 0 es el mínimo, $n_{\min}$. Además, se tiene que $\hat{\alpha}(K_T) < 1/(2+d_1)$.*

Demostración

Véase Apéndice C.

Si cuando se juega la estrategia 0, el número óptimo de especies es $n_{\min}$, entonces al pasar a jugar la estrategia 1, teniendo presente (3.55), $m_C > \alpha$ y la expresión del número óptimo de especies para ambas estrategias, dadas por (3.44) y (3.45), respectivamente, puede concluirse que el número óptimo de especies sigue siendo el mínimo.

Este segundo rango de valores de α presenta el mismo comportamiento que el primero. El capital crece a la tasa máxima durante todo el horizonte temporal y el número de especies utilizadas es el mínimo.

3. $\alpha \in (0\ \hat{\alpha}(K_T))$, para estos valores, $0 < \phi < 1$.

En este caso, el poder de negociación del Norte es menor que $\hat{\alpha}(K_T)$, y cuando los jugadores cooperan, el número óptimo de especies utilizadas bajo la estrategia de ahorro nulo, es superior al mínimo, $n_{0C}^* > n_{\min}$. Cuando se juega la estrategia de ahorro pleno, se puede probar que este número, n_{1C}^*, es una función creciente del tiempo, aunque se desconoce su forma funcional. Para comparar el comportamiento óptimo de la variable de control del Sur en ambos modos de juego, dividimos el horizonte temporal en tres intervalos:

(a) $[t_C^*\ T]$

En este intervalo, la estrategia óptima, tanto cuando los jugadores cooperan como cuando no lo hacen, es la de ahorro nulo. De las expresiones para el número óptimo de especies utilizadas por el Sur cuando se juega esta estrategia (3.24) y (3.44), y del hecho de que ϕ sea menor que uno, es inmediato probar que

$$n_{0C}^* < n_0^*.$$

(b) $[t^*\ t_C^*]$

Durante este intervalo, cuando se considera un marco no-cooperativo, el Norte decide, de nuevo, no ahorrar; mientras que si se asume un comportamiento cooperativo, los jugadores siguen la estrategia de ahorro pleno. Comparando las expresiones (3.44) y (3.45), y siguiendo un razonamiento análogo al de la demostración de la proposición 3.3, se prueba que si se coopera, el número de especies utilizadas es superior cuando se juega la estrategia de ahorro nulo, es decir, $n_{1C}^* < n_{0C}^*$. Esto, junto con la inecuación establecida para el intervalo anteriormente analizado, implica,

$$n_{1C}^* < n_0^*.$$

(c) $[0\ t^*]$

Tanto asumiendo un comportamiento no-cooperativo como cooperativo, el número óptimo de especies durante este intervalo viene dado por la estrategia de ahorro pleno, (3.27) y (3.47), respectivamente. El número óptimo de especies bajo esta estrategia en el caso cooperativo, n_{1C}^*, viene dado por (3.45), y en el no-cooperativo, n_1^*, está definido en (3.25). La primera expresión es función tanto de la única variable de coestado del juego cooperativo, m_C, como de la de estado, K. La segunda expresión depende de la variable de estado del Sur, m_S, y de K. Como se ha indicado anteriormente, aunque en el caso no-cooperativo, bajo las hipótesis de la proposición 3.3, se ha calculado la solución analítica del juego incluso cuando se juega la estrategia 1, no ocurre lo mismo en el caso cooperativo, donde se hace necesario recurrir a métodos numéricos. Por esta razón, no se puede probar analíticamente si la conservación de la biodiversidad, así como la tasa de crecimiento del capital, son mayores o menores bajo un supuesto u otro. En el caso no-cooperativo se prueba que, en determinadas condiciones, el número de especies utilizadas durante este periodo es el mínimo, $n_{\min}$, y, como consecuencia, la tasa de crecimiento del capital es máxima, $\delta_{\max}$. En el supuesto cooperativo se muestra numéricamente que el número de especies es también el mínimo, tanto para el Escenario I como para el II.

Las integraciones numéricas se llevan a cabo en el supuesto cooperativo, para diversos valores del parámetro α dentro del rango del intervalo $(0\ \hat{\alpha}\,(K_T))$. De (3.44) y (3.45) se desprende que, con independencia del valor de α, el número óptimo de especies que se utilizan durante el intervalo $[t_C^*\ T]$, en el cual se juega la estrategia de ahorro nulo, es constante e igual a n_{0C}^*; mientras que en el intervalo $[0\ t_C^*]$ el número de especies viene dado por n_{1C}^*, que es una función creciente del tiempo. Dado que $t^* < t_C^*$, la cuestión que se suscita es si el número de especies en t^* es el mínimo, $n_{\min}$, y, por lo tanto, lo es también durante todo el intervalo $[0\ t^*]$. Los resultados obtenidos en las integraciones numéricas nos permiten responder afirmativamente a esta pregunta.

Cuando $\alpha \in (0\ \hat{\alpha}\,(K_T))$, se cumple que $n_{0C}^* > n_{\min}$. Si α converge hacia $\hat{\alpha}\,(K_T)$, el número de especies utilizadas durante el intervalo $[t_C^*\ T]$ tiende hacia $n_{\min}$, y al mismo tiempo, la distancia que separa t_C^* y t^* se hace mínima. Por el contrario, cuando el poder de negociación del Norte, α, se aproxima a cero, el número de especies utilizadas en este intervalo en el caso cooperativo, tiende al utilizado en el no-cooperativo, n_0^*. Del mismo modo, la distancia entre t_C^* y t^* se hace máxima. Las figuras 3.6 y 3.7 ilustran estos resultados. La primera muestra el número óptimo de especies durante todo el horizonte temporal cuando α toma un valor muy próximo a $\hat{\alpha}\,(K_T)$, y la segunda cuando α es cercano a cero. En la primera figura, el número óptimo de especies en el caso cooperativo en el intervalo $[t_C^*\ T]$, se acerca al mínimo, mientras que en la segunda se aproxima al del caso no-cooperativo.

En cualquier caso, cuando α toma valores entre 0 y $\hat{\alpha}\,(K_T)$, el número óptimo de especies siempre es mayor o igual a $n_{\min}$ durante el intervalo $[t_C^*\ T]$, y una función creciente del tiempo en el periodo $[t^*\ t_C^*]$. No obstante, al comienzo de este periodo, t^*, siempre toma el valor $n_{\min}$. Por último, dado que en t^* el número óptimo de especies es el mínimo y se trata de una función creciente en el intervalo $[0\ t^*]$, toma este valor mínimo durante todo este periodo de tiempo.

De este modo, se muestra que el número óptimo de especies en el caso cooperativo, al igual que en el no-cooperativo, en el intervalo $[0\ t^*]$ es $n_{\min}$, siendo, de esta forma, máxima la tasa de crecimiento del capital, $\delta_{\max}$.

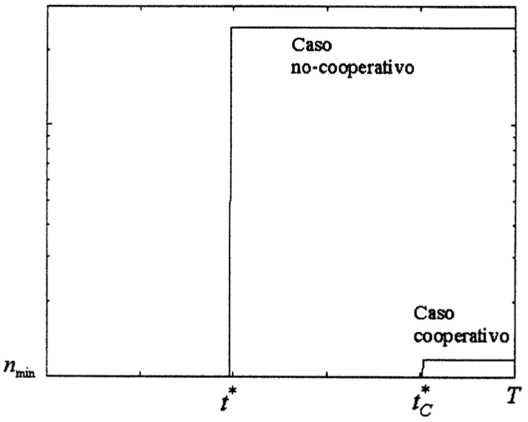

Figura 3.6

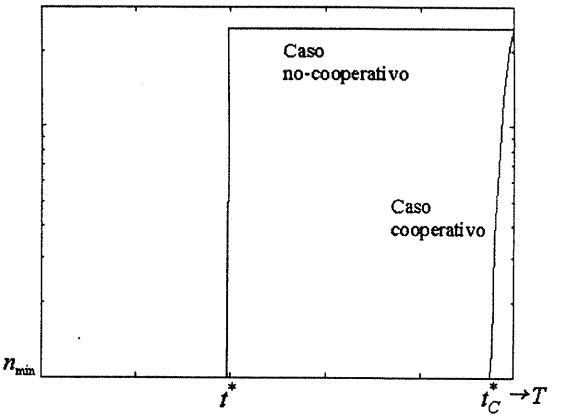

Figura 3.7

En esta sección hemos probado que, sea cual sea el poder de negociación de cada uno de los jugadores, se conserva más biodiversidad cuando éstos cooperan. Además, se puede alcanzar el mismo valor del stock de capital en el instante final pero utilizando, en cada momento de tiempo, un número menor o igual de especies que cuando las regiones desarrollan su juego en un marco no-cooperativo. Adicionalmente, la tasa de crecimiento del capital es siempre mayor o igual en el caso cooperativo que en el no-cooperativo. De esta forma, cuando deciden cooperar se alcanza el mismo capital final partiendo de un menor capital inicial, siendo mayor el crecimiento en términos absolutos.

Cuando el poder de negociación del Norte es muy fuerte y el horizonte temporal es muy corto, es posible que, cuando se asume un comportamiento cooperativo, el juego proporcione como resultado óptimo una estrategia de ahorro nulo durante todo el horizonte temporal, en cuyo caso no hay crecimiento económico. No obstante, el número de especies utilizadas es mínimo, por lo que el Norte paga un precio mínimo por el bien intermedio "natural". Si, por el contrario, el poder de negociación del Norte es pequeño, entonces siempre existe un periodo de crecimiento del stock de capital y, aunque la cooperación no garantiza un precio mínimo del bien intermedio "natural", sí es cierto que éste es menor o igual que el establecido en el entorno no-cooperativo. Asimismo, la cooperación también implica una mayor o, en el peor de los casos, idéntica conservación de la biodiversidad, así como una tasa de crecimiento del capital nunca inferior a la obtenida bajo el supuesto de no-cooperación.

3.3 Juego diferencial con horizonte infinito

Esta sección se dedica al estudio del juego diferencial, (3.15)-(3.17), planteado al principio de la sección 3.2, pero considerando ahora un horizonte temporal infinito. La especificación de los funcionales objetivos de ambos jugadores ha permitido el estudio del juego diferencial cuando el horizonte temporal es finito. La no concavidad de éstos, como ya se ha señalado anteriormente, implica el no cumplimiento de las condiciones suficientes.

Además, en el marco de un horizonte infinito, al no poderse asegurar la concavidad de las funciones de utilidad para ambas regiones, para determinadas trayectorias, las integrales impropias que aparecen en los funcionales objetivo podrían ser divergentes. Esto es así incluso si se está considerando que el flujo de consumos de los jugadores se descuenta a un tanto determinado. Cuando se presente este problema, sólo será factible el estudio de las trayectorias óptimas si el tanto de descuento es lo suficientemente grande como para garantizar la convergencia de dichas integrales.

Siempre que la convergencia esté asegurada, la resolución de este tipo de juegos se lleva a cabo de modo análogo al utilizado cuando el horizonte es finito. Es preciso encontrar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, deducidas de las condiciones necesarias de optimalidad del principio del máximo. La novedad cuando el horizonte es infinito estriba en que ahora las condiciones de transversalidad, en lugar de ser parte del conjunto de condiciones necesarias, lo son del de condiciones suficientes (Chiang (1992)).

De nuevo, al igual que en el caso finito, nos centramos en el estudio de aquellas soluciones derivadas a partir del sistema dinámico que establecen las condiciones necesarias pero que, a su vez, cumplen las condiciones de transversalidad, aun cuando no satisfacen las condiciones de convexidad.

Con este tipo de juegos se pretende estudiar la posibilidad de crecimiento económico sostenido. Esto es, analizar las condiciones bajo las cuales las regiones juegan la estrategia 1 o de ahorro pleno indefinidamente. En este caso, el Norte lleva a cabo un proceso indefinido de acumulación de capital. La otra cara de la moneda es el efecto de esta acumulación ininterrumpida de capital sobre la biodiversidad existente en el Sur. Este análisis sólo se podrá llevar a la práctica bajo aquellas condiciones que garanticen la convergencia de la integral impropia. Esto limita en cierta medida el análisis, pues existe un rango de valores de los parámetros para el cual la no convergencia de la integral imposibilita el encontrar una solución al problema. En concreto, en el caso cooperativo se establece que sólo puede encontrarse una solución cuando el tanto de descuento es lo suficientemente grande.

De forma análoga al caso finito, se lleva a cabo el estudio tanto para el modo de juego no-cooperativo como para el cooperativo. De la misma manera, cuando así lo requiera el análisis, se distingue el comportamiento de las soluciones óptimas bajo los escenarios I y II.

3.3.1 Juego no-cooperativo de horizonte infinito

Para obtener las trayectorias óptimas del capital, así como de las variables de coestado, es necesario resolver, de nuevo, el sistema (3.29), de ecuaciones diferenciales para estas tres variables. No obstante, aunque la condición inicial para el stock de capital sigue siendo la misma que en el caso de horizonte finito, no ocurre lo mismo con las condiciones de transversalidad. Las condiciones $m_N(T) = 0$, $m_S(T) = 0$, que antes formaban parte del conjunto de condiciones necesarias de optimalidad, deben sustituirse por nuevas condiciones de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} m_N(t) \exp(-rt) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} m_S(t) \exp(-rt) = 0,$$

que en este caso pertenecen al conjunto de condiciones suficientes.

Las dos últimas condiciones no proporcionan un único valor para cada una de las variables de coestado en un instante determinado. Por el contrario, las satisface cualquier solución que garantice que estas variables no crezcan (o disminuyan) a una tasa mayor que el tanto de descuento, r.

Cuando el juego diferencial presenta un horizonte temporal finito se han estudiado dos tipos de soluciones posibles: una primera, de ahorro nulo durante todo el horizonte temporal; y una segunda solución, con un primer periodo de ahorro pleno acompañado de crecimiento del capital, seguido de un segundo periodo de ahorro nulo y capital constante. Cuando el horizonte temporal es infinito se puede considerar, además, un tercer tipo de solución del juego diferencial, asociada a una estrategia de ahorro pleno ininterrumpido, lo que conlleva crecimiento económico sostenido. Dada la forma del problema de maximización (3.15) al que se enfrenta el Norte, la función valor óptimo nunca puede alcanzar un valor máximo cuando la estrategia implique un ahorro pleno durante todo el horizonte temporal, pues cualquier estrategia de otro tipo proporciona mayor valor[20]. Por esta razón, en el análisis efectuado, no se tiene en cuenta una solución asociada a una estrategia de ahorro pleno durante un intervalo temporal infinito. Al eliminar este tipo de solución, se tiene garantizado que para cualquier otro, las integrales impropias convergen, independientemente del valor del tanto de descuento.

A continuación se estudian las condiciones bajo las que se presentan los dos tipos de soluciones: la de ahorro nulo o estancamiento infinito y la de ahorro pleno durante un primer intervalo o crecimiento finito. En el análisis se distingue entre los escenarios I y II.

3.3.1.1 Estancamiento infinito (ahorro nulo): $s^*(t) = 0 \;\; \forall t \geq 0$

En este caso el Norte sigue una estrategia de ahorro nulo indefinidamente. Siendo $s^*(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, se puede resolver el sistema (3.29) obteniendo como solución:

$$
\begin{aligned}
K(t) &= K_0, \\
m_N(t) &= \{m_{N0} - \delta_0^*/r\} \exp(rt) + \delta_0^*/r, \\
m_S(t) &= \{m_{S0} - [b(1+\theta d_1) - \delta_0^*]/[(1+d_1)r]\} \exp(rt) + [b(1+\theta d_1) - \delta_0^*]/[(1+d_1)r],
\end{aligned}
$$

con m_{N0} y m_{S0} los valores iniciales de las variables de coestado del Norte y del Sur, respectivamente. El capital se mantiene constante e igual al valor inicial. Las variables de coestado de cada una de las regiones crecen, decrecen o se mantienen invariantes, dependiendo de si las condiciones iniciales son mayores, menores o iguales a los valores de estado estacionario correspondientes a la estrategia 0, que vienen dados por,

$$m_N^{*0} = \delta_0^*/r,$$

[20] Nótese que cuando se ahorra a la tasa máxima de forma ininterrumpida, la función valor óptimo del Norte toma un valor mínimo, $\overline{w}\overline{L}/r$, que corresponde a un consumo igual al salario de subsistencia en cada instante de tiempo. Un razonamiento análogo permite asegurar que una solución que implique un primer periodo de estancamiento o ahorro nulo, seguido de otro infinito de ahorro pleno, tampoco proporciona un máximo del funcional objetivo del Norte.

$$m_S^{*0} = [b(1+\theta d_1) - \delta_0^*] / [(1+d_1) r].$$

Si la condición inicial de la variable de coestado del Norte, m_{N0}, es menor que uno en el instante inicial, se empieza jugando la estrategia de ahorro nulo. Además, cuando m_{N0} es menor o igual que su valor de estado estacionario, entonces esta variable disminuye o se mantiene constante e igual al valor estacionario, respectivamente. Dado que, en estas condiciones, la variable de coestado del Norte no crece, ésta seguirá siendo menor que uno en adelante, por lo que se jugará la estrategia 0 durante todo el horizonte temporal. En este último caso, no es posible una solución que implique un periodo de crecimiento económico, ya sea finito o indefinido.

De las expresiones para las variables de coestado obtenidas cuando $s^*(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, reescribiendo las condiciones de transversalidad,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} m_N(t) \exp(-rt) &= \{m_{N0} - \delta_0^*/r\} = 0, \\
\lim_{t\to\infty} m_S(t) \exp(-rt) &= \{m_{S0} - [b(1+\theta d_1) - \delta_0^*]/[(1+d_1) r]\} = 0,
\end{aligned}$$

es fácil deducir que, esto únicamente es posible si las condiciones iniciales para estas variables de coestado coinciden con sus valores estacionarios y se mantienen iguales a éstos durante todo el horizonte temporal. Cuando se cumple este supuesto, es condición necesaria para que la estrategia 0 sea óptima, que el valor de estado estacionario de la variable de coestado del Norte, m_N^{*0}, sea menor o igual a uno, es decir:

$$\delta_0^* \leq r. \tag{3.56}$$

A continuación se estudian las implicaciones de esta última condición, según que el número óptimo de especies sea máximo, mínimo o tome valores intermedios, y distinguiendo, asimismo, el comportamiento del juego bajo el Escenario I ó el II. No obstante, resulta evidente, que en el supuesto de que el tanto de decuento sea lo suficientemente alto como para superar a la tasa máxima de crecimiento del capital, $r \geq \delta_{\max}$, la condición (3.56) se cumple siempre.

1. $n_0^* = n_{\max}$

   Cuando en el Escenario I el Sur elige como óptimo un número máximo de especies, δ_0^* es nulo.

   La condición $\delta_0^* \leq r$ es siempre cierta. No obstante, esta solución únicamente es óptima si el valor inicial de la variable de coestado del Norte, m_{N0}, es cero, es decir, si el Norte no confiere inicialmente valor al capital.

   En este contexto, la renta que resta tras pagar salarios y el bien intermedio "natural" es nula. Esto es, no existen rendimientos del capital, por lo que el ahorro no produce crecimiento del stock de capital, de modo que es adecuado conceder un valor nulo a dicho stock.

2. $n_{\min} < n_0^* < n_{\max}$

   Cuando el número de especies utilizadas en el Sur no es ni mínimo ni máximo, sino que toma un valor intermedio, dado por la expresión (3.24), δ_0^* depende del stock de capital, que es constante e igual a su valor inicial.

   La restricción $\delta_0^* \leq r$ impone una cota inferior para el precio del bien intermedio "natural". Dado que el precio, p_0^*, es función del capital, que es constante e igual a K_0, imponer que p_0^* esté acotado inferiormente, equivale a que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\Omega\left\{1 + a\mu\left[r/b - (1-\theta)\right]/\left(\bar{w}\left(1+d_1\right)\right)\right\} \geq 1/K_0. \tag{3.57}$$

De modo análogo al caso finito, definimos λ como el valor de λ_T, dado en (3.34), cuando T tiende hacia infinito, esto es:

$$\lambda = 1 + a\mu\left[r/b - (1-\theta)\right]/\left(\bar{w}\left(1+d_1\right)\right). \tag{3.58}$$

Es inmediato probar que la desigualdad $\lambda > 0$ equivale a que el tanto de descuento supere la tasa de crecimiento del stock de capital cuando el número de especies tiende hacia infinito, es decir, $r > \underline{\delta}$. Por lo tanto, $\lambda \leq 0$ equivale a $r \leq \underline{\delta}$.

El estudio de la condición (3.57) se realiza por separado para los escenarios I y II.

- Escenario I.

  Se puede probar fácilmente que en este caso λ es siempre positivo, ($r > \underline{\delta}$), obteniéndose una cota superior, $\widetilde{K}$, para el capital inicial, que garantiza que la estrategia 0 es óptima:

$$K_0 \geq 1/\left[\lambda\Omega\right] = \widetilde{K}. \tag{3.59}$$

  Para el Escenario II, el signo de λ no está determinado, pudiendo distinguir dos situaciones:

- Escenario II con $\lambda \leq 0$, es decir, $r \leq \underline{\delta}$.

  El lado izquierdo de la desigualdad (3.57) es negativo o nulo, no cumpliéndose dicha desigualdad cualquiera que sea el valor del capital en el instante inicial, que se asume siempre positivo.

- Escenario II con $\lambda > 0$, es decir, $r > \underline{\delta}$.

  De nuevo, como en el Escenario I, la expresión (3.59) define una cota superior sobre el capital inicial, $\widetilde{K}$, que indica cuando la estrategia 0 puede ser óptima.

Cuando los valores iniciales de las variables de coestado del Norte y el Sur coinciden con sus valores estacionarios correspondientes a la estrategia 0, m_N^{*0} y m_S^{*0}, para valores iniciales del stock de capital por encima de $\widetilde{K}$, en el Escenario I y en el Escenario II con $\lambda > 0$ ($r > \underline{\delta}$), la estrategia 0 o de estancamiento durante todo el horizonte temporal puede ser óptima. Por el contrario, si en el Escenario II se tiene $\lambda < 0$, la estrategia de estancamiento nunca es óptima.

3. $n_0^* = n_{\min}$

Por último, cuando el Sur decide como óptimo utilizar $n_{\min}$ especies naturales para su proceso productivo, δ_0^* coincide con su valor máximo, $\delta_{\max}$.

En este caso, la condición sobre el stock inicial de capital (3.59), que es válida para valores positivos de λ, se transforma en una condición sobre los parámetros del modelo, y en concreto, sobre el valor del número mínimo de especies, $n_{\min}$:

$$n_{\min} \geq -\mu \ln\left\{\lambda\right\}. \tag{3.60}$$

Esta condición es equivalente a exigir

$$r \geq \delta_{\max}.$$

Se puede, de nuevo, distinguir entre los dos escenarios:

- Escenario I.
  Dado que $\underline{\delta} < 0$, λ es positivo, por lo que la estrategia de ahorro nulo es óptima cuando se cumple la condición (3.60) sobre el número mínimo de especies a utilizar por el Sur.
- Escenario II.
  Si $r \leq \underline{\delta}$ $(\lambda < 0)$, la estrategia de estancamiento indefinido nunca es óptima. Si $r > \underline{\delta}$ $(\lambda > 0)$, para que sea óptima, además, es preciso que se cumpla la condición (3.60), el tanto de descuento no sólo debe ser mayor que $\underline{\delta}$ sino incluso superior a $\delta_{\max}$.

Cuando el número de especies utilizadas por el Sur es $n_{\min}$, tanto en el Escenario I como en el Escenario II con $r > \underline{\delta}$, para que la solución de ahorro nulo sea óptima, es preciso que este número supere un umbral dado por (3.60). En el Escenario II con $r \leq \underline{\delta}$, este tipo de solución nunca es óptima.

A continuación, estudiamos la posibilidad de soluciones óptimas que garanticen un primer periodo de crecimiento, aunque éste vaya seguido de otro infinito de estancamiento.

3.3.1.2 Crecimiento finito (ahorro pleno seguido de ahorro nulo): $s^*(t) = 1 \;\; \forall t \in [0\; t^*_\infty]$ y $s^*(t) = 0 \;\; \forall t > t^*_\infty$

En esta sección se estudian las condiciones bajo las cuales tiene lugar un primer periodo finito, en el cual los jugadores fijan la estrategia 1, seguido de un segundo periodo infinito, en el que se juega la estrategia 0. Según este tipo de solución, durante un primer intervalo se produce un crecimiento del stock de capital acompañado de una disminución de las variables de coestado. En el instante, t^*_∞, en el que la variable de coestado del Norte cruza la unidad, se comienza a jugar la estrategia 0 que se mantiene indefinidamente. En el apartado anterior se ha probado que cuando se juega esta última estrategia, la condición de transversalidad únicamente se cumple si en el instante en que se comienza a jugar, las variables de coestado del Norte y el Sur ya están en sus estados estacionarios.

- **Periodo de crecimiento finito:**

Cuando se juega la estrategia de ahorro pleno, el sistema dinámico (3.29) que caracteriza las trayectorias temporales de equilibrio, no es integrable, por lo que no se han encontrado soluciones analíticas del sistema. No obstante, se puede llevar a cabo un análisis del diagrama de fase $K - m_S$, que proporciona una visión del comportamiento cualitativo de las soluciones de dicho sistema de ecuaciones diferenciales.

Reescribimos las ecuaciones primera y tercera, correspondientes a la evolución temporal del capital, K, y de la variable de coestado del Sur, m_S, cuando se juega la estrategia de ahorro pleno,

$$\begin{aligned} \dot{K} &= K\delta\left(n_1^*\right), \\ \dot{m}_S &= \left[r - \delta\left(n_1^*\right)\right] m_S - \left[b\left(1+\theta d_1\right) - \delta\left(n_1^*\right)\right] / \left(1+d_1\right). \end{aligned} \tag{3.61}$$

La expresión $\delta\left(n_1^*\right)$ representa la tasa de crecimiento del stock de capital cuando se sigue la estrategia 1 y depende de las variables K y m_S. En las figuras 3.8 y 3.9 se muestran las curvas de nivel de $\delta\left(n_1^*\right)$ en el plano $K - m_S$, para los escenarios I y II, respectivamente. En ambas figuras se muestran las curvas de nivel por debajo de la asíntota, $m_S = 1/\left(1+d_1\right)$. Estas curvas toman valores cada vez menores conforme las variables K y m_S se mueven en la dirección Sureste. La curva de nivel a la que se tiende cuando el capital tiende hacia infinito y/o la variable de coestado del Sur tiende hacia menos infinito, es la curva $\delta\left(n_1^*\right) = \underline{\delta}$. En la figura 3.8, que muestra las curvas de nivel bajo el Escenario I, $\underline{\delta}$ es negativo, de modo que siendo ésta la curva hacia la que se tiende en el límite, en algún momento se cruza la curva de nivel cero. Para cualquier combinación $K - m_S$ sobre esta curva y a su derecha, por la expresión (3.25), el número óptimo de especies es $n_{\max}$, y por consiguiente la tasa de crecimiento del capital es cero, evitándose de esta forma la posibilidad de tasas de crecimiento negativas. En cuanto a la figura 3.9 de curvas de nivel bajo el Escenario II, $\underline{\delta}$ es positivo. Nunca se llega a una curva de nivel cero, siendo la tasa de crecimiento del capital siempre positiva, por muy grande que sea el stock de capital.

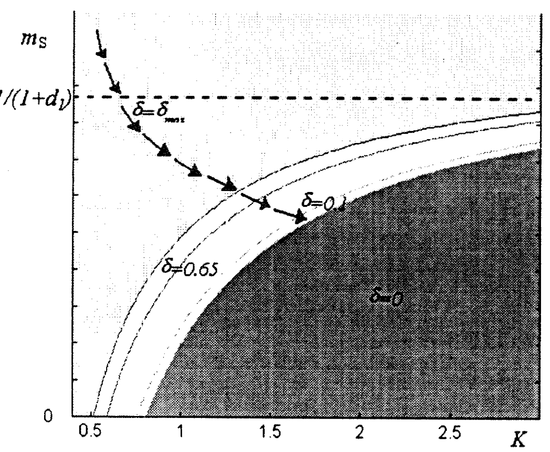

Figura 3.8

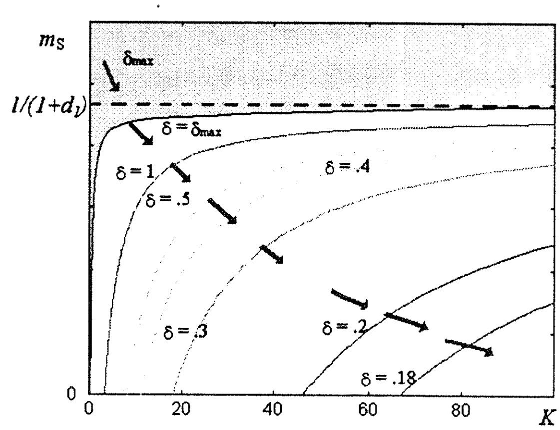

Figura 3.9

De las expresiones (3.12) y (3.25), se puede escribir:

$$\delta\left(n_1^*\right) = b\left(1-\theta\right) - b\left(1+d_1\right)\overline{w}\left(1 - 1/\left[\Omega K\left(1 - m_S\left(1+d_1\right)\right)\right]\right) / \left(a\mu\right).$$

Las curvas de nivel de $\delta\left(n_1^*\right)$ en el plano $K - m_S$ vienen dadas por hipérbolas con asíntota horizontal en $m_S = 1/\left(1+d_1\right)$ y vertical en $K = 0$. La zona en la cual estas hipérbolas proporcionan valores positivos de $\delta\left(n_1^*\right)$, dado que el stock de capital debe ser positivo, es aquélla en la que la variable de coestado del Sur, m_S, toma valores por debajo de la asíntota horizontal. Cualquier punto por encima de la curva de nivel $\delta\left(n_1^*\right) = \delta_{\max}$ y por debajo de la asíntota $m_S = 1/\left(1+d_1\right)$, representa combinaciones de K y m_S, para las cuales la tasa de crecimiento de capital sigue siendo máxima, $\delta_{\max}$. Asimismo, bajo el Escenario I, los puntos del plano $K - m_S$ por debajo de la curva de nivel $\delta\left(n_1^*\right) = 0$, también presentan una tasa nula de crecimiento del capital. Por otro lado, en la región en la cual el valor de la variable de coestado del Sur, m_S, toma valores por encima de $1/(1+d_1)$, la tasa de crecimiento del capital es independiente de las variables K y m_S, y toma siempre el valor $\delta_{\max}$. Esto es inmediato a partir de la expresión (3.25). De esta forma, queda caracterizado todo el semiplano en el que el stock de capital, K, toma valores positivos.

El gradiente de $\delta(n_1^*)$ indica la dirección de máximo crecimiento. En la región caracterizada por $K > 0$ y $0 < m_S < 1/(1+d_1)$, este gradiente siempre señala la dirección noroeste en el plano. Desgraciadamente, no se conoce la expresión analítica de las trayectorias óptimas de K y m_S que satisfacen el sistema (3.61). No obstante, como se recoge en la siguiente proposición, el comportamiento cualitativo en la región objeto de estudio sí es conocido.

Proposición 3.6 *Si se elimina la posibilidad de una solución óptima en la que se ahorre a la tasa máxima de modo indefinido, en la región del plano $K - m_S$ definida por $K > 0$ y $m_S > 1/(1+d_1)$, se cumple,*

$$\dot{K}(t) > 0 \ \ y \ \ \dot{m}_S(t) < 0 \ \ \forall t \geq 0.$$

Demostración

El crecimiento del stock de capital es inmediato de la primera ecuación en (3.61), siempre que la condición inicial sea estrictamente positiva.

En esta región del plano, la tasa de crecimiento del capital es máxima, $\delta_{\max}$. La evolución de m_S viene dada por la ecuación,

$$\dot{m}_S = [r - \delta_{\max}]\, m_S - [b(1+\theta d_1) - \delta_{\max}] / (1+d_1).$$

El valor de estado estacionario correspondiente a la estrategia 1 cuando la tasa de crecimiento del capital es máxima es,

$$m_S^{*1} = [b(1+\theta d_1) - \delta_{\max}] / [(r - \delta_{\max})(1+d_1)].$$

(a) Si $r \leq \delta_{\max}$, según la evolución temporal de m_S, esta variable siempre decrece.

(b) Si se juega la estrategia 1 inicialmente, la variable de coestado del Norte, m_N, debe ser mayor que uno en ese instante. La ecuación (3.37), revela que si $r > \delta_{\max}$ esta variable es creciente y, por tanto, se juega la estrategia 1 de ahorro pleno indefinidamente. Este es el tipo de estrategia que se ha eliminado al principio de esta sección.□

Proposición 3.7 *En la región del plano $K - m_S$ definida por $K > 0$ y $0 < m_S < 1/(1+d_1)$, se cumple,*

$$\dot{K}(t) > 0 \ \ y \ \ \dot{m}_S(t) < 0 \ \ \forall t \geq 0.$$

Demostración

Como en la proposición anterior, el crecimiento del stock de capital se deduce de modo trivial a partir de la primera ecuación de (3.61).

La evolución temporal de la variable de coestado del Sur viene dada por la segunda ecuación de (3.61). En primer lugar, se observa que el segundo término de esta ecuación, $[b(1+\theta d_1) - \delta(n_1^*)]$, es positivo. Esto es inmediato ya que por (3.12), $\delta(n)$ es siempre menor que b. Además, por ser r un tanto de descuento, es menor que 1, mientras que $\theta, d_1 > 0$. Para probar que la variable de coestado del Sur decrece, supongamos que el sistema se encuentra en la curva de nivel, $\delta(n_1^*) = \xi$. Se distinguen dos casos:

(a) Si $r < \xi$, la demostración es trivial.

(b) Si $r > \xi$, de la segunda ecuación de (3.61), se deduce que $\partial \dot{m}_S / \partial m_S = r - \xi > 0$. Por lo tanto, si $\dot{m}_S < 0$ para $m_S = 1/(1+d_1)$, entonces la variable de coestado del Sur también decrece para cualquier valor por debajo de esta asíntota.

El valor de estado estacionario de la variable de coestado del Sur correspondiente a la estrategia 1, viene dado por[21],

$$m_S^{*1} = [b(1+\theta d_1) - \xi] / [(1+d_1)(r-\xi)].$$

Operando en esta expresión, se puede probar que $m_S^{*1} > 1/(1+d_1)$ si y sólo si $r < b(1+\theta d_1)$, lo cual siempre es cierto toda vez que $b > 1$, $\theta, d_1 > 0$ y $r < 1$. Cualquier valor de la variable de coestado del Sur que satisfaga $m_S < 1/(1+d_1)$, es también menor que m_S^{*1} y cumple que $\dot{m}_S < 0$.□

Según esta proposición, la trayectoria seguida por K y m_S cruza las curvas de nivel de $\delta(n_1^*)$ de noroeste a sureste, en sentido contrario al marcado por el vector gradiente. A continuación, se demuestra que según la trayectoria de K y m_S se mueve en esta dirección, las curvas de nivel de $\delta(n_1^*)$ que cruzan, tienen niveles cada vez más pequeños.

Proposición 3.8 *En la región del plano $K - m_S$ en la cual $K > 0$ y $0 < m_S < 1/(1+d_1)$, el valor de la tasa de crecimiento del capital, $\delta(n_1^*)$, disminuye con el tiempo.*

Demostración

Para un punto determinado $\left(\widetilde{K}, \widetilde{m}_S\right)$ del plano de fase que se encuentra sobre la curva de nivel $\delta(n_1^*) = \xi$, se puede calcular la variación de la tasa de crecimiento del capital a través del producto escalar del vector gradiente por el vector de derivadas

21 m_S^{*1} es el valor de la variable de coestado del Sur que hace nula su derivada temporal. No obstante, la evolución temporal de esta variable, como muestra la segunda ecuación de (3.61), depende del valor de la tasa de crecimiento del capital, $\delta(n_1^*)$. Por esta razón, m_S^{*1} es un estado estacionario una vez fijado un valor $\delta(n_1^*) = \xi$, sin embargo, varía conforme lo haga la tasa de crecimiento del capital.

temporales, evaluados ambos en el punto $\left(\widetilde{K}, \widetilde{m}_S\right)$:

$$\nabla\delta\left(n_1^*\right)_{\left(\widetilde{K},\widetilde{m}_S\right)}\begin{pmatrix}\dot{K}\\ \dot{m}_S\end{pmatrix}_{\left(\widetilde{K},\widetilde{m}_S\right)}=[\underline{\delta}-\xi]\left[b\left(1+\theta d_1\right)-rm_S\left(1+d_1\right)\right]/\left[1-m_S\left(1+d_1\right)\right].$$

El primer factor en esta expresión tiene signo negativo, pues $\underline{\delta}$ es la tasa mínima de crecimiento del capital y, por tanto, menor que ξ. El segundo factor es positivo, dado que $d_1, \theta > 0$, $0 < r < 1$, $b > 1$, y se considera la región del plano en la que $m_S < 1/\left(1+d_1\right)$. Por último, el denominador también es positivo para estos valores de la variable de coestado del Sur, m_S. Este producto tiene signo negativo, con lo cual queda demostrado que la tasa de crecimiento del capital disminuye con el tiempo.□

Las proposiciones 3.6, 3.7 y 3.8 muestran que si se comienza por jugar la estrategia 1, y el valor de la variable de coestado del Sur está por encima de $1/\left(1+d_1\right)$, entonces el capital crece, mientras que esta variable de coestado disminuye. Una vez que se encuentra por debajo de $1/\left(1+d_1\right)$, sigue disminuyendo hasta que cruza la curva de nivel $\delta_{\max}$. A partir de ese momento, el stock de capital sigue creciendo, pero su tasa de crecimiento disminuye con el tiempo para cualquier punto sobre o la derecha de la curva de nivel $\delta_{\max}$. La tasa $\delta\left(n_1^*\right)$ disminuye continuadamente tendiendo hacia $\underline{\delta}$.

- **Perodo de estancamiento infinito:**

Pasamos a estudiar a continuación el comportamiento de la solución en el segundo periodo de duración infinita. Sabemos que el primer periodo, en el que se juega la estrategia 1, comprende desde el inicio del juego hasta un instante, t_∞^*, en el que se cambia a la estrategia 0. Se ha visto anteriormente que, durante este periodo, el stock de capital aumenta, mientras que la variable de coestado del Sur disminuye, lo que lleva a una reducción continuada de la tasa de crecimiento del capital, $\delta\left(n_1^*\right)$. En el instante t_∞^* los jugadores cambian a la estrategia 0. En la sección 3.3.1.1 se prueba que las condiciones de transversalidad sólo se cumplen si las variables de coestado ya se encuentran inicialmente en estado estacionario.

Según esto, bajo determinadas condiciones iniciales para las variables de coestado del Norte y el Sur, se puede garantizar que es óptima una solución que implique un primer periodo de crecimiento seguido de otro infinito de estancamiento. Estas condiciones iniciales deben asegurar que en el instante de cambio de estrategias, t_∞^*, las variables m_N y m_S alcanzan los valores de estado estacionario de la estrategia 0, esto es, δ_0^*/r y $\left[b\left(1+\theta d_1\right)-\delta_0^*\right]/\left[\left(1+d_1\right)r\right]$, respectivamente. Desde ese instante, los jugadores siguen la estrategia 0, manteniéndose las variables de coestado en su estado estacionario. El instante de cambio es aquél en el que $m_N\left(t_\infty^*\right)=1$. Esta variable de coestado alcanza, a su vez, su estado estacionario en el mismo momento, t_∞^*, si δ_0^* coincide con el tanto de descuento, r. El valor de las variables de coestado del Norte y del Sur de t_∞^* en adelante, será, por tanto,

$$m_N(t)=1, \qquad m_S(t)=\left[b\left(1+\theta d_1\right)-r\right]/\left[\left(1+d_1\right)r\right], \qquad \forall t\geq t_\infty^*.$$

En la demostración de la proposición 3.6, se han eliminado los tantos de descuento que satisfacen $r > \delta_{\max}$. Esto se debe a que estos tantos llevan a jugar como estrategia óptima la de ahorro pleno indefinidamente, que sabemos que no proporciona un valor máximo de la función valor del Norte. Para que sea posible el supuesto $\delta_0^* = r$, se debe de cumplir que el tanto de descuento, r, sea superior a la tasa de crecimiento del capital en el límite, $\underline{\delta}$, cuando el número de especies utilizadas por el Sur tiende hacia infinito. Esto es cierto siempre en el Escenario I, pero en el Escenario II, sólo cuando λ es positivo, esto es, el tanto de descuento debe encontrarse dentro del intervalo $(\underline{\delta}\ \delta_{\max})$.

Una solución que implique crecimiento finito seguido de estancamiento infinito es óptima si el valor inicial de la variable de coestado del Norte, m_{N0}, es lo suficientemente alto como para que la tasa de crecimiento del capital, $\delta(n_1^*)$, disminuya durante el periodo en el que se juega la estrategia de ahorro pleno, hasta alcanzar el valor del tanto de descuento, r, justamente en el instante, t_∞^*, en el que la variable de coestado del Norte alcanza la unidad. Por su parte, el valor inicial de la variable de coestado del Sur, m_{S0}, debe garantizar que en este instante, además, dicha variable alcance su estado estacionario correspondiente a la estrategia 0, m_S^{*0}.

Además, el valor del stock de capital para el cual se tiene $\delta_0^* = r$ coincide con la cota $\widetilde{K}$, establecida en (3.59). De este modo, al comienzo del juego se decide la estrategia de ahorro pleno, lo que lleva a un periodo de crecimiento del stock de capital hasta que éste alcanza $\widetilde{K}$, instante a partir del cual se cambia a la estrategia 0. Por el contrario, si el capital inicial ya es superior a $\widetilde{K}$ no hay crecimiento, recayendo en el caso anterior de ahorro nulo durante todo el horizonte temporal.

Este tipo de solución, de crecimiento finito seguido de estancamiento infinito, no es óptima en las siguientes situaciones:

1. Escenario I y Escenario II con $\lambda > 0$, (esto es, $r > \underline{\delta}$). Si los valores iniciales de las variables de coestado del Norte y el Sur llevan a que m_N alcance la unidad, antes de que $\delta(n_1^*)$ tome el valor r, entonces no se cumplen las condiciones de transversalidad.
2. Escenario II con $\lambda > 0$, (esto es, $r > \underline{\delta}$). Si $\delta(n_1^*)$ alcanza r antes de que m_N tome el valor 1, entonces esta variable de coestado nunca cruza la unidad, jugándose la estrategia de ahorro pleno indefinidamente. Esta estrategia se ha eliminado de entre los posibles óptimos al no proporcionar nunca un máximo de la función valor del Norte.
3. Escenario II con $\lambda \leq 0$, (esto es, $r \leq \underline{\delta}$). Aunque la variable de coestado del Norte disminuye hasta tomar el valor 1, la tasa de crecimiento del capital, $\delta(n_1^*)$, nunca alcanzaría r, no cumpliéndose la condición de transversalidad.

A continuación se recogen para cada uno de los escenarios, las conclusiones obtenidas del estudio llevado a cabo.

En el Escenario I, así como en el Escenario II con $\lambda > 0$ (esto es, $r > \underline{\delta}$), se ha probado que si el stock de capital inicial es superior a una cota, $\widetilde{K}$, y las condiciones iniciales de ambas variables de coestado coinciden con sus valores estacionarios bajo la estrategia 0, entonces la solución de estancamiento infinito es óptima. Por el contrario, si el capital inicial está por debajo de esta cota, y para estos dos escenarios los valores iniciales, m_{N0}

y m_{S0}, son tales que garantizan que se juega la estrategia 1 durante un primer periodo y que en el instante de cambio a la estrategia 0 los coestados alcanzan sus valores estacionarios bajo esa estrategia, entonces es óptima una estrategia de crecimiento finito.

Para el Escenario II con $\lambda \leq 0$ (esto es, $r \leq \underline{\delta}$), no se cumplen las condiciones suficientes de transversalidad y, por lo tanto, no se puede garantizar que sea óptima, ni la solución de estancamiento indefinido, ni la de crecimiento finito.

La solución de crecimiento indefinido, aun cuando cumpla las condiciones necesarias y de transversalidad, nunca es un óptimo del problema. Esto se prueba, a partir de la definición del mismo, de la que se desprende inmediatamente que el funcional objetivo del Norte, en este caso, nunca toma un valor máximo.

3.3.2 Juego cooperativo de horizonte infinito

El estudio del juego diferencial de horizonte infinito cuando los jugadores cooperan, se lleva a cabo de manera análoga al efectuado para un horizonte temporal finito. Debe analizarse el sistema (3.41), donde la condición final sobre la varaible de coestado debe sustituirse, en este caso, por la condición de transversalidad, dada por:

$$\lim_{t \to \infty} m_C(t) \exp(-rt) = 0. \tag{3.62}$$

Cuando el horizonte temporal es infinito, esta condición forma parte del conjunto de condiciones suficientes.

En el caso cooperativo, el funcional objetivo a maximizar es la combinación convexa de los funcionales del Norte y del Sur. Bajo el modo de juego no-cooperativo, se ha probado que la estrategia de ahorro pleno durante todo el horizonte temporal proporciona un valor mínimo del funcional objetivo del Norte, razón por la cual esta solución se eliminó del análisis. Por lo que se refiere al Sur, se ha visto que el valor de su funcional objetivo crece con el stock de capital, de forma que un crecimiento indefinido de este último conlleva un valor alto del funcional objetivo de esta región. Atendiendo a este razonamiento, bajo el modo de juego cooperativo, no puede eliminarse una solución de crecimiento indefinido como un posible máximo. Adicionalmente, este tipo de solución puede llevar a que la integral impropia que representa el funcional objetivo del Sur,

$$W_S = \int_0^\infty e^{-rt} \left[K \left(b \left(1 + \theta d_1 \right) - \delta \left(n_C^* \right) \right) / \left(1 + d_1 \right) + \overline{w} \overline{L} - d_2 n_C^* \right] dt,$$

sea divergente. Que esta integral sea o no convergente depende de la relación entre la tasa de crecimiento del capital y el tanto de descuento. Cuando de esta relación se derive la no convergencia de este funcional objetivo, no será posible encontrar la solución óptima del juego. Para eliminar esta posibilidad, se estudia únicamente aquellos casos en los cuales el tanto de descuento y la tasa de crecimiento del capital garanticen la convergencia de las integrales impropias. Evidentemente, este supuesto limita el ámbito de estudio, así como los resultados del mismo.

A continuación se estudia, en primer lugar, la solución de crecimiento sostenido y posteriormente, al igual que en la sección 3.3.1, las soluciones de estancamiento infinito y de crecimiento finito .Finalmente, se tiene en cuenta una solución que conlleve un primer periodo finito de estancamiento, seguido de un segundo intervalo infinito de crecimiento sostenido.

3.3.2.1 Crecimiento sostenido (ahorro pleno): $s_C^*(t) = 1 \ \forall t \geq 0$

En el presente apartado se estudia aquella solución que implique una estrategia de ahorro pleno durante todo el horizonte temporal. Para determinados valores de los parámetros, que la tasa de ahorro sea uno indefinidamente puede dar lugar a que la integral impropia que define el funcional objetivo del Sur sea divergente. En dicho caso, no sería posible encontrar la solución óptima del problema.

Nota 3.1 *Si $\underline{\delta} < r \leq \delta_{\max}$, siempre existe un rango de valores del número de especies naturales, $(n_{\min}\ \widehat{n})$, tal que, para cualquier valor, n, en este intervalo[22], se tiene, $r < \delta(n)$. En este caso, una solución de ahorro pleno y un número fijo de especies elegido dentro de este intervalo, durante todo el horizonte temporal, implica que la integral impropia que define el funcional objetivo del Sur sea divergente. Para evitar que pueda presentarse una solución de este tipo, a partir de ahora, analizaremos el juego bajo la hipótesis $r > \delta_{\max}$.*

Del mismo modo que en el caso no-cooperativo, al no ser integrable el sistema dinámico (3.41) bajo la condición de transversalidad (3.62) cuando se juega la estrategia de ahorro pleno, se lleva a cabo un análisis del diagrama de fase, $K - m_C$. De esta forma, se obtiene el comportamiento cualitativo de las soluciones. El sistema dinámico, cuando se juega la estrategia de ahorro pleno, se puede reescribir,

$$\begin{aligned} \dot{K} &= K\delta\left(n_{1C}^*\right), \\ \dot{m}_C &= \left(r - \delta\left(n_{1C}^*\right)\right) m_C - (1-\alpha)\left(b\left(1+\theta d_1\right) - \delta\left(n_{1C}^*\right)\right) / \left(1+d_1\right). \end{aligned} \tag{3.63}$$

El estudio del mapa de curvas de nivel de la tasa de crecimiento del capital cuando se juega la estrategia 1, $\delta\left(n_{1C}^*\right)$, es similar al realizado en el caso no-cooperativo. La expresión de esta tasa de crecimiento, cuando el número óptimo de especies se encuentra en el intervalo $(n_{\min}\ n_{\max})$, se puede escribir, a partir de (3.12) y (3.45), como:

$$\delta\left(n_{1C}^*\right) = b(1-\theta) - b\overline{w}\left(1+d_1\right)\left(1 - (1-\alpha)/\Omega K\left[1 - \alpha - \left(1+d_1\right)m_C\right]\right)/\left(a\mu\right).$$

Las hipérbolas que representan las curvas de nivel para esta expresión, muestran una asíntota horizontal en $m_C = (1-\alpha)/(1+d_1)$ y una vertical para $K = 0$. En la región en la cual el stock de capital toma valores positivos, las curvas alcanzan niveles positivos para valores de la variable de coestado por debajo de la asíntota horizontal. Al igual que en el caso no-cooperativo, cualquier punto por encima de la curva de nivel $\delta\left(n_{1C}^*\right) = \delta_{\max}$, representa combinaciones de K y m_C, para las que la tasa de crecimiento del capital sigue siendo máxima. Asimismo, bajo el Escenario I, para cualquier punto por debajo de la curva $\delta\left(n_{1C}^*\right) = 0$, la tasa de crecimiento del capital es cero. Finalmente, en la región en

[22] $\widehat{n}$ es el número de especies naturales para el cual la tasa de crecimiento del capital es igual a r. Es decir, $\widehat{n} = -\mu \ln[\lambda]$. Al ser $r \leq \delta_{\max}$, entonces, $\lambda < 1$ y $n_{\min} < \widehat{n}$. Además, $\underline{\delta} < r$ garantiza que $\lambda > 0$, por lo tanto $\widehat{n}$ está bien definido.

la que el capital es positivo y la variable de coestado, m_C, toma valores por encima de la asíntota horizontal, la expresión (3.45) muestra que el Sur juega $n_{\min}$, siendo, por tanto, máxima la tasa de crecimiento del capital, $\delta\left(n_{1C}^{*}\right) = \delta_{\max}$.

Según lo anteriormente expuesto, la zona del plano $K - m_C$ objeto de estudio, puede dividirse en dos regiones. Por encima de la asíntota horizontal, $m_C = (1-\alpha)\,/\,(1+d_1)$, la tasa de crecimiento del capital es siempre máxima, con independencia del valor del capital o del de la variable de coestado. Por debajo de esta asíntota, es donde se presenta el mapa de curvas de nivel propiamente dicho. Sin embargo, por (3.42), únicamente se juega la estrategia de ahorro pleno cuando m_C es mayor que α. La región de estudio se limita a aquélla en la que $K > 0$ y $\alpha < m_C < (1-\alpha)\,/\,(1+d_1)$. Según esto, cabe distinguir dos posibilidades:

1. $\phi > 0$, (es decir, $\alpha < (1-\alpha)\,/\,(1+d_1)$). Existe una región del plano en la que es necesario estudiar el mapa de curvas de nivel para la tasa de crecimiento del capital cuando se juega la estrategia de ahorro pleno. Las figuras 3.10 y 3.11 muestran el mapa de fase para los escenarios I y II, respectivamente.
2. $\phi < 0$, (es decir, $\alpha > (1-\alpha)\,/\,(1+d_1)$). Siempre que el Norte decida como estrategia óptima la de ahorro pleno, $m_C > \alpha > (1-\alpha)\,/\,(1+d_1)$, y por tanto, el Sur fija un número mínimo de especies, lo que implica una tasa máxima de crecimiento del stock de capital, $\delta_{\max}$.

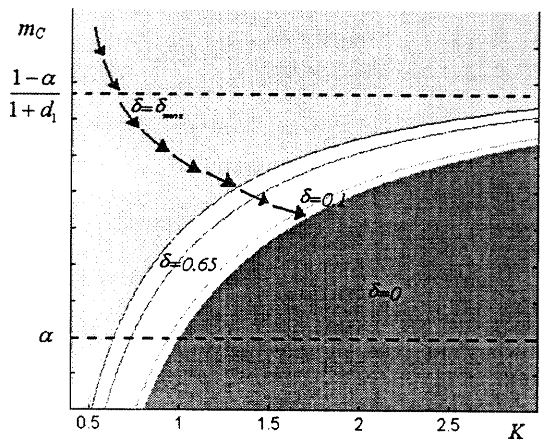

Figura 3.10

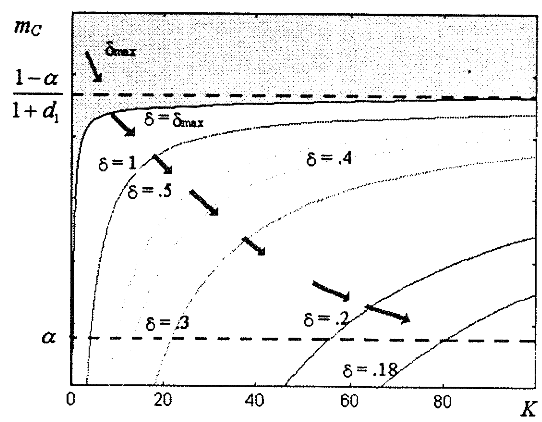

Figura 3.11

Por lo que respecta al gradiente, al igual que en el caso no-cooperativo, éste señala la dirección noroeste en la región definida por $K > 0$ y $\alpha < m_C < (1-\alpha)\,/\,(1+d_1)$. A continuación se muestra cual es el comportamiento de las variables de estado y coestado y, de modo indirecto, la evolución de la tasa de crecimiento del stock de capital. El estudio se realiza separadamente para ϕ positivo y negativo.

1. $\phi > 0$, (es decir, $\alpha < (1-\alpha)\,/\,(1+d_1)$).
   Si el sistema se encuentra en la curva de nivel $\delta\left(n_{1C}^{*}\right) = \xi$, el estado estacionario de

la variable de coestado correspondiente a la estrategia 1 viene dado por la expresión[23]

$$m_C^{*1} = [(1-\alpha)/(1+d_1)]\,(b\,(1+\theta d_1)-\xi)/(r-\xi) > (1-\alpha)/(1+d_1)\,.$$

La última desigualdad está asegurada al ser $r > \delta_{\max}$ y, por tanto, mayor que ξ y al tenerse $0 < r < 1$, $d_1, \theta > 0$ y $b > 1$. Cuando la variable de coestado se encuentra por encima de la asíntota horizontal, $m_C = (1-\alpha)/(1+d_1)$, si su valor es mayor que m_C^{*1}, crece indefinidamente; si coincide con m_C^{*1} se mantiene invariante; por último, si se encuentra por debajo del estado estacionario, entonces disminuye hasta cruzar el valor $m_C = (1-\alpha)/(1+d_1)$. Evidentemente, en la región $\alpha < m_C < (1-\alpha)/(1+d_1)$, la variable de coestado, se encuentra por debajo de su estado estacionario y, por tanto, disminuye.

En cualquier caso, siempre que se juega la estrategia de ahorro pleno, el capital crece a una tasa, $\xi > 0$, que depende de la curva de nivel sobre la cual se encuentre el sistema, o bien se mantiene constante cuando se alcanza la curva de nivel $\xi = 0$.

2. $\phi < 0$, (es decir, $\alpha > (1-\alpha)/(1+d_1)$).

   En este caso, cuando se juega la estrategia de ahorro pleno, $m_C > \alpha > (1-\alpha)/(1+d_1)$. Al estar por encima de la asíntota horizontal, la tasa de crecimiento del capital es siempre máxima, $\delta_{\max}$. El razonamiento antes expuesto para esta zona, de nuevo, es aplicable. La variable de coestado nunca llega a cruzar $m_C = (1-\alpha)/(1+d_1)$, pues alcanza antes el valor α, con lo que se pasaría a jugar la estrategia de ahorro nulo.

Proposición 3.9 *Si ϕ es positivo, en la región del plano $K-m_C$ en la cual $K>0$ y $\alpha < m_C < (1-\alpha)/(1+d_1)$, el valor de la tasa de crecimiento del capital, $\delta(n_{1C}^*)$, disminuye con el tiempo.*

Demostración

La demostración es análoga a la del caso no-cooperativo. Para un punto determinado, $\left(\widetilde{K}, \widetilde{m}_C\right)$, del plano de fase que se encuentra sobre la curva de nivel $\delta(n_{1C}^*) = \xi$, se puede calcular la variación de la tasa de crecimiento del capital a través del producto escalar del vector gradiente por el vector de derivadas temporales, evaluados ambos en el punto $\left(\widetilde{K}, \widetilde{m}_C\right)$:

$$\nabla\delta(n_{1C}^*)_{(\widetilde{K},\widetilde{m}_C)}\begin{pmatrix}\dot{K}\\ \dot{m}_C\end{pmatrix}_{(\widetilde{K},\widetilde{m}_C)} = [\xi-\underline{\delta}]\,\{-r+(1-\alpha)\,[r-b\,(1+\theta d_1)]\,/\,[1-\alpha-m_C\,(1+d_1)]\}\,.$$

El primer factor en esta expresión tiene signo positivo, pues $\underline{\delta}$ es la tasa mínima de crecimiento del capital y, por tanto, menor que ξ. El segundo factor es negativo, dado que $0 < r < 1$, $d_1, \theta > 0$, $b > 1$, y se considera la región del plano en la que $m_C < (1-\alpha)/(1+d_1)$. Las trayectorias seguidas por las variables de estado y coestado,

[23] Del mismo modo que en el caso no-cooperativo, m_C^{*1}, es el valor de la variable de coestado que anula su derivada temporal una vez fijado $\delta(n_1^*) = \xi$. Representa el estado estacionario de esta variable, pero para cada valor de la tasa de crecimiento del capital, ξ, y varía al mismo tiempo que ésta.

siguen un sentido opuesto al del gradiente, lo que lleva a la tasa de crecimiento del capital a disminuir con el tiempo.□

Según lo hasta ahora expuesto, el crecimiento económico sostenido, entendido como el mantenimiento de la estrategia de ahorro pleno de modo indefinido, sólo ocurre si el valor inicial de la variable de coestado, m_{0C}, es mayor o igual a su valor de estado estacionario[24], m_C^{*1}. En este caso la variable de coestado es creciente, si la desigualdad es estricta; y constante, si m_{0C} coincide con m_C^{*1}. Obviamente, si m_{0C} se encuentra por encima o toma el valor m_C^{*1}, está también por encima de la asíntota horizontal, $m_C = (1-\alpha)/(1+d_1)$, y la variable de coestado se mantendrá por encima de la misma. Por consiguiente, siempre que se produzca crecimiento sostenido, el capital crece a la tasa máxima, $\delta_{\max}$. Además, puede probarse que se cumple la condición de transversalidad.

Proposición 3.10 *Cuando se juega la estrategia de ahorro pleno indefinidamente, si se juega $s_C^*(t) = 1\ \forall t \geq 0$, se cumple la condición de transversalidad (3.62).*

Demostración

Al estar la variable de coestado por encima de $m_C = (1-\alpha)/(1+d_1)$, el número de especies utilizadas es el mínimo, $n_{\min}$, la tasa de crecimiento será, por tanto, $\delta_{\max}$, pudiéndose integrar el sistema de ecuaciones diferenciales. La solución para la variable de coestado viene dada por:

$$m_C(t) = A\exp\left[(r-\delta_{\max})t\right] + B, \quad \forall t \geq 0,$$

donde

$$A = m_{0C} - B,$$
$$m_C^{*1} = B = (1-\alpha)\left[b(1+\theta d_1) - \delta_{\max}\right] / \left[(r-\delta_{\max})(1+d_1)\right] > 0.$$

Bajo el supuesto $r > \delta_{\max}$, la variable de coestado crece, pero a una tasa inferior al tanto de descuento. La condición de transversalidad (3.62) se puede escribir,

$$\lim_{t\to\infty} m_C(t)\exp(-rt) = \lim_{t\to\infty}\left[A\exp(-\delta_{\max}t) + B\exp(-rt)\right] = 0. \qquad \square$$

En el caso no-cooperativo se ha eliminado este tipo de solución porque, aun cumpliendo las condiciones necesarias y de transversalidad, no proporciona una valor máximo de los funcionales objetivo. En concreto, esta solución implica un mínimo para el funcional objetivo del Norte. En la presente sección, dado que los jugadores cooperan, no se optimizan separadamente ambos funcionales, sino que el estudio se realiza atendiendo a la combinación convexa de ambos. De esta forma, la pérdida de bienestar sufrida por el Norte al jugar la estrategia de ahorro pleno indefinidamente, puede verse compensada por una mayor ganancia en bienestar del Sur. Lógicamente, esta situación es tanto más probable cuanto mayor sea el peso específico del Sur, es decir, cuanto menor sea α. Del estudio

[24] Por el contrario, si $m_{0C} < m_C^{*1}$, la variable de coestado disminuye hasta alcanzar inexorablemente α, con lo que se pasa a jugar la estrategia 0.

de las condiciones de convexidad, no es posible afirmar que la solución obtenida sea un máximo o un mínimo. Por esta razón, se llevará a cabo una comparación del bienestar obtenido cuando se considera como solución óptima el jugar la estrategia de ahorro pleno indefinidamente, o bien se juega la estrategia 1 durante un primer periodo finito, seguido de otro infinito en el que se juega la estrategia 0 o de ahorro nulo.

En la siguiente proposición se establece una condición sobre el parámetro que define el poder del Norte, α, que garantiza cuando la solución óptima de ahorro pleno durante todo el horizonte temporal, proporciona un menor bienestar que otra solución en la que, a partir de un determinado instante y en adelante se juegue la estrategia de ahorro nulo. Cuando esto es así, se puede afirmar que la solución que implique crecimiento sostenido no es un máximo.

Proposición 3.11 *Bajo las hipótesis* $r > \delta_{\max}$, $m_{0C} \geq m_C^{*1}$ *y* $m_{0C} > \alpha$, *es decir, cuando la solución de ahorro pleno indefinido es óptima, si*

$$\alpha > 1/\left[1 + (1 + d_1)\left([r - \delta_{\max}] / [b(1 + \theta d_1) - \delta_{\max}]\right)\right] = \widetilde{\alpha}_{\max} > 1/(2 + d_1), \quad (3.64)$$

esta solución no proporciona un valor máximo del funcional objetivo del Norte.

Demostración

Véase Apéndice D.

Según esta proposición, cuando el poder de negociación del Norte es lo suficientemente alto, $\alpha > \widetilde{\alpha}_{\max}$, la estrategia 1 durante todo el juego es una solución óptima pero no proporciona un máximo de la función valor, pues se obtiene un mayor bienestar si en algún momento se pasa a jugar la estrategia 0. En el primer caso, el Norte consume únicamente su salario de subsistencia de modo indefinido para permitir el crecimiento sostenido del stock de capital, que lleva a un crecimiento continuo de la producción y con ello de la demanda al Sur, tanto de bien intermedio "natural" como de trabajadores, lo cual proporciona una mayor utilidad de esta última región. La segunda solución permite al Norte consumir lo máximo posible a partir de un determinado momento, a expensas de un estancamiento de la producción y con ello de un parón en el crecimiento del consumo del Sur. Por consiguiente, si el poder del Norte no es lo suficientemente alto, $\alpha < \widetilde{\alpha}_{\max}$, el mayor bienestar del Sur compensa las pérdidas del Norte cuando se mantiene la estrategia de ahorro pleno.

La cota $\widetilde{\alpha}_{\max}$ cuando se asume un horizonte temporal infinito y un modo de juego cooperativo, representa un umbral sobre el poder de negociación del Norte, por debajo del cual la aparición de crecimiento sostenido proporciona un máximo bienestar a los jugadores. Igualmente, en el teorema 3.1, en el marco de horizonte finito, se ha mostrado que $\overline{\alpha}(T)$ representa una cota superior bajo la cual es óptima la solución de crecimiento del stock de capital. Es fácil comprobar que $\widetilde{\alpha}_{\max}$ es el valor límte de $\overline{\alpha}(T)$ cuando la duración del juego, T, tiende hacia infinito.

A continuación, asumiendo que se cumplen las condiciones necesarias para que la estrategia de ahorro pleno durante todo el horizonte temporal sea óptima, se establece una condición equivalente a (3.64), es decir, se muestra cuándo se puede asegurar que la solución de crecimiento sostenido no es un máximo.

Proposición 3.12 *Sea m_C^{*S} el estado estacionario de la variable de coestado, m_C, cuya evolución temporal viene dada por (3.41). Bajo el supuesto $r > \delta_{\max}$, exigir que m_C^{*S} sea mayor (igual; menor) que α, es equivalente a que α sea menor (igual; mayor) que $\widetilde{\alpha}(n_C^*)$, donde,*

$$\widetilde{\alpha}(n_C^*) = 1/\left[1 + (1+d_1)\left([r - \delta(n_C^*)\right]/\left[b(1+\theta d_1) - \delta(n_C^*)\right])\right] > 1/(2+d_1).$$

Esta proposicón es cierta con independencia del valor de s.

Demostración

Del sistema dinámico (3.41) se puede obtener el estado estacionario de la variable de coestado:

$$m_C^{*S} = \{(1-s)\,\alpha\delta(n_C^*)(1+d_1) + (1-\alpha)\left[b(1+\theta d_1) - \delta(n_C^*)\right]\} / \left[(1+d_1)(r - \delta(n_C^*)\,s)\right].$$

Dado que se ha supuesto $r > \delta_{\max}$, entonces $r > \delta(n_C^*)\,s$. Teniendo esto en cuenta, m_C^{*S} es mayor que α, si y sólo si,

$$\{(1-s)\,\alpha\delta(n_C^*)(1+d_1) + (1-\alpha)\left[b(1+\theta d_1) - \delta(n_C^*)\right]\} > \alpha(1+d_1)(r - \delta(n_C^*)\,s).$$

O equivalentemente, en términos de α,

$$\alpha < 1/\left[1 + (1+d_1)\left([r - \delta(n_C^*)\right]/\left[b(1+\theta d_1) - \delta(n_C^*)\right])\right] = \widetilde{\alpha}(n_C^*). \qquad \square$$

Corolario 3.1 *m_C^{*1} es mayor (menor; igual) que α, si y sólo si, m_C^{*0} es mayor (menor; igual) que α.*

Para especificar cuando es óptima una solución de crecimiento sostenido, de nuevo se distingue entre valores positivos y negativos de ϕ.

1. $\phi > 0$, (es decir, $\alpha < (1-\alpha)/(1+d_1)$).
   La cota $\widetilde{\alpha}_{\max}$ siempre es mayor que $1/(2+d_1)$, pero al ser $\phi > 0$, el poder de negociación del Norte, α, toma valores por debajo de $1/(2+d_1)$. Por consiguiente, $\alpha < \widetilde{\alpha}_{\max}$, y nunca se cumple la condición (3.64). No es posible afirmar que la solución de crecimiento sostenido no sea un máximo.
2. $\phi < 0$, (es decir, $\alpha > (1-\alpha)/(1+d_1)$).
   Aunque el estado estacionario de la variable de coestado correspondiente a la estrategia 1, m_C^{*1}, es siempre mayor que $(1-\alpha)/(1+d_1)$, en este caso, al ser $\alpha > (1-\alpha)/(1+d_1)$, pueden presentarse dos situaciones diferentes:
   (a) $m_C^{*1} < \alpha$.

Para que la estrategia 1 sea óptima en el instante inicial, m_{0C} debe ser mayor que α, y por ende, también mayor que m_C^{*1}. Entonces, la variable de coestado crece indefinidamente, y siempre es óptima la solución de crecimiento sostenido.

(b) $m_C^{*1} > \alpha$.

Si $m_{0C} > m_C^{*1}$, entonces la variable de coestado crece indefinidamente.

Si $m_{0C} < m_C^{*1}$, entonces la variable de coestado disminuye hasta alcanzar $m_C = \alpha$, pasándose a jugar la estrategia 0.

La proposición anterior prueba que, cuando se juega la estrategia de ahorro pleno, $m_C^{*1} < \alpha$ es equivalente a $\alpha > \widetilde{\alpha}\left(n_{1C}^*\right)$, y dado que cuando hay crecimiento sostenido la tasa de crecimiento es siempre $\delta_{\max}$, entonces se cumple $\alpha > \widetilde{\alpha}_{\max}$, que es precisamente la condición (3.64). En este caso, por tanto, nunca es máxima una solución que implique una estrategia continuada de ahorro pleno.

La solución de crecimiento sostenido podrá ser un máximo cuando $m_{0C} > m_C^{*1}$ y el estado estacionario sea mayor que α, es decir, cuando no se cumpla la condición (3.64).

3.3.2.2 Estancamiento infinito (ahorro nulo): $s_C^*(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$

Para $s_C^*(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, la solución del sistema (3.41) viene dada por:

$$\begin{aligned} K(t) &= K_0, \\ m_C(t) &= A \exp(rt) + B, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} A &= m_{0C} - B, \\ B &= \alpha \delta_{0C}^*/r + (1-\alpha)\left[b\left(1+\theta d_1\right) - \delta_{0C}^*\right] / \left[r\left(1+d_1\right)\right] > 0, \end{aligned}$$

donde m_{0C} denota el valor inicial de la variable de coestado. El stock de capital permanece invariable e igual a su valor inicial, y la variable de coestado crece, decrece o se mantiene constante, según la condición inicial, m_{0C}, esté por encima, por debajo, o sea igual a su valor de estado estacionario, dado por:

$$m_C^{*0} = B.$$

Al igual que en el caso no-cooperativo, la condición de transversalidad solamente se cumple cuando la variable de coestado se mantiene en su estado estacionario, m_C^{*0}, ya que se tiene:

$$\lim_{t \to \infty} m_C(t) \exp(-rt) = A = 0.$$

No obstante, la estrategia de ahorro nulo únicamente se presenta cuado esta variable es menor que α. Por lo tanto, para que una solución de estancamiento infinito sea óptima, es preciso que el valor inicial de la variable de coestado, m_{0C}, coincida con su estado estacionario, m_C^{*0}, pero además, este último debe cumplir:

$$m_C^{*0} < \alpha.$$

Por la proposición 3.12, cuando se juega la estrategia de ahorro nulo, esta condición es equivalente a $\alpha > \widetilde{\alpha}\left(n_{0C}^{*}\right)$. Teniendo en cuenta que $\widetilde{\alpha}\left(n_{C}^{*}\right)$ es mayor que $1/\left(2+d_1\right)$, distinguimos dos casos según ϕ sea positivo o negativo.

1. $\phi > 0$, (es decir, $\alpha < 1/\left(2+d_1\right)$).
   Cuando el poder de negociación del Norte está por debajo de $1/\left(2+d_1\right)$, la solución de estancamiento infinito nunca es óptima.
2. $\phi < 0$, (es decir, $\alpha > 1/\left(2+d_1\right)$).
   En este caso por (3.44), el número óptimo de especies utilizadas por el Sur es $n_{\min}$, de donde se deduce que la condición de que el estado estacionario esté por debajo de α, ahora es equivalente a $\alpha > \widetilde{\alpha}_{\max}$. Es decir, el poder de negociación del Norte, debe no sólo ser superior a $1/\left(2+d_1\right)$, sino también mayor que $\widetilde{\alpha}_{\max}$.

Por lo tanto, una solución que implique estancamiento infinito únicamente es óptima si el valor inicial de la variable de coestado coincide con su valor de estado estacionario y el poder de negociación del Norte es suficientemente alto, de forma que $\alpha > \widetilde{\alpha}_{\max}$. En cualquier otra circunstancia, una solución que implique estancamiento infinito no es óptima.

3.3.2.3 Crecimiento sostenido o estancamiento infinito: $s_{C}^{*}(t) = \overline{s} \in [0\ 1] \quad \forall t \geq 0$

Si el estado estacionario correspondiente a la estrategia de ahorro pleno, m_{C}^{*1}, es igual a α, por el corolario 3.1, también lo es el estado estacionario correspondiente a la estrategia de ahorro nulo, m_{C}^{*0}. De hecho, cualquiera que sea el valor de la tasa de ahorro, $\overline{s}$, en el intervalo $[0\ 1]$, el estado estacionario de la variable de coestado, deducido de la segunda ecuación diferencial del sistema (3.41), también es igual a α. Es evidente, por tanto, que si la condición inicial de la variable de coestado, m_{0C}, igualmente coincide con α, entonces un arco singular es una posible solución del problema. El Norte puede fijar cualquier valor, $\overline{s}$, de la tasa de ahorro entre cero y uno, y con independencia de cual sea este valor, la variable de coestado se mantiene invariante. Se cumplen tanto las condiciones necesarias derivadas del principio del máximo, como la de transversalidad. El stock de capital experimenta crecimiento siempre que la tasa de ahorro elegida por el Norte no sea nula.

Nótese que el exigir que el estado estacionario de la variable de coestado sea igual al poder de negociación del Norte, α, es equivalente, por la proposición 3.12, a que este último coincida con $\widetilde{\alpha}\left(n_{C}^{*}\right)$. Bajo esta última hipótesis, si la condición inicial de la variable de coestado también es $\widetilde{\alpha}\left(n_{C}^{*}\right)$, entonces es óptima una solución en la que el Norte fije, de modo indefinido, cualquier tasa de ahorro entre cero y uno. Ésta es una solución de crecimiento sostenido, siempre que la tasa de ahorro elegida sea distinta de cero.

De nuevo, la solución de crecimiento sostenido indefinidamente es posible cuando la variable de coestado se encuentra por encima de $\left(1-\alpha\right)/\left(1+d_1\right)$ y el Sur elige, por tanto, un número mínimo de especies a utilizar. Por consiguiente, $\widetilde{\alpha}\left(n_{C}^{*}\right)$ es constante e igual a $\widetilde{\alpha}_{\max}$.

3.3.2.4 Crecimiento finito seguido de estancamiento infinito:

$s^*_C(t) = 1 \;\; \forall t \in [0\, t^*_\infty]$ **y** $s^*_C(t) = 0 \;\; \forall t > t^*_\infty$

En este apartado se estudia si es o no óptima una solución en la que los jugadores decidan ahorrar a la tasa máxima durante un primer periodo finito, y a partir de un determinado momento se produzca un periodo infinito de estancamiento, esto es, el ahorro en este periodo sea nulo. Para que se cumpla la condición de transversalidad es preciso que la variable de coestado no crezca (o disminuya) durante el segundo periodo a una tasa superior al tanto de descuento. Durante este segundo periodo, los jugadores siguen la estrategia de ahorro nulo. En el apartado 3.3.2.2 se ha probado que, bajo esta estrategia, la condición de transversalidad únicamente se cumple si el valor de la variable de coestado al comienzo del periodo $(t^*_\infty\, \infty)$, coincide con su estado estacionario, m^{*0}_C, correspondiente a la estrategia 0.

Para que este tipo de solución sea óptima, es preciso que el valor inicial de la variable de coestado, m_{0C}, sea mayor que α y descienda hasta alcanzar este último valor en t^*_∞. Durante este periodo los jugadores siguen la estrategia de ahorro pleno. En el instante t^*_∞, la variable de coestado, no sólo debe de alcanzar el valor α, sino también su estado estacionario, m^{*0}_C, lo que posibilita que se cumpla la condición de transversalidad.

Dado que se asume $r > \delta_{\max}$, también se verifica $r > \delta(n^*_{1C})$. Según esto, la ecuación diferencial de la variable de coestado, dada por la segunda ecuación del sistema (3.63), indica que, para cada valor de la tasa de crecimiento del capital, $\delta(n^*_{1C})$, esta variable sólo disminuye si se encuentra por debajo del estado estacionario correspondiente a la estrategia 1, m^{*1}_C. Por lo tanto, en el instante inicial, se juega la estrategia 1 si $\alpha < m_{0C} < m^{*1}_C$.

Para que esta solución sea óptima y cumpla la condición de transversalidad, es necesario que se verifiquen las igualdades:

$$m_C(t^*_\infty) = m^{*0}_C = \alpha. \tag{3.65}$$

Probamos a continuación que una solución que implique crecimiento durante un periodo finito seguida de estancamiento desde un momento en adelante, nunca es óptima. Para ello se distingue, de nuevo, entre el comportamiento cuando ϕ es positivo y cuando toma valores negativos.

1. $\phi > 0$, (es decir, $\alpha < 1/(2+d_1)$).
   Por la proposición 3.12, la igualdad (3.65) equivale a que α sea igual a $\widetilde{\alpha}(n^*_C)$, que a su vez es mayor que $1/(2+d_1)$. No obstante, dado que ϕ es positivo, esto nunca se cumple. Así, podemos concluir que una solución que implique crecimiento finito nunca es óptima cuando el poder de negociación del Norte es bajo.
2. $\phi < 0$, (es decir, $\alpha > 1/(2+d_1)$).
   En este caso, por la expresión (3.43), el Sur elige, durante todo el horizonte temporal, un número fijo de especies a utilizar en su proceso productivo, dado por $n_{\min}$. Por consiguiente, la tasa de crecimiento del capital también es constante e igual a $\delta_{\max}$. El estado estacionario correspondiente a la estrategia de ahorro nulo, m^{*0}_C, es invariante ya que depende de δ^*_{0C} que es constante y, en este caso, igual a $\delta_{\max}$.
   Si en el instante inicial se juega la estrategia 1 y la variable de coestado disminuye,

en ese momento, debe verificarse $m_C^{*1} > \alpha$, pero entonces, por el corolario 3.1 también se cumple $m_C^{*0} > \alpha$. Según este razonamiento, la variable de coestado en t_∞^*, no puede tomar simultáneamente los valores α y m_C^{*0}. Por tanto, una solución que lleve asociado crecimiento finito, tampoco es óptima cuando el poder de negociación del Norte es alto.

En conclusión, independientemente de cual sea el poder de negociación de uno u otro jugador, la estrategia que conlleva un periodo de crecimiento finito nunca es una solución óptima del problema.

3.3.2.5 Estancamiento finito seguido de crecimiento indefinido: $s_C^*(t) = 0 \;\; \forall t \in [0\, t_\infty^*]$ y $s_C^*(t) = 1 \;\; \forall t > t_\infty^*$

En último lugar, se analiza una solución según la cual, si bien en un primer periodo se juega la estrategia de ahorro nulo, llega un momento en el cual los jugadores deciden seguir la de ahorro máximo, permitiendo, de esta forma, la aparición de crecimiento sostenido a partir de ese instante[25].

Al comienzo del juego es óptimo seguir la estrategia de ahorro nulo si el valor inicial de la variable de coestado, m_{0C}, es menor que α. Asimismo, para que sea óptimo jugar la estrategia de ahorro pleno a partir de t_∞^*, la variable de coestado debe ser creciente y alcanzar en ese instante el valor α. Como se ha indicado en el apartado 3.3.2.2 al estudiarse la solución de estancamiento infinito, la variable de coestado será creciente para aquellos valores por encima de su valor de estado estacionario, m_C^{*0}. Según este razonamiento, el valor inicial de la variable de coestado debe cumplir:

$$m_C^{*0} < m_{0C} < \alpha.$$

Esto, evidentemente, requiere que el estado estacionario sea inferior a α, ó de forma equivalente, según la proposición 3.12,

$$\alpha > \widetilde{\alpha}(n_C^*) > 1/(2 + d_1).$$

El estudio de la posibilidad o no de este tipo de soluciones, se vuelve a realizar atendiendo al signo de ϕ.

1. $\phi > 0$, (es decir, $\alpha < 1/(2 + d_1)$).
   Siendo ϕ positivo, α nunca es mayor que $\widetilde{\alpha}(n_C^*)$, con lo que, en este caso, este tipo de solución no es óptima.
2. $\phi < 0$, (es decir, $\alpha > 1/(2 + d_1)$).
   Al ser ϕ negativo, el Sur decide un número mínimo de especies, lo que da lugar a que la tasa de crecimiento del capital sea máxima. Además de verificarse que el valor inicial de la variable de coestado sea inferior a α,en este caso se debe cumplir:

$$\alpha > \widetilde{\alpha}_{\max}.$$

[25] En el caso no-cooperativo no se estudia este tipo de solución, pues se ha eliminado cualquiera que implique un periodo infinito de ahorro pleno, ya que ello no conlleva un valor máximo del funcional objetivo del Norte. Esto es así pues cualquier solución en la que el Norte decida una tasa de ahorro distinta de uno en algún instante de ese periodo, garantiza un mayor bienestar para el Norte.

Proposición 3.13 *Cuando ϕ es negativo, si se dan los supuestos $m_0^{*0} < m_{0C} < \alpha$ y, por consiguiente, $\alpha > \widetilde{\alpha}_{\max}$, entonces una solución en la que se juegue la estrategia 0 durante un primer periodo y la estrategia 1 a partir de un determinado instante, t_∞^*, no proporciona un valor máximo del funcional objetivo.*

Demostración

Véase Apéndice E.

3.3.3 Comportamiento cooperativo "versus" no-cooperativo

Las tablas 3.1 y 3.2 resumen el comportamiento de las soluciones óptimas cuando los jugadores plantean el juego de forma no-cooperativa o cooperativa, respectivamente. En la primera tabla se recogen los resultados según cual sea la relación entre la tasa de crecimiento del stock de capital y el tanto de descuento. Mientras que en la tabla 3.2, la síntesis de resultados se realiza en función del valor del poder de negociación del Norte.

Si los jugadores maximizan sus funcionales objetivo por separado, es decir, siguen modo de juego no-cooperativo, la solución de crecimiento sostenido nunca es un máximo, pues proporciona un valor mínimo del funcional objetivo del Norte. En consecuencia, son posibles o bien una solución de estancamiento infinito o bien una de crecimiento finito. Éstas únicamente son óptimas si el tanto de descuento es superior a la tasa mínima de crecimiento del capital[26], $\underline{\delta}$. Cuando el tanto de descuento es lo suficientemete alto, $r > \underline{\delta}$, la solución de estancamiento infinito es óptima para valores del stock de capital por encima o iguales a una cota, $\widetilde{K}$. Si el capital es inferior a esta cota, entonces es óptimo un primer periodo finito de crecimiento, seguido de otro infinito de estancamiento.

Cuando cualquier tasa de crecimiento del capital es inferior al tanto de descuento, es decir, $r \geq \delta_{\max}$, entonces la solución de ahorro nulo es óptima si las variables de coestado toman como valores iniciales sus estados estacionarios, con independencia de cual sea el valor del stock de capital. No sucede lo mismo con la solución de crecimiento finito, pues en este caso, si se comienza ahorrando a la tasa máxima, no es óptimo cambiar de estrategia pasando a una de ahorro nulo. Sería, por tanto, óptima una solución de crecimiento indefinido aunque, como se ha probado, ésta no es un máximo del problema.

Lógicamente, una solución de ahorro nulo requiere de un valor inicial de la variable de coestado del Norte menor que 1 e igual al estado estacionario correspondiente a dicha estrategia. Por el contrario, si se comienza jugando la estrategia de ahorro pleno, este valor inicial debe superar tanto a la unidad, como al estado estacionario correspondiente a la estrategia 0.

Cuando la solución óptima es aquélla de estancamiento infinito, el número óptimo de especies utilizadas por el Sur también se mantiene constante. Por su parte, la solución de

[26] Nótese que bajo el Escenario I, la tasa de crecimiento del capital cuando el número de especies tiende hacia infinito, $\underline{\delta}$, es negativa. En tal caso, las conclusiones mostradas en la tabla 3.1 son válidas para r entre 0 y 1, en los dos primeros casos, o entre $\delta_{\max}$ y 1, en el tercero.

crecimiento finito puede llevar parejo un incremento del número de especies utilizadas en el proceso productivo del Sur durante el periodo en que se juega la estrategia de ahorro pleno[27]. Este proceso se detiene en el momento en que se cambia de estrategia pasando a la de ahorro nulo. El número de especies que se pueden llegar a utilizar está acotado superiormente en el Escenario I por $n_{\max}$.

Comportamiento no-cooperativo

m_{S0}	m_{N0}	$K \backslash r$	0 – $\underline{\delta}$	$\underline{\delta}$ – δ_{max}	δ_{max} – 1
$m_S^{*0} = m_{S0}$	$m_N^{*0} = m_{N0} \leq 1$	$K_0 \geq \widetilde{K}$		$s^*=0$	$s^*=0$
$m_S^{*0} < m_{S0}$	$m_N^{*0} \leq m_{N0} \geq 1$	$K_0 < \widetilde{K}$		$s^*=1 + s^*=0$	
$m_S^{*0} = m_{S0}$	$m_N^{*0} = m_{N0} \leq 1$				$s^*=0$

Tabla 3.1

Bajo un comportamiento no-cooperativo, los jugadores maximizan sus funcionales objetivo por separado. Esto hace que la solución de crecimiento sostenido nunca pueda ser un máximo, pues proporciona un valor mínimo del funcional objetivo del Norte. Por su parte, bajo el comportamiento cooperativo se maximiza la suma ponderada de los funcionales objetivo del Norte y el Sur. Por consiguiente, aunque la estrategia de ahorro pleno proporcione un valor mínimo del funcional objetivo del Norte, esto puede verse compensado por un mayor valor del funcional objetivo del Sur. Por esta razón, no se puede eliminar esta solución como un posible máximo cuando los jugadores cooperan. No obstante, es preciso resaltar que, para evitar la no convergencia de la integral que representa el funcional objetivo del Sur, se estudian las soluciones del juego diferencial asumiendo que el tanto de descuento es superior a cualquiera de las posibles tasas de crecimiento del capital, $r > \delta_{\max}$. Bajo este supuesto, se ha demostrado que no son óptimas las soluciones que impliquen un cambio de estrategia, ya sea estancamiento finito seguido de crecimiento sostenido o crecimiento finito seguido de estancamiento infinito.

Que se juegue de forma ininterrumpida una estrategia de ahorro pleno o bien una de ahorro nulo, depende de cual sea el poder de negociación de cada región, así como de las condiciones iniciales para la variable de coestado. Si el poder de negociación del Norte, α, es bajo, puede ser óptima una solución de crecimiento sostenido, que obliga a esta región a un esfuerzo ahorrador ininterrumpido. Para que esto sea posible, es preciso, además, que el valor inicial de la variable de coestado sea superior tanto a α, como a su valor de estado estacionario correspondiente a la estrategia 1, m_C^{*1}. Por contra, si el Norte es el que tiene la posición de fuerza, entonces, puede ser óptima una solución que permita a esta región consumir a la tasa máxima durante todo el horizonte temporal, causando, a su vez, un estancamiento de la economía y, por tanto, no permitiendo que crezca el bienestar en el Sur. Esta solución sólo será óptima si la variable de coestado empieza tomando un valor

[27] No se incrementa el número de especies cuando el Sur fija siempre un número mínimo de ellas, $n_{\min}$.

inferior a α e igual a su estado estacionario correspondiente a la estrategia 0, m_C^{*0}. Finalmente, si esta variable de coestado coincide con el poder de negociación del Norte, α, y éste, a su vez, es igual a $\widetilde{\alpha}_{\max}$, entonces para cualquier valor que el Norte decida de la tasa de ahorro, $\overline{s}$, se tiene una solución que cumple tanto las condiciones necesarias como la de transversalidad. Este tipo de solución será de crecimiento sostenido siempre que la tasa de ahorro, $\overline{s}$, sea distinta de cero, y será de estancamiento infinito en caso contrario.

La solución de ahorro nulo indefinido en ambos modos de juego conlleva un estancamiento infinito, tanto del stock de capital, como del número óptimo de especies utilizadas por el Sur. Para esta solución de estancamiento infinito se tiene que el número de especies fijadas por el Sur, en el caso cooperativo, es inferior o igual al que fijaría esta región, pero bajo una situación no-cooperativa. Esto se deduce fácilmente comparando (3.24) y (3.44). Por otro lado, si la solución es de crecimiento sostenido, en el caso cooperativo, sólo se puede mantener indefinidamente cuando el Sur juega $n_{\min}$. En conclusión, el número de especies utilizadas por el proceso productivo del Sur cuando los jugadores no cooperan es siempre mayor o igual que cuando sí lo hacen.

Comportamiento cooperativo

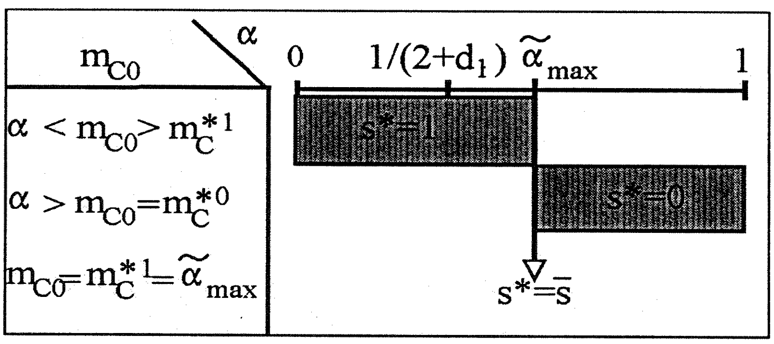

Tabla 3.2

3.4 Conclusiones

En este capítulo se presenta un juego de comercio Norte-Sur en el cual, el Norte posee la potestad de decidir su tasa de ahorro y, con ello, la inversión a realizar, es decir, la acumulación de capital. Por su parte, el Sur decide cuántas especies naturales utilizar en su proceso productivo y cuántas conservar. El comercio internacional afecta y se ve, al mismo tiempo, influenciado por las decisiones sobre la conservación medioambiental. Se distinguen dos escenarios, según se imponga o no un límite al número de especies naturales que el Sur puede emplear en su proceso productivo. En el Escenario I, el número de especies naturales susceptibles de ser empleadas por el Sur está limitado por una cota superior. Si se utilizase un número mayor de especies, la tasa de crecimiento del capital pasaría a ser negativa. Por el contrario, en el Escenario II, el Sur está habilitado para incrementar, sin límite, el número de especies que desee utilizar para producir el bien intermedio "natural". Por muchas especies que utilice esta región, la tasa de crecimiento del capital es siempre positiva.

En primer lugar, se especifica el juego diferencial asumiendo un horizonte temporal finito. Para este horizonte, se empieza analizando el juego diferencial dentro de un marco de no cooperación entre los jugadores. En este caso, es interesante destacar que el resultado del juego difiere en función de cual sea el escenario que se asuma. Bajo el Escenario I, cuando el capital inicial está por debajo de una determinada cota, es óptima una solución en la que se produzca crecimiento del capital hasta alcanzar dicha cota, sucediéndose posteriormente un periodo de estancamiento. Si, por el contrario, el stock inicial de capital se encuentra por encima de esa cota, la solución óptima implica el mantenimiento del capital constante durante todo el horizonte temporal. Esto muestra que la aparición o no de crecimiento económico es función del valor inicial del stock de capital. El Escenario II se puede dividir en dos hemisferios, según los valores de los parámetros. En uno de ellos, tanto más probable cuanto más corto sea el horizonte temporal del juego considerado, el comportamiento es idéntico al del Escenario I; pero en el otro hemisferio, relacionado con un horizonte temporal largo, nunca es óptima una solución que implique estancamiento durante todo el horizonte temporal. En este último caso, siempre aparece crecimiento económico, independientemente de cual sea el valor inicial del stock de capital.

A continuación, se calculan las soluciones cuando los jugadores cooperan. La conclusión principal en este caso es que siempre existe un rango de valores para el poder de negociación de cada región, dentro del cual el crecimiento económico es una solución óptima, con independencia de que el sistema se encuentre bajo uno u otro escenario. Es decir, para determinadas distribuciones de pesos entre regiones, siempre es óptima una solución que de lugar a crecimiento económico.

Una conclusión inmediata que se deriva de la comparación entre el caso cooperativo y el no-cooperativo, es que en el primer modo de juego, una solución de estancamiento nunca es óptima. No obstante, cuando sí se produce crecimiento económico bajo el supuesto no-cooperativo, éste dura menos y es menor en términos absolutos que el que acontece cuando los jugadores cooperan. Además, la conservación de la diversidad biológica en el caso no-cooperativo es siempre menor, o a lo sumo igual, que en el caso cooperativo. Para llegar a estas conclusiones se hace preciso recurrir al uso de métodos numéricos, pues no es posible la resolución analítica del juego diferencial en el supuesto de que los jugadores cooperen.

Una vez estudiadas las soluciones del juego de horizonte finito, se analiza éste cuando se considera un horizonte temporal infinito. Se comienza, al igual que en el juego de horizonte finito, por el caso no-cooperativo. Para este tipo de comportamiento, si el tanto de descuento se encuentra entre la tasa máxima y la mínima de crecimiento del stock de capital, entonces una cota sobre el capital determina la aparición de distintos tipos de soluciones. Valores iniciales del stock de capital por encima o iguales a dicha cota dan lugar a una solución óptima de estancamiento infinito. Por el contrario, si el valor inicial del capital está por debajo de la misma, entonces es óptima una solución de crecimiento finito, que termina en el momento en que el stock de capital alcance precisamente el valor de dicha cota. A partir de ese instante, se sigue una estrategia de ahorro nulo o estancamiento. Si el tanto de descuento es superior a la tasa máxima de crecimiento del capital, entonces únicamente es óptima una solución de estancamiento infinito. Por su parte, una solución de crecimiento sostenido no es óptima en ningún caso, pues proporciona un valor mínimo del funcional objetivo del Norte.

Cuando las regiones se comprometen a seguir un comportamiento cooperativo, entonces es óptima, bien una solución de crecimiento sostenido, si el poder de negociación del Sur es alto, o bien una solución de estancamiento infinito, si el Norte es quien tiene un gran poder de negociación.

Asumiendo un comportamiento no-cooperativo por parte de los jugadores, tanto para el caso de horizonte temporal finito como para el infinito, existe una condición sobre el valor inicial del stock de capital que determina que la solución óptima es, en un caso, una de estancamiento y, en caso contrario, una de crecimiento económico finito. El valor de la cota sobre el stock de capital que separa ambos tipos de comportamiento, en el juego con horizonte temporal infinito, es el valor límite de la cota que aparece en el caso de horizonte temporal finito, cuando éste tiende hacia infinito.

En el supuesto de cooperación entre las regiones, tanto en el juego de horizonte finito como en el de horizonte infinito, cuando el poder de negociación del Norte está por debajo de una cota determinada, es óptima una solución de crecimiento económico. De nuevo, esta cota en el caso de horizonte infinito, coincide con el límite de la correspondiente al juego de horizonte finito cuando la duración del juego tiende hacia el infinito.

A continuación se detallan las principales críticas, así como posibles extensiones del modelo y algunas futuras líneas de investigación.

El primer supuesto que puede considerarse muy simplista, es la especificación de una función de producción, en principio de coeficientes fijos, pero a la postre de tipo AK. Parece apropiado la utilización de funciones más generales como, por ejemplo, una de tipo Cobb-Douglas. Este supuesto dificultaría la resolución analítica del problema, al menos según está formulado en el presente capítulo.

Otro supuesto que simplifica en gran medida la resolución del problema, es la introducción de la tasa de ahorro dentro del funcional objetivo del Norte de forma lineal. Este supuesto es responsable de la aparición de un control óptimo de tipo bang-bang. Sería interesante encontrar una forma de incluir esta variable de modo no lineal y que, bajo este nuevo supuesto, pudiese llevarse a cabo un estudio analítico de las soluciones del juego.

Del mismo modo, con referencia a la tasa de ahorro, y con vistas a poder encontrar una solución analítica del juego diferencial, se asume que ésta toma valores entre cero y uno. La política de ahorro nulo simplifica en gran medida el sistema dinámico a estudiar, pudiéndose encontrar fácilmente las trayectorias óptimas del juego. Además, sólo si éstas últimas se conocen se puede dar una expresión analítica de la solución del juego cuando el Norte sigue una política de ahorro pleno. No obstante, este supuesto tiene dos implicaciones inmediatas: por un lado, sólo se produce crecimiento económico bajo la estrategia de ahorro pleno, ya que, en caso contrario no se ahorra nada y, por tanto, no hay inversión, manteniéndose constante el stock de capital; por otro lado, la estrategia de ahorro pleno da lugar únicamente a un consumo de subsistencia en el Norte. Esto tiene como consecuencia que una estrategia de ahorro pleno ininterrumpido nunca sea un máximo para esta región, pues cualquier otra política le proporciona mayor nivel de consumo. Se puede argumentar como más realista el considerar que la tasa de ahorro varíe entre un mínimo, $\underline{s}$, por encima de cero y un máximo, $\overline{s}$, menor que uno. Esto conlleva que nunca es posible un ahorro nulo ni tampoco un ahorro pleno. Bajo la estrategia de ahorro máximo el Norte consume por encima de su nivel de subsistencia, lo que abre la posibilidad de que este tipo de solución sea un máximo para el Norte. Asimismo, bajo la estrategia de ahorro mínimo, aunque escaso, sigue existiendo ahorro y, por tanto, inversión en el Norte. No es necesario que se juegue la estrategia de ahorro máximo para que se produzca crecimiento del stock de capital. El problema radica en la imposibilidad de obtener soluciones analíticas del juego diferencial cuando se elimina el supuesto de una tasa de ahorro entre cero y uno. Por esta razón, se ha optado por estudiar el juego asumiendo que el Norte puede decidir entre una tasa de ahorro que cumpla esta condición. A partir de las soluciones así obtenidas, sería una interesante extensión del trabajo, el estudiar hasta qué punto los resultados se pueden generalizar si se admite la posibilidad de que las tasas máxima y mínima de ahorro difieran de uno y cero. En el próximo capítulo, el planteamiento más general del juego lleva a la necesidad de recurrir a métodos numéricos para su resolución, por lo que, será entonces posible tener en cuenta una tasa de ahorro que varíe entre las cotas $\underline{s}$ y $\overline{s}$.

Una de las críticas más importantes que se pueden formular sobre el modelo se refiere a la forma en la cual la conservación de la biodiversidad afecta a las decisiones del Norte. Se trata ésta de una crítica doble. En primer lugar, se asume que el Norte está dispuesto a pagar una cantidad adicional sobre el precio de mercado del bien intermedio "natural", como contrapartida a una producción más respetuosa con el medio ambiente en el Sur. Sin embargo, no se incluye la biodiversidad dentro de la función de utilidad del Norte de manera que se pueda obtener el sobreprecio como resultado de la maximización de esta utilidad. En segundo lugar, los ingresos que el Sur obtiene por la venta del bien intermedio al Norte se dividen en dos partes. La correspondiente al precio de mercado, pR, es consumida, mientras que la que se refiere al sobreprecio pagado por el Norte, d_1pR, se supone que es utilizada para una mayor conservación de la biodiversidad en el Sur. No obstante, no se especifica de qué forma se emplea esta renta y cómo consigue reducir el número de especies utilizadas en el proceso productivo del Sur. En el capítulo siguiente se pretende subsanar esta última deficiencia, planteando un modelo en el que parte del capital del Norte se transfiere al Sur, de modo que este capital se utiliza, bien para mejorar la tecnología con la que el Sur produce el bien intermedio "natural", o bien para invertir directamente en las especies naturales. Este último tipo de inversión, es aquél que incrementa la capacidad máxima de una determinada especie que un ecosistema puede soportar.

Una extensión interesante del modelo conllevaría el estudio de un juego similar de comercio Norte-Sur, donde el Sur siguiese decidiendo el número de especies naturales a utilizar en su proceso productivo, pero la tasa de ahorro, ahora un parámetro fijo, ya no fuese la variable de control del Norte. Esta última región debería decidir el sobreprecio que está dispuesta a pagar por el bien intermedio "natural" comprado al Sur, obteniendo como contrapartida una mayor conservación de la biodiversidad en esta región. En este caso, con la especificación utilizada a lo largo del presente capítulo, la variable de control del Norte, d_1, que representa el interés que éste presta a la problemática medioambiental, afectaría linealmente al funcional objetivo. La aparición de un control óptimo de tipo bang-bang se puede remediar, de nuevo, incluyendo esta variable a través de una función no lineal. También en esta línea, es igualmente interesante el estudio del juego diferencial cuando el Norte no decidiese únicamente una variable de control, ya sea la tasa de ahorro o el sobreprecio pagado por el bien intermedio "natural", sino ambas a un tiempo. Resultaría interesante comparar los resultados referentes al crecimiento económico y biodiversidad conservada, según el juego se desarrolle bajo unos supuestos u otros.

Otro supuesto importante señala que el Sur selecciona un número de especies naturales, de entre las cuales recolecta o extrae lo preciso para producir un bien intermedio. Toda vez que esta región no lleva a cabo ningún proceso de inversión en estas especies, la población de las mismas se verá reducida en la medida en que son explotadas, mientras que, por el contrario, la población de aquellas especies no utilizadas en el proceso productivo es conservada. Dado que las especies utilizadas son las de mayor valor, si se admite la posibilidad de inversión, ésta se llevará a cabo precisamente en estas especies. De este modo, sus poblaciones no decrecerán en la misma proporción en que son utilizadas en el proceso productivo del Sur, siendo perfectamente posible que estas poblaciones incluso se vean aumentadas. El permitir esta posibilidad requiere de la inclusión de una nueva dinámica que explique cómo se produce la inversión en el Sur y cuál es su efecto sobre la población de la especie en la que se invierte. Esta nueva dinámica dificulta enormemente, cuando no hace imposible, la resolución analítica del problema, ya que éste pasaría a plantearse con al menos dos variables de estado en lugar de con una única, el stock de capital del Norte. En el capítulo siguiente, se incorporan procesos de inversión en las especies naturales, aunque como se mostrará, se hace imprescindible utilizar técnicas numéricas para obtener el comportamiento de las soluciones del juego.

Estrechamente ligado al anterior está el supuesto de omitir el estudio de la dinámica de la población de las especies. Se asume implícitamente que la población de una determinada especie sólo puede verse reducida, y ello como resultado de la extracción con fines productivos. De esta forma, si dicha especie deja de extraerse, su población se mantiene constante sin posibilidad de regeneración, es decir, no existe crecimiento natural. El suponer esto equivale a declarar que cada una de las especies naturales se trata como un recurso no renovable. Si, por el contrario, dentro del modelo se introduce la dinámica temporal del stock de las especies, en la cual se contemple tanto la extracción como la tasa natural de regeneración, ello implicaría la necesidad de definir infinitas ecuaciones diferenciales, una por cada una de las especies naturales consideradas. En esta dirección, en el capítulo siguiente se trata de reflejar esta posibilidad (de modo más modesto) simplificando el problema e incluyendo únicamente la dinámica para dos tipos diferentes de especies naturales. La inclusión siquiera de dos nuevas variables de estado significa la imposibilidad de obtener resultados analíticos y la necesidad, por tanto, de recurrir a métodos numéricos para resolver el sistema dinámico cuyas soluciones corresponden a las del juego.

A lo largo de este capítulo, para el cálculo de las soluciones de los diferentes juegos diferenciales planteados, se asumen estrategias de ciclo abierto. Según esta estructura de información, los jugadores deciden sus estrategias para todo el horizonte temporal, teniendo en cuenta exclusivamente la información disponible al inicio del juego. Es decir, las regiones no actualizan la información disponible conforme transcurre el juego. Por el contrario, pueden considerarse otros tipos de estructuras de información en las cuales sí se produce esta actualización de información. En particular, cuando se asumen estrategias feedback, las decisiones se toman en cada instante de tiempo dependiendo del valor de la variable de estado en dicho momento. Cuando lo que se asumen son estrategias de ciclo cerrado, entonces las decisiones de cada jugador en cada instante, no sólo tienen en cuenta el valor del estado en dicho instante, sino también los valores que ha ido tomando desde el comienzo del juego. En estos dos tipos de estructuras de información, ésta se actualiza a lo largo del horizonte temporal del juego de modo continuo. El principal handicap con el que se enfrentan las estrategias de ciclo abierto es que, en general, las soluciones no son perfectas en los subjuegos. Cuando se permite la actualización de la información esta propiedad sí se cumple, es decir, una vez obtenida la solución óptima, ésta sigue siendo óptima cualquiera que sea el instante de comienzo y el valor inicial de la variable de estado, siempre que esté en el conjunto de valores factibles. Esto es, si en lugar de comenzar en el instante inicial, el juego comenzase en cualquier otro instante posterior y con independencia de cual sea el valor del stock de capital en dicho instante, la solución continúa siendo óptima.

El juego planteado en el presente capítulo, no encuadra dentro de los tipos especificados por Fershtman (1987), para los cuales las soluciones de ciclo abierto son también feedback. Por lo tanto, en nuestro caso no puede asegurarse esta propiedad para las soluciones de ciclo abierto. Por consiguiente, tiene interés el cálculo de las soluciones para estas otras estructuras de información. Sin embargo, cuando se consideran estrategias feedback, de ciclo cerrado o sampled-data, la obtención de soluciones es habitualmente muy compleja, excepto para casos muy específicos, como son aquéllos en los que se asume un juego lineal-cuadrático, al contrario que el definido en el presente capítulo.

Otra ampliación interesante, en relación a la estructura de información, consiste en asumir que la actualización de ésta se produce, no de forma continua, sino de modo discreto. El valor de la variable de estado se evalúa en instantes discretos de tiempo. Esta estructura de información es un caso intermedio entre las estrategias de ciclo abierto, bajo las cuales los individuos se comprometen a una determinada estrategia al comienzo del juego, sin tener en cuenta la información que reciban a lo largo del mismo; y las estrategias, tanto feedback como de ciclo cerrado, donde las decisiones de los jugadores se actualizan de modo continuo. En el caso actual, denominado sampled-data, los jugadores actualizan sus decisiones considerando la nueva información, no de modo continuo, sino discreto.

Finalmente, en el marco de un juego cooperativo y asumiendo un criterio de igualitarismo es interesante estudiar cuánto gana cada uno de los jugadores por el hecho de cooperar. Es decir, calcular el valor de Shapley del juego diferencial. Este valor proporciona una estimación del poder de negociación de cada uno de los jugadores.

Apéndice A

Se prueba, razonando por reducción al absurdo, la imposibilidad de un arco singular durante un periodo no trivial de tiempo.

Supongamos que es posible un intervalo no trivial de tiempo, durante el cual m_N es igual a uno. Durante este intervalo la derivada temporal de la variable de coestado del Norte es nula y, teniendo en cuenta (3.19), se puede escribir:

$$0 \equiv \dot{m}_N = r - \delta(n). \tag{A3-1}$$

Esto sólo es posible si $\delta(n)$ es constante e igual al tanto de descuento, r, lo cual implica que tanto el número de especies utilizadas en el proceso productivo, n, como el precio del bien intermedio, $p(n)$, también son constantes.

$$\delta(n) = r \Leftrightarrow p(n) = a\left[b(1-\theta) - r\right] / \left[b(1+d_1)\right].$$

Al mismo tiempo, por (3.17), se conoce la evolución temporal del capital,

$$\dot{K} = Krs \geq 0,$$

que únicamente se anula cuando la tasa de ahorro es cero. Además, por (3.22) y la expresión del precio, se conoce la evolución temporal de la variable de coestado del Sur,

$$\dot{m}_S = r(1-s)m_S - (b(1-\theta) - r) / (1+d_1) - b\theta. \tag{A3-2}$$

La tasa de ahorro durante todo el intervalo, $\widetilde{s} \in [0\ 1]$, aunque es indeterminada, se mantiene constante, siendo, por lo tanto, su derivada temporal nula.

Para que la variable de coestado del Norte sea constante, es necesario que la derivada temporal de n sea nula. Para ello se tiene en cuenta el número óptimo de especies, n^* dado por (3.23). Esta última expresión es una función truncada, pudiéndose distinguir tres posibilidades:

1. $n^* = \mu \ln\left(\Omega K\left[1 - m_S(1+d_1)s\right]\right)$

   Según esta expresión, siendo $\widetilde{s}$ constante, las variables K y m_S, deben variar de forma que la derivada temporal del número de especies conservadas, sea cero.

   $$\dot{n}^* = 0 \Leftrightarrow Ks\left[-rm_S(1+d_1) + b(1+\theta d_1)\right] = 0. \tag{A3-3}$$

   Para estudiar cuando se cumple esta igualdad, distinguimos dos casos:

   (a) $\widetilde{s} = 0$.

   En este caso, por ser la tasa de ahorro nula durante todo el arco singular, el número óptimo de especies naturales, dado por (3.24), es sólo función del capital, pero como $\dot{K} = 0$, este último se mantendrá invariante siempre que la tasa de ahorro no varíe. La tasa de ahorro únicamente tomará valor uno si la variable de coestado del Norte, m_N, pasa a ser mayor que uno. No obstante, este pseudoprecio, a su vez, se mantiene constante, dado que el número de especies no varía. Es decir, este intervalo no trivial, inevitablemente se alarga hasta el final del horizonte temporal.

   (b) $\widetilde{s} \neq 0$.

En este caso, por (A3-3), se tiene que el número de especies naturales únicamente se mantiene constante durante este periodo, si la variable de coestado del Sur, m_S, también es constante,

$$m_S = b\,(1+\theta d_1)\,/\,[r\,(1+d_1)]\,.$$

Además, por ser el coestado en el Sur constante, su derivada temporal se anula y, por (A3-2) se tiene el valor de la tasa de ahorro, $\widetilde{s}$:

$$\widetilde{s} = r/\,[b\,(1+\theta d_1)]\,.$$

No obstante, estos valores de la variable de coestado del Sur y de la tasa de ahorro anulan la función que define el número óptimo de especies a utilizar, debiendo elegir, por tanto, según (3.23) el mínimo, $n_{\min}$.

Aunque en este caso el capital crece, la variable de coestado del Sur, m_S, se mantiene constante, y por tanto, también lo hace el número óptimo de especies, siendo igual a $n_{\min}$. De nuevo, la variable de coestado del Norte, m_N permanece invariable e igual a uno durante todo el horizonte temporal.

2. $n^* = n_{\min}$

   Durante el intervalo no trivial en el que se supone posible un arco singular, el coestado del Norte es constante e igual a uno, debiendo cumplirse:

$$r = \delta\,(n_{\min}) = \delta_{\max}.$$

   Para que se satisfaga la condición de transversalidad, $m_N\,(T) = 0$, en algún momento, es preciso que el coestado decrezca. Para que esto suceda, por la expresión (A3-1), $\delta\,(n)$ debería superar a r, lo cual es imposible. La variable de coestado del Norte, o bien se mantiene constante en adelante o aumenta, pero nunca disminuye, tomando valores por debajo de uno.

3. $n^* = n_{\max}$

   Para que sea factible el arco singular, se debe cumplir,

$$r = \delta\,(n_{\max}) = 0,$$

   que es imposible por ser el tanto de descuento, estrictamente positivo.

En conclusión, la aparición de un intervalo no trivial en el cual la variable de coestado del Norte sea unitaria, sólo es posible bajo condiciones muy específicas, arriba indicadas. No obstante, aun cuando estas condiciones se den, si $\dot{m}_N$ es nulo durante un intervalo no trivial, se mantendrá igual a cero en adelante. La variable de coestado del Norte al final del horizonte temporal seguiría siendo unitaria, lo cual contradice la condición de transversalidad, según la cual para que la solución sea óptima las variables de coestado deben anularse al final de dicho horizonte. Al no cumplirse la condición de transversalidad, la solución no puede ser óptima.

Apéndice B

Se ha asumido que existe un número mínimo de especies, $n_{\min}$, necesario para que el Sur produzca el bien intermedio "natural". Asimismo, y únicamente en el Escenario I, se supone que no se puede utilizar un número de especies superior a un máximo[28], $n_{\max}$. Bajo la estrategia 0, jugada en el intervalo $[t^*\ T]$, es fácil concluir las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} n_0^* &> n_{\min} \Leftrightarrow K_T > \underline{K} = \exp\left(n_{\min}/\mu\right)/\Omega, \\ n_0^* &> n_{\max} \Leftrightarrow K_T < \overline{K} = a\mu^2 d_2\left(1+d_1\right)/\left(b\left[\overline{w}\left(1+d_1\right) - a\mu\left(1-\theta\right)\right]\right). \end{aligned}$$

La demostración de que en el intervalo $[0\ t^*]$ el Sur siempre elige $n_{\min}$ se lleva a cabo en dos etapas:

1. En una primera etapa se prueba que cualquiera que sea K_T, si satisface la condición (3.35), el Sur elige $n_{\min}$ como número óptimo de especies en t^*, cuando los jugadores cambian de estrategia. Para realizar esta demostración se distinguen dos casos diferentes dependiendo del valor de K_T:

Caso 1 $\underline{K} < K_T < \overline{K}$, es decir, $p_0^* > p_{\min}$ y $\delta_0^* > 0$, en todo el intervalo $[t^*\ T]$.

Es fácil escribir la expresión del número óptimo de especies en t^* cuando se juega la estrategia 1, $n_1^*(t^*)$, reemplazando K y m_S por sus valores en ese instante, K_T y $m_S(t^*)$, el último también dependiente de K_T. De esto se concluye que $n_1^*(t^*)$ únicamente depende de K_T. Esta expresión se puede escribir como:

$$\begin{aligned} &n_1^*(t^*) = \mu \ln\left[\Omega K_T\left(D+\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)/D\right]. \\ &D = bK_T\left[\overline{w}\left(1+d_1\right) - a\mu\left(1-\theta\right)\right] - a\mu^2 d_2\left(1+d_1\right), \\ &\varepsilon_1 = \left(1+d_1\right)\left[b\overline{w}K_T - a\mu^2 d_2\right], \\ &\varepsilon_2 = a\mu\theta bK_T\left(1+d_1\right). \end{aligned}$$

De la expresión (3.12) y el hecho de que en este caso $\delta_0^* > 0$, es inmediato concluir que $D < 0$. Asimismo, teniendo en cuenta la expresión óptima para el precio del bien intermedio "natural", que este precio sea positivo implica $\varepsilon_1 > 0$. Finalmente, es trivial ver que $\varepsilon_2 > 0$.

Razonando por reducción al absurdo se impone que $n_1^*(t^*)$ sea mayor que $n_{\min}$. El que esta expresión sea mayor que $n_{\min}$, teniendo en cuenta (3.25), implica exigir que se haga negativo un polinomio de grado dos en K_T :

$$\begin{aligned} &P\left(K_T\right) = \left(\Gamma+\Psi\right)K_T^2 - \Phi K_T + \Lambda < 0. \\ &\Gamma = b\Omega\left[2\overline{w}\left(1+d_1\right) - a\mu\left(1-\theta\right)\right], \\ &\Psi = b\Omega a\mu\left(1+d_1\right)\theta > 0, \\ &\Phi = b\left[3\overline{w}\left(1+d_1\right) - a\mu\left(1-\theta\right)\right], \\ &\Lambda = a\mu^2 d_2\left(1+d_1\right) > 0. \end{aligned}$$

[28] En adelante, cuando se hable de la cota $n_{\max}$, para el número de especies naturales y, por consiguiente, la cota $\overline{K}$ para el stock de captital, únicamente se está haciendo referencia a el escenario I.

Bajo estos supuestos, si el polinomio $Q(K_T) = \Gamma K_T^2 - \Phi K_T + \Lambda$ no toma valores negativos para ninguno de los posibles valores de K_T, tampoco lo hará[29] $P(K_T)$.

$\Gamma > 0$ Dado que se desconoce el signo de los coeficientes Γ y Φ, asumiremos, en primer lugar, que Γ es positivo, lo que implica que también lo sea Φ. En este caso, se puede probar que al exigir que $Q(K_T) < 0$, indirectamente se está imponiendo que K_T sea menor que una cota superior, $K_{T_{\max}}$:

$$K_{T_{\max}} = \underline{K} / \left[\exp\left(n_{\min}/\mu\right)\left(2 - a\mu\left(1-\theta\right) / \left(\overline{w}(1+d_1)\right)\right)\right].$$

Llegado este punto, si se prueba que $K_{T_{\max}} < \underline{K}$, el número óptimo de especies en t^* superará $n_{\min}$ sólo si $K_T \leq K_{T_{\max}} < \underline{K}$. Pero, en este caso estamos suponiendo que $K_T > \underline{K}$, con lo que se llegaría a una contradicción. En conclusión, se podría asegurar que $n_1^*(t^*)$ no es nunca superior a $n_{\min}$, por lo tanto, por (3.25) el número óptimo de especies en t^* coincide con $n_{\min}$.

Para estudiar bajo que condiciones $K_{T_{\max}} < \underline{K}$, es preciso distinguir entre uno y otro escenarios:

Bajo el Escenario I, el denominador de la expresión de $K_{T_{\max}}$ es mayor que uno, por lo que $K_{T_{\max}} < \underline{K}$.

Bajo Escenario II, de nuevo se deben diferenciar dos situaciones, la cota $K_{T_{\max}}$ sólo es menor que $\underline{K}$ bajo la condición:

$$\Gamma > b\Omega \exp\left(-n_{\min}/\mu\right) \overline{w}(1+d_1).$$

$\Gamma < 0$ A continuación se supone, por el contrario, que Γ es negativo. Este supuesto únicamente es posible bajo el Escenario II. Bajo este supueto, la restricción $Q(K_T) < 0$, implica:

$$K_T < 1/\Omega = \exp\left(-n_{\min}/\mu\right) \underline{K} < \underline{K}.$$

De donde se deduce inmediatamente que el número óptimo de especies en el instante t^* es $n_{\min}$.

En el Caso 1 se ha probado que el número óptimo de especies en el instante t^* es $n_{\min}$, en cualquier caso bajo el Escenario I, y bajo el Escenario II, siempre que $2\overline{w}(1+d_1) - a\mu(1-\theta)$ sea o negativo o mayor que $\exp\left(-n_{\min}/\mu\right)\overline{w}(1+d_1)$.

Caso 2 $K_T < \underline{K}$, es decir, $p_0^* = p_{\min}$ y $\delta_0^* = \delta_{\max}$, en todo el intervalo $[t^*\ T]$.

Al igual que en el caso 1, $n_1^*(t^*)$ se puede escribir como una función de K_T:

$$n_1^*(t^*) = \mu \ln\left[\Omega K_T\left(2\delta_{\max} - b\left(1-\theta\right)\right)/\delta_{\max}\right].$$

De nuevo razonamos por reducción al absurdo, e imponemos que sea mayor que $n_{\min}$, pudiéndose dar dos situaciones:

* Si $2\delta_{\max} - b(1-\theta) < 0$, entonces K_T debería ser negativo. Esto no puede suceder cuando se considera el sistema dinámico (3.29) y una condición inicial positiva para el stock de capital, K_0.
* Si $2\delta_{\max} - b(1-\theta) > 0$, entonces K_T debería ser mayor que una cota inferior,

[29] Nótese que $Q(K_T) < P(K_T)$, $\forall K_T > 0$.

$K_{T_{\min}}$:

$$K_{T_{\min}} = \underline{K}\delta_{\max} / (2\delta_{\max} - b(1-\theta)) > \underline{K}.$$

Para que el número óptimo de especies supere $n_{\min}$ debe cumplirse que $K_T \geq K_{T_{\min}} > \underline{K}$, pero en este segundo caso estamos suponiendo $K_T < \underline{K}$. De nuevo se llega a una contradicción, concluyendo que $n_1^*(t^*)$ no es mayor que $n_{\min}$, sino precisamente igual a éste.

Nótese que no es preciso estudiar un tercer caso en el que se suponga $K_T > \overline{K}$, pues entonces n_0^* sería igual a $n_{\max}$, y se jugaría la estrategia 0 durante todo el horizonte temporal, $[0\ T]$.

2. En una segunda etapa probamos que bajo la estrategia 1, trabajando en tiempo inverso, si el Sur comienza por elegir $n_{\min}$ en t^*, n_1^* se mantendrá igual al valor mínimo durante el resto del intervalo, desde t^* hasta 0.

   Tanto para el Escenario I como para el Escenario II con es positivo, la condición (3.35) garantiza, no sólo que se produce el cambio de estrategias en $t^* \in (0\ T)$, sino también que se cumple la siguiente desigualdad:

$$r/(1 - \exp(-rT)) < \delta_{\max}. \tag{A3-4}$$

   En el Escenario II, cuando λ_T es es negativo o cero, siempre está garantizado el cumplimiento de la condición (A3-4).

   La dinámica temporal del capital y de la variable de coestado del Sur en el sistema (3.29) cuando se juega $s^* = 1$, en todo el intervalo $[0\ t^*]$, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= K\delta(n_1^*), \\ \dot{m}_S &= [r - \delta(n_1^*)]\, m_S - bp(n_1^*)/a - b\theta. \end{aligned}$$

   En el intervalo $[0\ t^*]$, toda vez que se supone $K(0) = K_0 > 0$, el capital crece para todo t, excepto cuando $n_1^* = n_{\max}$, en cuyo caso se mantendría constante. En la primera etapa se ha probado que en el instante t^*, el número óptimo de especies es $n_{\min}$ y, por tanto, $p(n_1^*(t^*)) = p_{\min}$. También se conoce que $m_S(t^*)$ es positivo. Si adicionalmente se tiene en cuenta la desigualdad (A3-4), se deduce que $\dot{m}_S(t^*) < 0$. La evolución temporal de la variable de coestado del Sur, así como la del capital, conjuntamente con la expresión de n_1^* en (3.25), conducen a que $\dot{n}_1^*(t^*) > 0$. Razonando en tiempo inverso y dado que $n_1^*(t^*) = n_{\min}$, se puede asegurar que $n_1^* = n_{\min}$ durante todo el intervalo $[0\ t^*]$.

Apéndice C

La expresión del número óptimo de especies naturales en el caso cooperativo y bajo la estrategia 0, dada en (3.44), muestra que se elegirá $n_{\min}$, si el capital final es lo suficientemente bajo, es decir, si

$$K_T < \exp(n_{\min}/\mu) / (\Omega\phi) = \underline{K}_C. \tag{A3-5}$$

Nótese que el valor de $\underline{K}_C$ depende positivamente de α a través de ϕ. Para cada K_T, sin más que elegir un α lo suficientemente grande, siempre se puede garantizar que K_T se encuentre por debajo de $\underline{K}_C$.

Para el rango de valores de α que se está estudiando, ϕ es positivo, por lo que la condición (A3-5) se cumple si y sólo si,

$$\phi < \exp\left(n_{\min}/\mu\right) / \left(\Omega K_T\right),$$

o equivalentemente,

$$\left[1 - \exp\left(n_{\min}/\mu\right) / \left(\Omega K_T\right)\right] < \left\{(1 + d_1) + \left[1 - \exp\left(n_{\min}/\mu\right) / \left(\Omega K_T\right)\right]\right\} \alpha.$$

Para analizar el cumplimiento de esta desigualdad se distinguen dos situaciones:

1. Si $\left[1 - \exp\left(n_{\min}/\mu\right) / \left(\Omega K_T\right)\right] > 0$, entonces la condición (A3-5), se puede reescribir,

   $$\alpha > 1/\left(1 + (1 + d_1) / \left[1 - \exp\left(n_{\min}/\mu\right) / \left(\Omega K_T\right)\right]\right) = \hat{\alpha}\left(K_T\right).$$

   Dado que $\left[1 - \exp\left(n_{\min}/\mu\right) / \left(\Omega K_T\right)\right]$ es positivo pero menor que uno, es inmediato concluir que

   $$\hat{\alpha}\left(K_T\right) < 1/\left(2 + d_1\right).$$

2. Si $\left[1 - \exp\left(n_{\min}/\mu\right) / \left(\Omega K_T\right)\right] < 0$, entonces la condición (A3-5) se cumple para todo $\alpha \in (0\ 1)$. En este caso, cualquiera que sea el poder de negociación de cada uno de los jugadores, cuando se juega la estrategia de ahorro nulo, el número de especies a utilizar es siempre el mínimo, $n_{\min}$.

Apéndice D

La condición que garantiza cuando la solución de crecimiento sostenido no proporciona un valor máximo del funcional objetivo, se obtiene a partir de la comparación entre el bienestar (o la combinación convexa de funcionales objetivos del Norte y del Sur) alcanzado bajo la trayectoria de crecimiento sostenido, y el obtenido cuando se sigue una estrategia, de ahorro pleno durante un primer periodo finito, seguida de ahorro nulo en adelante.

En el apartado 3.3.2.1 se ha visto que cuándo se sigue una estrategia de ahorro pleno indefinidamente, al ser $m_C > (1 - \alpha) / (1 + d_1)$, el Sur fija un número mínimo de especies, $n_{\min}$, a utilizar, lo que significa que la tasa de crecimiento del capital es máxima.

Se denomina W_{N1} al bienestar para el Norte cuando se juega la estrategia óptima de ahorro pleno de forma indefinida. Asimismo, W_{N10} representa el bienestar de esta región cuando se juega la estrategia 1 durante un primer periodo finito, desde 0 hasta t_∞^* y la estrategia de ahorro nulo en adelante. Ambas soluciones únicamente difieren a partir del instante t_∞^*, por lo que, para comparar el bienestar que cada región obtiene siguiendo cada una de ellas, se estudia el valor de sus funcionales objetivo únicamente a partir de ese momento.

Así,

$$
\begin{aligned}
W_{N10} &= \int_{t_\infty^*}^{\infty} \left[K_0 \exp\left(\delta_{\max} t_\infty^*\right) \delta_{\max} + \overline{w}\overline{L}\right] \exp\left(-rt\right) dt, \\
W_{N1} &= \int_{t_\infty^*}^{\infty} \overline{w}\overline{L} \exp\left(-rt\right) dt.
\end{aligned}
$$

Restando ambas expresiones se tiene:

$$
W_{N10} - W_{N1} = \int_{t_\infty^*}^{\infty} K_0 \exp\left(\delta_{\max} t_\infty^*\right) \delta_{\max} \exp\left(-rt\right) dt = K_0 \delta_{\max} \exp\left[\left(\delta_{\max} - r\right) t_\infty^*\right] / r.
$$

Del mismo modo se definen para el Sur, W_{S1} y W_{S10}.

$$
\begin{aligned}
W_{S10} &= \int_{t_\infty^*}^{\infty} \left[\left(b\left(1+\theta d_1\right) - \delta_{\max}\right) K_0 \exp\left(\delta_{\max} t_\infty^*\right) / \left(1+d_1\right) - \overline{w}\overline{L} - d_2 n_{\min}\right] \exp\left(-rt\right) dt, \\
W_{S1} &= \int_{t_\infty^*}^{\infty} \left[\left(b\left(1+\theta d_1\right) - \delta_{\max}\right) K_0 \exp\left(\delta_{\max} t\right) / \left(1+d_1\right) - \overline{w}\overline{L} - d_2 n_{\min}\right] \exp\left(-rt\right) dt,
\end{aligned}
$$

así como su diferencia, $W_{S10} - W_{S1}$, dada por,

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_\infty^*}^{\infty} \left[\left(b\left(1+\theta d_1\right) - \delta_{\max}\right) K_0 \left[\exp\left(\delta_{\max} t_\infty^*\right) - \exp\left(\delta_{\max} t\right)\right] / \left(1+d_1\right)\right] \exp\left(-rt\right) dt = \\
&\left(b\left(1+\theta d_1\right) - \delta_{\max}\right) K_0 \exp\left[\left(\delta_{\max} - r\right) t_\infty^*\right] \left(-\delta_{\max} / \left[r\left(r - \delta_{\max}\right)\right]\right) / \left(1+d_1\right).
\end{aligned}
$$

La combinación convexa de estas diferencias representa la diferencia de bienestar entre los dos tipos de soluciones cuando los jugadores cooperan,

$$
\alpha \left(W_{N10} - W_{N1}\right) + \left(1 - \alpha\right) \left(W_{S10} - W_{S1}\right).
$$

Esta expresión es positiva si y sólo si,

$$
\alpha \left(1 + d_1\right) / \left(1 - \alpha\right) > \left(b\left(1 + \theta d_1\right) - \delta_{\max}\right) / \left(r - \delta_{\max}\right),
$$

o equivalentemente en términos del poder de negociación del Norte,

$$
\alpha > 1 / \left[1 + \left(1 + d_1\right) \left(\left[r - \delta_{\max}\right] / \left[b\left(1 + \theta d_1\right) - \delta_{\max}\right]\right)\right] = \widetilde{\alpha}_{\max} > 1 / \left(2 + d_1\right).
$$

Esta condición garantiza que el bienestar obtenido cuando se juega la estrategia de ahorro pleno durante un primer periodo finito y la de ahorro nulo en adelante proporciona un mayor valor del funcional objetivo que la estrategia de crecimiento sostenido. Bajo esta condición, la solución de crecimiento sostenido no proporciona un valor máximo del funcional objetivo.

Apéndice E

Únicamente cuando se cumplen las hipótesis del enunciado de esta proposición, es decir, $\phi < 0$ y $m_C^{*0} < m_{0C} < \alpha$ (y por consiguiente, $\alpha > \widetilde{\alpha}_{\max}$), puede asegurarse que se cumplen las condiciones para que una solución de ahorro nulo durante un periodo finito, seguido de crecimiento sostenido, sea óptima. A continuación se prueba que, bajo estas hipótesis, este tipo de solución no proporciona un valor máximo del funcional objetivo. Para ello se demuestra que una solución de estancamiento o ahorro nulo indefinido proporciona un mayor bienestar.

Como ya se ha indicado, si $\phi < 0$, se tiene $\delta_{0C}^* = \delta_{\max}$. Se denomina W_{N0} al bienestar para el Norte cuando se juega la estrategia óptima de ahorro nulo de forma indefinida. Asimismo, W_{N01} representa el bienestar de esta región cuando se juega la estrategia 0 durante un primer periodo finito, desde 0 hasta t_∞^*, y la estrategia de ahorro pleno en adelante. Ambas soluciones únicamente difieren a partir del instante t_∞^*, por lo que para comparar el bienestar que cada región obtiene siguiendo cada una de ellas, se estudia el valor de sus funcionales objetivo únicamente a partir de ese momento. Así,

$$\begin{aligned} W_{N0} &= \int_{t_\infty^*}^{\infty} \left[K_0\delta_{\max} + \overline{w}\overline{L}\right] \exp\left(-rt\right) dt, \\ W_{N01} &= \int_{t_\infty^*}^{\infty} \overline{w}\overline{L} \exp\left(-rt\right) dt. \end{aligned}$$

Restando ambas expresiones se tiene:

$$W_{N0} - W_{N01} = \int_{t_\infty^*}^{\infty} K_0\delta_{\max} \exp\left(-rt\right) dt = K_0\delta_{\max} \exp\left(-rt_\infty^*\right)/r.$$

Del mismo modo se definen para el Sur, W_{S0} y W_{S01}:

$$\begin{aligned} W_{S0} &= \int_{t_\infty^*}^{\infty} \left[(b\,(1+\theta d_1)-\delta_{\max})\, K_0/\,(1+d_1)-\overline{w}\overline{L}-d_2 n_{\min}\right] \exp\left(-rt\right) dt, \\ W_{S01} &= \int_{t_\infty^*}^{\infty} \left[(b\,(1+\theta d_1)-\delta_{\max})\, K_0 \exp\left[\delta_{\max}\,(t-t_\infty^*)\right]/(1+d_1)-\overline{w}\overline{L}-d_2 n_{\min}\right] \exp(-rt)\, dt, \end{aligned}$$

así como su diferencia, $W_{S0} - W_{S01}$, dada por,

$$\begin{aligned} &\int_{t_\infty^*}^{\infty} \left[(b\,(1+\theta d_1) - \delta_{\max})\, K_0 \left[1 - \exp\left[\delta_{\max}\,(t - t_\infty^*)\right]\right] / \,(1 + d_1)\right] \exp\left(-rt\right) dt = \\ &-(b\,(1 + \theta d_1) - \delta_{\max})\, K_0 \exp\left(-rt_\infty^*\right) \delta_{\max}/\left[r\,(r - \delta_{\max})\,(1 + d_1)\right]. \end{aligned}$$

La combinación convexa de estas diferencias representa la diferencia de bienestar entre los dos tipos de soluciones cuando los jugadores cooperan,

$$\alpha\,(W_{N0} - W_{N01}) + (1 - \alpha)\,(W_{S0} - W_{S01})\,.$$

La última expresión será positiva si y sólo si,

$$\alpha + (1 - \alpha)\,(b\,(1 + \theta d_1) - \delta_{\max})\,/\left[(r - \delta_{\max})\,(1 + d_1)\right] > 0,$$

o equivalentemente en términos del poder de negociación del Norte,

$$\alpha > 1/\left[1 + (1 + d_1)\left([r - \delta_{\max}] / [b(1 + \theta d_1) - \delta_{\max}]\right)\right] = \widetilde{\alpha}_{\max} > 1/(2 + d_1).$$

Como esta desigualdad se tiene asegurada por las hipótesis consideradas, la solución de estancamiento infinito proporciona un mayor valor del funcional objetivo, que aquélla que implica estancamiento finito seguido de crecimiento indefinido. Por consiguiente, esta última no es un máximo del problema.

Capítulo 4
Dinámica de las especies naturales y transferencia de capital del Norte al Sur

En el capítulo anterior se ha presentado un juego dinámico de comercio Norte-Sur en el cual el Norte controla el ahorro y, por tanto, la inversión, mientras que el Sur decide el número de especies naturales a conservar. Entre las críticas que se recogen al final de dicho capítulo sobre la especificación de este juego, cabe reseñar que, si bien el Norte está dispuesto a pagar un sobreprecio por el bien intermedio "natural", con objeto de que el Sur conserve un mayor número de especies naturales, no se especifica de qué forma estos ingresos adicionales son empleados por esta región. Asimismo, en dicho modelo no se tiene en cuenta la dinámica poblacional de las especies, lo que supone tratar a éstas como recursos naturales no renovables[29]. Una tercera crítica advierte de la inexistencia de procesos de inversión en especies naturales por parte del Sur. En este capítulo se amplía el planteamiento del juego diferencial estudiado en el capítulo anterior dando respuesta a algunas de las críticas efectuadas. Esto conlleva una mayor complejidad del modelo, lo cual imposibilita su resolución analítica haciéndose obligado el recurrir a métodos numéricos para su análisis.

En el presente capítulo el Norte produce un bien de consumo utilizando, como uno de sus inputs, bien intermedio "natural" que compra al Sur. Se presenta un modelo de crecimiento endógeno en el que el Norte dedica una parte de sus ahorros a inversión interna, mientras que otra parte es transferida directamente al Sur, lo cual induce mejoras tecnológicas en esta región. De esta forma, el capital no se acumula únicamente en los países desarrollados, sino también en aquéllos en vías de desarrollo. Por su parte, el Sur debe producir el bien intermedio "natural" utilizando como inputs productivos recursos naturales y trabajo. Para estudiar cómo afecta a la función de producción del Sur el capital transferido desde el Norte, se distinguen dos escenarios. En el escenario AK se supone que el capital acumulado en el Sur mejora su nivel tecnológico y con ello la productividad del trabajo. Por su parte, en un segundo escenario, denominado de capacidad variable, este capital se invierte en las especies naturales, provocando un incremento de sus capacidades máximas, es decir, aumentando la población máxima que puede alcanzar cada una de las especies naturales. En estos escenarios, el Sur es capaz de producir el bien intermedio "natural", ya sea utilizando las especies naturales con menor intensidad, o bien manteniendo esta intensidad, pero invirtiendo en las especies y mejorando, por tanto, la capacidad máxima de éstas. Es decir, ambos escenarios permiten una mejora del proceso productivo junto con una mayor conservación de la biodiversidad.

Al mismo tiempo, para representar las especies naturales como recursos renovables, es preciso incluir la dinámica poblacional de cada una de ellas (véase por ejemplo Clark (1990) y (1999) y Aronsson & Löfgren (1999) que analizan resursos renovables centrándose en pesquerías y bosques, respectivamente). De esta forma, la utilización de especies

[29] Para el estudio de modelos de recursos no renovables, véase, por ejemplo Dasgupta & Heal (1974), Heal (1993) o Sweeney (1993).

que imposibilita asumir un número infinito de especies. Por esta razón, se incluyen únicamente dos especies como representativas de la biodiversidad. El Sur debe decidir, por lo tanto, si extrae recursos naturales sólo de una especie o de ambas y, al mismo tiempo, el esfuerzo de extracción en cada una de ellas, que se representa por E_i, $i = 1, 2$. Se estudian dos formulaciones diferentes del proceso productivo del Sur, atendiendo al efecto del capital transferido por el Norte sobre este proceso.

4.1.1 Escenario AK

En este escenario, el stock de capital, H, creado a partir de las transferencias efectuadas del Norte al Sur, mejora la tecnología existente, incidiendo de modo directo en la productividad del trabajo en el Sur. Se asume que la productividad se ve afectada de forma lineal y positiva por la cantidad total de capital transferido al Sur,

$$\gamma (H) = \gamma H, \qquad \gamma > 0.$$

Se trata, por tanto, de una función con rendimientos constantes a escala. Teniendo en cuenta que la proporción de capital transferido, d_1, es constante durante todo el horizonte temporal, del sistema (4.2) es inmediato concluir que el stock de capital acumulado en el Sur, H, es proporcional al stock de capital en el Norte, K. Por consiguiente, es sencillo reescribir la expresión anterior como función del stock de capital en el Norte:

$$\gamma (H) \equiv \xi (K) = \varphi (d_1) K, \qquad \varphi (d_1) = \gamma d_1 / (1 - d_1),$$

siendo $\varphi (d_1)$ una función creciente de d_1.

Las transferencias de capital en cada instante de tiempo son función tanto del nivel del capital, K, como de la proporción de ahorro que el Norte está dispuesto a invertir en el Sur, d_1.

Otro supuesto básico del modelo, que se mantiene en este capítulo, señala que la oferta de trabajo en el Sur es perfectamente elástica para el salario real de subsistencia (en términos de consumo), dado por $\overline{w}$. El trabajo viene determinado, por tanto, por la demanda que se precise para la producción del bien intermedio natural, R, siendo esta demanda proporcional a las cantidades de recurso extraídas de ambas especies. Así, el trabajo demandado por el Sur viene dado por la expresión:

$$L_S = \beta [E_1 x_1 + E_2 x_2], \quad \beta > 0,$$

donde x_1, x_2 miden los stocks de las especies I y II, respectivamente. Esto indica que la cantidad de trabajo demandada para la extracción de recursos se distribuye entre las especies. Esta distribución depende del esfuerzo de extracción empleado en cada especie, así como del nivel de cada una de ellas.

La función de producción del Sur se puede expresar en términos del factor trabajo como el producto de éste por la productividad:

$$R = \varphi (d_1) K [E_1 x_1 + E_2 x_2] / \Phi (x_1, x_2), \tag{4.3}$$

donde $\varphi (d_1) K / [\beta \Phi (x_1, x_2)]$ representa la productividad del trabajo. Aun cuando el trabajo puede ser empleado en distinta cantidad de una especie a otra, se asume que la productividad es uniforme para ambas. El término $\varphi(d_1)K$ en el numerador de esta expresión muestra el efecto de las transferencias de capital del Norte al Sur sobre la productividad del trabajo. Adicionalmente, se asumen economías de escala. Esto implica que cuanto más rápidamente se esquilmen las especies y, por tanto, cuanto menor sea el stock poblacional de cada una de ellas, x_1, x_2, respectivamente, menor será la productividad. Este supuesto se recoge a través de la función $\Phi(x_1, x_2)$, que depende negativamente del stock de cada una de las especies, x_i.

Una vez fijado el precio del bien intermedio "natural", el Sur produce exactamente la cantidad demandada por el Norte. Según esto, la expresión de la oferta de este bien en (4.3) debe igualar su demanda, dada por bK/a. De esta igualdad se puede concluir que, una vez fijado el esfuerzo de extracción a realizar en una especie, también se conoce el esfuerzo de extracción en la otra. La siguiente expresión recoge el esfuerzo de extracción en la especie II como función del esfuerzo en la especie I:

$$E_2 = f_{AK}(E_1, x_1, x_2) = [b\Phi(x_1, x_2) - E_1 x_1 a] / [\varphi(d_1) a x_2]. \tag{4.4}$$

En adelante, por tanto, la única variable de elección del Sur será el esfuerzo de extracción en la especie I.

Conocida la relación (4.4) que liga los esfuerzos de extracción en ambas especies, es fácil concluir que para que el esfuerzo de extracción en una especie sea no negativo, es preciso que el esfuerzo en la otra especie sea inferior a un determinado valor. Esto implica la existencia de una cota superior para cada uno de los esfuerzos, que se denota por $E_{1\max}^{AK}$ y $E_{2\max}^{AK}$, para la especie I y II, respectivamente:

$$E_{1\max}^{AK} = b\Phi(x_1, x_2) / [\varphi(d_1) a x_1], \quad E_{2\max}^{AK} = b\Phi(x_1, x_2) / [\varphi(d_1) a x_2]. \tag{4.5}$$

Nótese que estos esfuerzos máximos no son constantes a lo largo del tiempo, sino que varían con los stocks de cada especie.

En este caso, dado que el Norte únicamente paga el precio de mercado por el bien intermedio "natural", su venta le reporta al Sur unos ingresos de pR, que son consumidos en su totalidad. En consecuencia, el consumo en esta región no varía con respecto al capítulo anterior y viene dado por (3.10).

Igualmente, se mantiene el supuesto de competencia perfecta y libre entrada de empresas, con lo cual, los ingresos en el Sur, pR, igualan los gastos, dados por los salarios de los trabajadores. De nuevo, de esta igualdad y las expresiones (4.3) y (4.4), es posible obtener una expresión del precio del bien intermedio "natural",

$$p(x_1, x_2, K) = \overline{w} L_S / R = \overline{w}\beta\Phi(x_1, x_2) / [\varphi(d_1) K]. \tag{4.6}$$

Este precio se determina en el Sur en cada instante de tiempo y depende de los stocks del capital y de las especies naturales. Debe ser positivo y garantizar, al mismo tiempo, que el consumo en el Norte sea al menos igual al de subsistencia, $\overline{w}\overline{L}$. Esta última restricción implica una cota superior para el precio del bien intermedio "natural" dada por el valor de éste que anula $1 - \theta - p/a$; esto es, $p_{\max} = a(1 - \theta)$. La función $\Phi(x_1, x_2)$ se define de forma que se cumplan estas condiciones, teniendo en cuenta, además, que debe depender negativamente del stock poblacional de cada una de las especies. Una expresión analítica que cumple estas prerrogativas es:

$$\Phi\left(x_1, x_2\right) = \left(2 - x_1 - x_2\right) a \left(1 - \theta\right) / \left(2\overline{w}\beta\right). \tag{4.7}$$

Siempre que el stock poblacional de cada una de las especies no supere la unidad y el denominador de (4.6) tome valores por encima de uno[31], se tiene garantizado que el precio del bien intermedio "natural" se mueve entre cero y $p_{\max}$.

Siguendo a Clark (1990), se supone que la dinámica poblacional de cada una de las especies viene descrita por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r x_1 \left(1 - x_1/CC_I\right) - qE_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= r x_2 \left(1 - x_2/CC_{II}\right) - qE_2 x_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

El primer término en cada ecuación diferencial corresponde al supuesto de crecimiento logístico del stock de población de cada una de las especies. La constante r representa la tasa intrínseca o tasa natural de crecimiento, que se considera idéntica para las dos especies. Las constantes CC_I y CC_{II} denotan las capacidades máximas de las especies I y II, respectivamente. La capacidad máxima de la especie I se supone mayor a la de la especie II, tomando ambas valores por debajo de la unidad. El segundo término de las ecuaciones diferenciales en (4.8) representa la extracción efectuada en cada especie. La hipótesis de captura por unidad de esfuerzo, qx_i, significa que ésta es proporcional al nivel del stock poblacional; es decir, la extracción total viene dada por qE_ix_i, donde la constante q es el coeficiente de captura. Como supuesto simplificador, el coeficiente de captura, q, se asume idéntico para ambas especies. No obstante, cabe reseñar que, dado que la capacidad máxima de la especie I es superior a la de la especie II, fijado un mismo valor del stock de ambas especies, la tasa de crecimiento es siempre mayor para la especie I, como establece la figura 4.1.

[31] A la hora de resolver el modelo numéricamente se asume como condición inicial $K_0 = K(0) = 1$. Asimismo, al ser $1 - \theta - p/a > 0$, el stock de capital es una función no decreciente con el tiempo y, por tanto, siempre será mayor o igual a uno. Por consiguiente, basta con asegurarse de que $\varphi\left(d_1\right) > 1$, o lo que es lo mismo, que γ sea mayor que $\left(1 - d_1\right)/d_1$.

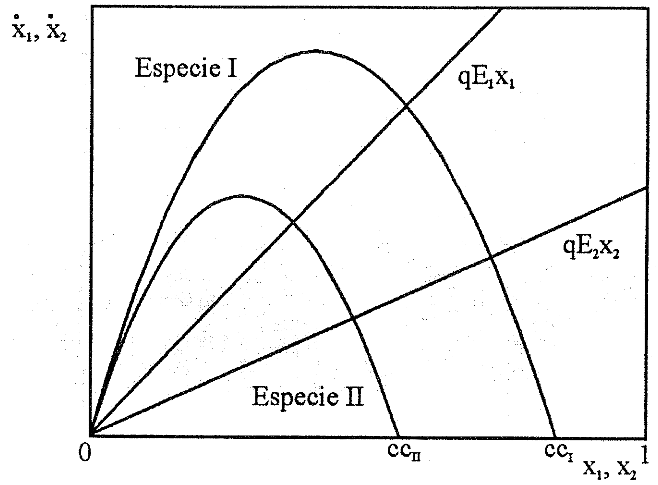

Figura 4.1

La figura 4.1 muestra la función logística de crecimiento para las especies I y II, que difieren en su capacidad máxima. Esta curva representa la tasa de variación de la población de cada especie frente a su stock poblacional. Asimismo, la figura 4.1 recoge la función de extracción en cada especie, que es lineal con el stock de cada una de ellas.

4.1.2 Escenario de capacidad variable

En este nuevo escenario, las transferencias de capital del Norte al Sur no afectan a la productividad del trabajo. Por el contrario, se asume que el capital transferido se invierte directamente en las especies naturales. Esta inversión provoca el aumento de las capacidades máximas de dichas especies. Cabe notar que el incremento de las capacidades máximas implica un aumento de la tasa de crecimiento de las especies para cada nivel del stock de población. Es decir, la inversión en el incremento de las capacidades máximas de las especies permite una mayor tasa de extracción de las mismas sin provocar su extinción. En este escenario las capacidades máximas de las especies son función de las transferencias de capital acumuladas en el Sur, H. No obstante, como se ha mostrado, éstas son proporcionales al stock de capital en el Norte, K, lo cual permite que las capacidades máximas se puedan escribir como función de K, así como de d_1:

$$CC_I(K) = \exp(-1/[\varphi(d_1)K]); \quad CC_{II}(K) = \exp(-2/[\varphi(d_1)K]). \tag{4.9}$$

La función de producción en el Sur se representa, de nuevo, como el producto del factor trabajo por la productividad:

$$R = [E_1x_1 + E_2x_2]/\Phi(x_1, x_2),$$

donde esta última viene dada por $1/[\beta\Phi(x_1, x_2)]$, que no depende del capital transferido. El Sur puede aumentar la producción incrementando las cantidades que extrae de ambas especies naturales, ya que ha invertido el capital transferido desde el Norte en aumentar las capacidades máximas de dichas especies.

Al igual que en el escenario AK, el equilibrio entre oferta y demanda de bien intermedio "natural" permite expresar el esfuerzo de extracción correspondiente a la especie II en función del de la especie I:

$$E_2 = f_{VC}\left(E_1, x_1, x_2, K\right) = \left[b\Phi\left(x_1, x_2\right) K - E_1 x_1 a\right] / \left[a x_2\right]. \tag{4.10}$$

Del mismo modo, la condición de no negatividad del esfuerzo de extracción en una especie implica una cota máxima para el esfuerzo de extracción en la otra. Estas cotas, denotadas ahora por $E^{VC}_{1\max}$ y $E^{VC}_{2\max}$, para las especies I y II, respectivamente, vienen dadas por:

$$E^{VC}_{1\max} = b\Phi\left(x_1, x_2\right) K / \left[a x_1\right], \quad E^{VC}_{2\max} = b\Phi\left(x_1, x_2\right) K / \left[a x_2\right]. \tag{4.11}$$

De nuevo, al igual que en el escenario AK, los esfuerzos máximos varían con los stocks de las especies naturales, x_1 y x_2, durante el horizonte temporal del juego. La diferencia esencial respecto a los esfuerzos máximos recogidos en (4.5), es que, en este caso, dichos esfuerzos crecen con el valor del stock de capital, mientras que en el escenario AK no dependen del capital.

El consumo en el Sur sigue viniendo dado por (3.10). De esta forma, de nuevo, bajo el supuesto de competencia perfecta es posible deducir la expresión para el precio de mercado:

$$p\left(x_1, x_2\right) = \overline{w} L_S / R = \overline{w}\beta\Phi\left(x_1, x_2\right). \tag{4.12}$$

La principal diferencia con el precio obtenido bajo el escenario AK consiste en que la expresión (4.12) no depende directamente del capital transferido desde el Norte. No obstante, si se mantiene la forma funcional de $\Phi\left(x_1, x_2\right)$, de manera que ésta depende negativamente de los stocks de las especies, se puede argumentar que sí existe un efecto indirecto de estas transferencias sobre el precio de mercado. La inversión de las transferencias de capital en las especies naturales lleva, en el supuesto de una explotación sostenida, a un mayor stock de cada una de las especies[32], provocando una reducción de $\Phi\left(x_1, x_2\right)$ y, por consiguiente, del precio. La expresión (4.12), con la elección de la función $\Phi\left(x_1, x_2\right)$ ya señalada, también garantiza que el precio sea siempre positivo y menor que $p_{\max} = a\left(1 - \theta\right)$.

La evolución temporal de los stocks de las especies naturales varía con respecto a la mostrada en el escenario AK. La diferencia estriba en que en el escenario de capacidad variable las transferencias de capital, invertidas en las especies naturales, aumentan la capacidad máxima de cada una de las especies, lo que permite una mayor extracción de recursos en cada especie. Las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de los stocks de las especies naturales, en este caso son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r x_1 \left(1 - \exp\left[1/\left(\varphi\left(d_1\right) K\right)\right] x_1\right) - q E_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= r x_2 \left(1 - \exp\left[2/\left(\varphi\left(d_1\right) K\right)\right] x_2\right) - q E_2 x_2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Aunque las capacidades máximas aumentan con el stock de capital transferido por el Norte,

32 Tras un aumento de la capacidad máxima de una especie, para mantener constante la tasa de recuperación se precisa un mayor valor del stock poblacional de dicha especie.

éstas no pueden crecer indefinidamente. La presente especificación garantiza que las capacidades de ambas especies aumentan con K pero tendiendo hacia la unidad. Dado que la capacidad de la especie II es menor que la de la especie I y ambas convergen hacia uno[33], la evolución del stock de esta última especie es más lenta.

La figura 4.1 también representa la dinámica de las especies bajo el escenario de capacidad variable. La única diferencia es que estas curvas cambian en cada instante de tiempo, cortando el eje de abscisas cada vez más a la derecha conforme aumenta el stock de capital.

4.2 El Juego

En esta sección se plantea el juego diferencial entre ambas regiones, tanto bajo el escenario AK como bajo el de capacidad variable. En ambos supuestos se caracterizan tanto los equilibrios dinámicos del juego como las estrategias óptimas de los dos jugadores.

4.2.1 Escenario AK

Como en el capítulo anterior, el problema se especifica como un juego diferencial de comercio Norte-Sur. Los países industrializados deciden cuánto ahorrar y, por ende, cuánto invertir, con el objetivo de maximizar el flujo de sus utilidades descontadas a un tanto, ρ. La utilidad de estos países únicamente depende del consumo, dado por (4.1). No obstante, el Norte está dispuesto a transferir una parte de sus ahorros, d_1, para que sea invertida en tecnologías más ecológicas, mejorando tanto la producción como la conservación de la biodiversidad en el Sur . El funcional objetivo del Norte se puede escribir:

$$\max_s W_N = \max_s \int_0^\infty e^{-\rho t} c_N dt.$$

La tasa de ahorro en el Norte puede tomar valores entre un mínimo, $\underline{s}$, mayor que cero, y un máximo, $\overline{s}$, menor que uno. Esto significa que, si el Norte decide ahorrar a la tasa mínima, ello no implica una tasa nula de ahorro, es decir, se produce inversión y, por tanto, crecimiento. Asimismo, una tasa máxima de ahorro permite, al mismo tiempo, un consumo superior al de subsistencia.

Igualmente, con intención de maximizar sus utilidades descontadas, el Sur debe decidir el esfuerzo de extracción en ambas especies. Se elige como única variable de control del Sur el esfuerzo de extracción en la especie I, E_1, ya que, por la ecuación (4.4) se sabe que una vez fijado este esfuerzo, también se tiene determinado el esfuerzo para la especie II, dado por $E_2 = f_{AK}(E_1, x_1, x_2)$. De esta forma, al decidir el esfuerzo de extracción en la especie I, el Sur determina la contribución de cada una de las especies a la producción del bien intermedio "natural", R. La utilidad de esta región también viene exclusivamente dada como función del consumo. De esta forma, el funcional objetivo de esta región puede

[33] Tanto en el escenario AK como en el de capacidad variable, las capacidades máximas de las especies nunca superan la unidad. De esta forma, los stocks de las especies naturales, x_1 y x_2, nunca sobrepasan la unidad como se precisa para poder asegurar, por (4.6) y (4.7), que el precio del bien intermedio "natural" se mueve entre cero y $p_{\max}$.

expresarse:

$$\max_{E_1} W_S = \max_{E_1} \int_0^\infty e^{-\rho t} c_S dt.$$

Teniendo en cuenta la evolución temporal tanto del stock de capital como de los stocks de las dos especies naturales, así como las expresiones de los consumos de ambas regiones, el juego diferencial Norte-Sur puede escribirse como:

$$\max_{s} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left(K\delta\left(x_1, x_2, K\right)(1-s) + \overline{w}\overline{L}\right) dt, \tag{4.14}$$

$$\max_{E_1} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\left(bp\left(x_1, x_2, K\right)/a + b\theta\right) K - \overline{w}\overline{L}\right] dt, \tag{4.15}$$

$$\begin{array}{ll} \text{s.a.:} & \dot{K} = \delta\left(x_1, x_2, K\right) K \left(1 - d_1\right) s, \\ & \dot{x}_1 = r x_1 \left(1 - x_1/CC_I\right) - qE_1 x_1, \\ & \dot{x}_2 = r x_2 \left(1 - x_2/CC_{II}\right) - q f_{AK}\left(E_1, x_1, x_2\right) x_2, \\ & 0 \leq E_1 \leq E_{1\max}^{AK}, \;\; \underline{s} \leq s \leq \overline{s}, \;\; K(0) = K_0 \geq 1, \\ & 0 < x_1(0) = x_{10} \leq CC_I, \;\; 0 < x_2(0) = x_{20} \leq CC_{II}, \end{array} \tag{4.16}$$

siendo $\delta\left(x_1, x_2, K\right) = b\left[1 - \theta - p\left(x_1, x_2, K\right)/a\right]$, y K_0, x_{10} y x_{20} los valores iniciales para el stock de capital y los stocks de la especie I y II, respectivamente.

La tasa de ahorro, s, y el esfuerzo de extracción en la especie I, E_1, son las variables de control del Norte y el Sur, respectivamente. Por su parte, el stock de capital, K, así como los stocks de la especie I, x_1, y de la especie II, x_2, son las variables de estado del juego. La actuación de los jugadores viene regida por la evolución de estas variables.

4.2.1.1 Equilibrios dinámicos

Cuando se supone que las regiones no cooperan, los equilibrios dinámicos se determinan resolviendo los problemas de maximización de cada una de estas regiones separadamente. Esto es, el Norte debe resolver el problema de control óptimo dado por (4.14) y (4.16), mientras que el Sur maximiza (4.15) sometido a (4.16).

La función Hamiltoniana descontada para el Norte se escribe:

$$\begin{array}{l} H_N\left[K, x_1, x_2, s, E_1\right] = K\delta\left(x_1, x_2, K\right)(1-s) + \overline{w}\overline{L} + \\ m_N^K\left[\delta\left(x_1, x_2, K\right) K\left(1 - d_1\right)\right] s + m_N^{x_1}\left[r x_1\left(1 - x_1/CC_I\right) - qE_1 x_1\right] + \\ m_N^{x_2}\left[r x_2\left(1 - x_2/CC_{II}\right) - q f_{AK}\left(E_1, x_1, x_2\right) x_2\right], \end{array}$$

donde m_N^K, $m_N^{x_1}$, y $m_N^{x_2}$ son las variables de coestado del Norte asociadas a las variables de estado, K, x_1, y x_2, respectivamente. De las condiciones necesarias de optimalidad del principio del máximo de Pontryagin se deriva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{K} = \delta\left(x_1, x_2, K\right) K s \left(1 - d_1\right), \;\; K(0) = K_0,$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= rx_1\left(1 - x_1/CC_I\right) - qE_1x_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \\
\dot{x}_2 &= rx_2\left(1 - x_2/CC_{II}\right) - qf_{AK}\left(E_1, x_1, x_2\right)x_2, \quad x_2(0) = x_{20}, \\
\dot{m}_N^K &= \left[\rho - (1 - d_1)\, s\left(\delta\left(x_1, x_2, K\right) + K\delta'_K\right)\right] m_N^K - (1 - s)\left(\delta\left(x_1, x_2, K\right) + K\delta'_K\right), \\
\dot{m}_N^{x_1} &= \left[\rho - r\left(1 - 2x_1/CC_I\right) + qE_1\right] m_N^{x_1} - \\
&\quad \left[1 - s + m_N^K\left(1 - d_1\right) s\right] K\delta'_{x_1} + m_N^{x_2} qb\Phi'_{x_1} / \left[a\varphi\left(d_1\right)\right], \\
\dot{m}_N^{x_2} &= \left[\rho - r\left(1 - 2x_2/CC_{II}\right) + qb\Phi'_{x_2} / \left[a\varphi\left(d_1\right)\right]\right] m_N^{x_2} - \\
&\quad \left[1 - s + m_N^K\left(1 - d_1\right) s\right] K\delta'_{x_2}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

A partir de las expresiones de $\Phi\left(x_1, x_2\right)$ y de $\delta\left(x_1, x_2, K\right)$, es fácil probar que $\Phi'_{x_1} \equiv \Phi'_{x_2}$ y $\delta'_{x_1} \equiv \delta'_{x_2}$.

La maximización de la función Hamiltoniana respecto a la variable de control del Norte, teniendo en cuenta que $\delta\left(x_1, x_2, K\right)$ toma siempre valores positivos, da como resultado una solución bang-bang para la tasa óptima de ahorro:

$$s^* = \begin{cases} \underline{s} & \text{si } \; m_N^K < 1/\left(1 - d_1\right), \\ \overline{s} & \text{si } \; m_N^K > 1/\left(1 - d_1\right). \end{cases} \tag{4.18}$$

Existe una constante, $1/\left(1 - d_1\right)$, dependiente de la proporción de capital que se transfiere del Norte al Sur, tal que, para valores de la variable de coestado asociada al stock de capital por debajo de esta constante, el ahorro en el Norte es mínimo, mientras que valores por encima de la constante conllevan una tasa de ahorro máxima. Cuando d_1 está cercano a cero, la constante $1/\left(1 - d_1\right)$ tiende a la unidad, presentándose un comportamiento análogo al del capítulo anterior, en el que no se producían transferencias de capital. Por el contrario, cuando d_1 tiende hacia la unidad, la constante tiende hacia infinito, no siendo nunca óptimo elegir una tasa de ahorro mínima.

Por lo que respecta al Sur, su función Hamiltoniana descontada viene dada por:

$$\begin{aligned}
&H_S\left[K, x_1, x_2, s, E_1\right] = \overline{w}\beta b\Phi\left(x_1, x_2\right) / \left[a\varphi\left(d_1\right)\right] + b\theta K - \overline{w}\overline{L} + \\
&m_S^K\left[\delta\left(x_1, x_2, K\right) K\left(1 - d_1\right) s\right] + m_S^{x_1}\left[rx_1\left(1 - x_1/CC_I\right) - qE_1x_1\right] + \\
&m_S^{x_2}\left[rx_2\left(1 - x_2/CC_{II}\right) - qf_{AK}\left(E_1, x_1, x_2\right)x_2\right],
\end{aligned}$$

donde m_S^K, $m_S^{x_1}$, y $m_S^{x_2}$ son las variables de coestado del Sur asociadas a las variables de estado, K, x_1, y x_2, respectivamente.

De nuevo, las condiciones necesarias de optimalidad dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= \delta\left(x_1, x_2, K\right) K\left(1 - d_1\right) s, \quad K(0) = K_0, \\
\dot{x}_1 &= rx_1\left(1 - x_1/CC_I\right) - qE_1x_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \\
\dot{x}_2 &= rx_2\left(1 - x_2/CC_{II}\right) - qf_{AK}\left(E_1, x_1, x_2\right)x_2, \quad x_2(0) = x_{20}, \\
\dot{m}_S^K &= \left[\rho - (1 - d_1)\, s\left(\delta\left(x_1, x_2, K\right) + K\delta'_K\right)\right] m_S^K - b\theta, \\
\dot{m}_S^{x_1} &= \left[\rho - r\left(1 - 2x_1/CC_I\right) + qE_1\right] m_S^{x_1} - \overline{w}\beta b\Phi'_{x_1} / \left[a\varphi\left(d_1\right)\right] - \\
&\quad m_S^K\left(1 - d_1\right) sK\delta'_{x_1} + m_S^{x_2} q\left(b\Phi'_{x_1} / \left[a\varphi\left(d_1\right)\right] - E_1\right), \\
\dot{m}_S^{x_2} &= \left[\rho - r\left(1 - 2x_2/CC_{II}\right) + qb\Phi'_{x_2} / \left[a\varphi\left(d_1\right)\right]\right] m_S^{x_2} -
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\overline{w}\beta b\Phi'_{x_2}/\left[a\varphi\left(d_1\right)\right]-m_S^K\left(1-d_1\right)sK\delta'_{x_2}.$$

La tasa de esfuerzo óptima para la especie I, resultado de la maximización de la función Hamiltoniana del Sur, también es una solución bang-bang, dada por:

$$E_1^*=\begin{cases}0 & \text{si} \quad m_S^{x_1}-m_S^{x_2}>0,\\ E_{1\max}^{AK} & \text{si} \quad m_S^{x_1}-m_S^{x_2}<0.\end{cases} \tag{4.20}$$

Así, el Sur no extrae nada de la especie I si el valor de la variable de coestado del Sur asociada al stock de la especie I supera aquél de la asociada al stock de la especie II. En caso contrario, la tasa de esfuerzo óptima para la especie I es la máxima.

4.2.1.2 Estrategias óptimas

Las estrategias óptimas del juego dinámico vienen dadas por el par de funciones s^* y E_1^*, establecidas en (4.18) y (4.20), respectivamente. De esta forma, el comportamiento de los jugadores viene regido por cuatro pares de variables de control óptimo, que se jugarán en cada caso, dependiendo de los valores que tomen las variables de coestado.

(s^*,E_1^*)	$m_S^{x_1}-m_S^{x_2}>0$;	$m_S^{x_1}-m_S^{x_2}<0$
$m_N^K>1/(1-d_1)$	$(\overline{s},0)$	$(\overline{s},E_{1\max}^{AK})$
$m_N^K<1/(1-d_1)$	$(\underline{s},0)$	$(\underline{s},E_{1\max}^{AK})$

Tabla 4.1

Se ahorra a la tasa máxima cuando la valoración del capital en el Norte, dada por su precio sombra, m_N^K, sea lo suficientemente alta, en concreto, superior a $1/\left(1-d_1\right)$. Asimismo, atendiendo a los precios sombra de una y otra especie en el Sur, cuando la valoración de la especie I es superior a la de la especie II, $m_S^{x_1}>m_S^{x_2}$, todo el esfuerzo de extracción se concentra en esta última, siendo nulo el esfuerzo de extracción correspondiente a la especie I. Ocurre lo contrario cuando la especie II es la más valorada. Únicamente se extrae la especie con menor valor.

Para obtener las trayectorias óptimas de todas las variables del juego diferencial, es preciso resolver los sistemas dinámicos (4.17) y (4.19) para las estrategias óptimas presentadas en la tabla 4.1.

4.2.2 Escenario de capacidad variable

La especificación del problema es análoga a la del escenario AK. La diferencia entre ambos estriba en que, en el escenario de capacidad variable, las transferencias del Norte al Sur, en lugar de ser invertidas en nuevas tecnologías que permitan una mayor productividad del trabajo en el Sur, se invierten en las especies naturales, posibilitando una mayor extracción sin provocar la extinción de las especies. Esto se hace posible a través de inversiones que incrementen la capacidad máxima de las especies, es decir, la población máxima que una especie puede alcanzar en ausencia de procesos de extracción.

Las variables de estado y control son idénticas a las del escenario anterior. El Norte maximiza su corriente de utilidades descontadas al tanto ρ, admitiendo que una proporción de sus ahorros, d_1, sea transferida al Sur para incrementar las capacidades máximas de las especies, posibilitando de esta forma una mayor producción que no esquilme las especies naturales. Su variable de control es la tasa de ahorro. El Sur, por su parte, decide el esfuerzo de extracción en la especie I, sabiendo que, entonces, el esfuerzo de extracción en la especie II viene dado por $E_2 = f_{VC}(E_1, x_1, x_2, K)$, cuya forma funcional se recoge en (4.10). Su objetivo, de nuevo, es la maximización de su flujo de consumos descontados al mismo tanto que el Norte.

El problema en el escenario de capacidad variable se puede especificar como:

$$\max_{s} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left(K\delta(x_1, x_2)(1-s) + \overline{w}\overline{L} \right) dt, \tag{4.21}$$

$$\max_{E_1} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[(bp(x_1, x_2)/a + b\theta) K - \overline{w}\overline{L} \right] dt, \tag{4.22}$$

$$\begin{array}{ll} \text{s.a.:} & \dot{K} = \delta(x_1, x_2) K (1-d_1) s, \\ & \dot{x}_1 = r x_1 (1 - \exp[1/(\varphi(d_1) K)] x_1) - qE_1 x_1, \\ & \dot{x}_2 = r x_2 (1 - \exp[2/(\varphi(d_1) K)] x_2) - q f_{VC}(E_1, x_1, x_2, K) x_2, \\ & 0 \le E_1 \le E_{1\max}^{VC}, \ \ \underline{s} \le s \le \overline{s}, \ \ K(0) = K_0 \ge 1, \\ & 0 < x_1(0) = x_{10} \le \exp[-1/(\varphi(d_1) K_0)], \\ & 0 < x_2(0) = x_{20} \le \exp[-2/(\varphi(d_1) K_0)], \end{array} \tag{4.23}$$

con $\delta(x_1, x_2) = b[1 - \theta - p(x_1, x_2)/a]$, que, en este escenario, no es función del capital, dado que no lo es el precio.

4.2.2.1 Equilibrios dinámicos

Para calcular los equilibrios dinámicos se resuelve el juego diferencial (4.21)-(4.23). Buscando las soluciones no-cooperativas de este juego, se resuelven los problemas de control óptimo de cada región por separado.

La función Hamiltoniana del Norte, en este escenario, viene dada por:

$$\begin{array}{l} H_N[K, x_1, x_2, s, E_1] = K\delta(x_1, x_2)(1-s) + \overline{w}\overline{L} + \\ m_N^K[\delta(x_1, x_2) K (1-d_1) s] + m_N^{x_1}[r x_1 (1 - x_1 \exp(1/[\varphi(d_1) K])) - qE_1 x_1] + \\ m_N^{x_2}[r x_2 (1 - x_2 \exp(2/[\varphi(d_1) K])) - q f_{VC}(E_1, x_1, x_2, K) x_2]. \end{array}$$

Las condiciones necesarias de optimalidad derivadas del principio del máximo de Pontryagin se recogen en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{array}{rcl} \dot{K} & = & \delta(x_1, x_2) K (1-d_1) s, \\ \dot{x}_1 & = & r x_1 (1 - \exp[1/(\varphi(d_1) K)] x_1) - qE_1 x_1, \\ \dot{x}_2 & = & r x_2 (1 - \exp[2/(\varphi(d_1) K)] x_2) - q f_{VC}(E_1, x_1, x_2, K) x_2, \end{array} \tag{4.24}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_N^K &= \left[\rho-(1-d_1)\, s\delta(x_1,x_2)\right] m_N^K - m_N^{x_1} r x_1^2 \exp\left(1/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)/\left[\varphi(d_1)K^2\right] - \\
&\quad m_N^{x_2}\left[r x_2^2 2\exp\left(2/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)/\left[\varphi(d_1)K^2\right] - qb\Phi(x_1,x_2)/a\right] - (1-s)\,\delta(x_1,x_2), \\
\dot{m}_N^{x_1} &= \left[\rho - r\left(1-2x_1\exp\left(1/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)\right) + qE_1\right] m_N^{x_1} + \\
&\quad \left[1-s+m_N^K(1-d_1)\,s\right] K b w \beta \Phi'_{x_1}/a + m_N^{x_2} q b K \Phi'_{x_1}/a, \\
\dot{m}_N^{x_2} &= \left[\rho - r\left(1-2x_2\exp\left(2/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)\right) + qbK\Phi'_{x_2}/a\right] m_N^{x_2} + \\
&\quad \left[1-s+m_N^K(1-d_1)\,s\right] K b w \beta \Phi'_{x_2}/a, \\
K(0) &= K_0, \quad x_1(0)=x_{10}, \quad x_2(0)=x_{20}.
\end{aligned}
$$

La tasa de ahorro óptima viene dada por la misma función bang-bang obtenida bajo el escenario AK, establecida en (4.18).

Por lo que respecta al Sur, su función Hamiltoniana descontada se escribe:

$$
\begin{aligned}
&H_S\left[K,x_1,x_2,s,E_1\right] = \overline{w}\beta b K\Phi(x_1,x_2)/a + b\theta K - \overline{w}\overline{L} + \\
&m_S^K\left[\delta(x_1,x_2)Ks(1-d_1)\right] + m_S^{x_1}\left[r x_1\left(1-x_1\exp\left(1/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)\right) - qE_1x_1\right] + \\
&m_S^{x_2}\left[r x_2\left(1-x_2\exp\left(2/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)\right) - q f_{VC}(E_1,x_1,x_2,K)\,x_2\right].
\end{aligned}
$$

De las condiciones necesarias de optimalidad se deduce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{aligned}
\dot{K} &= \delta(x_1,x_2)K(1-d_1)\,s, \\
\dot{x}_1 &= r x_1\left(1-x_1\exp\left(1/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)\right) - qE_1x_1, \\
\dot{x}_2 &= r x_2\left(1-x_2\exp\left(2/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)\right) - q f_{VC}(E_1,x_1,x_2,K)\,x_2, \qquad (4.25)\\
\dot{m}_S^K &= \left[\rho-\delta(x_1,x_2)(1-d_1)\,s\right] m_S^K - m_S^{x_1} r x_1^2\exp\left(1/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)/\left[\varphi(d_1)K^2\right] - b\theta - \\
&\quad \overline{w}\beta b\Phi(x_1,x_2)/a - m_S^{x_2}\left[r x_2^2 2\exp\left(2/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)/\left[\varphi(d_1)K^2\right] - qb\Phi(x_1,x_2)/a\right], \\
\dot{m}_S^{x_1} &= \left[\rho - r\left(1-2x_1\exp\left(1/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)\right) + qE_1\right] m_S^{x_1} - \overline{w}\beta b\Phi'_{x_1}K/a + \\
&\quad m_S^K(1-d_1)\,sKb\overline{w}\beta\Phi'_{x_1}/a + m_S^{x_2} q\left(bK\Phi'_{x_1}/a - E_1\right), \\
\dot{m}_S^{x_2} &= \left[\rho - r\left(1-2x_2\exp\left(2/\left[\varphi(d_1)K\right]\right)\right) + qbK\Phi'_{x_2}/a\right] m_S^{x_2} - \\
&\quad \overline{w}\beta bK\Phi'_{x_2}/a + m_S^K(1-d_1)\,sKb\overline{w}\beta\Phi'_{x_2}/a. \\
K(0) &= K_0, \quad x_1(0)=x_{10}, \quad x_2(0)=x_{20},
\end{aligned}
$$

El esfuerzo óptimo de extracción en la especie I, E_1^*, viene dado por la función bang-bang recogida en (4.20), siendo ahora la tasa máxima de esfuerzo $E_{1\max}^{VC}$, dada en (4.11).

4.2.2.2 Estrategias óptimas

Las estrategias óptimas del juego dinámico vienen dadas por el par de funciones s^* y E_1^*.

El comportamiento de los jugadores es idéntico al mostrado bajo el escenario AK:

(s^*, E_1^*)	$m_S^{x_1} - m_S^{x_2} > 0$;	$m_S^{x_1} - m_S^{x_2} < 0$
$m_N^K > 1/(1-d_1)$	$(\overline{s}, 0)$	$\left(\overline{s}, E_{1\max}^{VC}\right)$
$m_N^K < 1/(1-d_1)$	$(\underline{s}, 0)$	$\left(\underline{s}, E_{1\max}^{VC}\right)$

Tabla 4.2

Se ahorra a la tasa máxima o mínima, dependiendo de si la valoración del capital está por encima o debajo de una cota dada por $1/\left(1-d_1\right)$. De nuevo, al igual que en el caso AK, siempre se decide extraer únicamente una de las dos especies a la tasa máxima. La decisión sobre cuál de las dos especies extraer, depende de cuál de ellas sea menos valorada por el Sur. La única diferencia radica en que, en este caso, la tasa máxima de extracción, $E_{1\max}^{VC}$, aumenta con el stock de capital.

4.3 Resultados Numéricos

Como ya se ha señalado anteriormente, para obtener las trayectorias óptimas, tanto de las variables de estado del juego diferencial como de las variables de coestado, es preciso resolver los sistemas dinámicos obtenidos a partir de las condiciones necesarias de optimalidad, substituyendo las variables de control por sus valores óptimos, s^* y E_1^*. Es decir, bajo el escenario AK es necesario resolver los sistemas dinámicos (4.17) y (4.19) para las estrategias óptimas de control recogidas en la tabla 4.1. Asimismo, bajo el escenario de capacidad variable, hay que calcular la solución de los sistemas (4.24) y (4.25) para las estrategias óptimas de control establecidas en la tabla 4.2.

La complejidad de los sistemas dinámicos anteriormente señalados impide encontrar soluciones analíticas de éstos en cualquiera de los dos escenarios considerados. Esto lleva a la necesidad de utilizar métodos numéricos de integración para conocer el comportamiento de las soluciones del modelo. Para el estudio numérico del modelo se emplean rutinas implementadas para MATLAB para la integración numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (véase MATLAB (1996)). En particular, se integran los sistemas de ecuaciones diferenciales utilizando la rutina ODE23, que implementa un método Runge-Kutta. Los resultados, no obstante, no difieren sustancialmente al utilizar la rutina ODE45 que también corresponde a un método Runge-Kutta pero con mayor orden de convergencia.

Uno de los puntos centrales que pretende estudiar el modelo es la existencia de crecimiento económico sostenible. Ello sugiere la necesidad de estudiar un juego diferencial con horizonte infinito. No obstante, dado que no se ha encontrado solución analítica del problema, y para la integración numérica se requiere fijar un horizonte temporal finito, se hace preciso aproximar el comportamiento cualitativo de las variables del problema de horizonte infinito a través de una secuencia de casos finitos en la que va aumentando la longitud del horizonte temporal, debiendo contrastarse si este proceso es robusto. Además, es necesario garantizar la convergencia de la integral impropia que recoge el funcional objetivo de cada uno de los jugadores.

Se buscan condiciones bajo las cuales un proceso de crecimiento económico sostenido sea compatible con una evolución de las especies naturales que no suponga su extinción. En este capítulo, dado que la tasa de ahorro mínima, $\underline{s}$, es mayor que cero, siempre existe ahorro e inversión en el Norte, lo cual garantiza crecimiento sostenido, siempre que la función $\delta(\cdot)$ no se anule[34]. Con la intención de que el Norte ahorre incialmente a su tasa máxima, se elige como condición inicial para la variable de coestado asociada al capital en el Norte, m_N^K, un valor superior a $1/(1-d_1)$. Siempre que esta variable siga una evolución temporal creciente, se tendrá crecimiento sostenido y ahorro a la tasa máxima, $\overline{s}$. Si, por el contrario, m_N^K decrece, puede llegar un momento en el que el Norte decida pasar a ahorrar a la tasa mínima, $\underline{s}$. Ésto no detendrá el proceso de crecimiento económico pero sí lo ralentizará, a menos que $\delta(\cdot)$ compense la reducción en la tasa de ahorro. Para que el crecimiento pueda ser sostenido, es necesario garantizar la conservación de las especies naturales. Es fácil ver que tanto la tasa intrínseca de crecimiento de las especies, r, como la proporción de capital transferido del Norte al Sur, d_1, tienen un efecto positivo sobre la dinámica de las especies, tanto en el escenario AK, descrito por (4.8), como en el de capacidad variable, recogido en (4.13), permitiendo un mayor crecimiento de las mismas[35]. De esta forma, garantizar la conservación de las especies naturales da lugar a un trade-off entre la tasa intrínseca de crecimiento y la proporción de capital transferido al Sur. Cuanto menor sea r, mayores deberán ser las transferencias al Sur para garantizar que las poblaciones de las especies no disminuyan hasta el punto de llevarlas a su extinción. El efecto de d_1 sobre la dinámica poblacional de las especies es diferente en uno y otro escenario. En el escenario AK, mayores transferencias reducen de modo directo el esfuerzo de extracción en ambas especies. Por el contrario, en el escenario de capacidad variable, mayores transferencias aumentan la capacidad máxima y, con ello, la tasa de recuperación natural de la especie; es posible extraer más cantidad de recursos de esa especie. El estudio numérico de las soluciones del juego diferencial se lleva a cabo asumiendo valores de r y d_1 lo suficientemente altos como para garantizar que las especies naturales no desaparezcan, sino que su población alcance unos niveles estables, con los cuales sea posible un crecimiento económico sostenible.

4.3.1 Escenario AK

En esta sección se recogen los resultados obtenidos de la integración numérica de los sistemas dinámicos (4.17) y (4.19). Se estudia la evolución, tanto del stock de capital, como de los stocks de las dos especies naturales. Asimismo, se realiza un análisis comparativo de los resultados obtenidos teniendo en cuenta variaciones en los valores iniciales de los

[34] Para garantizar que $\delta(\cdot)$ sea siempre positivo, es suficiente que los parámetros del modelo cumplan la desigualdad:

$$a\mu(1-\theta) > \overline{w}(1+d_1).$$

[35] Nótese que la proporción de capital transferido al Sur, o bien no afecta al esfuerzo máximo de extracción de cada especie, en el escenario de capacidad variable, o bien el efecto es negativo, en el escenario AK; es decir, se tiene:

$$\partial E_{i\max}^{VC}/\partial d_1 = 0, \quad \partial E_{i\max}^{AK}/\partial d_1 < 0, \quad i = 1,2.$$

stocks de las especies, en el valor de la tasa intrínseca de crecimiento, r, y en la proporción de capital transferido al Sur, d_1.

El esfuerzo óptimo de extracción en la especie I, E_1^*, viene dado por la función bang-bang (4.20), que toma los valores cero y $E_{1\max}^{AK}$, dependiendo de la valoración que el Sur haga de cada una de las especies. Obviamente, el esfuerzo de extracción en la especie II es también bang-bang, tomando los valores $E_{2\max}^{AK}$ cuando el esfuerzo para la especie I es nulo, y cero cuando el esfuerzo para esta última especie es máximo. Cuando el esfuerzo de extracción en la especie I y, por tanto, en la especie II, se mantiene invariante durante todo el horizonte temporal, se extraen recursos de una de ellas a la tasa máxima, mientras que no se dedica ningún esfuerzo de extracción a la otra. El estado estacionario de la ecuación diferencial que describe la dinámica del stock de la especie I coincide con su capacidad máxima. La especie II también alcanza su valor de estado estacionario, que es aquél que anula su tasa de variación, recogida en (4.8), cuando el esfuerzo de extracción es máximo. Este estado estacionario no coincide con su capacidad máxima. Por el contrario, si el esfuerzo óptimo de extracción varía tomando los valores nulo y máximo alternativamente, entonces la dinámica de cada una de las especies viene dada por una ecuación diferencial que toma dos formas diferentes correspondientes al esfuerzo de extracción nulo y máximo respectivamente. En este caso, no existe un estado estacionario para la dinámica de cada especie, sino que las poblaciones de éstas fluctúan en torno a un valor, que es el que anularía la tasa de variación de cada especie si el esfuerzo de extracción fuese nulo con probabilidad $1/2$ y máximo con probabilidad $1/2$. De acuerdo con este razonamiento, la integración numérica da como resultado dos tipos de comportamiento:

1. Caso monótono

   Se caracteriza porque la especie I, que presenta una capacidad máxima mayor, alcanza dicha capacidad, siendo nulo el esfuerzo dedicado a la misma. Por el contrario, el esfuerzo de extracción en la especie II es máximo[36]. La especie II alcanza su valor de estado estacionario, aquél que anula la tasa de variación de x_2 en (4.8), suponiendo un esfuerzo de extracción máximo, $E_{2\max}^{AK}$.
2. Caso oscilante

   Ambas especies se extraen alternativamente a su tasa máxima, $E_{i\max}^{AK}$. Ninguna de las especies alcanza su capacidad máxima. El valor alrededor del cual se estabiliza la población de cada una de las especies es aquél que anula su tasa de variación cuando el esfuerzo de extracción no es un valor único, sino que toma alternativamente los valores cero y $E_{i\max}^{AK}$. El stock de cada especie no alcanza dicho valor, sino que oscila a su alrededor.

El esfuerzo óptimo para la especie I (e indirectamente para la especie II), por la expresión (4.20), depende del signo de la diferencia entre la valoración de una y otra especie, $m_S^{x_1} - m_S^{x_2}$. Según esto, el caso monótono aparece cuando la especie I es mejor valorada que la especie II durante todo el horizonte temporal del juego, es decir, la diferencia es siempre positiva. Por el contrario, cuando el orden de valoración de las especies cambia

[36] Asumiendo diferentes valores de los parámetros para la integración numérica, es igualmente factible que el caso monótono se caracterice por una nula extracción de la especie II, que alcanza su capacidad máxima, y una extracción máxima de la especie I.

cíclicamente, es decir, la diferencia toma valores positivos y negativos de forma alternativa, entonces el comportamiento es oscilante.

Una vez fijados los valores de los parámetros del modelo, la solución numérica del juego presenta un comportamiento monótono u oscilante dependiendo de los valores iniciales de las variables de estado o coestado que se elijan para llevar a cabo la integración numérica del sistema dinámico (4.17) y (4.19). Los experimentos numéricos muestran que el comportamiento podrá ser monótono cuando el valor inicial de la variable de coestado asociada al capital, m_S^K, esté próximo a los valores de los coestados asociados a los stocks de las especies, $m_S^{x_1}$ y $m_S^{x_2}$. Asimismo, es posible un comportamiento monótono cuando las poblaciones iniciales de las especies naturales son muy pequeñas.

En las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 se muestra la evolución de las variables de estado, K, x_1 y x_2, para dos integraciones diferentes que presentan un comportamiento monótono y oscilante respectivamente.

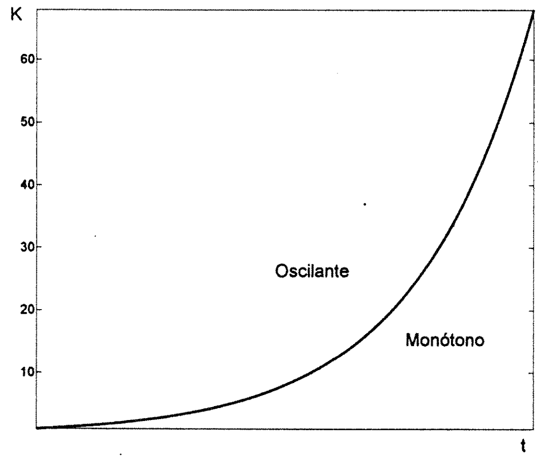

Figura 4.2

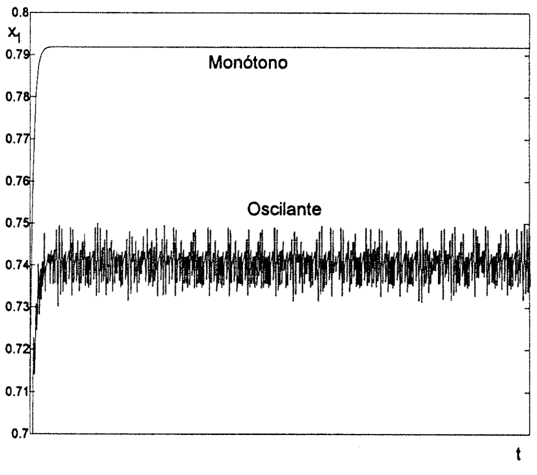

Figura 4.3

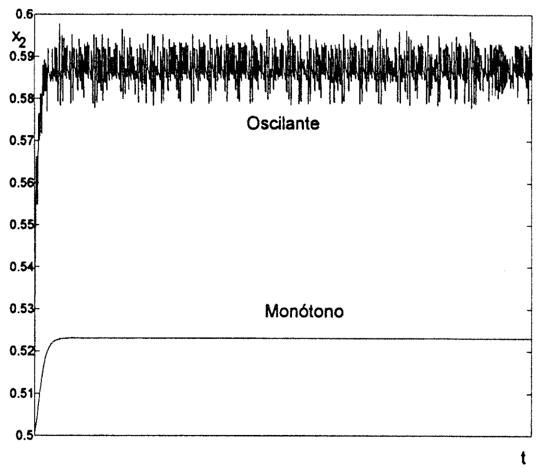

Figura 4.4

La figura 4.2 representa la evolución del stock de capital a lo largo del tiempo. Únicamente se observa una curva, pues el comportamiento del capital es prácticamente idéntico en ambos casos. Por lo que respecta a los stocks de las especies, en el caso monótono, dado que todo el esfuerzo se centra en la especie II, que se extrae a la tasa máxima, mientras que nada se extrae de la especie I, esta última alcanza su capacidad máxima, en tanto que la especie II evoluciona hasta su valor de estado estacionario cuando el esfuerzo de extracción es el dado por $E^{AK}_{1\,\max}$. En el caso oscilante no se extrae de una única especie, sino de ambas alternativamente. Como refleja la figura 4.3, el stock de la especie I crece en zigzag y finalmente fluctúa alrededor de un nivel que necesariamente es menor que el alcanzado en el caso monótono, en el cual esta especie no era utilizada en el proceso productivo. Por el contrario, el stock de la especie II también crece en zigzag hasta que fluctúa alrededor de un nivel superior al estado estacionario correspondiente al caso monótono. Este comportamiento se debe a que en el caso fluctuante, el esfuerzo de extracción no descansa únicamente en esta especie sino en ambas.

A continuación se presentan los resultados de la integración numérica, cuando las condiciones iniciales de las variables de estado y coestado dan lugar a soluciones de tipo oscilante. Las tablas 4.3 y 4.4 muestran el valor del stock de capital y de los stocks de las dos especies naturales al final del horizonte temporal considerado. En la última columna se recoge el tiempo transcurrido hasta que los stocks de las especies alcanzan sus estados estables, alrededor de los cuales oscilan. El interés principal se centra en ver cómo estos valores se ven afectados ante cambios en la tasa intrínseca de crecimiento, r, así como en la proporción de capital que es transferido al Sur, d_1. En cualquier caso, se eligen valores lo suficientemente altos de estos dos parámetros de manera que se tenga garantizado un crecimiento del stock de capital sin provocar la extinción de las especies. Asimismo, cada tabla hace referencia a diferentes valores iniciales para los stocks de las especies. En la tabla 4.3 se asume que las poblaciones de las especies están cercanas a sus capacidades máximas, mientras que en la tabla 4.4 se supone que se parte de una situación de escasez en ambas especies. Las capacidades máximas son constantes y no varían con la proporción de capital transferido al Sur. Se toman como valores de estas capacidades los dados por las expresiones que aparecen en (4.9) cuando $d_1 = .3$, es decir, $CC_I = .7918$ y $CC_{II} = .6270$.

$K_0 = 1, \quad x_{10} = .7, \quad x_{20} = .5$	K^*	x_1^*	x_2^*	ν
$d_1 = .3; \quad r = 44.21; \quad \varphi(d_1) = 4.28$	68.035	.740	.587	.15
$d_1 = .5; \quad r = 44.21; \quad \varphi(d_1) = 10$	20.950	.772	.612	.10
$d_1 = .5; \quad r = 18.94; \quad \varphi(d_1) = 10$	20.889	.740	.587	.30

Tabla 4.3

$K_0 = 1, \quad x_{10} = .4, \quad x_{20} = .3$	K^*	x_1^*	x_2^*	ν
$d_1 = .3; \quad r = 36.77; \quad \varphi(d_1) = 4.28$	67.675	.727	.576	.20
$d_1 = .5; \quad r = 36.77; \quad \varphi(d_1) = 10$	20.931	.768	.608	.15
$d_1 = .5; \quad r = 15.75; \quad \varphi(d_1) = 10$	20.833	.727	.576	.40

Tabla 4.4

En las tablas anteriores, K^* representa el valor del stock de capital al final del horizonte temporal; x_1^* y x_2^* son los niveles alrededor de los cuales oscilan los stocks de las especies I y II; y ν representa el tiempo transcurrido hasta que las poblaciones de las especies alcanzan el nivel alrededor del cual oscilan.

En primer lugar se observa que, dado que ambas especies son utilizadas en el proceso productivo del Sur, ninguna de ellas alcanza su capacidad máxima, si bien es cierto que la población de la especie I, que presenta mayor capacidad, logra un stock final superior al de la especie II en todas las simulaciones. Analizando los resultados por filas, es posible interpretar cuál es el efecto "ceteris paribus" de un aumento en la proporción de capital transferido del Norte al Sur, d_1, así como de un incremento en la tasa intrínseca de crecimiento de las especies naturales, r.

Comparando la fila 1 con la fila 2 se observa que un incremento en d_1 implica un menor stock de capital al final del horizonte temporal. Esto se debe a que un aumento de la proporción de capital transferido del Norte al Sur acarrea una reducción en la tasa de acumulación del capital en el Norte. Al mismo tiempo, dado que estas mayores transferencias mejoran la productividad del trabajo en el Sur, ello conlleva una menor extracción y, por tanto, mejor conservación de ambas especies naturales, siendo mayores los stocks finales de ambas. El Norte debe transferir capital al Sur para mejorar la productividad de los trabajadores en esta última región, permitiendo que el crecimiento económico sea sostenible y no lleve a la extinción de las especies, con el correspondiente colapso en el proceso productivo. No obstante, este proceso de transferencias al Sur no se puede mantener ilimitadamente, pues cuanto mayor sea la proporción del ahorro dedicado a mejorar la productividad del Sur, menor es el crecimiento económico. Al elegir la proporción de capital a transferir al Sur, el Norte debe sopesar el objetivo de crecimiento económico frente al de conservación de la biodiversidad. Este último estará interesado en conocer el valor de d_1 con el cual es posible alcanzar ambas metas simultáneamente y de forma óptima.

Comparando los resultados de las filas 3 y 2 se puede concluir que una tasa intrínseca de crecimiento superior implica, evidentemente, un incremento del nivel final que alcanzan las poblaciones de las especies. Adicionalmente, una mayor abundancia de recursos naturales provoca un menor valor de la función $\Phi(x_1, x_2)$, es decir, un aumento de la productividad en el Sur y, consecuentemente, un precio inferior del bien intermedio "natural", lo que provoca una más rápida acumulación del capital en el Norte. El efecto de un aumento en r no depende de los valores iniciales de los stocks de ambas especies, este efecto es idéntico en las tablas 4.3 y 4.4.

Nótese que el incremento en términos relativos de $\varphi(d_1)$ debido al crecimiento de las transferencias de capital de la fila 1 a la 2, es idéntico al aumento en la tasa intrínseca de crecimiento al pasar de la fila 3 a la 2: $4.28/10 = 18.94/44.21$. De esto se deduce que si se produce una reducción de la tasa intrínseca de crecimiento de las especies naturales, r, el Norte, aumentando las transferencias, d_1, (hasta que $\varphi(d_1)$ crezca en la misma proporción que se redujo r) puede mantener invariantes los niveles de ambas especies naturales. Esto representa un trade-off entre transferencias y tasa intrínseca de crecimiento. Para mantener fijos los niveles de las poblaciones de las especies naturales, cuanto mayor sea la tasa intrínseca de crecimiento, menor deberán ser las transferencias.

Finalmente, cabe indicar que la velocidad de convergencia de los stocks de las especies hacia sus valores estables, medida a través de ν, es mayor, tanto con incrementos en las transferencias, como con aumentos en la tasa intrínseca de crecimiento. El efecto de esta última sobre la velocidad de convergencia es más fuerte que el de las transferencias, como se recoge al comparar los valores de ν en la última columna de las tablas 4.3 y 4.4.

Estas conclusiones son robustas con respecto a los valores iniciales de los stocks de las especies I y II, como señalan los resultados, que son cualitativamente idénticos en ambas tablas.

Las tablas 4.5 y 4.6 muestran, igualmente, los valores finales del stock de capital y de los stocks de ambas especies naturales, así como el tiempo hasta que éstas alcanzan sus estados estacionarios, todo lo cual es resultado de la integración numérica cuando las condiciones iniciales de las variables de estado y coestado son tales que las soluciones son monótonas; esto es, la especie I no se utiliza en el proceso productivo, por lo que alcanza su capacidad máxima. De nuevo, se fijan los mismos valores que en el caso oscilante para las capacidades máximas.

$K_0 = 1, \quad x_{10} = .7, \quad x_{20} = .5$	K^*	x_1^*	x_2^*	ν
$d_1 = .3; \quad r = 44.21; \quad \varphi(d_1) = 4.28$	67.926	$CC_I = .7918$	.5230	.25
$d_1 = .5; \quad r = 44.21; \quad \varphi(d_1) = 10$	20.948	$CC_I = .7918$	.5916	.15
$d_1 = .5; \quad r = 18.94; \quad \varphi(d_1) = 10$	20.876	$CC_I = .7918$	.5230	.60

Tabla 4.5

$K_0 = 1, \quad x_{10} = .4, \quad x_{20} = .3$	K^*	x_1^*	x_2^*	ν
$d_1 = .3; \quad r = 36.77; \quad \varphi(d_1) = 4.28$	67.245	$CC_I = .7918$	.4844	.70
$d_1 = .5; \quad r = 36.77; \quad \varphi(d_1) = 10$	20.929	$CC_I = .7918$	.5832	.25
$d_1 = .5; \quad r = 15.75; \quad \varphi(d_1) = 10$	20.766	$CC_I = .7918$	.4844	1.60

Tabla 4.6

El stock de la especie I alcanza su capacidad máxima, no siendo empleada esta especie en el proceso productivo del Sur. Todo el esfuerzo de extracción se centra en la especie II, que alcanza su estado estacionario cuando el esfuerzo de extracción es $E_{2\max}^{AK}$. Lógicamente, este estado estacionario es siempre mayor que el nivel alrededor del cual se mueve el stock de esta especie en el caso oscilante. Esto es debido a que en el caso oscilante se extraían recursos de las dos especies, mientras que en el monótono únicamente se utiliza la especie II.

Los comportamientos cualitativos de las variables en el caso monótono son idénticos a los del caso oscilante, excepto para el valor final del stock de la especie I, que ahora es siempre igual a su capacidad máxima. Las conclusiones del caso oscilante son, por lo tanto, extensibles al caso monótono, con la salvedad de que en este último caso, el stock de la especie I no se ve afectada por cambios en la tasa intrínseca de crecimiento de las especies naturales, r, o en la proporción de capital transferido al Sur, d_1.

Finalmente, cabe indicar que para el horizonte de integración considerado en las simulaciones numéricas, el Norte elige como política óptima, una tasa de ahorro máxima, $\overline{s}$.

Esto no excluye la posiblidad de que para horizontes temporales más largos, o para distintas condiciones iniciales, a partir de un determinado instante el Norte cambie a una política de ahorro mínimo. No obstante, para el horizonte analizado, se han llevado a cabo experimentos numéricos para diferentes valores de la tasa máxima de ahorro, $\overline{s}$. De éstos se concluye que cuanto mayor sea $\overline{s}$, lógicamente mayor es la tasa de crecimiento del capital y más alto el capital final alcanzado. Por contra, los stocks finales alcanzados por ambas especies no dependen del valor de este parámetro.

4.3.2 Escenario de capacidad variable

En esta sección se recogen los resultados obtenidos en la integración de los sistemas dinámicos (4.24) y (4.25) correspondientes al escenario de capacidad variable. Al igual que en el escenario AK, se estudia la evolución del stock de capital y de los stocks de ambas especies, analizando el efecto de incrementos en la tasa intrínseca de crecimiento, r, así como en la proporción de capital transferido al Sur, d_1.

En el escenario de capacidad variable, no obstante, las soluciones obtenidas únicamente presentan el comportamiento oscilante. Esto es, los stocks de ambas especies tienden hacia los valores que anulan su tasa de variación dada en (4.13), donde el esfuerzo de extracción toma alternativamente los valores cero y $E_{i\max}^{VC}$ establecidos en (4.11). La diferencia básica respecto al escenario anterior consiste en que, en el caso AK, los estados estacionarios de los stocks de las especies naturales no dependen del stock de capital, mientras que en el caso de capacidad variable, tanto los esfuerzos máximos de extracción como el sistema dinámico que define la evolución de los stocks de las especies, dependen del capital y, por lo tanto, también sus estados estacionarios. Cuando la solución presenta crecimiento en el stock de capital, éste produce, a su vez, un aumento tanto de la capacidad máxima de las especies, como del esfuerzo de extracción. Las simulaciones numéricas muestran que los estados estacionarios de los stocks de las especies crecen con el capital paralelamente a sus capacidades máximas.

En las siguientes figuras se muestra la evolución del stock de capital y los stocks de las especies naturales.

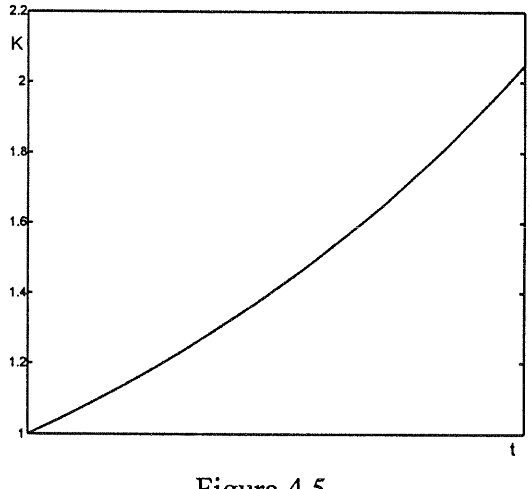

Figura 4.5

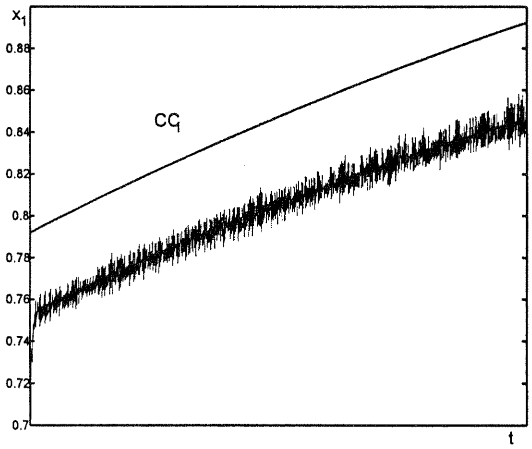

Figura 4.6

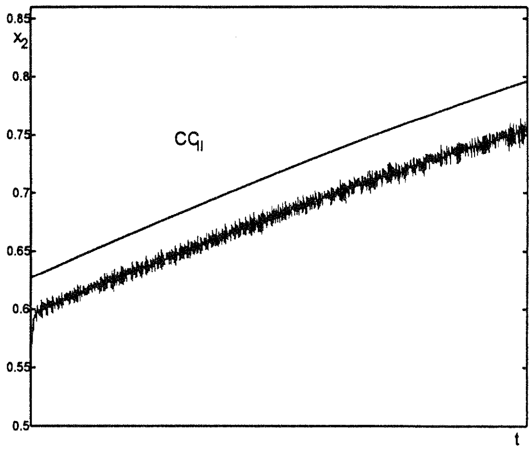

Figura 4.7

Del mismo modo que en el escenario AK, en la figura 4.5 se observa un crecimiento continuado del stock de capital. Las figuras 4.6 y 4.7 muestran la evolución temporal de los stocks de las especies I y II, respectivamente. Durante un muy corto primer periodo de tiempo, la población de la especie crece en zigzag. Una vez transcurrido este periodo de convergencia, el nivel de cada especie no oscila alrededor de un valor constante como en el escenario AK, sino que fluctúa en torno a una tendencia creciente. Esta tendencia evoluciona por debajo y equidistante a una curva que representa la capacidad máxima que en cada momento puede alcanzar la especie natural. Esta diferencia con respecto al escenario AK se debe a que, en el nuevo escenario, las transferencias de capital se invierten en las especies naturales, aumentando su capacidad máxima y permitiendo, tanto un mayor stock de las especies, como un esfuerzo de extracción más intenso, lo que posibilita una mayor extracción y producción en el Sur. En el escenario de capacidad variable las transferencias de capital afectan de modo más directo a la dinámica de las especies y en menor medida a la productividad del Sur.

Las siguentes tablas presentan cómo evolucionan el stock de capital, los stocks de las especies y las capacidades máximas, resultado de la integración numérica bajo el escenario de capacidad variable. En este escenario, al contrario que en el AK, la decisión sobre la proporción de capital a transferir afecta a la cantidad que se invierte en las especies naturales y, por lo tanto, a la capacidad máxima de ambas especies.

$K_0 = 1, x_{10} = .7, x_{20} = .5$	CC_{I0} / CC_{II0}	K^*	$\widetilde{x}_1$	CC_I	$\widetilde{x}_2$	CC_{II}
$d_1 = .3; r = 236; \varphi(d_1) = 4.28$	.7918 / .627	2.0492	.847	.8924	.757	.7963
$d_1 = .5; r = 236; \varphi(d_1) = 10$	.9048 / .8187	1.8322	.928	.9469	.879	.8966
$d_1 = .3; r = 180; \varphi(d_1) = 4.28$	.7918 / .627	2.0132	.822	.8906	.732	.7931

Tabla 4.7

$K_0 = 1, x_{10} = .4, x_{20} = .3$	CC_{I0} / CC_{II0}	K^*	$\widetilde{x}_1$	CC_I	$\widetilde{x}_2$	CC_{II}
$d_1 = .3; r = 175; \varphi(d_1) = 4.28$	.7918 / .627	2.0043	.819	.8901	.728	.7923
$d_1 = .5; r = 175; \varphi(d_1) = 10$	.9048 / .8187	1.8188	.918	.9465	.868	.8956
$d_1 = .3; r = 135; \varphi(d_1) = 4.28$	.7918 / .627	1.9440	.775	.8869	.685	.7866

Tabla 4.8

En las tablas anteriores, CC_{I0} y CC_{II0} representan las capacidades máximas iniciales de las especies I y II, mientras que CC_I y CC_{II} denotan las capacidades máximas al final del horizonte temporal. La columna K^* muestra los valores del stock de capital en el instante final de la integración numérica. Por su parte, $\widetilde{x}_1$ y $\widetilde{x}_2$ son los valores finales de la tendencia alrededor de la cual oscilan los stocks de las especies naturales I y II, respectivamente.

Los resultados cualitativos que muestran estas tablas son similares a los obtenidos bajo el escenario AK. La comparación entre las filas 1 y 2 refleja que un aumento en la proporción de capital transferido provoca un desplazamiento hacia arriba de la curva que representa la capacidad máxima de cada especie y, consecuentemente, un mayor valor final de los stocks de éstas. Adicionalmente, un incremento en d_1 reduce la tasa de acumulación de capital en el Norte, llevando a un menor crecimiento económico. Por lo que respecta a la tasa intrínseca de crecimiento, un aumento de ésta mejora tanto los niveles alcanzados por las poblaciones de ambas especies, como el crecimiento en el stock de capital. Este comportamiento se deduce de la comparación entre las filas 1 y 3.

En el caso de capacidad variable es difícil calcular con exactitud el tiempo transcurrido hasta que los stocks de las especies naturales alcanzan la tendencia y, tener así una medida de la velocidad de convergencia como se calculó en el escenario AK. Sin embargo, distintas simulaciones numéricas llevadas a cabo indican que un aumento de la tasa intrínseca de crecimiento sí parece incrementar la velocidad de convergencia. No obstante, no es posible concluir si la proporción de capital transferido del Norte al Sur tiene algún efecto sobre ésta.

Por último, al igual que en el escenario AK, cuanto mayor sea la tasa máxima de ahorro, $\overline{s}$, mayor es el crecimiento del stock de capital. Sin embargo, al contrario que en el escenario anterior, este mayor crecimiento del capital provoca un aumento de las capacidades máximas y, por consiguiente, unos mayores stocks también de las especies naturales.

4.3.3 Escenario AK "versus" escenario de capacidad variable

En esta sección se comparan los resultados de los experimentos numéricos en ambos escenarios. Para poder llevar a cabo esta comparación se obtiene la solución numérica del modelo en el escenario AK utilizando condiciones idénticas a las que aparecen en las tablas 4.7 y 4.8, bajo las cuales se integró el sistema en el escenario de capacidad variable. De esta forma se tienen los resultados numéricos para los dos escenarios asumiendo, en ambos, los mismos valores tanto para las variables de estado y coestado, como para la tasa intrínseca de crecimiento y la proporción de capital transferido al Sur. En el escenario de capacidad variable, las capacidades máximas varían cuando d_1 pasa de .3 a .5; por el contrario, en el escenario AK se asume que estas capacidades máximas se mantienen invariantes. Para comparar resultados en uno y otro escenario, las capacidades máximas del escenario AK también se toman iguales a las del escenario de capacidad variable antes del cambio en d_1. Dado que en este último escenario únicamente tiene lugar el caso oscilante, las condiciones iniciales utilizadas para la integración numérica deben garantizar que la solución obtenida bajo el escenario AK también muestre comportamiento oscilante.

Las tablas 4.9 y 4.10 recogen los resultados numéricos correspondientes al escenario AK, asumiendo las mismas condiciones bajo las que se calcularon las soluciones del juego en el escenario de capacidad variable. Las capacidades máximas coinciden con los valores que tomaban éstas al inicio de la integración del escenario de capacidad variable para $d_1 = .3$, esto es, $CC_I = .7918$ y $CC_{II} = .6270$.

$K_0 = 1, x_{10} = .7, x_{20} = .5$	K^*	x_1^*	x_2^*
$d_1 = .3; r = 236; \varphi(d_1) = 4.28$	2.5184	.7838	.6208
$d_1 = .5; r = 236; \varphi(d_1) = 10$	1.9668	.7885	.6245
$d_1 = .3; r = 180; \varphi(d_1) = 4.28$	2.5174	.7815	.6188

Tabla 4.9

$K_0 = 1, x_{10} = .4, x_{20} = .3$	K^*	x_1^*	x_2^*
$d_1 = .3; r = 175; \varphi(d_1) = 4.28$	2.5165	.7810	.6185
$d_1 = .5; r = 175; \varphi(d_1) = 10$	1.9665	.7872	.6235
$d_1 = .3; r = 135; \varphi(d_1) = 4.28$	2.5150	.7775	.6158

Tabla 4.10

A continuación se comparan los resultados obtenidos bajo los escenarios AK y de capacidad variable.

En primer lugar se comparan los niveles alcanzados por las variables de estado en uno y otro escenario para los mismos valores de los parámetros. Esto es, se comparan las filas de las tablas 4.7 y 4.8 con las tablas 4.9 y 4.10. Las figuras 4.8 a 4.10 ilustran esta comparación entre ambos escenarios. Estas figuras muestran la evolución temporal de las variables de estado, K, x_1 y x_2, correspondientes a los valores de los parámetros que aparecen en la primera fila de las tablas[37] 4.7 y 4.9.

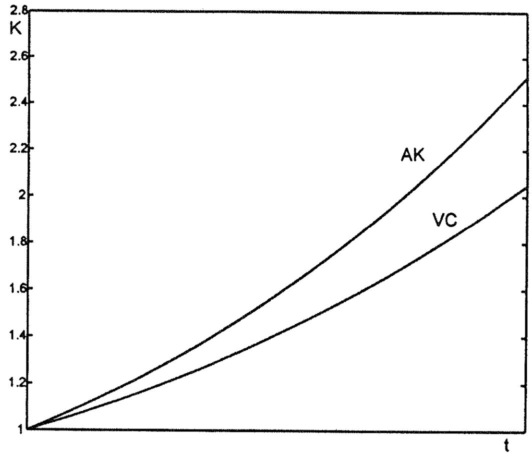

Figura 4.8

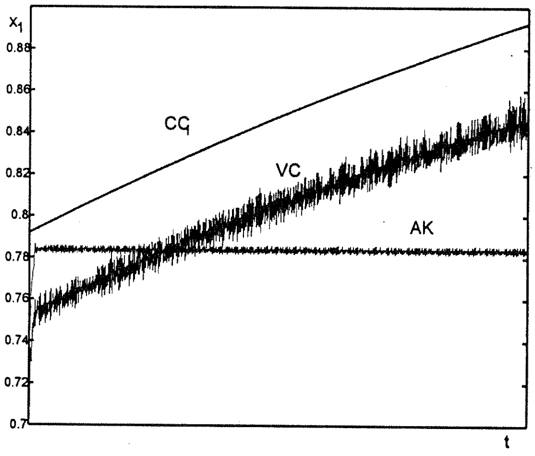

Figura 4.9

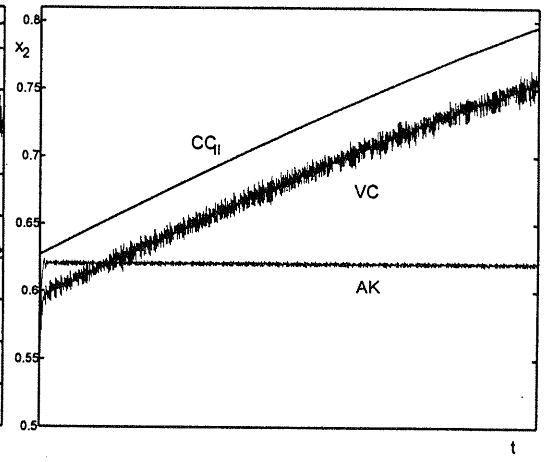

Figura 4.10

De estas gráficas, se puede concluir que, a idénticas condiciones iniciales, si el capital transferido del Norte al Sur se invierte en tecnologías que mejoren la productividad del trabajo en el Sur se produce un mayor crecimiento del stock de capital que cuando estas transferencias se invierten en mejorar la capacidad máxima de las especies. Por el contrario, los stocks de las especies naturales alcanzan niveles más altos si estas transferencias se invierten en dichas especies. Estas inversiones permiten un aumento de los esfuerzos de extracción, lo cual posibilita una producción mayor de bien intermedio "natural" en el Sur. Por consiguiente, se utilizan más recursos al mismo tiempo que se conservan las poblaciones de las especies en niveles más altos.

En segundo lugar, se comparan las diferencias entre el escenario AK y el de capacidad variable, frente a un cambio, bien en el parámetro r, bien en d_1. Es decir, en este caso no se busca comparar filas entre sí, sino que se estudian las diferencias al saltar de una

[37] El comportamiento cualitativo de los resultados numéricos obtenidos puede generalizarse para los valores de los parámetros de cualquier otra fila. Es decir, la diferencia entre un escenario y otro se mantiene cualitativamente, con independencia de los valores iniciales de los estados, así como de d_1 y de r.

fila a otra dentro de la misma tabla. En concreto, un aumento de las transferencias se representa por un salto de la fila 1 a la 2, mientras que un incremento de la tasa intrínseca de crecimiento de las especies naturales se produce al saltar de la fila 3 a la 1. Como ya se ha explicado, los efectos de una variación en uno de estos parámetros bajo el escenario AK son cualitativamente idénticos a los obtenidos bajo el escenario de capacidad variable.

Fijado r, un aumento en la proporción de capital transferido al Sur, d_1, da lugar a una reducción del capital junto con un aumento de los stocks de ambas especies al final del periodo de integración. No obstante, en términos relativos, es posible asegurar que la caída en el stock de capital es mayor en el escenario AK. La tabla 4.11 muestra las variaciones relativas en las variables de estado, denotadas por $\triangle K$, $\triangle x_1$ y $\triangle x_2$, respectivamente, como consecuencia de un incremento en las transferencias de capital, $\triangle d_1$. Asimismo, esta tabla presenta en la última columna, el ratio entre estas variaciones relativas bajo el escenario de capacidad variable y bajo el AK. Con independencia de cuáles sean los valores iniciales de los stocks de las especies naturales, mayores transferencias de capital provocan una caída más pronunciada en el capital final bajo el escenario AK. Asimismo, el incremento que experimentan los niveles finales de las especies son mayores en el escenario de capacidad variable. Desde este punto de vista, un incremento de las transferencias se aprovecha mejor si éstas se dedican a inversión directa en las especies naturales. Por el contrario, si el objetivo es incrementar el crecimiento económico mediante una reducción de esas transferencias, sin importar el efecto sobre la biodiversidad[38], esto se consigue de un modo más eficiente bajo el escenario AK. Nótese que aunque estas conclusiones no dependen de los stocks iniciales de las especies, las discrepancias se acentúan para valores altos de x_{10} y x_{20}.

$\triangle d_1$

	Condiciones iniciales	AK	VC	VC/AK
$\triangle K$	$x_{10} = .7$, $x_{20} = .5$	$-.22$	$-.106$	.46
	$x_{10} = .4$, $x_{20} = .3$	$-.22$	$-.092$	.42
$\triangle x_1$	$x_{10} = .7$, $x_{20} = .5$	.0059	.095	16.2
	$x_{10} = .4$, $x_{20} = .3$	.0079	.120	15.2
$\triangle x_2$	$x_{10} = .7$, $x_{20} = .5$	.0059	.161	27
	$x_{10} = .4$, $x_{20} = .3$	.0080	.192	24

Tabla 4.11

Por su parte, el efecto de un aumento de la tasa intrínseca de crecimiento, r, fijado d_1, es positivo, tanto para el capital como para los stocks de ambas especies al final del juego. De nuevo, este efecto positivo, aunque es cualitativamente idéntico en ambos escenarios, es más potente en términos relativos bajo el escenario de capacidad variable. La tabla 4.12 presenta las variaciones relativas del stock de capital y los stocks de las especies ante un incremento de r y el cociente de estas variaciones bajo el escenario de capacidad variable y el AK. Todos los stocks aumentan con la tasa intrínseca de crecimiento. No

[38] No conviene olvidar que una disminución de las transferencias reduce el nivel final de las especies naturales y, si ésta es muy drástica, puede incluso provocar la extinción de las mismas. Esto necesariamente colapsaría la producción primero en el Sur y, consecuentemente, en el Norte.

obstante, el efecto es mayor bajo el escenario de capacidad variable, es decir, cuando las transferencias se invierten de forma directa en las especies. De nuevo, aunque las conclusiones se mantienen con independencia del nivel de cada especie al comienzo del juego, las discrepancias aumentan cuanto menores sean x_{10} y x_{20}.

$\triangle r$

	Condiciones iniciales	AK	VC	VC/AK
$\triangle K$	$x_{10} = .7$, $x_{20} = .5$	.00040	.0179	44
	$x_{10} = .4$, $x_{20} = .3$	.00006	.0310	51
$\triangle x_1$	$x_{10} = .7$, $x_{20} = .5$	.0029	.030	10.3
	$x_{10} = .4$, $x_{20} = .3$	.0045	.0567	12.6
$\triangle x_2$	$x_{10} = .7$, $x_{20} = .5$	.0032	.034	10.6
	$x_{10} = .4$, $x_{20} = .3$	.0044	.063	14.3

Tabla 4.12

Como ya se ha comentado, el objetivo de mejorar la conservación a través de un aumento de las transferencias del Norte al Sur, se consigue de forma más eficiente cuando estas transferencias se invierten directamente en las especies. Por el contrario, si el objetivo es acelerar el crecimiento económico reduciendo d_1, es preferible el escenario AK. Por su parte, una variación de la tasa intrínseca de crecimiento siempre afecta en mayor medida a las variables de estado bajo el escenario de capacidad variable. Según esto último, si el deterioro medioambiental resultado del proceso productivo en el Sur amenaza con provocar una reducción de la tasa intrínseca de crecimiento, los efectos sobre los stocks de capital y las especies naturales son más perniciosos bajo el escenario de capacidad variable. No es, por tanto, posible asegurar que en todo caso un escenario sea preferible al otro. Adicionalmente, cabe señalar que los resultados dependen de cuál sea el nivel inicial de las especies naturales. Esto es así, pues cuanto menores sean estos niveles iniciales, mayor es la discrepancia entre el escenario de capacidad variable y el AK ante variaciones de la tasa intrínseca de crecimiento, pero más similares son estos escenarios ante variaciones de la proporción de capital transferido al Sur.

Por consiguiente, a la hora de decidir si invertir el capital transferido en las especies o en mejorar la productividad del capital, es decir, entre el escenario de capacidad variable o el AK, es necesario tener en cuenta tanto los objetivos que se persigan, como los valores iniciales de los stocks de las especies naturales.

4.4 Conclusiones

En este capítulo se estudia un modelo de comercio Norte-Sur en el cual se incluye un proceso de transferencia de capital de los países desarrollados a aquéllos en vías de desarrollo. Para estudiar el efecto de estas transferencias sobre el proceso productivo del Sur, se distinguen dos posibles escenarios. Por un lado, en el escenario AK se asume que el capital transferido se invierte en procesos tecnológicos que mejoran la productividad del trabajo en el Sur. De este modo, el Sur puede producir mayor cantidad del bien intermedio "natural" manteniendo constante el uso de recursos y conservando, por tanto, la biodiversidad. Por otro lado, el escenario de capacidad variable supone que estas transferencias se invierten directamente en las especies naturales, incrementando sus capacidades máximas. Esto permite una mayor extracción de recursos y, con ello, una mayor producción, sin provocar la extinción de las especies. Ambos escenarios persiguen la consecución de crecimiento económico sostenible, plasmado en un aumento de la producción (o del stock de capital), que no ponga en peligro la supervivencia de las especies naturales. Para el estudio del problema, toda vez que por la complejidad del planteamiento del modelo no ha sido posible encontrar soluciones analíticas, se hace necesario la implementación de métodos numéricos que permiten conocer el comportamiento de las soluciones.

Por lo que respecta al escenario AK, se obtienen condiciones que garantizan la posibilidad y optimalidad de una solución que implique crecimiento económico en ambas regiones, junto con la conservación de la biodiversidad. Cuando esto sucede, dependiendo de las condiciones iniciales, aparecen dos tipos de soluciones. En el caso monótono, el Sur sólo extrae recursos de una de las especies, y la otra alcanza su capacidad máxima. Por contra, en el caso oscilante, el Sur decide extraer recursos de ambas especies dedicando todo el esfuerzo de extracción alternativamente a cada una de ellas. En cualquiera de estos casos, se observa que un incremento de las transferencias del Norte al Sur provoca finalmente un mayor stock de las especies naturales pero, al mismo tiempo, un menor crecimiento del capital. Si se produce un aumento de la tasa intrínseca de crecimiento de las especies naturales, se incrementan tanto el stock final de capital como los stocks de ambas especies. De todo ello se deduce la existencia de un “trade-off” entre la tasa intrínseca de crecimiento y la proporción de capital transferido al Sur. Cuanto menor sea la tasa intrínseca de crecimiento de las especies naturales en el Sur, más capital debe ser transferido desde el Norte para garantizar la conservación de las especies y viceversa.

En el escenario de capacidad variable, donde las transferencias se dedican a incrementar las capacidades máximas de las especies, únicamente aparecen soluciones de tipo oscilante. La diferencia principal que presentan las soluciones en este escenario, en comparación con el AK, consiste en que, en este último escenario, mientras que el capital crece, los stocks de las especies fluctúan alrededor de un valor constante. Por el contrario, en el escenario de capacidad variable, el capital crece igualmente, pero los stocks de las variables fluctúan alrededor de un valor que no se mantiene constante, sino que crece con el stock de capital. Esto es debido a que parte del capital se invierte precisamente en mejorar las capacidades máximas de las especies.

El Norte debe ponderar los dos objetivos principales que se persiguen, esto es, crecimiento económico y conservación de la biodiversidad. Cuanto mayor crecimiento económico se pretenda alcanzar, menores serán las transferencias al Sur; por contra, cuando la extinción de las especies sea inminente, mayor habrá de ser el esfuerzo que haga el Norte por transferir capital con intención de permitir la conservación de éstas. La pregunta es si alguno de estos escenarios es capaz de conseguir más eficazmente ambos objetivos, es decir, ¿cómo ha de ser empleado el capital una vez transferido al Sur?

Si las condiciones iniciales son idénticas, el crecimiento del stock de capital es mayor cuando las transferencias se invierten en tecnologías que mejoren la productividad del trabajo en el Sur. Por el contrario, los stocks de las especies naturales alcanzan niveles superiores si estas transferencias se invierten en aumentar la capacidad máxima de las especies.

El efecto de un incremento, bien de la tasa intrínseca de crecimiento, o bien de la proporción de capital transferido al Sur, es cualitativamente idéntico en ambos escenarios. No obstante, los experimentos numéricos muestran que un aumento de las transferencias incrementa los stocks de las especies naturales en mayor medida en el escenario de capacidad variable y, además, en este escenario, la reducción del crecimiento económico es menor que en el AK. Por otro lado, un incremento de la tasa intrínseca de crecimiento provoca un mayor aumento, tanto en el crecimiento del stock de capital, como en los stocks de ambas especies naturales, cuando las transferencias se dedican a incrementar las capacidades máximas en lugar de mejorar la productividad.

Finalmente, es preciso comentar las críticas al modelo planteado en este capítulo. Teniendo presente que este modelo se construye sobre la base del presentado en el capítulo anterior, muchas de las críticas entonces planteadas pueden aplicarse a éste.

El modelo planteado en el presente capítulo pretende responder a algunas de las críticas apuntadas en el precedente:

1. *No se especificaba la forma en la cual se utilizaba el capital procedente del sobreprecio que el Norte estaba dispuesto a pagar por el bien intermedio "natural".*
   En el presente capítulo se permite que las transferencias del Norte al Sur se dediquen, bien a mejorar la productividad, o bien a incrementar las capacidades máximas de las especies. No es posible, no obstante, una utilización mixta de estas transferencias permitiendo incrementar al unísono las capacidades máximas y la tecnología productiva. Una especificación de este tipo podría arrojar luz sobre la forma óptima de utilizar las transferencias, dependiendo de las condiciones de partida y de los objetivos buscados.
2. *No se especificaba una dinámica poblacional de las especies naturales, lo que impedía tratarlas como recursos renovables. Tampoco se admitía la posibilidad de inversión en dichas especies naturales.*
   Ahora sí se estudia la dinámica poblacional de las especies naturales. No obstante, el introducir una ecuación diferencial para cada especie impide asumir un número infinito de ellas. Para simplificar el estudio, se asume que el Sur únicamente utiliza dos especies. Aun cuando esta región toma sus decisiones de extracción distinguiendo entre estas dos especies con distinta capacidad máxima, tanto la tasa intrínseca de recuperación como el coeficiente de captura son idénticos para ambas. Admitir la posibilidad de que estos parámetros difieran de una especie a otra provocaría una mayor complejidad en el análisis del modelo, aunque arrojaría información sobre cuáles son las especies más intensamente utilizadas en el proceso productivo del Sur. Otra extensión interesante consistiría en incrementar el número de especies que puede utilizar el Sur y, de esta manera, estudiar cómo una mayor biodiversidad afectaría tanto al proceso productivo como a la conservación de las especies naturales. La inclusión de más especies naturales en el planteamiento del modelo conllevaría tener que incluir tantas variables de control del Sur, como especies se considerasen.
3. *La tasa de ahorro tomaba valores entre cero y uno. Ello daba lugar a que la aparición*

de crecimiento sostenido requiriese estrategias de ahorro pleno indefinidamente. Estas estrategias no constituían un máximo para el Norte, cuyo consumo se veía reducido al de subsistencia.

En este capítulo, la tasa de ahorro se considera estrictamente positiva y menor que la unidad. Esto implica, en primer lugar, que la aparición de crecimiento sostenido no está ligada a la necesidad de ahorro máximo y, en segundo lugar, que la tasa de ahorro máximo pueda ser una estrategia que maximice el funcional objetivo del Norte.

Por otro lado, el asumir que la proporción del capital transferido al Sur es invariable durante todo el horizonte temporal simplifica el modelo, eliminando el stock de capital transferido al Sur como variable de estado, pues por este supuesto, es proporcional al stock de capital en el Norte. El suprimir este supuesto implica añadir una nueva variable de estado en el planteamiento del modelo, complicando su estudio. No obstante, esto daría una idea más precisa de cómo un cambio en la proporción de capital transferido al Sur afecta a las decisiones sobre producción y conservación. De este modo, sería una interesante extensión del modelo, el considerar d_1, en primer lugar como la variable de control del Norte en substitución de la tasa de ahorro; y posteriormente asumir que esta región tuviese poder de decisión sobre ambas variables al mismo tiempo.

Otra futura línea de investigación sería el estudio de las soluciones del juego en el caso de que los jugadores cooperen, al igual que en el capítulo anterior. Asimismo, resultaría interesante la comparación de los resultados en el caso cooperativo y en el no-cooperativo.

Capítulo 5
Conclusiones

A continuación se recogen las principales conclusiones derivadas del estuido de los distintos modelos analizados en el trabajo. No se incluyen aquí las principales críticas a los diferentes modelos, así como tampoco sus posibles extensiones, ya que éstas aparecen recogidas al final de cada uno de los capítulos de esta memoria de investigación.

En el capítulo 2 se caracteriza la relación comercial que liga las regiones del Norte y del Sur por medio de un modelo estático de equilibrio general. El Norte se especializa en la producción de un bien intensivo en capital, mientras que el Sur lo hace en uno intensivo en recursos. La producción del bien intensivo en recursos conserva la biodiversidad en menor medida que la del bien intensivo en capital. Dentro de este marco de equilibrio general se incorpora la biodiversidad en la función de utilidad del consumidor, asumiendo que la utilidad que a éste le reporta el consumo de un bien determinado es directamente proporcional al número de especies conservadas bajo el proceso productivo de dicho bien. De hecho, el agente representativo es capaz de ordenar las infinitas especies según la valoración que confiere a cada una de ellas, siendo conservadas aquéllas que más utilidad le reportan. Al mismo tiempo, la conservación de la biodiversidad también representa un coste en la producción de ambos bienes. Dos son las principales conclusiones que se derivan del estudio del modelo presentado en este capítulo. En primer lugar, se demuestra que al aumentar el número de especies conservadas bajo el proceso productivo en el que esté especializada una región, se incrementa el precio relativo de dicho bien, obteniendo mejoras en su situación de mercado. No obstante, si ambas regiones aumentan la conservación al unísono, el precio relativo del bien exportado por el Sur crece respecto al del Norte. La "ventaja comparativa" del Sur, al mejorar la conservación de la diversidad biológica, disminuye conforme se acerca, en términos relativos, al número de especies conservadas por el Norte. En segundo lugar, se estudia el efecto de un cambio de preferencias hacia una valoración más homogénea de las especies, que se asume probable. Este cambio supone un aumento en el interés sobre la biodiversidad, aunque se mantenga constante la valoración del medio ambiente en su conjunto. Si se produjese este cambio de preferencias caería el precio relativo del Sur que, de esta forma, está soportando un riesgo, al no aumentar la conservación de la biodiversidad aproximándola a la del Norte. Desde ambos puntos de vista, al aumentar la conservación de la biodiversidad, el Sur mejora en su relación comercial y ve reducido el riesgo de variaciones en las preferencias.

Por lo que se refiere al capítulo 3, de nuevo, se trata de incluir la biodiversidad dentro de un contexto de comercio entre países desarrollados y en vías de desarrollo pero, en este caso, desde un punto de vista dinámico. De esta forma, se define un juego diferencial de comercio Norte-Sur. El Norte produce un bien de consumo utilizando capital, trabajo y recursos naturales, debiendo decidir la proporción de su renta que dedica a ahorrar y, por ende, a invertir. La función de producción en esta región presenta rendimientos constantes a escala en el factor capital, posibilitando la aparición de crecimiento endógeno. Por su parte, el Sur produce un bien intermedio "natural", utilizando trabajo y extrayendo recursos de un número determinado de especies naturales. Debe decidir el número de especies naturales a utilizar para producir dicho bien, el cual es comprado por el Norte, quien lo necesita como un input en su proceso productivo. Al fijar este número, el Sur selecciona la biodiversidad a conservar y, al mismo tiempo, con esta información, y bajo el supuesto de competencia perfecta, el mercado determina el precio al que es vendido al Norte. No obstante, el Norte paga un sobreprecio adicional, que indica su interés por la conservación de la biodiversidad. Ésta, entra directamente dentro de la función de utilidad del Sur, e indirectamente en la del Norte. En este modelo se estudian dos: en el Escenario I se asume que el número de especies que el Sur puede utilizar en su proceso productivo está acotado inferior y superiormente; mientras que en el Escenario II, aunque existe una cota inferior, no existe límite superior para este número. Para el juego diferencial planteado se calculan las soluciones de ciclo abierto, suponiendo tanto comportamientos cooperativos como no-cooperativos, así como un horizonte temporal finito e infinito.

En primer lugar se resuelve el juego asumiendo un horizonte temporal finito y comportamiento no-cooperativo. Con esta especificación, bajo el escenario I existe una cota para el stock de capital tal que, los valores iniciales de éste por debajo de dicha cota dan lugar a una solución con un primer periodo de crecimiento del capital hasta que alcanza dicha cota y, a partir de ese instante y hasta el final del juego, estancamiento del capital. Si el valor inicial del capital se encuentra por encima de esta cota, entonces no se produce crecimiento económico. Bajo el Escenario II, para determinados valores de los parámetros, relacionados con un horizonte temporal corto, el comportamiento es análogo al descrito para el Escenario I; mientras que para otro rango de valores, asociados con un horizonte temporal largo, nunca es óptima una solución de estancamiento, produciéndose crecimiento económico en cualquier caso. Asumiendo un horizonte finito pero suponiendo que los jugadores cooperan, siempre existe un rango de valores para el poder de negociación de las regiones dentro del cual el crecimiento económico está garantizado. Cuando se consideran condiciones sobre los parámetros que garantizan que se produce crecimiento en los casos cooperativo y no-cooperativo, se demuestra numéricamente que el crecimiento económico es mayor y más duradero cuando las dos regiones deciden cooperar.

En segundo lugar, se presentan los resultados cuando se asume un horizonte temporal infinito. En el caso no-cooperativo, si el tanto de descuento toma valores entre la tasa máxima y mínima de crecimiento del stock de capital, entonces existe una cota para el stock de capital tal que, al igual que en el caso finito, por debajo de esta cota se produce crecimiento durante un primer periodo seguido de estancamiento, mientras que por encima de la misma el capital siempre se mantiene constante. Por contra, si el tanto de descuento supera la tasa máxima de crecimiento, siempre es óptima la solución de estancamiento. En cualquier caso, si los jugadores no cooperan, nunca es óptima una solución de crecimiento ininterrumpido. En el supuesto de que los jugadores decidan actuar de forma cooperativa, se puede producir crecimiento sostenido si el poder de negociación del Sur es alto; o bien, una solución de estancamiento si el Norte tiene gran poder de negociación.

En el supuesto no-cooperativo la cota sobre el stock de capital que determina la aparición o no de crecimiento en el juego con horizonte infinito, es el límite de esta misma cota en el caso de horizonte finito, cuando el horizonte temporal tiende hacia infinito. Del mismo modo, en el caso cooperativo, el poder de negociación del Norte, que determina la aparición o no de crecimiento en el caso infinito, es el límite de este valor en el juego de horizonte finito.

Por último, sobre la base del capítulo 3, el capítulo 4 incluye dos nuevas ideas, dando lugar a un modelo más rico aunque, al mismo tiempo, más complejo. En primer lugar, se tiene en cuenta la dinámica de las especies naturales, asumiendo una función de reproducción logística con distinta capacidad máxima para cada una de las especies naturales. La incorporación de esta dinámica obliga a un supuesto simplista, que consiste en trabajar únicamente con dos especies naturales representativas, en lugar de infinitas como en el capítulo 3. La segunda idea hace referencia a las transferencias de capital del Norte al Sur y su utilización en esta última región. Si en el capítulo 3 el Norte pagaba un sobreprecio por el bien intermedio "natural", en este capítulo esta región transfiere al Sur una proporción de sus ahorros. Se distinguen dos escenarios según cómo sea empleada esta cantidad por los países en vías de desarrollo. En el escenario AK el capital transferido se invierte en procesos tecnológicos, incrementándose la productividad del trabajo en el Sur. En el escenario de capacidad variable esta cantidad se invierte directamente en las especies naturales, aumentando la capacidad máxima de las mismas. En ambos casos mejora la relación entre crecimiento económico y conservación de las especies naturales. La complejidad del problema hace necesaria la utilización de métodos numéricos para su resolución.

Bajo el escenario AK se pueden encontrar dos tipos de soluciones que garantizan la aparición de crecimiento económico y conservación de las especies. En el caso monótono, el Sur únicamente utiliza una de las dos especies en su proceso productivo, llegando el stock de ésta a su estado estacionario, mientras el stock de la otra alcanza su capacidad máxima. En el caso oscilante se utilizan ambas especies, siendo extraídas alternativamente a la tasa máxima para producir el bien intermedio "natural". Cuando se considera el escenario de capacidad variable únicamente se obtiene una solución de tipo oscilante.

Finalmente, se procede a la comparación de los dos escenarios. En ambos se produce crecimiento del capital, sin embargo, en el escenario AK los stocks de las especies naturales oscilan alrededor de valores constantes, mientras que en el de capacidad variable lo hacen alrededor de una tendencia creciente. A iguales condiciones iniciales, el crecimiento del stock de capital es superior en el escenario AK, mientras que los stocks de las especies se comportan mejor bajo el de capacidad variable. Por lo que se refiere a efectos incrementales, un aumento de las transferencias del Norte al Sur produce unos mayores stocks de las especies naturales aunque un menor crecimiento económico. Además, el aumento de los stocks es mayor y la reducción del crecimiento económico menos pronunciada en el escenario de capacidad variable. Por otro lado, un incremento en la tasa intrínseca de crecimiento de las especies naturales da lugar a stocks de las especies más altos y mayor crecimiento económico, siendo más fuertes dichos aumentos en el escenario de capacidad variable.

Bibliografía

[1] Aghion, P. & Howitt, P. (1992), 'A model of growth through creative destruction', *Econometrica*, 60, pp. 323-351.

[2] Alemdar, N. M. & Özyildirim, S. (1998), 'A genetic game of trade, growth and externalities', *Journal of Economic Dynamic and Control*, 22, pp. 811-832.

[3] Aronsson, T. & Löfgren, K. (1999), 'Renewable resources: forestry', en C.J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 122-140.

[4] Arrow, K. J. et al. (1995), 'Economic growth, carrying capacity, and the environment', *Ecological Economics*, 15, pp. 91-95.

[5] Barret, S. (1992), 'Some economics of the convention on biological diversity', CSERGE GEC Working paper GEC 92-133.

[6] Barret, S. (1994a), 'The biodiversity supergame', *Environmental and Resource Economics*, 4, pp. 111-122.

[7] Barret, S. (1994b), 'Strategic environmental policy and international trade', *Journal of Public Economics*, 54, pp. 325-338.

[8] Barret, S. (1994c), 'Self-enforcing international environmental agreement'. *Oxford Economic Papers*, 46, pp. 878-894.

[9] Barret, S. (1995), 'On biodiversity conservation', en C. Perrings, K. G. Mäler, C. Folke, C. S. Holling & B. O. Jansson Eds., *Biodiversity Loss.* Cambridge University Press, Cambridge, UK. pp. 283–297.

[10] Barro, R. (1991). 'Economic growth in a cross-section of countries', *Quarterly Journal of Economics*, 106, pp. 407-443.

[11] Barro, R. & Sala-i-Martín, X. (1995), *Economic Growth*. McGraw-Hill, New York, NY.

[12] Başar, T. & Olsder, G. J. (1995), *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press. New York, NY.

[13] Benhabib, J. & Radner, R. (1992), 'The joint exploitation of a productive asset: a game-theoretic approach', *Economic Theory*, 2, pp. 155-190.

[14] Bhagwati , J. N. & Srinivasan, T. N. (1983), *Lectures on International Trade*. MIT Press. Cambridge, MA.

[15] Blamey, R.K. & Common, M. (1992), 'Sustainability and the limits to pseudo market valuation', en M. Lockwood & T. DeLacy Eds., *Valuing natural areas: Application and problems of the contingent valuation method.* Johnstone Centre: Charles Sturt University, Albury, NSW. pp. 117-146.

[16] Bovenberg, A. L. & Mooij, R. A. (1997), 'Environmental tax reform and endogenous growth', *Journal of Public Economics*, 63, pp. 207-237.

[17] Bovenberg, A. L. & Smulders, S. A. (1995), 'Environmental quality and pollution-augmenting technological change in a two-sectors endogenous growth model', *Journal of Public Economics*, 57, pp. 369-391.

[18] Bovenberg, A. L. & Smulders, S. A. (1996), 'Transitional impacts of environmental policy in an endogenous growth model', *International Economic Review*, 37, pp. 861-893.

[19] Brander, J. & Taylor, M. S. (1995), 'International trade and open access renewable resources: the small country case', *NBER Working paper* 5021.

[20] Brander, J. A. & Taylor, M. S. (1998), 'Open access renewable resources: trade and trade policy in a two-country model', *Journal of international Economics*, 44, pp. 181-209.

[21] Buchholz, W. & Konrad, K. A. (1995), 'Strategic transfers and private provision of public goods', *Journal of Public Economics*, 57, pp. 489-505.

[22] Burghes, D. & Graham, A. (1980), *Introduction to Control Theory Including Optimal Control.* Ellis Horwood Ltd, Chichester, West Sussex, UK.

[23] Cabo, F. (1999), 'Valuation of Biodiversity in a North-South Trade Model', *Environment and Development Economics*, 4, pp.251-277.

[24] Cabo, F. & Martín-Herrán, G. (1999), 'Biodiversity: A North-South Trade Differential Game', en proceso de evaluación.

[25] Cabo, F., Escudero, E. & Martín-Herrán, G. (1999), 'Towards an Ecological Technology of Global Growth in a North-South Trade Model', en proceso de evaluación.

[26] Cabo, F., Escudero, E. & Martín-Herrán, G. (2000), 'Ecological Technologies and Sustainable Development in a North-South Trade Model', *Business & Economics for the 21st Century, Vol III (en prensa).*

[27] Carraro, C. (1999), 'Environmental conflict, bargaining and cooperation', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 461-471.

[28] Carraro, C. & Siniscalco, D. (1993), 'Strategies for the international protection of the environment', *Journal of Public Economics*, 52, pp. 309-328.

[29] Cass, D. (1965), 'Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation', *Review of Economic Studies*, 32, pp. 233-240.

[30] Chander, P. & Tulkens, H. (1992), 'Theoretical foundations of negotiations and cost sharing in transfrontier pollution problems', *European Economic Review*, 36, pp. 388-398.

[31] Chiang, A. C. (1992), *Elements of Dynamic Optimization.* McGraw-Hill, Inc, New York, NY.

[32] Chiarella, C. (1980), 'Trading between resource-poor and resource-rich economies as a differential game', en M. C. Kemp & N. V. Long, Eds., *Exhaustible Resources, Optimality and Trade*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands. pp. 219-246.

[33] Chichilnisky, G. (1991), 'A general equilibrium theory of North-South trade', en W. Heller, D. Starrett & R. Starr, Eds., *Equilibrium Analysis, v.2.* Cambridge University Press. pp. 3-56.

[34] Chichilnisky, G. (1994a), 'North-South trade and the Global Environment', *American Economic Review*, 84, pp. 851-874.

[35] Chichilnisky, G. (1994b), 'Property rights and the dynamics of renewable resources in North-South trade', en C. Carraro, Ed., *Trade, Innovation, Environment.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. pp. 15-54.

[36] Clark, C. W. (1990), *Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of Renewable Resources.* Wiley-Interscience Publications. New York, NY.

[37] Clark, C. W. (1999), 'Renewable resources: fisheries', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 109-121.

[38] Clemhout, S. & Wan, H. Y. Jr. (1985), 'Dynamic common property resources and environmental problems', *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46, pp. 471-481.

[39] Clemhout, S. & Wan, H. Y. Jr. (1994), 'Differential games-economic applications', en R.

J. Auman & S. Hart, Eds., *Handbook of Game Theory*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands. pp. 802-823.

[40] Conrad, K. (1999), 'Computable general equilibrium models for environmental economics and policy analysis', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 1060-1088.

[41] Copeland, B. & Taylor, M. S. (1994), 'North-South trade and the environment', *Quarterly Journal of Economics*, 109, pp. 755-787.

[42] Copeland, B. & Taylor, M. S. (1995), 'Trade and transboundary pollution', *American Economic Review*, 85, pp. 716-737.

[43] Daily, G. (1996), *Ecological Issues Statement on Ecosystem Services*. Stanford University Department of Biological Sciences.

[44] Dasgupta, P. & Heal, G. (1974), 'The optimal depletion of exhaustible resources', *Review of Economic Studies*, Symposium, pp. 3-28.

[45] Dasgupta, P. & Heal, G. (1979), *Economic Theory and Exhaustible Resources*. Cambridge University Press. Cambridge, UK.

[46] Dixit, A. et al. (1980), 'On Hartwick's rule for regular maximin paths of capital accumulation', *Review of Economic Studies*, 47, pp. 551-556.

[47] Dockner, E. J. & Long, N. V. (1993), 'International pollution control: cooperative versus non-cooperative strategies', *Journal of Environmental Economics and Management*, 24, pp. 13-29.

[48] Dockner, E. J. et al. (1985), 'Tractable classes of nonzero-sum open-loop Nash differential games: theory and examples', *Journal of Optimization Theory and Applications*, 45, 179-197.

[49] Dutta, P. K. & Sundaram, R. K. (1993), 'The tragedy of the commons?', *Economic Theory*, 3, pp. 413-426.

[50] Fershtman, C. (1987), 'Identification of classes of differential games for which the open loop is a degenerate feedback Nash equilibrium', *Journal of Optimization Theory and Applications,* 55, pp. 217-231.

[51] Fleming, W. H. & Rishel, R. W. (1975), *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag, New York, NY.

[52] Folmer, H. & Zeeuw, A. d. (1999), 'Game theory in environmental policy analysis', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 1089-1098.

[53] Galor, O. (1986), 'Global dynamic inefficiency in the absence of international policy coordination: a North-South case', *Journal of International Economics*, 21, pp. 137-149.

[54] Gradus, R. & Smulders, S. (1993), 'The trade-off between environmental care and long term growth-pollution in three prototype growth models', *Journal of Economics*, 58, pp. 25-51.

[55] Grossman, G. M. & Helpman, E. (1991), *Innovation and Growth in the global economy*. MIT Press. Cambridge, MA.

[56] Grossman, G. M. & Krueger, A. B. (1991), 'Environmental impacts of a North American free trade agreement', *NBER Working paper*, 3914.

[57] Grossman, G. M. & Krueger, A. B. (1994), 'Economic growth and the environment', *NBER Working paper* 4634.

[58] Gruver, G. W. (1976), 'Optimal investment in a pollution control capital in a neoclassical

growth context', *Journal of Environmental Economics and Management*, 3, pp. 165-177.

[59] Hanley, N. & Folmer, H. (1998), *Game Theory and the Environment*, Edward Elgar, Cheltenham, UK.

[60] Hardin, G. (1968), 'The tragedy of the commons', *Science*, 162, pp. 1243-1248.

[61] Hartwick, J. M. (1977), 'Intergenerational equity and the investing of rents from exhaustible resources', *American Economic Review*, 66, pp. 973-1004.

[62] Heal, G. (1993) 'The optimal use of exhaustible resources', en A.V. Kneese & J.L. Sweeney, Eds., *Handbook of Natural Resources and Energy Economics*, Vol III. Elsevier, Amsterdam, pp. 855-80.

[63] Hoel, M. (1978), 'Distribution and growth in a differential game model between workers and capitalists', *International Economic Review*, 19, pp. 335-350.

[64] Hoel, M. (1999), 'Transboundary environmental problems', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 427-487.

[65] Holling, C. S. et al. (1995), 'Biodiversity in the functioning of ecosystems: an ecological synthesis', en C. Perrings, K. G. Mäler, C. Folke, C. S. Holling & B. O. Jansson Eds., *Biodiversity Loss.* Cambridge University Press, Cambridge, UK. pp. 44-84.

[66] Ihori, T. (1996), 'International public goods and contribution productivity differentials', *Journal of Public Economics*, 61, pp. 139-154.

[67] John, A. & Pecchenino, R. (1994), 'An overlapping generations model of growth and the environment', *The Economic Journal*, 104, pp. 1393-1410.

[68] Joseph, L. (1990), *Gaia: the Growth of an Idea.* Arkana. London, UK.

[69] Judd, K.L. (1998), *Numerical Methods in Economics.* MIT Press. Cambridge, MA.

[70] Kaimen, I. K. & Schwartz, N. L. (1971), 'Sufficient conditions in optimal control theory', *Journal of Economic Theory,* 3, pp. 207-241.

[71] Kaitala, V. & Pohjola, M. (1990), 'Economic development and agreeable redistribution in capitalism: efficient game equilibria in a two-class neoclasical growth model', *International Economic Review*, 31, pp. 421-438.

[72] Keller, H.B. (1992) *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. Dover Publications, New York, NY.

[73] Kemp, M. C. & Long, V. N. (1984), 'The role of natural resources in trade models', en R. W. Jones & P. B. Kenen, Eds. *Handbook of International Economics.* North-Holland. pp. 367-417.

[74] Koopmans, T. C. (1965), 'On the concept of optimal economic growth', en R. McNally, Ed. *The Econometric Approach to Development Planning*. North Holland, Amsterdam, The Netherlands.

[75] Krugman, P. (1979), 'A model of innovation, technology transfer, and the world distribution of income', *Journal of Political Economy,* 87, pp. 253-266.

[76] Krutilla, K (1991), 'Environmental regulation in an open economy', *Journal of Environmental Economics and Management*, 20, pp. 127-142.

[77] Krutilla, K (1999), 'Partial equilibrium models of trade and the environment', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 404-415.

[78] Lancaster, K. (1973), 'The dynamic inefficiency of capitalism', *Journal of Political Economy*, 81, pp. 1092-1109.

[79] Leitmann, G. (1974), *Cooperative and Non-cooperative Many Players Differential Games*. Springer-Verlag, Udine, Italy.

[80] Levhari, D. & Mirman, L. J. (1980), 'The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution', *The Bell Journal of Economics*, 11, pp. 322-334.

[81] Lewis, W. A. (1954), 'Economic development with unlimited supplies of labour', *The Manchester School*, 22, pp. 139- 191.

[82] Ligthart, J. E. & Ploeg, F. v. d. (1994), 'Pollution, the cost of public funds and endogenous growth', *Economics Letters*, 46, pp. 351-361.

[83] N. V. Long (1999), 'International trade and natural resources', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 75-88.

[84] Lucas, R. E. Jr. (1988), 'On the mechanics of development planning', *Journal of Monetary Economics*, 22, pp. 3-42.

[85] Mangasarian, O. L. (1966), 'Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems', SIAM *Journal of Control*, 4, pp. 139-152.

[86] Markusen, J. R. & Melvin, J. R. (1981) 'Trade, factor prices and the gains from trade with increasing returns to scale', *Canadian Journal of Economics*, 14, pp. 450-469.

[87] MATLAB, edición de estudiante.(1996), Guía de usuario. Versión 4. Prentice Hall, Madrid, España.

[88] May, R. M. (1988), 'How many species are there on earth?', *Science,* 247, pp. 1441-49.

[89] Melhmann, A. (1988), *Applied Differential Games*. Plenum Press, New York, NY.

[90] Michel, P. & Rotillon, G. (1995), 'Disutility of pollution and endogenous growth', *Environmental and Resource Economics*, 6, pp. 279-300.

[91] Mintu-Wimsatt, A. & Lozada, H. R. (1996), *Green marketing in a unified Europe*. Haworth Press, International Business Press. New York and London.

[92] Missfeldt, F. (1999), 'Game-theoretic modelling of transboundary pollution', *Journal of Economic Surveys*, 13, pp. 287-321.

[93] Panayotou, T. (1994), 'Conservation of biodiversity and economic development: the concept of transferable development rights', *Environmental and Resource Economics*, 4, pp. 91-110.

[94] Panayotou, T. (1996), *Green Markets: The Economics of Sustainable Development*. International Center for Economic Growth and the Harvard Institute for International Development, San Francisco. CA.

[95] Pearce, D. (1999), 'Economic analysis of environmental issues', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 488-504.

[96] Perrings, C. (1995), 'Biodiversity conservation as insurance', en T. M. Swanson Ed., *The Economics and Ecology of Biodiversity Decline: The Forces Driving Global Change*. Cambridge University Press, Cambridge, UK. pp. 69-77.

[97] Perroni, C. & Wigle, R. M. (1994), 'International trade and environmental quality: how important are the linkages?', *Canadian Journal of Economics*, 27, pp. 551-567.

[98] Ploeg, F. v. d. & Ligthart, J. E. (1994), 'Sustainable growth and renewable resources in the global economy', en C. Carraro, Ed., *Trade, Innovation, Environment*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. pp. 259-280.

[99] Ploeg, F. v. d. & Withagen, C. (1991), 'Pollution control and the Ramsey problem', *Envi-*

ronment and Resource Economics, 1, pp. 215-236.
[100] Polonsky, M. J. & Mintu-Wimsatt, A. (1995), *Environmental Marketing: Strategies, Practice, Theory, and Research.* The Hayworth Press. Binghampton, NY.
[101] Pontryagin, L. S. et al. (1962), *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, New York, NY.
[102] Porter, M. E. (1991), 'America's green strategy', *Scientific American*, 264, pp. 168.
[103] Proost, S. (1999), 'Public Economics and environmental policy', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 329-338.
[104] Ramsey, F. (1928), 'A mathematical theory of saving', *Economic Journal*, 38, pp. 543-559.
[105] Rauscher, M. (1994), 'On ecological dumping', *Oxford Economic Papers*, 46, pp. 822-840.
[106] Rebelo, S. (1991), 'Long-run policy analysis and long-run growth', *Journal of Political Economy*, 99, pp. 500-521.
[107] Romer, P. (1986), 'Increasing returns and long-run growth', *Journal of Political Economy*, 94, pp. 1002–1037.
[108] Romer, P. (1990), 'Endogenous technological change', *Journal of Political Economy*, 98, part II, pp. S71–S102.
[109] Rowthorn, B. & Brown G. (1995), 'Biodiversity economic growth and the discount rate', en T. M. Swanson Ed., *The Economics and Ecology of Biodiversity Decline: The Forces Driving Global Change.* Cambridge University Press, Cambridge, UK. pp. 25-39.
[110] Rustichini, A. (1992), 'Second best equilibria for games of joint exploitation of a productive asset', *Economic Theory*, 2, pp. 191-196.
[111] Sefton, J. A. & Weale, M. R. (1996), 'The net national product and exhaustible resources: the effects of foreign trade', *Journal of Public Economics*, 3, pp. 21-47.
[112] Shafik, N. (1994), 'Economic development and environmental quality: an econometric analysis', *Oxford Economic Papers*, 46, pp. 757-773.
[113] Simpson, R. D. & Sedjo, R. A. (1996), 'Valuing biodiversity for use in pharmaceutical research', *Journal of Political Economy*, 104, pp. 163-185.
[114] Smulders, S. A. (1995), 'Environmental policy and sustainable economic growth', *De Economist*, 143, pp. 163-195.
[115] Solow, R. (1956), 'A contribution to the Theory of Economic Growth', *Quarterly Journal of Economics*, 70, pp. 55-94.
[116] Solow, R. (1974), 'Intergenerational equity and exhaustible resources', *Review of Economic Studies (Symposium)*, pp. 29-45.
[117] Southwood, T. R. E. (1978), 'The Components of Diversity', en L. A. Mound & N. Waloff Eds., *Diversity of insect faunas.* Blackwell, Oxford, UK.
[118] Stähler, F. (1996), 'On international compensation for environmental stocks', *Environmental and Resource Economics*, 8, pp. 1-13.
[119] Steininger, K. W. (1999), 'General models of environmental policy and foreign trade', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics.* Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 416-432.
[120] Stokey, N. (1998). 'Are there limits to growth?', *International Economic Review*, 39, pp. 1-31.
[121] Stork, N. E. (1988), 'Insect diversity: facts, fiction and speculation', *Biological Journal*

of the Linnean Society, 35, pp. 321-337.

[122] Swan, T. W. (1956), 'Economic Growth and capital accummulation', *Economic Record*, 32, pp. 334-361.

[123] Swanson, T. (1993), 'Endangered Species', *Economic Policy: A European Forum*, 8, 183-205.

[124] Swanson, T. (1994), *The International Regulation of Extinction*. The McMillan Press, London, UK.

[125] Swanson, T. (1995), 'The International Regulation of Biodiversity Decline: Optimal Policy and Evolutionary Product', en C. Perrings, K. G. Mäler, C. Folke, C.S. Holling & B. O. Jansson, Eds., *Biodiversity Loss*. Cambridge University Press, Cambridge, UK. pp. 225-259.

[126] Swanson, T. (1996), 'The reliance of northern economies on southern biodiversity: biodiversity as information', *Ecological Economics*, 17, pp. 1-8.

[127] Swanson, T. (1997), *Global Action for Biodiversity: An International Framework for Implementing the Convention on Biological Diversity*. Earthscan Publications, London, UK.

[128] Sweeney, L. J. (1993), 'Economic theory of depletable resources: an introduction', en A.V. Kneese & J.L. Sweeney, Eds., *Handbook of Natural Resources and Energy Economics*, Vol III. Elsevier, Amsterdam, pp. 759-854.

[129] Tahvonen, O. & Kuuluvainen, J. (1993), 'Economic growth, pollution, and renewable resources', *Journal of Environmental Economics and Management*, 24, pp. 101-118.

[130] Tornell, A. & Velasco, A. (1992), 'The tragedy of the commons and economic growth: why does capital flow from poor to rich countries?', *Journal of Political Economy*, 100, pp. 1208-1231.

[131] Ulph, A. M. (1999), 'Strategic environmental policy and foreign trade', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 433-448.

[132] Verbruggen, H. (1999), 'Environment, international trade and development', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 449-460.

[133] Verdier, T. (1995), 'Environmental pollution and endogenous growth: a comparison between emission taxes and technological standards', en C. Carraro & J. A. Filar, Eds., *Control and Game Theoretic Models of the Environmen*t. Birkhäuser. pp. 175-200.

[134] Verhoef, E. T. (1999), 'Externalities', en Jeroen C. J. M. v. d. Berg, Ed., *Handbook of Environment and Resource Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, UK. pp. 197-214.

[135] Weitzman, M.L. (1992), 'On diversity', *Quarterly Journal of Political Economics, 107*, pp. 363-406.

[136] Weitzman, M.L. (1993), 'What to preserve? An application of diversity theory to crane conservation', *Quarterly Journal of Political Economics, 108*, pp. 157-184.

[137] Withagen, C. (1995), 'Pollution, abatement and balanced growth', *Environmental and Resource Economics*, 5, pp. 1-8.

[138] Yeung, D. W. K. & Cheung, M. T. (1994), 'Capital accumulation subject to pollution control: A differential game with a feedback Nash equilibrium', en T. Başar & A. Haurie, Eds., *Advances in Dynamic Games and Applications*. Birkhäuser, Boston, MA. pp. 289-300.

[139] Zeeuw, A. (1998), 'International dynamic pollution control', en N. Hanley & H. Folmer Eds., *Game Theory and the Environment*, Edward Elgar, Cheltenham, UK.