

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ENERGÉTICA Y FLUIDOMECÁNICA

TESIS DOCTORAL

**ESTUDIO NUMÉRICO Y EXPERIMENTAL DE
CHORROS DE PARED PLANOS PARALELOS E
INCLINADOS**

JOSÉ MANUEL VILLAFRUELA ESPINA

Valladolid, enero 2001

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ENERGÉTICA Y FLUIDOMECÁNICA

TESIS DOCTORAL

**ESTUDIO NUMÉRICO Y EXPERIMENTAL DE
CHORROS DE PARED PLANOS PARALELOS E
INCLINADOS**

Presentada por:

JOSÉ MANUEL VILLAFRUELA ESPINA

Directores:

FRANCISCO CASTRO RUIZ
MARÍA TERESA PARRA SANTOS

Valladolid, enero de 2001

Resumen

Esta tesis se centra en el estudio de los chorros de pared planos paralelos e inclinados tanto desde un punto de vista experimental como de simulación numérica. En ambos casos se trata de flujos estacionarios, turbulentos, isotermos, en ausencia de gradiente de presiones.

Utilizando la anemometría de hilo caliente se ha caracterizado el campo de velocidad de chorros de pared planos paralelos para números de Reynolds de 10.000, 20.000 y 30.000. Estas medidas se han contrastado con las de otros investigadores permitiendo validar la instalación experimental.

Para los mismos números de Reynolds se ha medido el campo de velocidad de chorros de pared planos inclinados con ángulos de 10° , 20° y 30° , analizando la influencia de este parámetro en el desarrollo del chorro. Se considera esta parte una de las principales aportaciones de esta tesis, ya que no se han encontrado apenas publicaciones sobre este tipo de flujo.

Por otra parte se han implementado en un código de propósito general de mecánica de fluidos tres modelos de turbulencia tipo $k-\varepsilon$ con correcciones cerca de la pared a partir del modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ estándar que dispone el código. Se ha analizado la capacidad del código de predecir el chorro de pared plano paralelo con estos cuatro modelos contrastando los resultados con datos experimentales de esta tesis y de otros autores.

A partir del modelo de turbulencia que proporciona los mejores resultados se ha desarrollado un modelo numérico. Con éste se han realizado simulaciones de chorros de pared planos paralelos e inclinados para los mismos ángulos y números de Reynolds que en el estudio experimental. La validación de estas simulaciones se ha realizado con medidas propias y de otros autores para los chorros de pared planos paralelos y exclusivamente con medidas propias para los inclinados.

Índice general

Índice general	1
Lista de símbolos	5
1. Introducción	9
1.1. Definición	9
1.2. Aplicaciones	9
1.3. Estado del arte	11
1.4. Objetivos	16
1.5. Contenido	17
2. Instalación experimental	19
2.1. Introducción	19
2.2. Túnel de viento	21
2.3. Generador de flujo, estructura soporte y desplazadores	24
2.4. Caracterización de la instalación	28
2.4.1. Generador de flujo	28
2.4.2. Superficie plana	28
2.4.3. Salida del chorro	30
2.5. La técnica de medida	31
2.5.1. Principio de funcionamiento. Transferencia de calor desde el sensor	31
2.5.2. Respuesta direccional	33
2.5.3. Circuito electrónico	36

2.5.4.	Calibración	38
2.5.5.	Corrección de temperatura	42
3.	Estudio experimental	45
3.1.	El chorro de pared plano	45
3.1.1.	Ecuaciones	45
3.1.2.	Semejanza	46
3.1.3.	Bidimensionalidad	49
3.2.	Medidas en chorros de pared planos paralelos	51
3.2.1.	Perfiles de velocidades medias	52
3.2.2.	Velocidad máxima	54
3.2.3.	Semiancho	56
3.2.4.	Esfuerzo tangencial en la pared	58
3.2.5.	Perfiles de velocidad en las proximidades de la pared	59
3.2.6.	Parámetros turbulentos	61
3.3.	Medidas en chorros de pared planos inclinados	64
3.3.1.	Perfiles de velocidades medias	65
3.3.2.	Semiancho	66
3.3.3.	Velocidad máxima	70
3.3.4.	Caudal de aire arrastrado	70
4.	Modelado numérico de chorros de pared	73
4.1.	Introducción	73
4.2.	Modelado de la turbulencia	75
4.2.1.	Introducción	75
4.2.2.	Modelo $k-\varepsilon$ estándar	81
4.2.2.1.	Formulación	81
4.2.2.2.	Condiciones de contorno	82
4.2.2.3.	Implementación del modelo $k-\varepsilon$ estándar	85
4.2.3.	Modelos $k-\varepsilon$ para números de Reynolds bajos	86
4.3.	Procedimiento numérico	90

4.3.1.	Dominio computacional	90
4.3.1.1.	Chorro paralelo	90
4.3.1.2.	Chorro inclinado	91
4.3.2.	Condiciones de contorno	92
4.3.3.	Ecuaciones	92
4.3.4.	Procedimiento de cálculo	92
4.3.5.	Modelos de turbulencia en el código	93
4.3.6.	Proceso de resolución	94
4.3.7.	Convergencia y estacionaridad de la solución	98
4.4.	Independencia de los resultados numéricos de la discretización espacial	99
4.4.1.	Mallas preliminares para el chorro de pared plano paralelo . .	99
4.4.2.	Independencia de la malla para los modelos de turbulencia . .	101
4.4.3.	Influencia de la longitud del dominio	102
4.4.4.	Influencia del ángulo del límite superior del dominio	103
4.4.5.	Independencia de los resultados de la malla para el chorro de pared plano inclinado	104
4.4.6.	Zona inicial	104
4.4.7.	Zona de desarrollo	106
5.	Resultados numéricos	109
5.1.	Chorro de pared plano paralelo	109
5.1.1.	Modelos de turbulencia	109
5.1.1.1.	Magnitudes medias	110
5.1.1.2.	Magnitudes turbulentas	112
5.1.1.3.	Región próxima a la pared	113
5.1.2.	Influencia del número de Reynolds en el chorro de pared plano paralelo	117
5.2.	Chorro de pared plano inclinado	122
5.2.1.	Región inicial	122
5.2.2.	Influencia del número de Reynolds en la región inicial	126
5.2.3.	Región desarrollada	128

6. Conclusiones y trabajos futuros	133
6.1. Conclusiones	133
6.2. Trabajos futuros	136
Bibliografía	139
A. Subrutinas	147
A.1. Subrutina <i>usrsuu.f</i>	147
A.2. Subrutina <i>usrste.f</i>	149
A.3. Subrutina <i>usrsted.f</i>	152
A.4. Subrutina <i>usrvis.f</i>	158
A.5. Subrutina para monitorización de variables globales	161
B. Resultados experimentales	165
C. Resultados numéricos	175

Lista de símbolos

Símbolos griegos

α	ángulo de la velocidad con el plano ZX del hilo, ángulo de la parte superior del dominio, coeficiente térmico de resistencia
β	constante de calibración, ángulo de inclinación del chorro
χ	función de corrección
ℓ	escala de longitud de la turbulencia
γ	cociente de calores específicos
κ	constante de Karman
μ	viscosidad dinámica
μ_{eff}	viscosidad efectiva
ν	viscosidad cinemática
ω	tasa de disipación específica de la energía cinética turbulenta
δ_{ij}	delta de Kronecker
ν_T	viscosidad de torbellino cinemática
μ_T	viscosidad de torbellino dinámica
ϕ	cualquier variable dependiente
$\bar{\phi}$	promedio de una variable dependiente cualquiera
ϕ'	fluctuación de una variable dependiente cualquiera
ρ	densidad
ρ_r	resistividad del material del sensor de hilo caliente
ρ_s	densidad del material del hilo caliente
σ	constante de Stefan-Boltzmann
σ_ε	número de Prandtl en la ecuación de ε
σ_k	número de Prandtl en la ecuación de k
τ	tiempo de disipación turbulento
τ_{ij}	tensor de tensiones de Reynolds
θ	constante de calibración, ángulo de la velocidad con el plano XY del hilo
$\tilde{\varepsilon}$	tasa de disipación reducida
ε	disipación por unidad de masa, emisividad del sensor
ε^*	tasa de disipación reducida
ε_1^+	tasa de disipación en coordenadas de pared para la primera celda de la malla
ε_w	disipación en la pared
ϑ	escala de velocidad
$\hat{\varepsilon}$	tasa de disipación reducida
ξ	función de corrección

Símbolos latinos

A	área, constante de calibración, coeficiente de la ley logarítmica
A_u	coeficiente en la adimensionalización de Narasimha para adimensionalizar u_m
A_y	coeficiente en la adimensionalización de Narasimha para adimensionalizar $y_{1/2}$
B	constante de calibración, coeficiente de la ley logarítmica
B_u	exponente en la adimensionalización de Narasimha para adimensionalizar u_m
B_y	exponente en la adimensionalización de Narasimha para adimensionalizar $y_{1/2}$
C_D	constante del modelo de Speziale
C_i	coeficientes de calibración
C_μ	coeficiente de cierre de la ecuación de ν_T
C_ε	coeficiente de cierre de la ecuación de ε
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$	coeficientes de cierre de la ecuación de ε
E	constante de la ley logarítmica, voltaje a la salida del puente
E_1	voltaje a la temperatura ambiente T_1
E_{12}	voltaje de desequilibrio del puente
E_{corr}	voltaje corregido con la temperatura
G	ganancia del amplificador
I	intensidad de corriente eléctrica
J_0	flujo de cantidad de movimiento cinemático por unidad de longitud en la salida del chorro
L_w	potencia sonora
L_x	longitud del dominio computacional en la dirección x
L_y	longitud del dominio computacional en la dirección y
M	número de Mach
M	cantidad de movimiento para una posición x
M_0	cantidad de movimiento a la salida del chorro
Nu	Número de Nusselt ($= hl/k$)
P	presión
Pe	número de Peclet
Pr	Número de Prandtl ($= \mu c_p/k$)
P_0	presión de remanso
P_k	producción de k
Q	caudal, caudal en una posición x dada
Q_0	caudal en la salida
R_1, R_2	resistencias fijas del puente
R_3	resistencia variable del puente

Re	número de Reynolds
Re_ε	número de Reynolds local ($= y(\nu\varepsilon)^{1/4}/\nu$)
R_g	constante del gas
R_r	resistencia del sensor a la temperatura T_r
R_s	resistencia del sensor
R_t	número de Reynolds local ($= k^2/\nu\varepsilon$)
Re_m	número de Reynolds basado en u_m ($= u_m y_m/\nu$)
Re_s	número de Reynolds basado en la ranura de salida ($= u_0 b/\nu$)
Re_y	número de Reynolds local ($= yk^{1/2}/\nu$)
S_{ij}	tensor de velocidades de deformación
T	temperatura
T_0	temperatura de remanso, temperatura durante la calibración
T_1	temperatura ambiente
T_f	temperatura del fluido
T_r	temperatura de referencia
T_s	temperatura media del sensor o de operación
T_t	escala de tiempos turbulenta
T_w	temperatura del sensor caliente
T_{alr}	temperatura de los alrededores
X, Y, Z	sistema de coordenadas del desplazador y de la sonda
a	velocidad del sonido
a_0	velocidad del sonido a la temperatura T_0
b	altura de la ranura de salida del chorro
c_f	coeficiente de fricción
c_p	calor específico a presión constante
c_s	calor específico del material del hilo caliente
f	función genérica, función de amortiguamiento
f_1, f_2	funciones de amortiguamiento en la ecuación de ε
f_μ	función de amortiguamiento de ν_T
h	coeficiente de transmisión por convección, factor <i>pitch</i>
k	energía cinética turbulenta, conductividad molecular, factor <i>yaw</i>
k^+	energía cinética turbulenta en coordenadas de pared
k_s	conductividad térmica del sensor
l	longitud de la ranura de salida del chorro, longitud del hilo
n	constante de calibración
n_x	número de celdas de la malla en la dirección x
n_y	número de celdas de la malla en la dirección y
n_{yi} ($i=1,2,3$)	número de celdas de la malla en cada una de las regiones de la dirección y
\bar{p}	presión media

\bar{p}_∞	presión media en el infinito
r	radio de curvatura de la línea central del chorro inclinado
t	tiempo, espesor del labio
u	componente longitudinal de la velocidad
u'_i	velocidad fluctuante en la dirección i
u_0	velocidad en la ranura de salida
u_{eff}	velocidad efectiva de enfriamiento
u_i	velocidad instantánea en la dirección i
u_m	velocidad máxima en una posición x dada
u_t	velocidad de fricción
\bar{u}	valor medio de la velocidad
\bar{u}_i	velocidad media en la dirección i
v	componente normal de la velocidad
x	coordenada longitudinal, en la dirección del flujo principal
x_0	origen virtual
x_R	longitud de readherencia en el chorro de pared plano inclinado
x_i	coordenadas en la dirección i
x_{max}	longitud del dominio en la dirección x
y	coordenada normal a la superficie plana
y_m	coordenada y del punto de la velocidad máxima u_m en una posición x dada
y_{max}	longitud del dominio en la dirección y
$y_{+1/2}$	coordenada y donde $u = u_m/2$ y $\partial u/\partial y < 0$
$y_{-1/2}$	coordenada y donde $u = u_m/2$ y $\partial u/\partial y > 0$
$y_{1/2}$	semiancho, coordenada y donde $u = u_m/2$ y $\partial u/\partial y < 0$
z	coordenada transversal, normal a x e y

Capítulo 1

Introducción

1.1. Definición

Lauder y Rodi [1] definen el chorro de pared como “un flujo dirigido a lo largo de una pared, donde en virtud de la cantidad de movimiento aportada inicialmente, la velocidad en el sentido de la corriente en alguna región dentro del flujo es mayor que la velocidad de la corriente exterior”. Abrahamsson y otros [2] definen el chorro de pared como “el flujo que se produce al inyectar una lámina fina de fluido a alta velocidad junto a una superficie”. Gerodimos y So [3] definen los flujos simples limitados por pared como aquellos en los que para vencer la fuerza de fricción creada por la presencia de la pared se utiliza una única fuerza impulsora, clasificándolos en internos (flujo en canal o en conducto y flujo de Couette) y externos (capa límite sobre una placa plana sin gradiente de presión). Para Gerodimos y So un chorro de pared sería un flujo externo simple limitado por pared donde la fuerza impulsora es la cantidad de movimiento a salida del chorro.

Esta tesis se centra en el estudio de chorros de pared planos, estacionarios, turbulentos, isotermos, evolucionando sobre una superficie plana en ausencia de gradiente de presión. La superficie puede ser paralela al fluido inyectado o formar cierto ángulo, en lo sucesivo, si es paralela se hablará de *chorro de pared plano paralelo* y si forma un ángulo no nulo, *chorro de pared plano inclinado*.

1.2. Aplicaciones

Los chorros de pared planos tienen diversidad de aplicaciones en ingeniería. Una de las más conocidas y que supone un mayor reto se sitúa en el diseño de perfiles para el control de la capa límite. Ahora bien, su papel en el campo de la aerodinámica

se ve superado con creces, tanto en número como probablemente en importancia económica, por el uso de chorros de pared en calefacción, refrigeración o ventilación; campos donde tradicionalmente, a la hora de abordar un diseño, se ha dado poca importancia a la estructura turbulenta de los flujos involucrados [4].

Dos de sus principales aplicaciones industriales son la protección y refrigeración frente a gases corrosivos y calientes del revestimiento de las paredes de la cámara de combustión de las turbinas de gas y de los propios álabes de la turbina. En ambos casos, el objetivo es introducir una capa de fluido frío próxima a la superficie en cuestión que la aisle de las condiciones exteriores. En la práctica, por razones constructivas, no es posible obtener una ranura que se extienda a lo largo de todo el lateral de la región a enfriar. En su lugar se utiliza una serie de pequeñas ranuras o agujeros. Para cubrir los huecos se busca que el fluido refrigerante se extienda de forma rápida en la dirección lateral pero a la vez con una tasa de mezcla baja en la dirección normal a la superficie evitando así una rápida dilución del refrigerante [4].

En climatización, especialmente en aire acondicionado, es cada vez más frecuente recurrir a difusores para generar venas de aire frío que evolucionan adheridas al techo. Se pretende que la vena de aire frío penetre profundamente en el recinto y no se curve hacia abajo tan rápidamente como en el caso de venas libres inyectadas horizontalmente, buscando un mejor mezclado con el aire interior y, en consecuencia, una temperatura más elevada y una velocidad más baja del aire al alcanzar la zona ocupada. El diseño y colocación de estos dispositivos es especialmente crucial en recintos amplios, como por ejemplo auditorios o grandes salas de conciertos [5].

En el campo de la automoción, los chorros de pared se utilizan para desempañar los cristales del automóvil modificando la transferencia de calor y, sobre todo, de masa [4]. También están presentes en la cámara de combustión de los motores: al abrirse la válvula de escape, el fluido que queda entre el pistón y la camisa del cilindro evoluciona como un chorro de pared no estacionario [6].

Otra de las aplicaciones, ésta de carácter más bien básico, es su uso como caso patrón en la validación de modelos numéricos, lo que justifica la necesidad de datos experimentales fiables y detallados. En los chorros de pared planos paralelos pueden distinguirse dos regiones: una capa interior que se extiende desde la pared hasta el punto de máxima velocidad, y una región exterior que se extiende desde el punto de máxima velocidad hasta el borde del chorro. La región exterior es semejante a un chorro libre plano o una capa de cortadura libre, mientras que la capa interior se ha tratado tradicionalmente como una capa límite sin gradiente de presión. La interacción entre estas dos regiones crea una zona intermedia de características propias que puede considerarse como un región de mezcla o como una tercera región. Esto es lo que marca la diferencia con otros flujos simples y lo hace relativamente más difícil de predecir y modelar, representando un desafío para los modelos de turbulencia que reivindican un buen comportamiento para otros tipos de flujos simples y complejos.

1.3. Estado del arte

La diversidad e importancia de las aplicaciones tanto técnicas como básicas en las que están involucrados los chorros de pared ha motivado el interés de gran número de investigadores. Desde que el chorro de pared turbulento comenzara a utilizarse en el enfriamiento de los álabes de turbinas de gas y de las cámaras de combustión han aparecido numerosos trabajos centrados en la medida de la transferencia de calor entre la superficie y el fluido, en muchos casos además con presencia de corrientes exteriores forzadas. La crítica común que se puede hacer a la mayoría de estos trabajos es el exceso de parámetros independientes presentes: curvatura de la pared, forma del orificio de salida o temperatura del fluido, resultando bastante difícil establecer conclusiones generales a partir de este tipo de investigaciones.

En 1934 Förthmann [7] llevó a cabo el primer estudio experimental sobre el chorro de pared plano turbulento. Su estudio se limitó a medidas de velocidades medias en las proximidades de la salida. Förthmann encontró semejanza en el campo de velocidades medias a partir de distancias a la salida de 20 veces la altura h de la ranura b . También observó que la velocidad máxima u_m era inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia a la salida x y que el semiancho $y_{1/2}$, distancia a la pared del punto de velocidad $u_m/2$, crecía linealmente con x . Durante más de 20 años no se realizaron avances significativos. Poco antes de los 60, cuando se generaliza el uso de la anemometría de hilo caliente, comienza un periodo donde proliferaron los estudios. En 1956 Glauert [8] examinó el chorro de pared turbulento desde un punto de vista teórico utilizando una viscosidad de torbellino empírica. En 1958 Sigalla [9] trató de establecer experimentalmente una fórmula para el coeficiente de fricción en este tipo de flujo. Igual que Förthmann midió velocidades medias, pero hasta distancias más alejadas de la tobera. En 1960 Bradshaw y Gee [10] tomaron las primeras medidas sobre el campo turbulento en un chorro de pared. Midiendo los esfuerzos cortantes e integrando el campo de velocidades medias obtuvieron un valor finito en el punto de máxima velocidad media. Tailland y Mathieu [11] encontraron una dependencia con el número de Reynolds tanto en la evolución del semiancho como de la velocidad máxima si se adimensionaliza con la distancia a la salida. Narasimha y otros [12] realizaron un estudio paramétrico de esta dependencia. Alcaraz y otros [13] presentaron el primer balance energético de la energía cinética turbulenta, obtenido asumiendo isotropía en la disipación.

En 1981 Launder y Rodi [1] publicaron su trabajo para la AFORSR-Stanford Conferences on Turbulent Complex Shear Flows (1980/81) donde se revisan con espíritu crítico la mayoría de los trabajos publicados hasta entonces. Este estudio junto con su continuación en Launder y Rodi [4] marca un antes y un después en el estudio de chorros de pared. Se limitaron a casos isotermos y utilizaron el criterio del cumplimiento de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para

identificar los experimentos más fiables. A continuación se citan algunas de las principales conclusiones de su recopilación. Para el chorro de pared plano bidimensional en un ambiente en reposo, el crecimiento del semiancho seguía una recta con una pendiente del 7.3%. Al contrario de lo que afirmaban algunos autores, el esfuerzo cortante no se anula en el punto de máxima velocidad media. Se produce una atenuación del perfil de velocidades logarítmico medio consecuencia de la interacción entre las capas exterior e interior. Además afirmaban que existía gran incertidumbre en los datos de turbulencia y ausencia de investigaciones con geometrías simples claramente definidas. La tabla 1.1 pretende ser una versión actualizada de la tabla resumen presentada en Launder y Rodi [1]. La segunda columna indica la altura b y longitud l de la ranura de salida del flujo, la tercera el número de Reynolds basado en la ranura de salida $Re_s = u_0 b / \nu$ y la cuarta el intervalo de Reynolds basado en la velocidad máxima u_m y su posición y_m , $Re_m = u_m y_m / \nu$. La siguiente columna indica la distancia longitudinal, adimensionalizada con la altura de la ranura, sobre la que se realizaron las medidas, mientras que en las columnas sexta y séptima aparecen la tasa asintótica de crecimiento del semiancho $dy_{1/2}/dx$ y la relación entre la distancia del punto de velocidad máxima a la pared y el semiancho $y_m/y_{1/2}$. La última columna muestra el cociente entre la cantidad de movimiento en la posición más alejada y la cantidad de movimiento a la salida. La última fila se corresponde con los resultados presentados en esta memoria de tesis.

Kobayashi y Fujisawa [26, 27, 28] investigaron las características turbulentas del chorro de pared plano y presentaron un balance de energía aproximado. Estimaron la tasa de disipación asumiendo isotropía y la validez de la hipótesis de Taylor. Nizou y otros [40] utilizaron la técnica de LDA para medir el gradiente de velocidad media en la subcapa viscosa y así obtener el coeficiente de fricción. Osaka y otros [41] estudiaron las estructuras coherentes del chorro de pared plano. Fujisawa y Shirai [42] investigaron el balance de energía turbulenta y encontraron que las velocidades de convección del movimiento turbulento de la escala pequeña se desvían significativamente de las velocidades medias. Rodman y otros [30, 31] investigaron el chorro de pared anular, encontrando que el perfil de velocidades medio anular era idéntico a su equivalente plano, pero las tensiones cortantes mostraban niveles mucho más bajos. Schneider [32] y Schneider y Goldstein [33] utilizaron la técnica de LDA para medir las tensiones de Reynolds, centrándose en la parte más exterior, donde la literatura basada en medidas con anemometría térmica revelaba las mayores desviaciones debido a la alta intensidad turbulenta local, encontrando que las tensiones normales eran ligeramente superiores respecto de los datos de anemometría de hilo caliente.

Wynanski y otros [34] investigaron la dependencia con el número de Reynolds y la aplicabilidad de diferentes leyes de escala. Concluyeron que la adimensionalización propuesta por Narasimha y otros [12] basada en la cantidad de movimiento a la salida resultaba más adecuada que la tradicional basada en la ranura de salida y que el

Cuadro 1.1: Estudios sobre chorros de pared planos paralelos.

Autor	Tobera (cm)	$10^{-3}Re_s$	$10^{-3}Re_m$	$\frac{x}{b}$	$\frac{dy_{1/2}}{dx}$	$\frac{y_m}{y_{1/2}}$	$\frac{M}{M_0}$
Förthmann [7]	$b=3$ $l=65$	53	14.7-19	3-33	0.082	0.17	1.0
Sigalla [9]	$b=0.8$ $l=13.2$	20-40		4-70	0.064	0.15	0.66
George [14]	$b=0.13$	6.8		45-240	0.079	0.15	0.75
Bradshaw y Gee [10]	$b=0.046$ $t=0.025$	6.08	2.88- -12.5	339- -1459	0.071		0.426
		13.5			0.085		0.75
Schwarz y Corsart [15]	$b=2.54$ $l=61$	20 30 41.6		29-85	0.069 0.056 0.061	0.16	0.80 0.60 0.66
Myers y otros [16]	$b=1.27$ $l=152$	7.1-5.6		12-190	0.077		0.65
Patel [17]	$b=0.51$	30	9-12.8	32-92	0.071	0.16	0.86
Gartshore y Hawaleshka [18]	$b=0.77$ $l=76$ t variable	30.8	7-14	18-124	0.065	0.15	0.77
McGahan [19]	$b=0.08$ $t=0.02$ annular	6.8		45-240	0.079	0.15	0.075
Giles y otros [20]	?	20-100		?	0.0773	0.14	0.26
		11	4.9-7.4		0.076	0.155	0.89
Tailland [11]	$b=0.6$ $l=90$	18 25	6.9-10.9 8.8-14.4	33-200	0.074 0.073	0.14 0.131	0.915 0.91
Guiton [21]	$b=0.77$ $l=76$	30.8	6.7-15.6	26-209	0.071	0.15	1.01
Verhoff [22]	$b=0.122$ $l=0.178$	10.3 12.1	4.0-7.98 3.9-7.1	57-410	0.0816 0.0766		0.61 0.73
Wilson [23, 24]	$b=0.609$ $l=50.8$ $t=0.254$	13		23-125	0.078	0.13	1.05

Tabla 1.1: Estudios sobre chorros de pared planos paralelos. (Cont.)

Autor	Tobera (cm)	$10^{-3}Re_s$	$10^{-3}Re_m$	$\frac{x}{b}$	$\frac{dy_{1/2}}{dx}$	$\frac{y_m}{y_{1/2}}$	$\frac{M}{M_0}$
Neale [25]	$b=0.394$	33.5		11-198	0.067		0.84
	$l=76$	49.6			0.066		0.79
Kobayashi [26, 27, 28]	$b=0.80$	17-26	7-15	50-200	0.066		
	$l=58.8$						
Noguchi [29]	$b=0.635$	25		31-47	0.069		
	$l=92.5$						
Rodman y otros [30, 31]	$b=0.13$	9		46-92	0.074		0.90-
	anular						-0.77
Schneider y Goldstein [32, 33]	$b=0.54$	14	4.5-7.3	43-110	0.077	0.17	0.80
	$l=48.3$						
Wyganski y otros [34, 35, 36]	$b=0.25-$	3-30	?-?	5-200	?	?	?-?
	-0.75						
Karlsson y otros [37, 38, 39]	$b=1$	10	2.8-5.7	30-140	0.075	0.167	0.91-
	$l=145$						
Abrahamsson y otros [2]	$b=1$	10-20	?-?	70-150	0.075-	?	0.86
	$l=200$				-0.081		
Tesis	$b=1$	10	4.41			0.176	
	$l=100$	20	8.11	5-150	0.072-	0.160	0.84
		30	12.37		-0.074	0.154	

perfil de velocidades medias más allá del semiancho daba muestras de dependencia con el número de Reynolds. Sin embargo, el nivel de intensidad turbulenta en la dirección del flujo disminuía con la distancia y el número de Reynolds basado en la ranura de salida. El trabajo fue continuado por Katz y otros [35] y Zhou y otros [36] exponiendo al flujo a una excitación externa. Karlsson y otros [37, 38] y Eriksson y otros [39] utilizaron la técnica de LDA en un chorro de pared turbulento y midieron las tensiones de Reynolds dentro de la subcapa viscosa. Abrahamsson y otros [2] presentan los resultados de sus ensayos con anemometría de hilo caliente en una instalación de gran tamaño. Venås y otros [43] utilizaron esta misma instalación para realizar medidas con anemometría de hilo caliente pulsante. Concluyen que esta técnica proporciona resultados similares a los obtenidos con anemometría de desfase Doppler e intensidades turbulentas en la región más exterior superiores a

las medidas con anemometría de hilo caliente convencional, tal y como Schneider ya había evidenciado. En un trabajo teórico muy reciente George y otros [44] proponen adimensionalizar los esfuerzos cortantes con el cuadrado de la velocidad de fricción en lugar de con el cuadrado de la velocidad máxima. También demuestran que la velocidad máxima es proporcional a una potencia del semiancho así como que el crecimiento del chorro no es lineal, si bien la diferencia de la linealidad es muy pequeña.

En el campo de la simulación numérica, Launder y Rodi [4] en 1983 presentaron un resumen sobre la utilización de modelos basados en el promediado de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes en la predicción de chorros de pared planos. Encontraron que ni los modelos de longitud de mezcla ni los de dos ecuaciones predecían correctamente el comportamiento del chorro de pared plano. En concreto, el modelo $k-\varepsilon$ estándar daba una tasa de crecimiento superior en un 30 % a la experimental. Mejores resultados se obtenían con los modelos de tensiones de Reynolds tanto convencionales como algebraicos, señalando que el punto clave en estos modelos radica en el correcto modelado del término de reflexiones de presión en la pared.

Con la disponibilidad de datos procedentes de la simulación numérica directa mejora considerablemente el ajuste de los modelos de turbulencia. Gerodimos y So [3] en 1997 simulan el chorro de pared plano paralelo con cuatro modelos de turbulencia de dos ecuaciones para Reynolds bajos que ya habían demostrado su eficacia en otros tipos de flujos. Se obtuvo una buena correspondencia con los resultados experimentales, especialmente con uno de los últimos modelos formulados. Ese mismo año Vasić [45] compara dos modelos de dos ecuaciones con dos modelos de tensiones de Reynolds, evidenciando que estos últimos proporcionaban los mejores resultados. Señalar sin embargo, que los modelos de dos ecuaciones analizados por Vasić estaban bastante obsoletos. Recientemente Tangemann y Gretler [46] simulan un chorro de pared plano paralelo con un modelo de tensiones de Reynolds algebraico propio, un modelo $k-\varepsilon$ estándar y un modelo de tensiones de Reynolds, concluyendo que su modelo proporciona resultados semejantes al modelo de tensiones de Reynolds con menor coste computacional.

Si bien se han encontrado numerosos trabajos sobre chorros de pared que evolucionan sobre superficies curvas, escasean las publicaciones sobre chorros de pared evolucionando sobre superficies planas inclinadas. El primero fue publicado por Förthmann [7], más tarde Bourque [47] y Newman [48], basándose en análisis dimensional y medidas de presión, mostraron que a partir de cierto número de Reynolds la distancia de readherencia adimensionalizada con la altura de la ranura x_R/b sólo es función del ángulo de inclinación de la pared β . Haciendo, entre otras, la hipótesis de que la línea central del chorro describe un arco de radio r , Newman propuso un modelo de flujo para el chorro de pared inclinado en el que se expresaba x_R/b como función del ángulo de inclinación de la pared β y de r . Bourque [49] y Perry [50]

trataron de modelar el flujo con la intención de predecir x_R . Las primeras medidas del campo de velocidades de las que se tiene constancia fueron publicadas por Martsers [51], donde analiza el campo de velocidades en las cercanías de una pared plana inclinada, sin embargo, en su configuración se permitía el flujo de aire a través de un hueco situado entre la ranura de salida del chorro y la pared, desapareciendo la zona de recirculación de flujo. Lai y Lu [52] analizan el efecto que tiene la inclinación de la pared respecto de la ranura de salida del chorro sobre el flujo medio y turbulento en la zona inicial del chorro. De su trabajo se concluye que en la zona de desarrollo y a medida que el ángulo aumenta decae más rápidamente la velocidad máxima, el chorro se abre más rápidamente, disminuye la región de flujo potencial y aumenta el caudal de aire arrastrado. Recientemente, estos mismos autores Lai y Lu [53] han publicado una ampliación de su trabajo para la configuración de $\beta = 30^\circ$.

1.4. Objetivos

Como ya se ha mencionado, esta tesis pretende profundizar en el conocimiento de los chorros de pared planos, estacionarios, turbulentos, isoterms, en ausencia de gradiente de presiones, tanto paralelos a la pared como inclinados. El estudio se realiza desde un punto de vista numérico y experimental.

Aprovechando la experiencia previa de otros investigadores, se pretende construir una instalación que permita generar con garantías suficientes de bidimensionalidad, tanto chorros de pared planos paralelos como inclinados. Utilizando la anemometría de hilo caliente se pretende caracterizar la evolución espacial del campo de velocidades para distintos números de Reynolds (10^4 , $2 \cdot 10^4$, $3 \cdot 10^4$) y diferentes ángulos de inclinación ($\beta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ y 30°).

Los resultados de las medidas en los chorros de pared plano paralelos ($\beta = 0^\circ$) se contrastarán con los de otros autores de reconocido prestigio para así validar la instalación experimental y la metodología de trabajo. Después, modificando únicamente el ángulo relativo entre la superficie plana y el fluido impulsado, se analizará la influencia de este parámetro en el desarrollo del chorro. La validación de estos resultados con los de otros autores está muy limitada por la falta de trabajos con esta configuración, de ahí la importancia de la primera fase del trabajo.

Paralelamente se realizará el estudio numérico. Se introducirán modelos de turbulencia de dos ecuaciones tipo $k-\varepsilon$ para bajos números de Reynolds en un código de mecánica de fluidos comercial y se analizará la capacidad de estos modelos para predecir el comportamiento de un chorro de pared plano paralelo. La validación de estos resultados se realizará tanto con datos propios, obtenidos en la instalación construida, como con los de otros autores. El modelo de turbulencia que demuestre un mejor comportamiento se utilizará para simular los chorros de pared planos in-

clinados. En estos chorros se analizará tanto la zona inicial como la zona de chorro desarrollado para distintos ángulos y números de Reynolds. La validación de estos últimos resultados se realizará básicamente con medidas propias.

1.5. Contenido

En el capítulo 2 se describen los diferentes elementos que componen la instalación experimental, los resultados de su caracterización y la técnica de medida.

En el capítulo 3 se analiza el chorro de pared plano paralelo. En primer lugar se justifica desde un punto de vista teórico el tipo de adimensionalización elegido. Se presentan luego resultados experimentales para diferentes Reynolds relativos a las velocidades medias y magnitudes turbulentas. A continuación se procede con los resultados experimentales relativos a los chorros de pared planos inclinados analizando la influencia del ángulo de inclinación y del número de Reynolds en el campo de velocidades.

En el capítulo 4 se aborda el problema desde un punto de vista numérico. Se analiza el papel de los modelos de turbulencia en la simulación de chorros de pared planos, especialmente los modelos de dos ecuaciones con correcciones para bajos números de Reynolds. Se describe el procedimiento numérico así como el estudio de la independencia respecto de la discretización espacial.

Los resultados numéricos se analizan en el capítulo 5. En primer lugar se presentan las predicciones de los modelos de turbulencia considerados comparadas con datos experimentales. Con el modelo de turbulencia seleccionado se completa el estudio numérico del chorro de pared plano paralelo analizando la influencia del número de Reynolds. Este capítulo finaliza con la discusión de los resultados obtenidos al simular el chorro de pared plano inclinado con diferentes ángulos y números de Reynolds

En el capítulo 6 se presenta una breve recapitulación del trabajo realizado junto con sus conclusiones más relevantes. A continuación se proponen una serie de trabajos que se podrían acometer en el futuro con el fin de avanzar en la caracterización experimental y en la simulación numérica de los chorros de pared planos.

Los apéndices contienen las subrutinas desarrolladas para implementar los modelos de turbulencia en el código numérico así como algunos resultados experimentales y numéricos que no se han incluido en capítulos anteriores para no hacer demasiado extensa la memoria.

Capítulo 2

Instalación experimental

2.1. Introducción

La realización de este trabajo ha requerido del diseño y construcción de una instalación experimental. En ella se ha caracterizado el campo de velocidades medias y turbulentas tanto de un chorro de pared plano paralelo $\beta = 0^\circ$ como de chorros de pared planos inclinados $\beta = 10^\circ$, 20° y 30° . Para todas las configuraciones se han analizado tres números de Reynolds: 10.000, 20.000 y 30.000. En la figura 2.1 se representa un esquema de conjunto de la instalación. Se compone de los siguientes elementos:

- **Túnel de viento.** Se ha denominado así al elemento que transforma el flujo de aire procedente del ventilador hasta convertirlo en un chorro de pared plano. En este elemento también se incluyen la superficie plana sobre la que evoluciona el chorro y las paredes laterales que lo protegen de posibles corrientes exteriores. Básicamente son tres las características que se pretenden conseguir con este elemento: uniformidad y bajo nivel de turbulencia del perfil de velocidad a lo largo de toda la ranura de salida del chorro y que la bidimensionalidad del flujo se conserve hasta una distancia suficiente aguas abajo de la ranura de salida.
- **Generador de flujo.** Proporciona el caudal de aire estipulado y lo canaliza hasta el túnel de viento. Se compone de un grupo moto-ventilador controlado por un variador de frecuencia y de los elementos necesarios para canalizar el aire hasta la entrada del túnel de viento. Una sonda de velocidad colocada en la ranura de salida del chorro proporciona la señal utilizada por el variador como realimentación para mantener la velocidad del chorro en la salida constante.

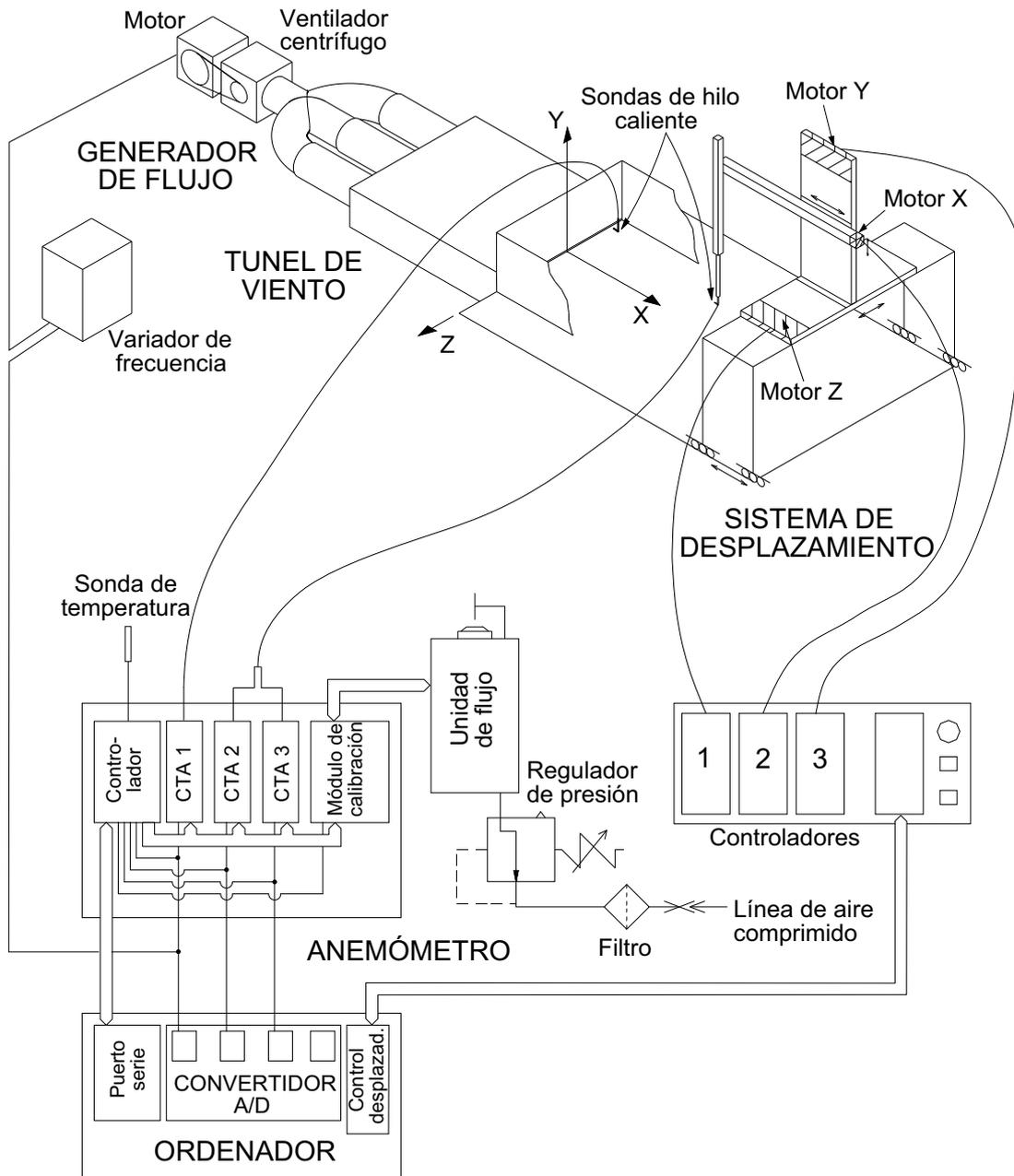


Figura 2.1: Esquema general de la instalación.

- **Estructura soporte.** Se trata de la estructura metálica que soporta al túnel de viento y al pórtico sobre el que se sitúa el sistema 3D de desplazamiento lineal. Debe permitir por un lado, la nivelación del túnel respecto de la superficie plana sobre la que evoluciona el chorro de pared y por otro, la variación de la inclinación relativa entre el túnel y la superficie. Se ha suprimido su representación de la figura 2.1 para mayor claridad.
- **Sistema 3D de desplazamiento lineal.** Permite la colocación de la sonda de medida en el punto deseado del flujo gracias a sus tres grados de libertad. Se sitúa sobre el pórtico y sus movimientos se dirigen desde el ordenador.
- **Sistema de anemometría de hilo caliente.** Es el sistema utilizado para medir la velocidad del flujo. Además, la señal proporcionada por una de las sondas es utilizada por el variador de frecuencia para mantener la velocidad de salida constante durante el ensayo.

Todo el conjunto se ha ubicado en un gran sala de laboratorio de dimensiones $8 \times 15 \times 6$ m tratando de evitar la aparición de corrientes secundarias [2].

En las siguientes secciones se describe la técnica de medida y los elementos que componen la instalación¹.

2.2. Túnel de viento

El túnel de viento debe transformar el flujo de aire procedente del ventilador en un chorro de pared plano. Es por tanto una de las partes fundamentales de la instalación. Para realizar un diseño adecuado del mismo se analizaron en detalle los trabajos de otros autores (véase la tabla 1.1). Sus características más importantes deben ser:

- Proporcionar en la sección de salida un flujo con un perfil de velocidad uniforme, así se asegura que la evolución del flujo no esté condicionada por la forma este perfil.
- Que este flujo sea bidimensional y que se conserve esta propiedad hasta más allá del comienzo de la zona de flujo semejante².
- La interacción entre las dos regiones de un chorro de pared hace que el campo turbulento generado sea de gran interés para validar los modelos de turbulencia

¹Para una descripción más detallada de la instalación véase Zamora [54].

²Existen discrepancias entre los autores consultados a la hora de establecer el comienzo de la zona de flujo semejante, oscilando entre 40 y 70 veces la altura de la ranura de salida.

utilizados en Mecánica de Fluidos Computacional. Por ello se debe asegurar, en la medida de lo posible, la no existencia de estructuras turbulentas en la sección inicial del flujo que puedan condicionar la turbulencia desarrollada.

Uno de los parámetros que más condiciona la consecución de un flujo bidimensional es la *relación de aspecto*, definida como el cociente entre la longitud l y la altura b de la ranura de salida del flujo. Resulta evidente que relaciones de aspecto altas favorecerán la bidimensionalidad del chorro de pared plano. Disminuir excesivamente b dificultaría la caracterización de la capa interior del chorro, dado que su espesor (desde la pared $y = 0$ hasta el punto de velocidad máxima $y = y_m$) disminuye con la altura de la ranura.

Siguiendo la tendencia general observada en la bibliografía se optó por una altura $b = 10$ mm. La anchura de la ranura de salida, y por tanto de todo el túnel, se fijó en $l = 1000$ mm. El disponer de una instalación de gran tamaño facilita la obtención de un flujo bidimensional, donde la influencia de los extremos es despreciable. La importancia del tamaño de la instalación sobre los flujos secundarios ha sido analizada por Hussein y otros [55].

Hanneman [56] propone como criterio conservador que la bidimensionalidad se mantiene hasta una distancia longitudinal (eje X) igual a la longitud de la ranura de salida, $100b$ en este caso. El flujo se encuentra completamente desarrollado a partir de una distancia a la sección de salida de entre 40 y $70b$. Por tanto, aún con el criterio de Hanneman, la instalación permite el estudio del flujo en la zona desarrollada con garantías suficientes de bidimensionalidad.

En la figura 2.2 se muestra un esquema con los diferentes elementos que componen el túnel de viento. Inmediatamente aguas arriba de la ranura de salida del chorro, el flujo atraviesa lo que se denomina *contracción final*. En una longitud de 240 mm la sección de paso del túnel cambia de 100 a los 10 mm de altura de la ranura, lo que supone una relación de contracción de 10:1. Esta contracción tiene por finalidad crear a la salida un perfil de velocidades plano y con bajo nivel de turbulencia.

El siguiente elemento aguas arriba del túnel de viento es el denominado *enderezador de flujo*. Se trata de un entramado de conductos paralelos al flujo principal, cada uno de 48mm^2 de área de paso y 80 mm de longitud. Ocupan toda la sección del túnel y realizan un efecto de guiado favoreciendo la desaparición de posibles flujos secundarios y ayudando a reducir el nivel de turbulencia en la sección de salida.

Siguiendo en sentido inverso al del flujo, 200 mm aguas arriba se disponen una serie de tres *placas perforadas* de 1 mm de espesor separadas 100 mm. Su función es introducir un remanso en el flujo que permita un reparto del mismo a lo ancho del túnel así como la ruptura los torbellinos de mayor tamaño.

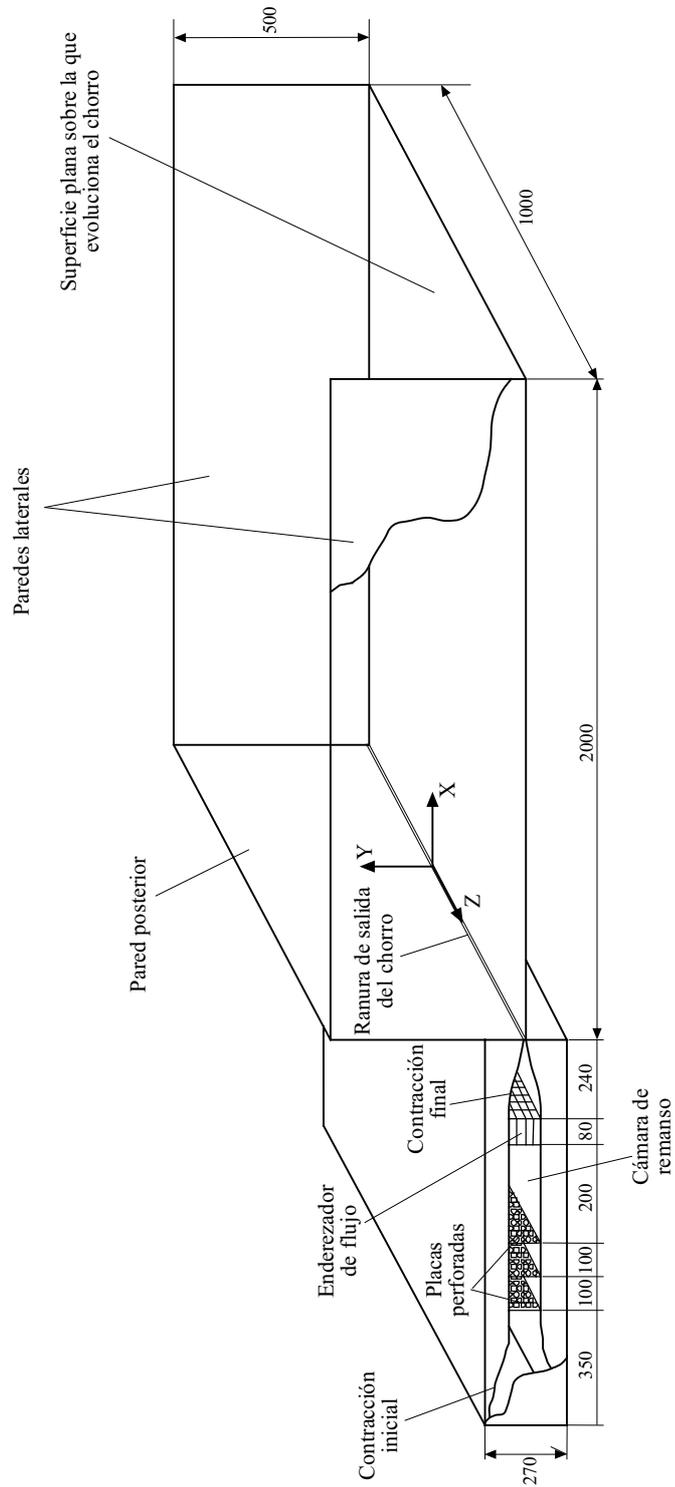


Figura 2.2: Esquema del túnel de viento.

A la entrada del túnel existe otra contracción que pasa la sección de 240 a 100 mm en una longitud de 350 mm. Su función es recibir el aire procedente del ventilador y servir de cámara de remanso.

Siguiendo las recomendaciones de algunas de las publicaciones más recientes [2, 33] se incluye una pared encima de la ranura de salida. Se crea así una condición de contorno bien definida. Por otro lado, las paredes laterales evitan la influencia de las corrientes exteriores facilitando el logro de condiciones de bidimensionalidad y semejanza.

Con excepción de las placas perforadas, el resto de las piezas que componen el túnel de viento están realizadas en PVC. Se ha tenido especial cuidado en evitar la aparición de posibles fugas así como la presencia de cualquier elemento en el interior del túnel que pudiera perturbar el flujo.

2.3. Generador de flujo, estructura soporte y desplazadores

La elección del ventilador se realizó bajo la premisa de alcanzar en la salida del túnel de viento una velocidad de 50 m/s, que corresponde a un número de Reynolds de 33.300. En estas condiciones el caudal de aire a impulsar es de 0.5 m³/s.

Además del caudal se necesita conocer el incremento de presión que el ventilador debe proporcionar. Tanto la aspiración del ventilador como la salida del túnel son a la atmósfera, debiéndose principalmente el incremento de presión que debe vencer al aumento de energía cinética (≈ 1425 Pa). Las pérdidas locales y por fricción tan sólo suponen una pequeña parte del total (≈ 75 Pa).

Con estos dos datos se optó por instalar un ventilador centrífugo de la marca NICOTRA, modelo RDN-180L, acoplado con poleas a un motor de 3 CV. Un variador de frecuencia permite controlar el régimen de giro del motor y por tanto el caudal que proporciona el ventilador.

Durante los ensayos preliminares se observó que en periodos de funcionamiento de alrededor de 1 hora, incluso manteniendo fijos todos los parámetros del variador de frecuencia, existían variaciones en la velocidad del flujo a la salida del túnel de hasta el 5 %. Para salvar este problema se optó por colocar una sonda de hilo caliente en la ranura de salida del túnel midiendo permanentemente la velocidad. La señal en voltaje a la salida del anemómetro se utiliza como referencia para que el variador de frecuencia ajuste el régimen de giro del motor y se mantenga así constante la velocidad de salida del chorro durante todo el ensayo.

El generador de flujo incluye, además del grupo moto-ventilador, los elementos

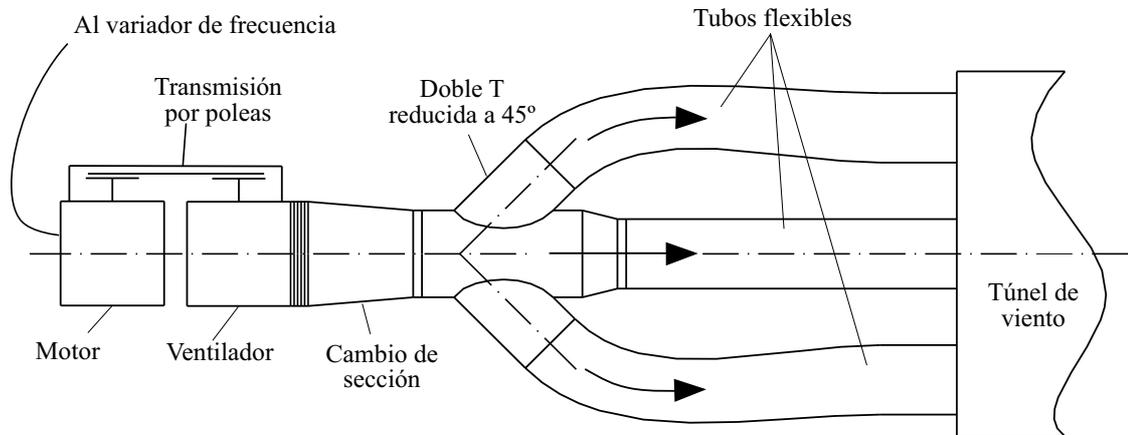


Figura 2.3: Grupo moto-ventilador y acoplamiento al túnel de viento.

necesarios para canalizar el aire impulsado hasta la entrada del túnel de viento, tal y como se muestra en la figura 2.3.

La estructura soporte esta formada por perfiles de aluminio estruado. En su parte principal se apoyan la superficie plana y las paredes laterales. El resto del túnel de viento descansa sobre una estructura auxiliar unida a la principal a través de articulaciones que permiten variar el ángulo β y así obtener chorros de pared planos inclinados. Dos guías en los laterales de la estructura principal soportan un pórtico y permiten su desplazamiento longitudinal. El conjunto de la estructura descansa sobre pies ajustables que permiten su nivelado.

El pórtico sirve de apoyo al sistema de desplazamiento de tres grados de libertad modelo Lightweight Traverse de DANTEC. La carrera efectiva de cada eje es de 620 mm, suficiente para barrer el campo fluido en las dirección transversal (eje Z) y normal (eje Y), para llegar a los 2 m en la dirección longitudinal (eje X) el sistema se monta sobre el pórtico mencionado anteriormente que a su vez desliza sobre dos guías. Cada eje se acciona mediante un motor paso a paso unido directamente a un husillo de bolas. Una vuelta del motor corresponde a 1 mm de avance de su respectivo eje, precisando 80 pulsos para girar una vuelta completa, lo que permite realizar desplazamientos con incrementos de 0.0125 mm. La velocidad máxima de desplazamiento es de 40 mm/s. Los motores están accionados por un controlador modelo 1T70 que envía los impulsos a los motores paso a paso permitiendo cargas de hasta 30 Kg por eje. El controlador se comunica con el ordenador a través del puerto serie. El mismo software que gestiona la adquisición de datos del sistema de anemometría de hilo caliente controla también los movimientos del sistema de desplazamiento, esto permite cierto grado de automatización del proceso de medida.



Figura 2.4: Vista frontal de la instalación experimental.

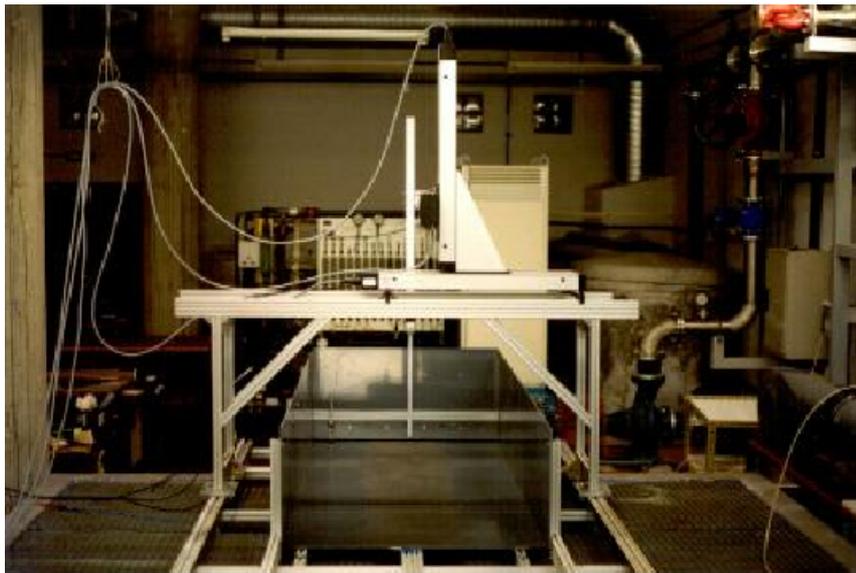


Figura 2.5: Vista trasera de la instalación experimental.



Figura 2.6: Vista lateral de la instalación experimental.



Figura 2.7: Equipo de anemometría térmica.

2.4. Caracterización de la instalación

Una vez construida la instalación se procedió a su caracterización, analizando diversos aspectos de la misma que se exponen a continuación.

2.4.1. Generador de flujo

En la figura 2.8 se reproducen las curvas características de funcionamiento del ventilador a diferentes regímenes de giro obtenidas en condiciones standard ($P = 760\text{mm Hg}$, $T = 20^\circ\text{C}$) funcionando como soplante. En el mismo gráfico se ha superpuesto en azul la curva de la instalación, obtenida midiendo el caudal en la ranura de salida del túnel por interpolación de los perfiles de velocidad en distintas posiciones longitudinales y a diferentes velocidades de giro del ventilador. La curva de la instalación en unidades del S.I. se ajusta a la parábola:

$$\Delta P = 8038,73Q^2 \quad (2.1)$$

con un caudal de máximo de $0.51\text{ m}^3/\text{s}$ a 7.500 rpm , lo que supone un número de Reynolds en la ranura de salida superior a 33.000 .

La figura 2.8 también proporciona información acerca de la potencia absorbida al eje del ventilador, el incremento de presión total proporcionado y la potencia sonora emitida por el ventilador. En todo el rango de funcionamiento el rendimiento del ventilador está muy próximo a su rendimiento máximo, que en este modelo concreto es de $0,6$.

2.4.2. Superficie plana

Las especiales características del chorro de pared plano en las proximidades a la pared hace que la medida precisa del campo de velocidades en esta zona sea de especial interés. La falta de planitud de la superficie sobre la que evoluciona el chorro podría influir en el flujo y falsear los resultados en esta zona. Para evitar posibles errores por esta causa se verificó el paralelismo entre la superficie plana sobre la que progresa el chorro y los desplazadores lineales, nivelando previamente las guías sobre las que desliza el pórtico. Se realizaron varios barridos longitudinales desde $x/b = 0$ a 200 con ayuda de un reloj comparador, comprobándose que en los 2 m de longitud de la superficie sobre la que progresa el chorro el desnivel era de $\pm 0,06\text{ mm}$.

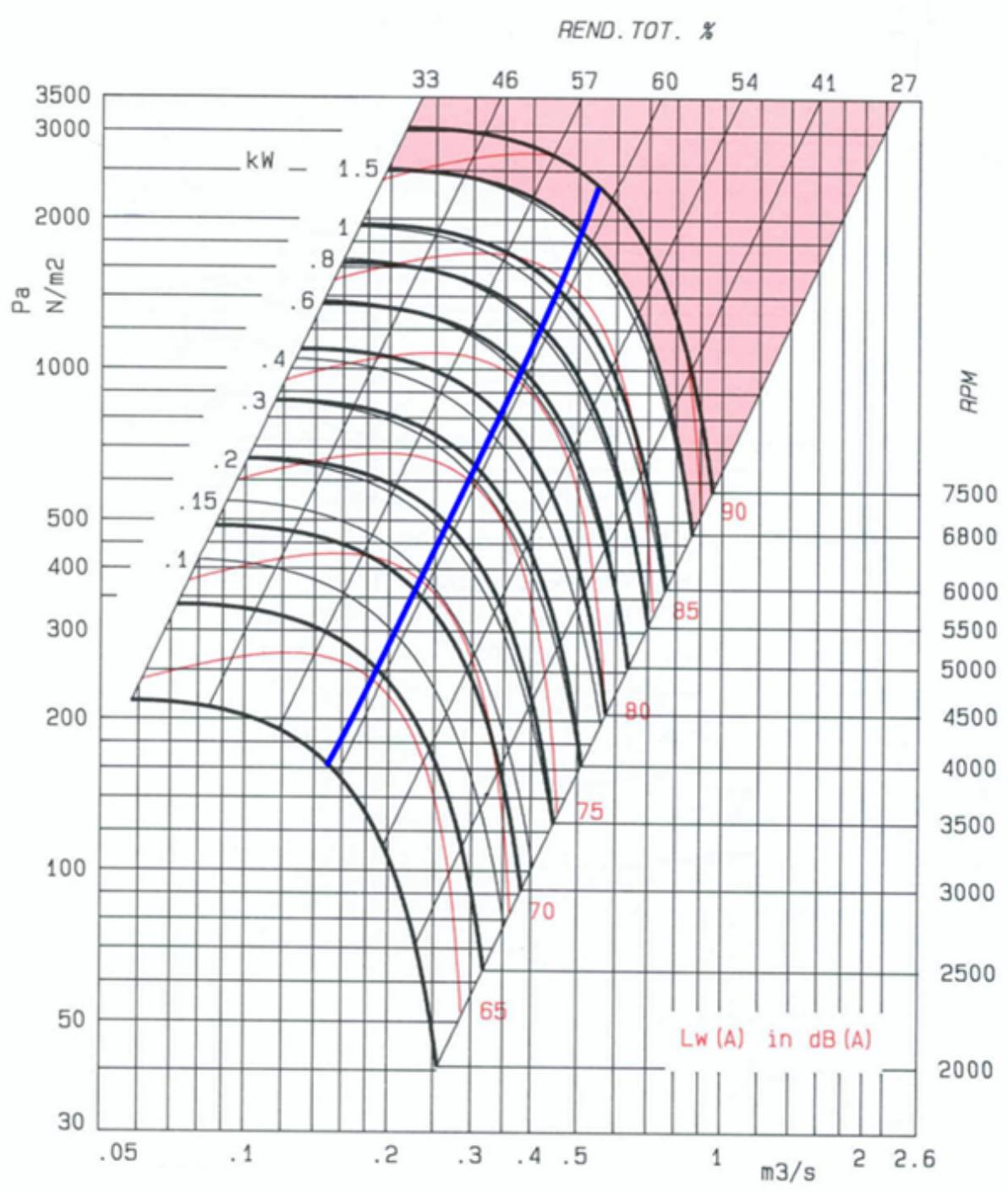


Figura 2.8: Curvas características del ventilador y de la instalación.

2.4.3. Salida del chorro

En la figura 2.9 se presentan en lado izquierdo los perfiles de velocidades medias adimensionalizadas y en el derecho las intensidades turbulentas en la dirección de la corriente. Las medidas están tomadas muy próximas a la tobera, en $x = 0,2b$ y

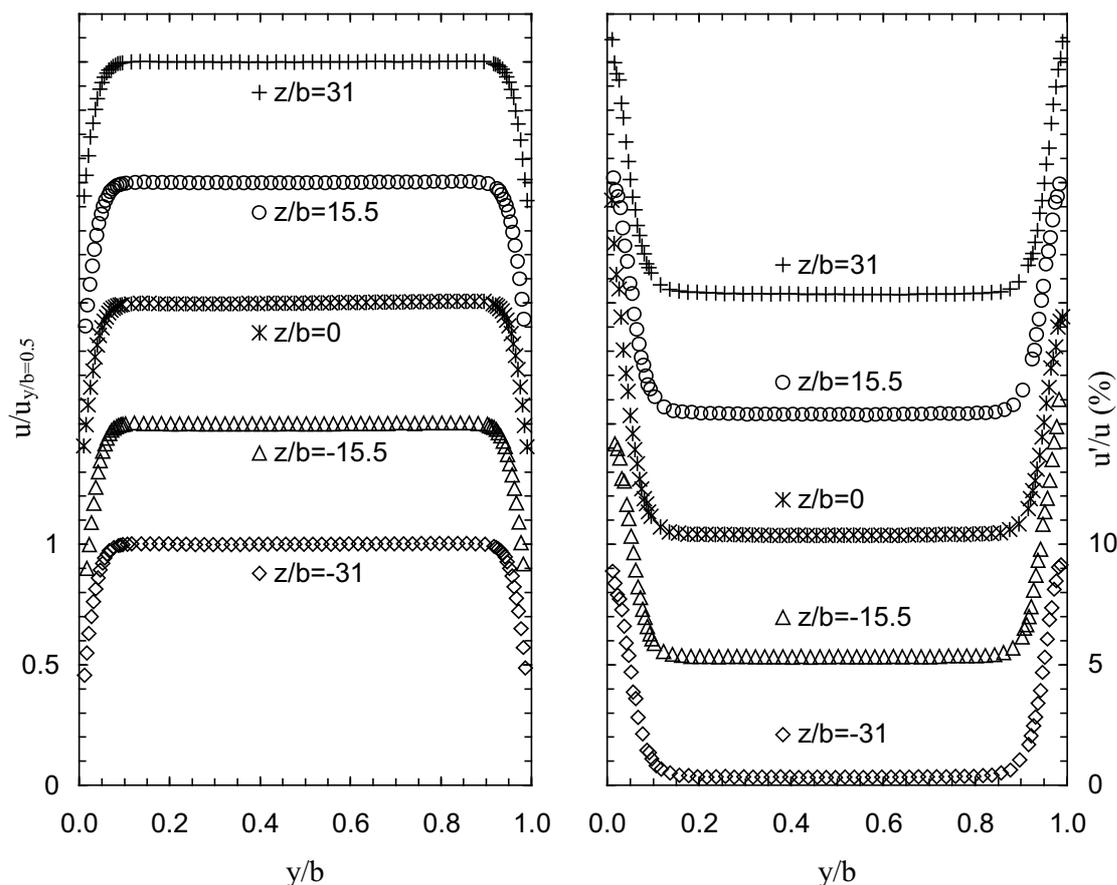


Figura 2.9: Velocidad media e intensidad turbulenta en la dirección de la corriente en las proximidades de la ranura de salida ($x = 0,2b$) para $Re=20.000$.

para cinco posiciones transversales ($z/b = -30, -15, 0, 15$ y 30 mm) con un número de Reynolds de 20.000 . Se observa que fuera de las capas límites el perfil de velocidad media es plano con una desviación de 0.25% y que la intensidad turbulenta en la dirección de la corriente del orden de 0.3% . La variación de la velocidad media a lo largo de la ranura de salida es inferior a 0.5% . Las medidas realizadas para números de Reynolds de 10.000 y 30.000 proporcionan resultados semejantes.

La bidimensionalidad del flujo es uno de los puntos clave en los estudios de

chorros de pared. En la sección 3.1.3 se analizan con más detalle diversos aspectos relacionados con la bidimensionalidad. Tan sólo adelantar aquí que se ha podido verificar que la instalación permite obtener un chorro de pared plano con un buen grado de bidimensional hasta una distancia longitudinal de $x = 150b$.

2.5. La técnica de medida

La anemometría térmica o de hilo caliente es una técnica que bajo ciertas condiciones permite medir el módulo y la dirección de la velocidad de un fluido. Tiene una excelente respuesta en frecuencia y una buena resolución espacial, únicamente la anemometría láser puede competir con ella en estos aspectos. Se emplea para medir flujos turbulentos, en los que la velocidad cambia rápidamente de magnitud y dirección.

El equipo utilizado en esta tesis es el modelo *StreamLine* de la casa DANTEC con tres módulos anemométricos del modelo 90C10. De la misma casa es el módulo de calibración. Se han utilizado sondas simples tipo 55P15 y dobles tipo 55P63 y 55P61 también de DANTEC.

2.5.1. Principio de funcionamiento. Transferencia de calor desde el sensor

El anemómetro de hilo caliente trata de medir el calor que pierde un pequeño elemento sensor por efecto de la convección de un fluido que circula a su alrededor. El sensor se mantiene a una temperatura más elevada que el fluido mediante el efecto Joule. El calor perdido por el sensor no es sólo por convección hacia el fluido, sino también por conducción hacia el soporte del sensor de hilo. Además existe una fracción de calor que se pierde por radiación. Estas dos últimas pérdidas suelen despreciarse en los cálculos.

Con objeto de analizar el balance de energía para el sensor de hilo caliente, se toma un elemento diferencial de hilo como el representado en el detalle de la figura 2.10. El elemento tiene una longitud dx y una sección transversal A , siendo la longitud total l . El calor en este elemento diferencial se genera eléctricamente y se disipa por convección al fluido, por radiación a los alrededores y por conducción al resto del hilo con el que está en contacto; quedando el resto almacenado en el hilo. La ecuación diferencial para el balance de calor se puede expresar como:

$$A \frac{\partial}{\partial x} \left(k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \right) + \frac{I^2 \rho_r}{A} - \rho_s c_s A \frac{\partial T_s}{\partial t} - \pi h l (T_s - T_f) - \pi \sigma \varepsilon l (T_s^4 - T_{alr}^4) = 0 \quad (2.2)$$

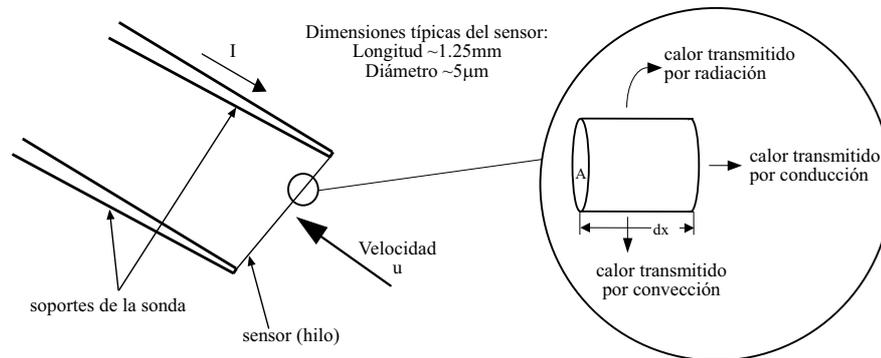


Figura 2.10: Transferencia de calor desde un sensor de hilo caliente.

Donde los sucesivos sumandos representan respectivamente el calor conducido por el sensor, el generado por la corriente eléctrica, el almacenado, el transmitido por convección y el transmitido por radiación.

A partir de la ecuación (2.2) se puede obtener el perfil de temperaturas a lo largo del sensor, la temperatura media y la respuesta en frecuencia características del sensor. En la práctica, la resolución de esa ecuación es muy complicada. Además la temperatura en el sensor no es constante debido a que el hilo es de longitud finita y existen pérdidas hacia los soportes.

Existen gran variedad de leyes de transferencia de calor para sensores calentados. Estas leyes se expresan en términos de números adimensionales y pueden ser transformadas de forma que expresen la relación entre la velocidad del fluido y el voltaje de salida de un anemómetro de hilo caliente. Asumiendo que las pérdidas por radiación son pequeñas, la conducción hacia los soportes del hilo es despreciable, la temperatura del hilo es uniforme, el flujo es normal al hilo, uniforme sobre toda su longitud y pequeño comparado con la velocidad del sonido y que la temperatura y densidad del fluido permanecen constantes, se admite la siguiente fórmula:

$$\text{Nu} = A \text{Pr}^\alpha + B \text{Pr}^\beta \text{Re}^n \quad (2.3)$$

donde α y β dependen del tipo de fluido y n del rango de velocidades en el que se trabaja, estando en general en torno a 0.5. Dado que se busca la velocidad (es decir el Re) se hace imprescindible conocer Nu , A , B y n . Los valores de Pr , α y β dependen del tipo de fluido. El valor de Nu vendrá dado por la electrónica del anemómetro, mientras que A , B y n deberán ser calculados mediante una calibración.

Una expresión más simplificada, y que por tanto es sólo aplicable a un estrecho intervalo de velocidades es la denominada "Ley de King":

$$\text{Nu} = A + B \text{Re}^n \quad (2.4)$$

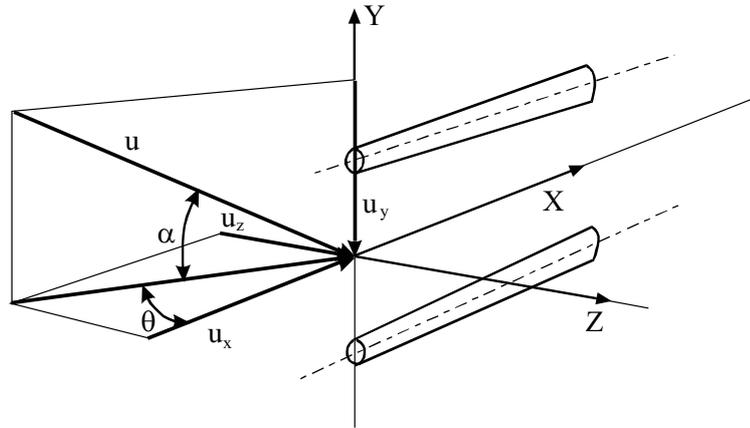


Figura 2.11: Descomposición del vector velocidad en el sistema de coordenadas de la sonda.

donde A , B y n son constantes empíricas calculadas habitualmente mediante una calibración.

2.5.2. Respuesta direccional

Una sonda simple está formada por un único sensor de hilo caliente dispuesto entre dos soportes, figura 2.11. Si se asume que sobre el sensor está actuando un flujo tridimensional u , en teoría, este único sensor mediría el módulo de la proyección de la velocidad sobre un plano perpendicular al hilo, que se conoce como velocidad efectiva de enfriamiento, esto es:

$$u_{eff}^2 = u^2 \cos^2 \alpha \quad (2.5)$$

Sin embargo, existen dos causas fundamentales por las que esto no es exactamente así. En primer lugar, el sensor tiene una longitud finita y se produce un enfriamiento del mismo debido a la componente de la velocidad paralela al sensor u_y . Este enfriamiento afecta a la medida y está cuantificado por medio del coeficiente k (coeficiente *yaw*) de valor inferior a la unidad. La velocidad efectiva de enfriamiento vendría dada por:

$$u_{eff}^2(\alpha) = u^2(\cos^2 \alpha + k^2 \sin^2 \alpha) \quad \theta = 0 \quad (2.6)$$

El valor de k se determina de forma empírica, no es constante y varía según los valores de la velocidad y la orientación del flujo. A pesar de esto, para un rango limitado de velocidades y para ángulos α (ángulo *yaw*) comprendidos entre 0 y 60° ,

se obtienen buenos resultados trabajando con un valor fijo. En segundo lugar deben de considerarse los efectos aerodinámicos inducidos por los soportes del sensor y el cuerpo de la sonda. El efecto mínimo se produce cuando el eje de la sonda (eje X) es paralelo al del flujo, y el máximo tiene lugar cuando el eje de la sonda está colocado perpendicular al flujo y el sensor es perpendicular al mismo. Estos efectos quedan incluidos en el coeficiente h (coeficiente *pitch*). Al considerar las interferencias de los soportes, la velocidad efectiva de enfriamiento queda:

$$u_{eff}^2(\theta) = u^2(\cos^2 \theta + h^2 \sin^2 \theta) \quad \alpha = 0 \quad (2.7)$$

El valor de h está en un rango entre 1.0 y 1.2 dependiendo del diseño de la sonda y de los soportes del sensor. La respuesta a un flujo tridimensional sería:

$$u_{eff}^2 = u_x^2 + k^2 u_y^2 + h^2 u_z^2 \quad (2.8)$$

Algunos autores [57] indican que si se utiliza un sensor simple para medir en flujos con intensidades turbulentas inferiores al 20 % las medidas obtenidas presentan una buena precisión sin necesidad de tener en cuenta (2.8). Estos efectos sólo son importantes cuando se utilizan sensores múltiples o cuando la orientación del sensor respecto del flujo en la calibración y en su posterior utilización es diferente.

En la aplicación más habitual de las sondas simples, el sensor se dispone perpendicular al flujo para medir la velocidad media u_x y las fluctuaciones de la velocidad media en la dirección del flujo medio $\overline{u'^2_x}$. Si se asume que el flujo medio es en la dirección u_x , entonces $u_y = u_z = 0$, la ecuación (2.8) queda teniendo en cuenta las fluctuaciones:

$$u_{eff}^2 = (\overline{u_x} + u'_x)^2 + k^2 u'^2_y + h^2 u'^2_z \quad (2.9)$$

Como k es pequeño y $h \simeq 1$:

$$u_{eff}^2 = (\overline{u_x} + u'_x)^2 + u'^2_z \quad (2.10)$$

despreciando u'_z :

$$\overline{u_{eff}} = \overline{u_x} = \overline{u} \quad (2.11)$$

$$\sqrt{\overline{u'^2_x}} = \sqrt{\overline{u'^2}} \quad (2.12)$$

Cuando $\sqrt{\overline{u'^2_x}}/\overline{u} = 0,2$ el error por ignorar u'_z es de aproximadamente el 2 % para turbulencia isotrópica. El error en la velocidad media también es de alrededor de 2 % [57].

Las sondas dobles en X se utilizan cuando se precisa medir dos componentes de la velocidad ($\overline{u_x}$ y $\overline{u_y}$). En la figura 2.12 se presenta una sonda doble en X con los sensores contenidos en planos dos XY formando los sensores un ángulo de 90° entre

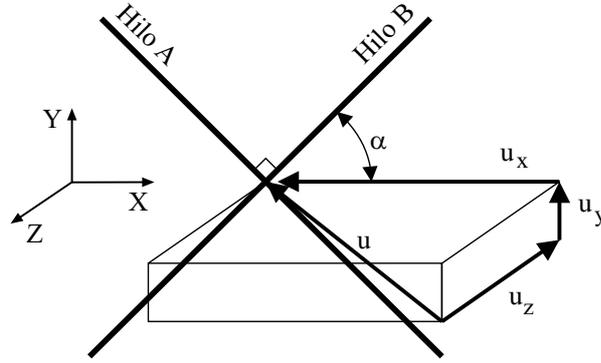


Figura 2.12: Descomposición del vector velocidad en el sistema de coordenadas de una sonda doble.

sí, siendo esta la configuración utilizada en las medidas con este tipo de sondas. La ecuación 2.8 para cada sensor queda:

$$u_{A,eff}^2 = (u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha)^2 + k^2 (u_x \cos \alpha + u_y \cos \alpha)^2 + h^2 u_z^2 \quad (2.13)$$

$$u_{B,eff}^2 = (u_x \sin \alpha + u_y \cos \alpha)^2 + k^2 (u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha)^2 + h^2 u_z^2 \quad (2.14)$$

donde α es el ángulo entre u_x y el sensor B.

Si el sistema de coordenadas se elige de forma que $u_z = 0$ y se asume que $k \rightarrow 0$ y $h \rightarrow 1$, entonces las ecuaciones (2.13) y (2.14) se transforman en:

$$u_{A,eff}^2 = (u_x \cos \alpha - u_y \sin \alpha)^2 + h^2 u_z'^2 \quad (2.15)$$

$$u_{B,eff}^2 = (u_x \sin \alpha + u_y \cos \alpha)^2 + h^2 u_z'^2 \quad (2.16)$$

Cuando las intensidades turbulentas del flujo son altas las ecuaciones (2.15) y (2.16), igual que la (2.10), no pueden simplificarse más. Sin embargo si u_z' es pequeña³ entonces el último término puede suprimirse y si se orienta la sonda de forma que el $\alpha = 45^\circ$, las ecuaciones (2.15) y (2.16) se pueden poner como:

$$u_x = \frac{u_{A,eff} + u_{B,eff}}{\sqrt{2}} \quad (2.17)$$

$$u_y = \frac{u_{B,eff} - u_{A,eff}}{\sqrt{2}} \quad (2.18)$$

³Despreciar u_z' introduce un error de alrededor del 8% cuando la intensidad turbulenta es del 20%, [57].

En la mayoría de las aplicaciones la orientación del sensor es tal que el flujo medio está en la dirección de u_x , de forma que $\bar{u}_y = 0$. Los resultados son entonces:

$$\bar{u} = \frac{\overline{u_{A,eff} + u_{B,eff}}}{\sqrt{2}} \quad (2.19)$$

$$\overline{u_x'^2} = \frac{\overline{(u'_{A,eff} + u'_{B,eff})^2}}{2} \quad (2.20)$$

$$\overline{u_y'^2} = \frac{\overline{(u'_{A,eff} - u'_{B,eff})^2}}{2} \quad (2.21)$$

$$\overline{u_x' u_y'} = \frac{\overline{(u'_{A,eff} + u'_{B,eff})(u'_{A,eff} - u'_{B,eff})}}{2} \quad (2.22)$$

Estas son las ecuaciones que se utilizan en la mayoría de las aplicaciones. Tal es el caso del chorro de pared plano.

2.5.3. Circuito electrónico

La finalidad principal de la electrónica es determinar el calor cedido por el sensor a su entorno, es decir, el número de Nusselt. Para que la medida realizada sea fiable es preciso que el único parámetro que afecte a la transferencia de calor sea la velocidad. Para ello la temperatura, la composición y la presión del fluido deben ser constantes.

Existen dos modos de funcionamiento del anemómetro: modo de intensidad constante y modo de temperatura constante. Con el segundo se obtiene la mejor respuesta en frecuencia, razón por la que es el más utilizado actualmente. Este ha sido el empleado en esta investigación. En la figura 2.13 se representa un esquema simplificado de un anemómetro de temperatura constante. El sensor forma parte de un puente de Wheatstone y existe una línea de realimentación que equilibra constantemente el puente, por tanto los efectos de la inercia térmica desaparecen y permite medir flujos con elevadas fluctuaciones de la velocidad.

Suponiendo que existe una relación lineal entre temperatura y resistencia (lo cual es apropiado en anemometría térmica), la resistencia R_s del sensor puede expresarse como:

$$R_s = R_r [1 + \alpha (T_s - T_r)] \quad (2.23)$$

donde: R_r ($\simeq 3.5 \Omega$) es la resistencia a la temperatura de referencia T_r ($\simeq 20^\circ C$), T_s es la temperatura media del sensor ($\simeq 250^\circ C$) y α es el coeficiente térmico de resistencia (0.0036 para el tungsteno). El valor de α es fundamental, ya que evalúa la variación de la resistencia del sensor con la temperatura. Si la resistencia no varía, el

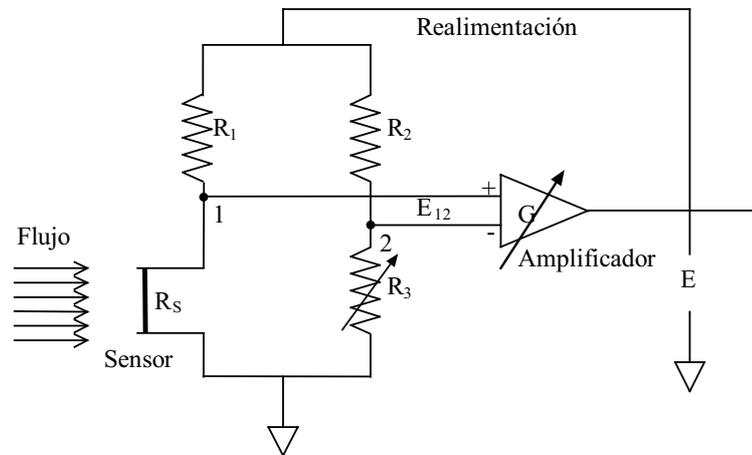


Figura 2.13: Esquema de un anemómetro de temperatura constante.

anemómetro no dará señal. El valor de α depende de la temperatura de referencia. En general se usa como temperatura de referencia la del fluido.

La resistencia del resistor R_1 debe de ser del mismo orden que la del sensor R_s . Si por ejemplo $R_1 \gg R_s$ la intensidad I sería prácticamente constante y cualquier aumento de la transferencia de calor del sensor a sus alrededores producirá un enfriamiento del sensor. En la configuración empleada $R_1 = R_2 = 20 \Omega$ y la resistencia del sensor típica es de $R_s = 6.0 \Omega$.

Mediante la resistencia variable R_3 se asigna el valor de la temperatura de operación del hilo T_s (250°C). El anemómetro empleado permite variar esta resistencia entre 2Ω y 64Ω con una resolución superior a $\pm 0,1 \%$ en todo el intervalo.

La realimentación desde la salida del amplificador de ganancia actúa para mantener la resistencia del sensor (y por tanto su temperatura) constante. Es por tanto la adición de la realimentación lo que convierte al puente y al amplificador en un sistema de temperatura constante.

A continuación se expone la metodología de este sistema:

1. Un aumento de la velocidad a través del hilo enfría éste, al bajar su temperatura, baja la resistencia R_s y el voltaje en 1.
2. El descenso del voltaje en la entrada negativa del amplificador provoca que E_{12} aumente.
3. El incremento de E_{12} aumenta el voltaje E a la salida del amplificador.
4. Ese incremento de E aumenta la corriente que pasa por el sensor.

5. Ese aumento de corriente calienta el sensor, disminuyendo E_{12} hasta que el sistema esté de nuevo en equilibrio.

Los cinco pasos anteriores suceden de forma casi simultánea, de manera que un aumento en la velocidad es visto como un aumento de E . Este valor es el que se usa habitualmente como salida del anemómetro.

La señal de salida del puente Wheatstone se acondiciona antes de realizar su conversión a digital. Típicamente el voltaje de salida del puente tiene un rango de variación de 1 V (figura 2.15), mientras que el convertidor A/D del anemómetro tiene un rango de 0 a 10 voltios. Para aprovechar mejor el rango de entrada del convertidor A/D previamente se hace un acondicionamiento del voltaje de salida del puente.

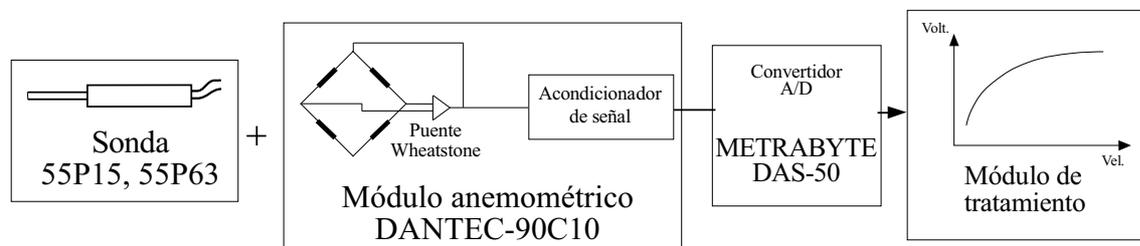


Figura 2.14: Principales elementos de un anemómetro de temperatura constante.

En el equipo utilizado el acondicionador de señal forma parte del módulo anemométrico. Contiene un circuito que resta hasta 10 V (*Offset*) al voltaje de salida del puente y una función que amplifica la señal resultante hasta 1024 veces (*Gain*).

Las señales de salida de los acondicionadores se digitalizan y almacenan en el ordenador por medio de una tarjeta DAS-50 de KEITHLEY METRABYTE con 1 Mb de memoria. Los datos se almacenan en palabras de 12 bits. Se puede configurar para trabajar con 1, 2 ó 4 canales de entrada. La frecuencia máxima de adquisición es de 1 MHz si se utiliza un único canal y de 250 kHz si se usan los cuatro. El rango de voltajes de entrada seleccionado es de 0 a 10 V.

2.5.4. Calibración

Es el procedimiento mediante el cual se relaciona la velocidad del flujo con la tensión necesaria para mantener el hilo a la temperatura fijada dentro del flujo. Esta relación no es lineal y depende de diversos factores por lo que es preciso realizar una calibración antes de comenzar la adquisición de datos. En este caso la calibración se

realiza haciendo incidir sobre el o los hilos de la sonda un chorro de aire de velocidad conocida obteniendo el voltaje necesario para mantenerlo a la temperatura elegida, 250°C.

Para relacionar la velocidad del flujo con la tensión proporcionada por el anemómetro se puede utilizar la “ley de King”:

$$E^2 = A + Bu^n \quad (2.24)$$

donde u es la velocidad, E es el voltaje de salida del puente y A , B y n son constantes de la calibración. Otra posibilidad es utilizar un ajuste polinómico de quinto grado:

$$u = \sum_{i=0}^5 C_i E^i \quad (2.25)$$

donde los coeficientes C_i se ajustan por mínimos cuadrados. En la figura 2.15 se representan las curvas de calibración de una sonda doble con los coeficientes C_i que definen el polinomio calculado para cada hilo y los errores cometidos al tomar el valor del polinomio en lugar del real.

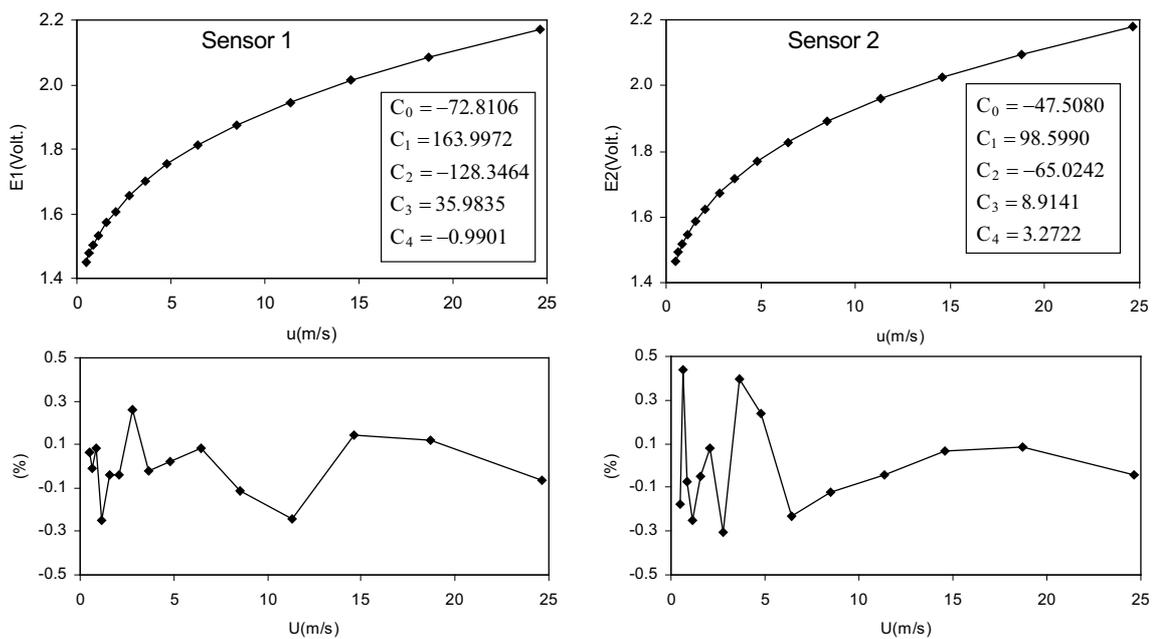


Figura 2.15: Curvas de calibración y errores asociados para los hilos de una sonda en X.

El sistema de calibración utilizado se compone de la unidad de flujo y del módulo de calibración (véase la figura 2.1) y permite realizar calibraciones entre 0.02 y 300 m/s .

El aire entra en la unidad de flujo a través de un filtro y un regulador de presión externo. Otro regulador de mayor precisión asegura que la presión en el interior de la unidad de flujo permanezca estable. Mediante válvulas de control y toberas internas se consigue ajustar el flujo de masa de forma discreta. El aire llega a una cámara de remanso antes de abandonar la unidad de flujo por la tobera, donde se genera un chorro con un perfil de velocidad plano y bajo nivel de turbulencia ($< 0,3\%$). El sistema tiene una precisión de $\pm 1\%$ y una repetitividad de $\pm 0,2\%$ (véase figura 2.16).

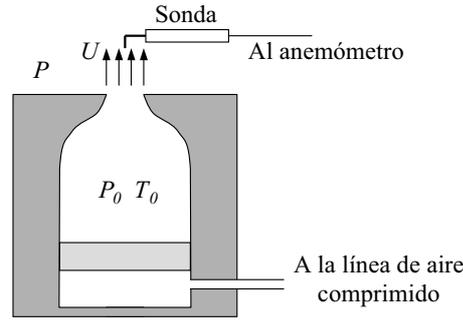


Figura 2.16: Esquema de funcionamiento del calibrador de sondas.

La velocidad de salida se calcula mediante relaciones isentrópicas en base a la la presión de remanso P_0 , la presión de descarga P , la temperatura de remanso T_0 y de la relación entre calores específicos γ .

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (2.26)$$

$$a_0 = (\gamma R_g T_0)^{1/2} \quad (2.27)$$

$$\frac{a_0}{a} = \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2\right)^{1/2} \quad (2.28)$$

$$u = Ma \quad (2.29)$$

La unidad de flujo dispone para este propósito de un transductor de presión diferencial, un transductor de presión absoluta y dos transductores de temperatura. El módulo de calibración comunica a la unidad de flujo con el PC transmitiendo la información de los transductores. La comunicación también es en sentido inverso: el módulo de calibración gestiona las órdenes procedentes del software para accionar las válvulas de control y las toberas hasta conseguir la velocidad asignada.

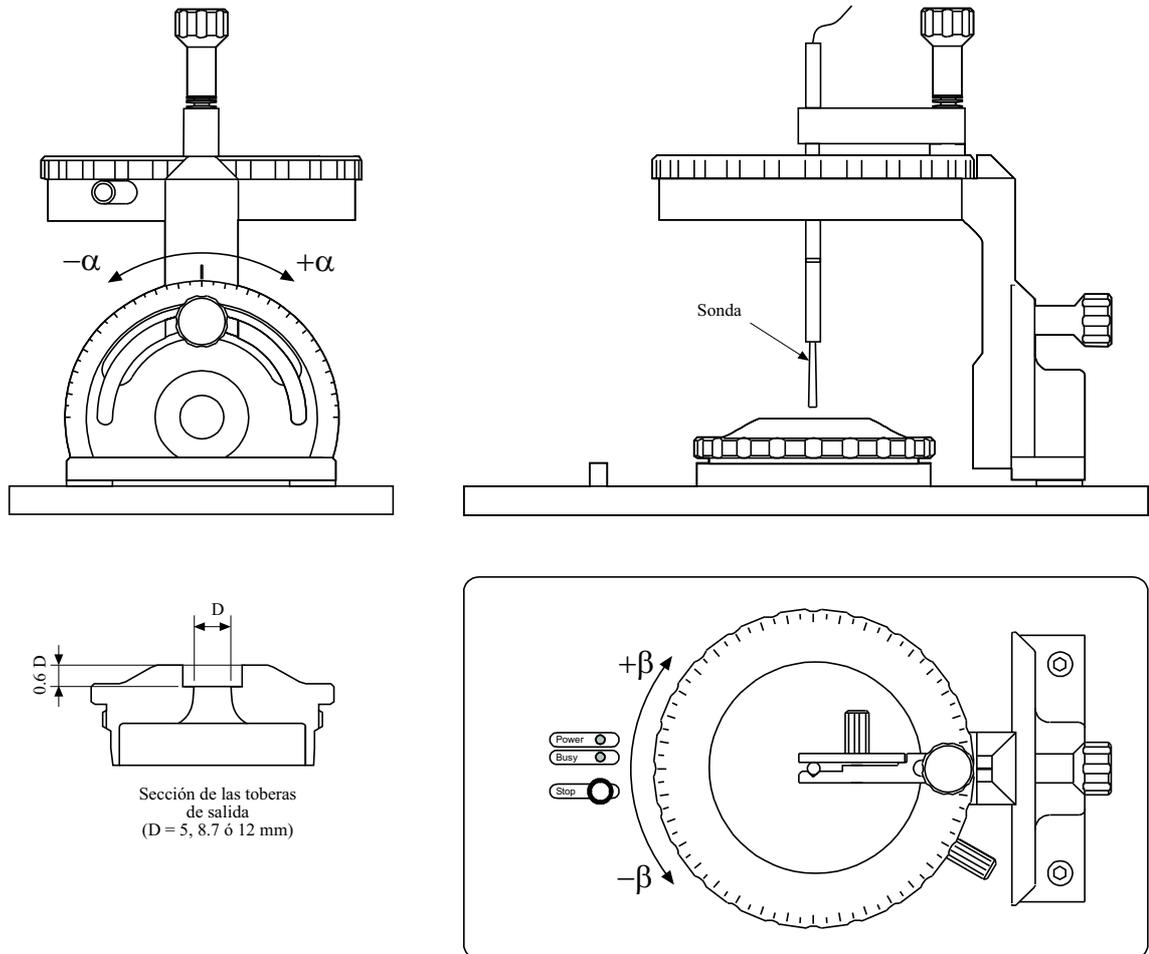


Figura 2.17: Vistas del manipulador para calibración direccional y detalle de la tobera de salida.

Un manipulador de sondas solidario a la unidad de flujo del calibrador permite realizar la calibración direccional de las sondas (véase la figura 2.17). Las sondas pueden rotar en cualquier combinación de ángulos *pitch* y *yaw* permaneciendo el sensor en la misma posición del chorro.

En la figura 2.18 se muestra una calibración direccional de una sonda doble. La calibración esta realizada a una velocidad media de 10 m/s y se indican los valores de los factores *yaw* k_1^2 y k_2^2 obtenidos correspondientes a cada hilo.

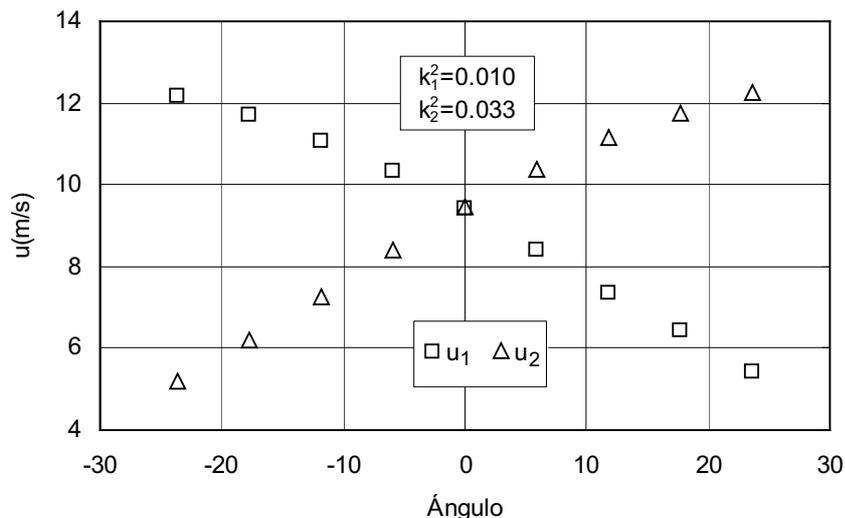


Figura 2.18: Calibración direccional de una sonda en X para una velocidad de 10 m/s.

2.5.5. Corrección de temperatura

La señal de salida del anemómetro depende tanto de la velocidad del fluido como de su temperatura, en la figura 2.19 se muestra esta influencia. Si la calibración y la toma de datos se realizan en flujos a distintas temperaturas se necesita corregir este efecto. La corrección en temperatura se realiza de forma diferente según se utilice la ley de King o un polinomio para relacionar el voltaje con la velocidad. Si el ajuste es polinómico el voltaje adquirido a una temperatura ambiente determinada se corrige a la temperatura de referencia mediante la formula:

$$E_{corr} = E_1 \left(\frac{T_w - T_0}{T_w - T_1} \right)^{\frac{1+m}{2}} \quad (2.30)$$

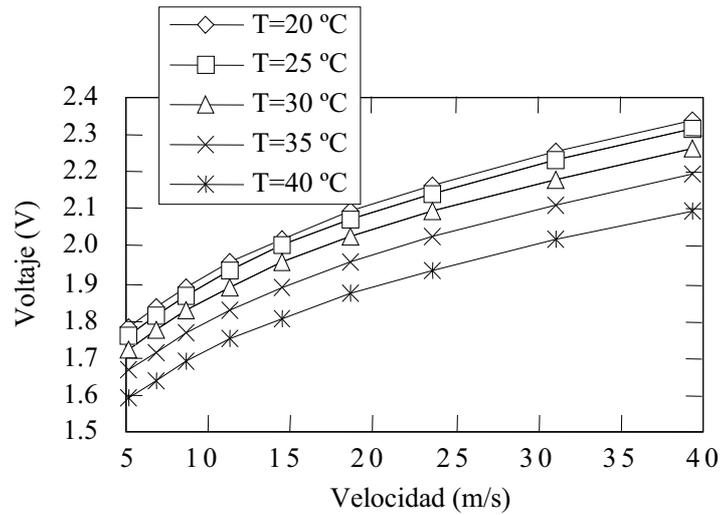


Figura 2.19: Curvas de calibración para diferentes temperaturas del fluido.

donde E_{corr} es el voltaje corregido a la temperatura de calibración, E_1 es el voltaje adquirido a la temperatura ambiente T_1 , T_w es la temperatura del sensor caliente (250°C), T_0 es la temperatura durante la calibración y m es un factor que depende del fluido y de la temperatura de referencia y que se suma o resta si la temperatura T_1 aumenta o disminuye respectivamente [58].

El equipo utilizado tiene un módulo que mide la temperatura del fluido durante el ensayo. Además la unidad de flujo para calibración de sondas incluye sensores de temperatura. Esto permite al software corregir el voltaje mediante la expresión (2.30).

Capítulo 3

Estudio experimental

3.1. El chorro de pared plano

3.1.1. Ecuaciones

Las ecuaciones de Reynolds que describen el campo medio de un flujo incompresible en coordenadas cartesianas son:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \rho \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} + \rho \bar{f}_{mi} \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta las características del flujo originado por el chorro de pared plano se podrían admitir las siguientes hipótesis:

- la bidimensionalidad supone que la componente transversal de la velocidad, las derivadas de las magnitudes medias respecto de z y las tensiones de Reynolds en las que intervenga la componente fluctuante de la componente transversal de la velocidad se anulan.
- el flujo medio es estacionario y, como consecuencia, las derivadas temporales se anulan.
- la componente longitudinal de la velocidad es muy superior a la normal: $\bar{u} \gg \bar{v}$.
- las variaciones de las magnitudes en la dirección normal son muy superiores a las que se tienen en la dirección longitudinal: $\partial/\partial y \gg \partial/\partial x$.

Con estas hipótesis la ecuaciones (3.1) y (3.2) se transforman en:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \quad (3.5)$$

Integrando la (3.5) entre y e ∞ :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \int_y^\infty \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} dy - \int_y^\infty \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} dy \Rightarrow 0 = \frac{1}{\rho} (\bar{p}_\infty - \bar{p}) + (\overline{v'^2}_\infty - \overline{v'^2}) \quad (3.6)$$

Lejos del chorro no hay turbulencia luego $\overline{v'^2}_\infty$ es nula:

$$\bar{p} = \bar{p}_\infty - \rho \overline{v'^2} \quad (3.7)$$

Derivando (3.7) e introduciéndola en (3.4) se tiene:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_\infty}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) \quad (3.8)$$

Donde, para el chorro plano paralelo, se pueden despreciar los efectos del gradiente de presión en la dirección del movimiento, desapareciendo el primer sumando del lado derecho de (3.8). El último sumando es más pequeño que el resto y en ocasiones se desprecia [59]. Las ecuaciones que rigen el movimiento de un chorro plano de pared quedan de la forma siguiente:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.9)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) \quad (3.10)$$

3.1.2. Semejanza

Se pretende convertir las ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones ordinarias aprovechando la evidencia de que $\bar{u}/u_m = f(y/y_{1/2}) = f(\eta)$ mostrada por los estudios experimentales, donde $y_{1/2}$ se define para cada posición transversal como la coordenada y más alejada de la pared donde la velocidad es la mitad de la velocidad máxima u_m , se comprueba que:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = u'_m f - u_m f' \eta \frac{y'_{1/2}}{y_{1/2}} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_m f' \frac{1}{y_{1/2}} \quad (3.12)$$

donde $f' = df/d\eta$, $y'_{1/2} = dy_{1/2}/dx$ y $u'_m = \partial u_m/\partial x$. Con la ecuación de continuidad se obtiene una expresión para \bar{v} :

$$\bar{v} = - \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy = u_m y'_{1/2} \int_0^\eta \eta f' d\eta - y_{1/2} u'_m \int_0^\eta f d\eta \quad (3.13)$$

lo que permite, asumiendo que $\overline{u'^2}/u_m^2 = g_{11}(\eta)$, $\overline{u'v'}/u_m^2 = g_{12}(\eta)$ y $\overline{v'^2}/u_m^2 = g_{22}(\eta)$, calcular cada uno de los sumandos de la (3.10):

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = u_m u'_m f^2 - u_m^2 \frac{y'_{1/2}}{y_{1/2}} \eta f f' \quad (3.14)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = u_m^2 \frac{y'_{1/2}}{y_{1/2}} \left(\eta f f' - f' \int_0^\eta f d\eta \right) - u_m u'_m f' \int_0^\eta f d\eta \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} = u_m^2 \frac{1}{y_{1/2}} g'_{12} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2} \right) = 2u_m u'_m (g_{11} - g_{22}) - (g'_{11} - g'_{22}) u_m^2 \frac{y'_{1/2}}{y_{1/2}} \eta \quad (3.17)$$

con $f'' = d^2 f/d\eta^2$, $g'_{12} = dg_{12}/d\eta$, $g'_{11} = dg_{11}/d\eta$ y $g'_{22} = dg_{22}/d\eta$. Sustituyendo en (3.10) se llega a:

$$\begin{aligned} g'_{12} = & - \left[\frac{u'_m}{u_m} y_{1/2} \right] (2(g_{11} - g_{22}) + f^2) + \left[y'_{1/2} + y_{1/2} \frac{u'_m}{u_m} \right] f' \int_0^\eta f d\eta + \\ & + [y'_{1/2}] \eta (g'_{11} - g'_{22}) + \frac{\nu}{u_m y_{1/2}} f'' \end{aligned} \quad (3.18)$$

no se comete excesivo error si se desprecia el último sumando, el número de Reynolds suele ser suficientemente alto. El lado izquierdo es sólo función de η por lo que también debe de serlo el derecho. O de otro modo, para que el flujo sea semejante la ecuación (3.18) debe de ser ordinaria, es decir, los coeficientes A , B y C definidos como:

$$A = \left[\frac{u'_m}{u_m} y_{1/2} \right] \quad (3.19)$$

$$B = \left[y'_{1/2} + y_{1/2} \frac{u'_m}{u_m} \right] = A + C \quad (3.20)$$

$$C = [y'_{1/2}] \quad (3.21)$$

deben ser independientes de la coordenada x . Si $u_m \propto x^p$ e $y_{1/2} \propto x^q$, de las ecuaciones (3.19) a (3.21) entonces $q = 1$, es decir, la tasa de crecimiento del semiancho

debe de ser proporcional a la distancia longitudinal. La ecuación (3.18) también se satisface si $y_{1/2} = cte$ pero esto no concuerda con lo observado experimentalmente.

Se necesita otra ecuación para calcular el exponente p . Multiplicando (3.10) por ρ e integrando:

$$\int_0^\infty \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy + \int_0^\infty \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy = - \int_0^\infty \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} dy - \int_0^\infty \rho \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) dy \quad (3.22)$$

de donde se deduce utilizando continuidad y la regla de Liebnitz¹:

$$\frac{d}{dx} \left[\rho u_m^2 y_{1/2} \int_0^\infty (f^2 + g_{11} - g_{22}) d\eta \right] = \rho \overline{u'v'} \Big|_{x=0} \quad (3.24)$$

si en primera aproximación se supone nulo el esfuerzo cortante en la pared, la ecuación anterior impone que $u_m^2 y_{1/2} \propto x^0$ luego $2p+q=0$ por lo que usando el resultado de $q=1$ se deduce que $p=-1/2$. La presencia de esfuerzo cortante en (3.24) hace que $p < -1/2$. Suponiendo $-\rho \overline{u'v'} \Big|_{x=0} \propto x^s$:

$$\frac{d}{dx} \left[\rho u_m^2 y_{1/2} \int_0^\infty (f^2 + g_{11} - g_{22}) d\eta \right] \propto x^s \quad (3.25)$$

luego $2p+q-1=s$ de donde se deduce $2p=s$. Si se acepta $p=-1/2$ entonces $s=-1$, por tanto:

$$u_m \propto 1/\sqrt{x} \quad (3.26)$$

$$y_{1/2} \propto x \quad (3.27)$$

$$\tau_w \propto 1/x \quad (3.28)$$

Tennekes y Lumley [60] y Hinze [61] propusieron caminos más directos para introducir el concepto de semejanza. Los primeros establecieron que las escalas de longitud y tiempo deben evolucionar lentamente aguas abajo de forma que las escalas turbulentas sean lo suficientemente pequeñas como para poder ajustarse a las variaciones del entorno. Hinze [61] propuso que si se emplea una escala local adecuada, un flujo semejante mantendría su estructura durante su desarrollo aguas abajo.

¹De forma general la regla de Liebnitz se puede expresar como:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy = \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy + f(x, a) \frac{da}{dx} - f(x, b) \frac{db}{dx} \quad (3.23)$$

Consideraciones dimensionales. Suponiendo que el parámetro característico de este fenómeno es el flujo de cantidad de movimiento a la salida M_0 ($M_0 = b\rho u_0^2$), que aproximadamente se conserva y despreciando los efectos de la viscosidad se puede establecer:

$$u_m = f_1(M_0, \rho, x) \quad (3.29)$$

$$y_{1/2} = f_2(M_0, \rho, x) \quad (3.30)$$

$$\tau_w = f_3(M_0, \rho, x) \quad (3.31)$$

La aplicación de teorema π proporciona los siguientes resultados:

$$\frac{u_m}{u_0} = C_1 \frac{1}{\sqrt{x/b}} \quad (3.32)$$

$$y_{1/2} = C_2 x \quad (3.33)$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{\rho u_0^2/2} = C_3 \frac{1}{x/b} \quad (3.34)$$

donde c_f es el coeficiente de fricción. Si se incluye la viscosidad en el análisis dimensional los coeficientes C_1 , C_2 y C_3 podrían ser función del número de Reynolds en la salida del chorro. Definiendo un nuevo coeficiente de fricción como:

$$c'_f = \frac{\tau_w}{\rho u_m^2/2} \quad (3.35)$$

se observa que $c'_f = C_3/C_1^2 = C_4$ con C_4 otra constante.

3.1.3. Bidimensionalidad

Lauder y Rodi [1] consideraron la bidimensionalidad del flujo como uno de los puntos clave en el estudio de chorros de pared. Un método directo de verificar la bidimensionalidad consiste en realizar medidas en la dirección transversal. Por ejemplo Wygnanski y otros [34] caracterizaron la bidimensionalidad del chorro verificando la coincidencia de los perfiles de velocidad longitudinal $\bar{u}(y)$ medidos en varias posiciones transversales para una misma coordenada longitudinal. En este trabajo se ha utilizado este procedimiento para caracterizar la ranura de salida del chorro (véase la sección 2.4.3). Diversos autores [1, 2] consideran este criterio bastante débil, Lauder y Rodi proponen verificar el carácter bidimensional del chorro de pared evaluando el grado de cumplimiento de la ecuación integral de cantidad de movimiento:

$$\frac{M(\bar{u}^2)}{M_0} = \left(\frac{u_m}{u_0}\right)^2 \frac{y_{1/2}}{b} \int_0^\infty \left(\frac{\bar{u}^2}{u_m^2}\right) \frac{1}{y_{1/2}} dy \quad (3.36)$$

en diferentes posiciones longitudinales. Utilizando este criterio Launder y Rodi encontraron que la mayoría de los trabajos revisados presentaban una variación considerable del flujo de cantidad de movimiento a lo largo del desarrollo del chorro. En un chorro libre el flujo de cantidad de movimiento a través de cualquier sección transversal debe ser el mismo, dado que el chorro no ejerce ninguna fuerza sobre cuerpos externos. Sin embargo, en chorros de pared debe de tenerse en cuenta cierta pérdida de cantidad de movimiento en la dirección del flujo debido a la fricción en la pared. Launder y Rodi hacen una estimación de esta pérdida por fricción, llegando a la conclusión de que la variación detectada en la mayoría de los trabajos revisados no podía atribuirse exclusivamente a la fricción en la pared, considerándose como una prueba de falta de bidimensionalidad.

Abrahamsson y otros [2], siguiendo las recomendaciones de Kotsovinos y Angelidis [62] valoraron la bidimensionalidad incluyendo en la ecuación integral de cantidad de movimiento la influencia de las fluctuaciones longitudinales de velocidad:

$$\frac{M(\bar{u}^2 + \overline{u'^2})}{M_0} = \frac{1}{c_i} \left(\frac{u_m}{u_0} \right)^2 \frac{y_{1/2}}{b} \int_0^\infty \left(\frac{\bar{u}^2}{u_m^2} + \frac{\overline{u'^2}}{u_m^2} \right) \frac{1}{y_{1/2}} dy \quad (3.37)$$

donde c_i es un factor de corrección que tiene en cuenta la forma del perfil de velocidades a la salida.

En la figura 3.1 se representa el resultado de aplicar las ecuaciones (3.36) y (3.37) a los datos obtenidos experimentalmente. Las integrales se calcularon numéricamente aplicando la regla de los trapecios. La línea continua representa las pérdidas de cantidad de movimiento debidas únicamente a la fricción y ha sido obtenida de la estimación que hicieron Launder y Rodi [1]. También se incluyen los datos de Karlsson y otros [37] y Abrahamsson y otros [2].

Se comprueba que las pérdidas de cantidad de movimiento en la evolución del chorro son menores en el caso de incluir en la ecuación de conservación las fluctuaciones longitudinales de la velocidad, de no hacerlo el transporte de turbulencia desde la región exterior hacia la interior se consideraría también como una pérdida de cantidad de movimiento.

Aunque existe una pérdida de cantidad de movimiento considerable (aproximadamente un 16%) a lo largo de los 2.000 mm en que se estudia la evolución del chorro, existe una zona comprendida entre $70 < x/b < 150$ en la cual el parámetro permanece aproximadamente constante por lo que se deduce que en esa zona la bidimensionalidad del chorro está garantizada. La zona inicial del chorro ($0 < x/b < 70$) es en la que se localizan la mayores pérdidas de cantidad de movimiento pues es donde el flujo todavía no está desarrollado.

La instalación construida por Abrahamsson es la que genera un chorro con mayor carácter bidimensional en el rango $70 < x/b < 150$. El chorro generado en la

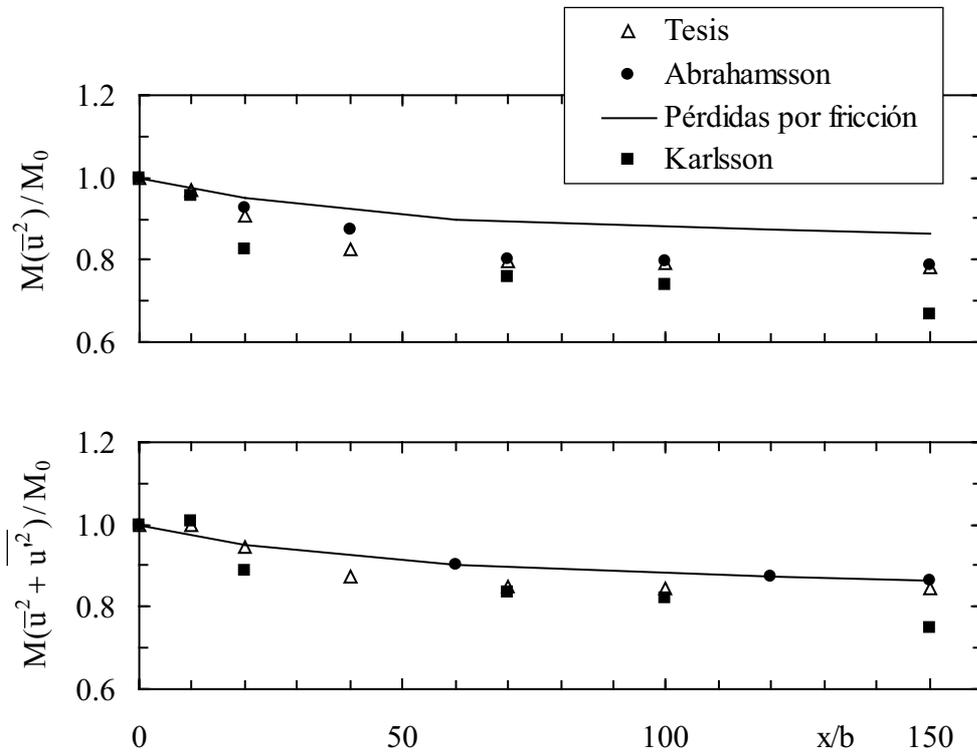


Figura 3.1: Balance de cantidad de movimiento.

instalación construida para esta tesis alcanza también una bidimensionalidad aceptable en ese rango mientras que el de Karlsson presenta menor bidimensionalidad.

3.2. Medidas en chorros de pared planos paralelos

Las medidas presentadas se han realizado en las posiciones $x/b = 5, 10, 15, 20, 30, 40, 70, 100$ y 150 de la sección central de la instalación, para $Re=10.000, 20.000$ y 30.000 . En cada punto se han tomado 8.000 muestras durante 8 segundos (más de 300 veces el periodo de giro del ventilador cuando $Re=10.000$).

Para la zona próxima a la pared se ha empleado una sonda simple. El eje del hilo se sitúa paralelo a la superficie plana. La posición más cercana a la pared se consigue aproximando gradualmente la sonda en incrementos de 0.0125 mm. Cuando la sonda toca a la pared se cierra un circuito eléctrico gracias a la pintura conductora con la que se ha bañado su superficie. La posición más próxima a la pared en la que se consigue situar el hilo por este procedimiento es del orden 0.06 mm.

3.2.1. Perfiles de velocidades medias

En la figura 3.2 se representan los perfiles de velocidad $\bar{u}(y)$ medidos en el chorro de pared plano paralelo para un número de Reynolds de 10.000. A medida que el chorro se aleja de la salida disminuye su velocidad y se expande en dirección normal a la pared. La disminución de velocidad se analizará más en detalle con la variación de la velocidad máxima u_m de cada posición transversal y su expansión normal a la pared con la variación del semiancho $y_{1/2}$.

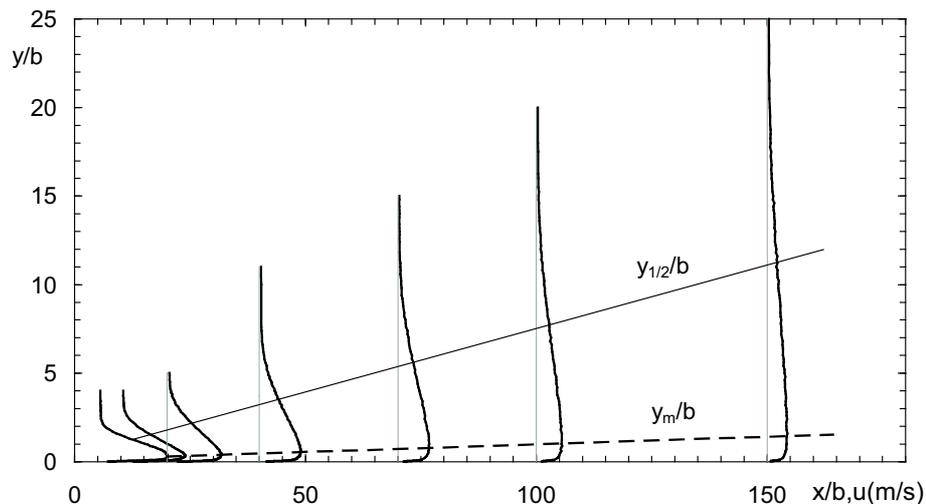


Figura 3.2: Perfiles de velocidades medias para $Re=10.000$.

En la figura 3.3 se representan los perfiles de velocidades medias con $Re=10.000$ medidos para esta tesis y se comparan con los obtenidos por Karlsson y otros [37] utilizando anemometría láser. Se aprecia como los perfiles de velocidad son semejantes cuando se adimensionalizan con la velocidad máxima local y el semiancho. Los datos presentan buena concordancia con los de los experimentos de Karlsson excepto en la zona exterior donde las velocidades son algo superiores a las medidas por Karlsson realizadas con LDA. Para mayor claridad de la figura no se han representado los datos de otros autores como Wygnanski y otros [34] o Abrahamsen y otros [2] obtenidos, al igual que los de esta tesis, con anemometría térmica. Sin embargo la concordancia con los datos de estos autores también se extiende a la zona exterior. Parece por tanto atribuible a la técnica de medida las diferencias encontradas para la zona más alejada de la pared.

Lauder y Rodi [1] admiten la existencia de semejanza en la evolución del chorro hasta al menos $y < 1,6y_{1/2}$ cuando se adimensionalizan con la velocidad máxima local y el semiancho. Wygnanski y otros [34] midieron el perfil de velocidad hasta regiones más alejadas de la pared observando que en la zona de $y > 1,3y_{1/2}$ la

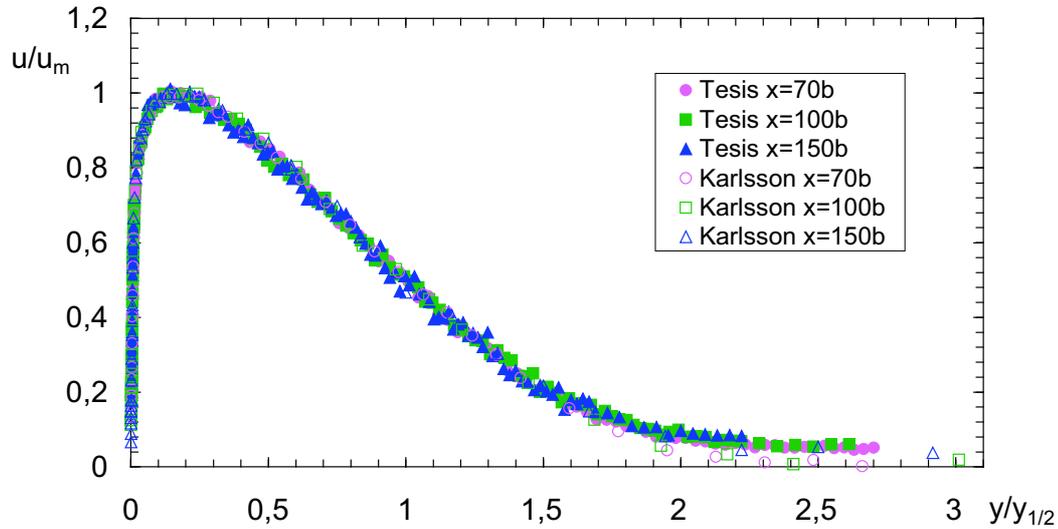


Figura 3.3: Perfiles adimensionalizados de velocidades medias para $Re=10.000$.

influencia del número de Reynolds se hacía patente, mientras que para zonas más próximas a la superficie plana la semejanza estaba garantizada. No obstante ni en las medidas de Abrahamsson ni las de esta tesis se aprecia esta dependencia con el número de Reynolds, lo que parece confirmar la hipótesis de Abrahamsson de que la zona más alejada de la pared puede verse influenciada por la existencia de corrientes externas de aire, aunque sean de baja velocidad o incluso atribuirse a la técnica de medida.

Schneider y Goldstein [33] propusieron una ecuación analítica adimensionalizada que permitía ajustar la totalidad del perfil de velocidad longitudinal:

$$\frac{u}{u_m} = C_1 \cdot \left(\frac{y}{y_{1/2}} \right)^{C_2} \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(C_3 \cdot \frac{y}{y_{1/2}} \right) \right] \quad (3.38)$$

siendo erf la función de error² y C_1 , C_2 y C_3 constantes obtenidas por mínimos cuadrados para optimizar las diferencias entre la ecuación (3.38) y los datos experimentales obtenidos. En el caso concreto de Schneider y Goldstein toman los

²Se define la función de error como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

valores:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1,44 \pm 0,02 \\ C_2 &= 0,128 \pm 0,005 \\ C_3 &= 0,663 \pm 0,005 \end{aligned} \quad (3.39)$$

En ninguno de los trabajos posteriores al de Schneider y Goldstein se ha utilizado esta expresión.

3.2.2. Velocidad máxima

De acuerdo con (3.26) y (3.32) la velocidad máxima u_m en cada sección transversal varía linealmente con $x^{-1/2}$. En la figura 3.4 se comparan los valores de $(u_0/u_m)^2$ frente a x/b con los de otros autores para números de Reynolds similares, apreciándose el comportamiento lineal de este parámetro.

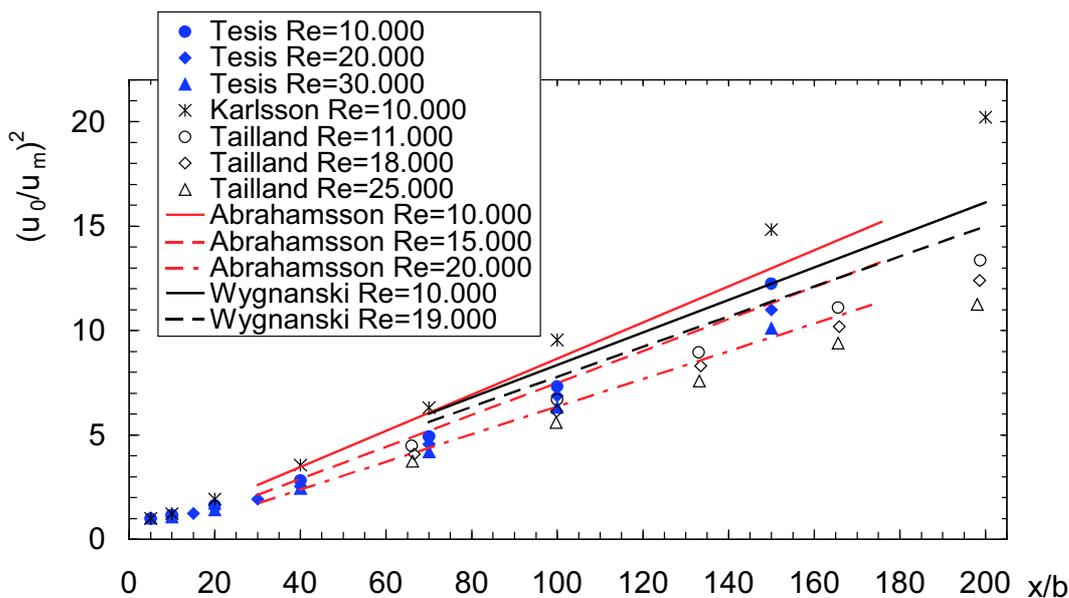


Figura 3.4: Evolución de la velocidad máxima.

Al analizar la influencia del número de Reynolds (figura 3.4) se observa una disminución de la pendiente de las líneas de tendencia al aumentar la velocidad máxima, así como un desplazamiento del origen virtual x_0 . Siguiendo las recomendaciones de Narasimha y otros [12], Wygnanski y otros eliminaron la dependencia con el número de Reynolds adimensionalizando u_m y x , con la cantidad de movimiento cinemática por unidad de longitud a la salida del chorro J_0 y la viscosidad

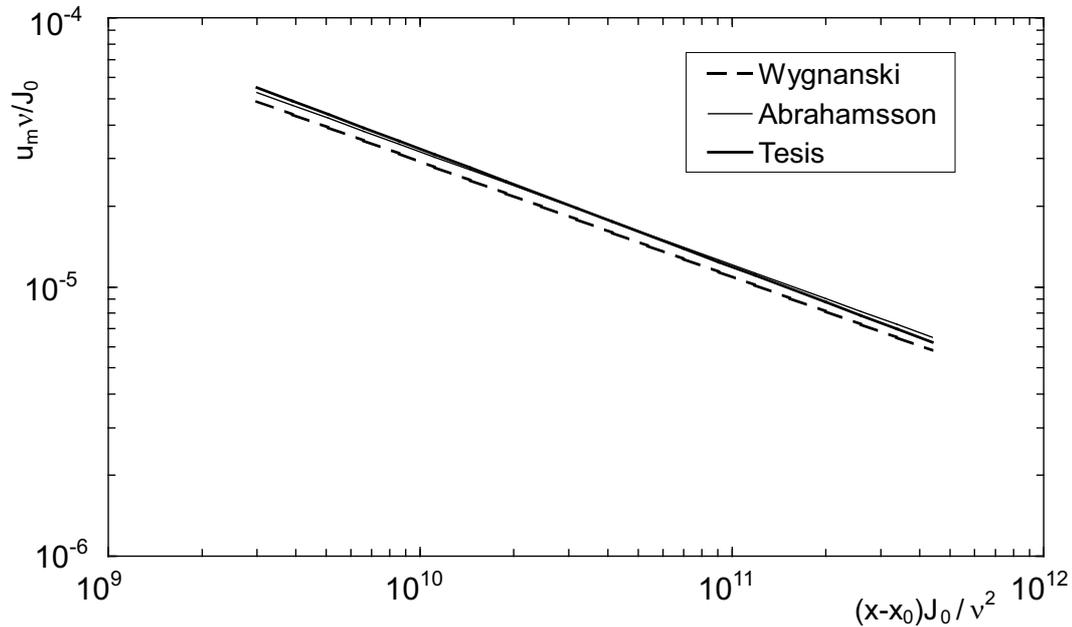


Figura 3.5: Evolución de la velocidad máxima con la adimensionalización de Narasimha.

cinemática ν , obteniendo la siguiente correlación:

$$\left[u_m \frac{\nu}{J_0} \right] = A_u \left[x \frac{J_0}{\nu^2} \right]^{B_u} \quad (3.40)$$

donde³ $A_u = 1,473$ y $B_u = -0,472$. Según Wygnanski y otros la ligera dispersión que aún permanece al utilizar esta adimensionalización se elimina completamente si se incluye un origen virtual x_0 en la correlación:

$$\left[u_m \frac{\nu}{J_0} \right] = A_u \left[(x - x_0) \frac{J_0}{\nu^2} \right]^{B_u} \quad (3.41)$$

con $A_u = 0,557$, $B_u = -0,428$ y x_0 definido de manera que las líneas que ajustan los datos de $(u_0/u_m)^2$ para cada número de Reynolds frente a x/b convergen hacia $u_0/u_m = 1$ en $x = x_0$.

Abrahamsson y otros [2] obtuvieron la misma tendencia que Wygnanski y otros [34] para el descenso de la velocidad máxima del chorro pero con $A_u = 0,538$ y $B_u = -0,415$ ligeramente distintos de los que ajustaban los datos de Wygnanski. Abrahamsson apunta como posible causa las diferentes condiciones de contorno de

³En texto del artículo de Wygnanski aparece el coeficiente 1.473 sin embargo de la figura 5 del mismo artículo se deduce un coeficiente de aproximadamente el doble.

las instalaciones experimentales. Abrahamsson y otros, al igual que en esta tesis, incluyeron una pared vertical encima de la ranura de salida y dos paredes verticales limitando la superficie sobre la que evolucionaba el chorro mientras que Wygnanski y otros [34] no. Para las medidas realizadas en esta tesis las constantes que se obtienen son $A_u = 0,7704$ y $B_u = -0,4374$, ligeramente diferentes a las de ambos autores. Sin embargo se ha observado [12] que el valor de la constante es muy sensible al valor del exponente seleccionado. En la figura 3.5 se muestra la evolución de la velocidad máxima con la adimensionalización de Narasimha para las medidas de Wygnanski y otros [34], Abrahamsson y otros [2] y las de este trabajo.

3.2.3. Semiancho

El semiancho $y_{1/2}$ es el parámetro utilizado habitualmente para medir la tasa de apertura del chorro de pared. Se define para cada posición transversal como la coordenada y más alejada de la pared donde la velocidad es la mitad de la velocidad máxima. Como se dedujo en la sección 3.1.2 cabe esperar una evolución lineal de este parámetro con la distancia a la ranura de salida (3.27) y (3.33). Los trabajos revisados por Launder y Rodi [1] confirman esta tendencia y proponen una variación dentro del rango: $dy_{1/2}/dx = 0,073 \pm 0,002$. En la figura 3.6 se representan los valores medidos de $y_{1/2}$ para diferentes posiciones junto con los obtenidos por otros autores.

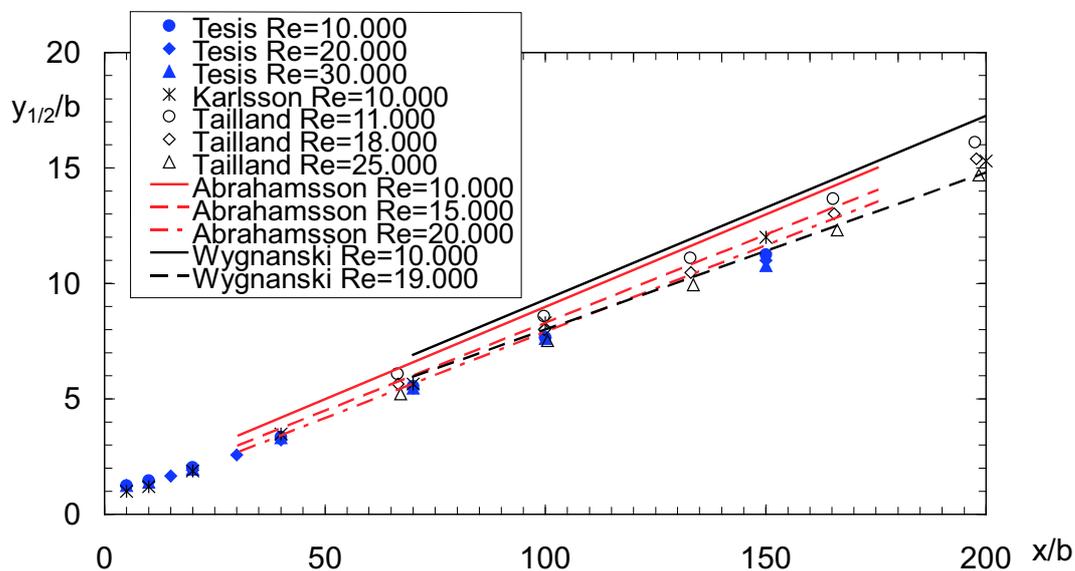


Figura 3.6: Semiancho adimensionalizado con la anchura de la tobera.

En los datos experimentales obtenidos por Tailland y Mathieu [11] ya se apreciaba un leve descenso en la tasa de crecimiento del semiancho al incrementar el

número de Reynolds. Dado que el crecimiento de un chorro libre no se ve afectado por el número de Reynolds, Launder y Rodi [1] atribuyeron esta dependencia a la influencia que la superficie plana ejerce sobre el chorro de pared. Trabajos posteriores [34, 2] y las medidas de esta tesis corroboran esta dependencia, en concreto para las medidas de esta tesis, la pendiente del semiancho toma los valores de 0.0717, 0.0706 y 0.0679 para los números de Reynolds de 10.000, 20.000 y 30.000 respectivamente.

Wyganski y otros [34] atribuyeron la falta de semejanza total en la evolución del chorro plano de pared a las variables utilizadas para adimensionalizar. Conviene destacar que a esta misma conclusión ya llegaron Narasimha y otros [12], sin embargo sus resultados fueron rechazados por Launder y Rodi [1] debido a la falta de bidimensionalidad que presentaba el flujo sobre el que realizaron sus estudios.

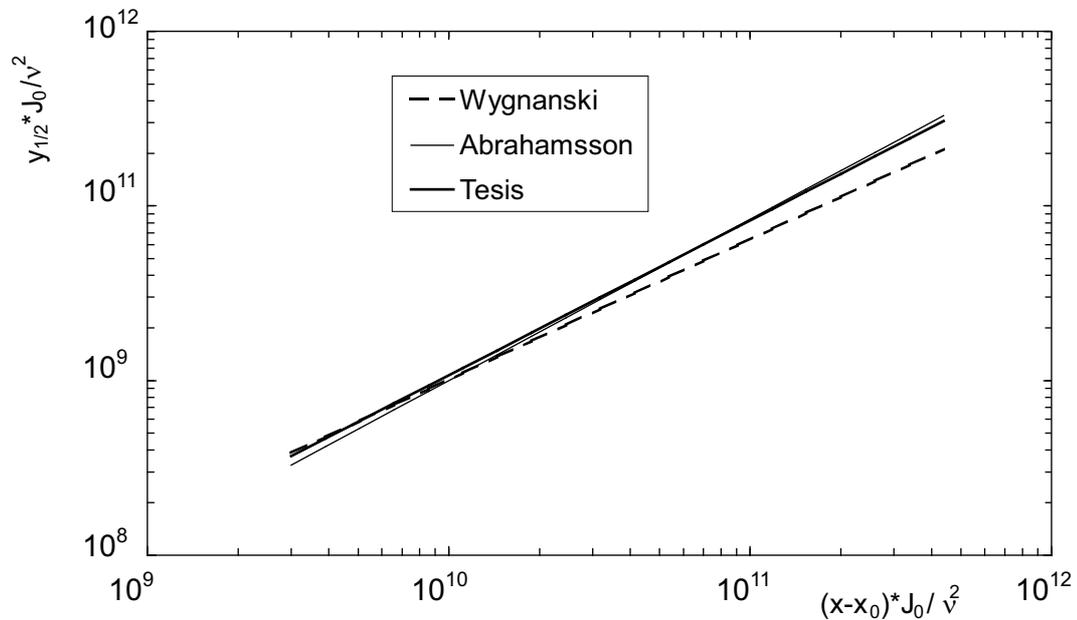


Figura 3.7: Evolución del semiancho $y_{1/2}$ con la adimensionalización de Narasimha.

Wyganski obtuvo, siguiendo las recomendaciones de Narasimha, la siguiente expresión para sus medidas:

$$\left[y_{1/2} \frac{J_0}{\nu^2} \right] = A_y \left[x \frac{J_0}{\nu^2} \right]^{B_y} \quad (3.42)$$

con $A_y = 1,44$ y $B_y = 0,881$. Sin embargo, Wygnanski indica que para eliminar completamente la independencia del semiancho con el número de Reynolds se necesita

además desplazar el origen virtual, obteniendo la siguiente correlación:

$$\left[y_{1/2} \frac{J_0}{\nu^2} \right] = A_y \left[(x - x_0) \frac{J_0}{\nu^2} \right]^{B_y} \quad (3.43)$$

con $A_y = 9,246$ y $B_y = 0,804$. Abrahamsson y otros [2] obtuvieron $A_y = 0,564$ y $B_y = 0,925$ y para las medidas de esta tesis se obtiene $A_y = 1,465$ y $B_y = 0,886$. En la figura 3.7 se representa la correlación (3.43) de todos estos trabajos. La coincidencia es bastante buena para el exponente B_y pero no para la constante A_y , probablemente debido a que la determinación de la constante es muy sensible a la elección del exponente (lo mismo sucedía con B_u y A_u respectivamente).

3.2.4. Esfuerzo tangencial en la pared

Resulta complejo medir el esfuerzo tangencial τ_w en los chorros de pared debido al pequeño espesor que presenta la región interior del mismo. En capas límites turbulentas se puede estimar τ_w mediante un balance de cantidad de movimiento, sin embargo es difícil conseguir buenos resultados aplicando este método a los chorros de pared planos porque la pérdida de cantidad de movimiento debida a la fricción es muy pequeña (Schwarz y Cosart [15]).

Los valores del coeficiente de fricción:

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_m^2} \quad (3.44)$$

determinados mediante tubos de impacto calibrados (por ejemplo las medidas de Bradshaw y Gee [10] o también las de Abrahamsson y otros [2] con tubos Preston) son del mismo orden que los estimados midiendo directamente la fuerza ejercida sobre una pequeña porción de superficie (por ejemplo Alcaraz [13]) y que los obtenidos a partir del gradiente de velocidades obtenido con LDA por Kalsson y otros [37]. Estos resultados se ajustan bastante bien a la fórmula propuesta por Bradshaw y Gee [10]:

$$c_f = 0,0315 \cdot \text{Re}_m^{-0,182} \quad (3.45)$$

Sin embargo los intentos de obtener el coeficiente de fricción midiendo el gradiente de velocidad en la subcapa límite laminar utilizando anemometría de hilo caliente (por ejemplo Tailland y Mathieu [11], Wygnanski y otros [34] o los de esta tesis) proporcionan valores del orden de un 20 a un 35 % inferiores a los valores predichos por Bradshaw y Gee [10] (véase la figura 3.8). Esto se debe a que a medida que el sensor de una sonda de hilo caliente se acerca a la pared se modifican la temperatura y la velocidad alrededor del hilo debido a la presencia de la pared. Cualquier modificación de esta capa límite cambia la relación entre la velocidad y el voltaje de

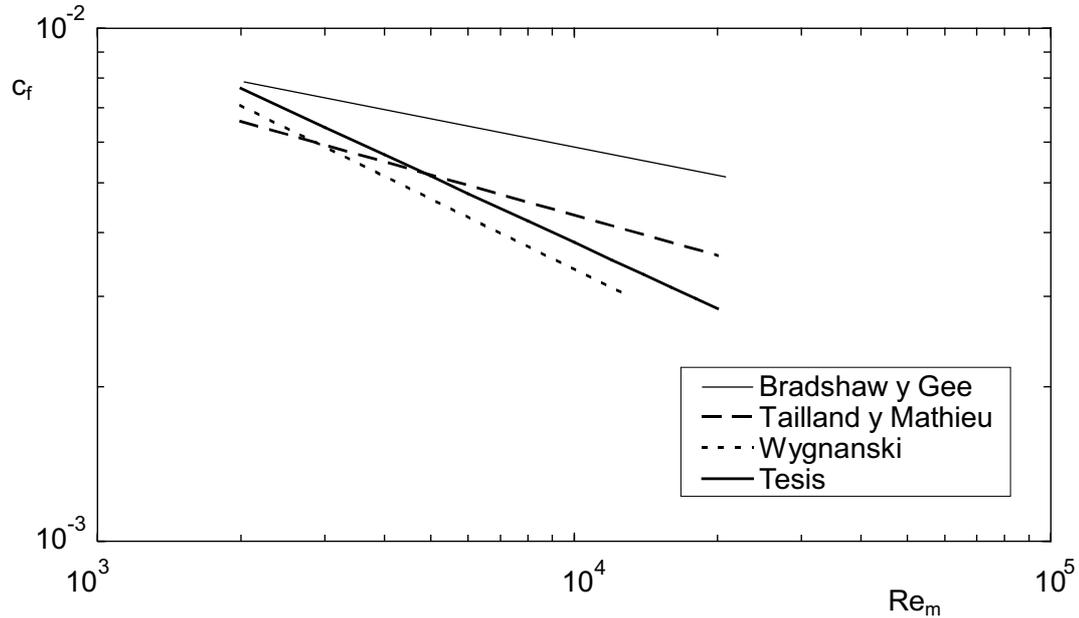


Figura 3.8: Coeficiente de fricción.

salida del anemómetro. Cuando la relación entre la distancia a la pared y el radio del hilo es del orden de 100 este efecto empieza a tener importancia, aumentando el porcentaje de error al disminuir la velocidad, Wills [63]. Para este trabajo se ha utilizado hilo de $2,5 \mu$ de radio lo que supone que las medidas dejan de estar afectadas de error por la presencia de la pared cuando el hilo se encuentra en el límite de la subcapa viscosa, siendo difícil cualquier intento de obtener medidas fiables del esfuerzo cortante por este procedimiento.

3.2.5. Perfiles de velocidad en las proximidades de la pared

En el caso de capas límite turbulentas y bidimensionales en ausencia de gradiente de presión una vez superada la zona laminar donde $u^+ = y^+$, se puede describir el perfil de velocidad en la zona próxima a la superficie plana sobre la que progresa el flujo con la expresión:

$$\frac{u}{u_\tau} = A \cdot \log \left(\frac{y \cdot u_\tau}{\nu} \right) + B \quad (3.46)$$

con $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$. La ecuación anterior se puede expresar de forma más compacta como:

$$u^+ = A \cdot \log y^+ + B \quad (3.47)$$

Dadas las similitudes que existen entre la región interior de un chorro plano de pared y una capa límite turbulenta y bidimensional, se puede asumir la forma del perfil de velocidad dado por la ecuación (3.46).

En la bibliografía más antigua (Bradshaw y Gee [10], Guitton [21], Launder y Rodi [1]) e incluso en publicaciones más recientes como Wygnanski y otros [34] se cuestiona la extensión y incluso la existencia de una capa logarítmica para un chorro de pared plano. Se afirmaba que la extensión de la capa logarítmica disminuía con la distancia aguas abajo y suficientemente lejos no aparecían evidencias de su existencia. Launder y Rodi [1] atribuyen este fenómeno a que los torbellinos de gran escala viajan desde la zona exterior a la zona interior, llevando un esfuerzo tangencial de signo contrario al que se tiene en la superficie plana sobre la que progresa el chorro, disminuyendo la porción de zona interior en la que se satisface la ecuación (3.46) con respecto a las capas límite turbulentas y bidimensionales.

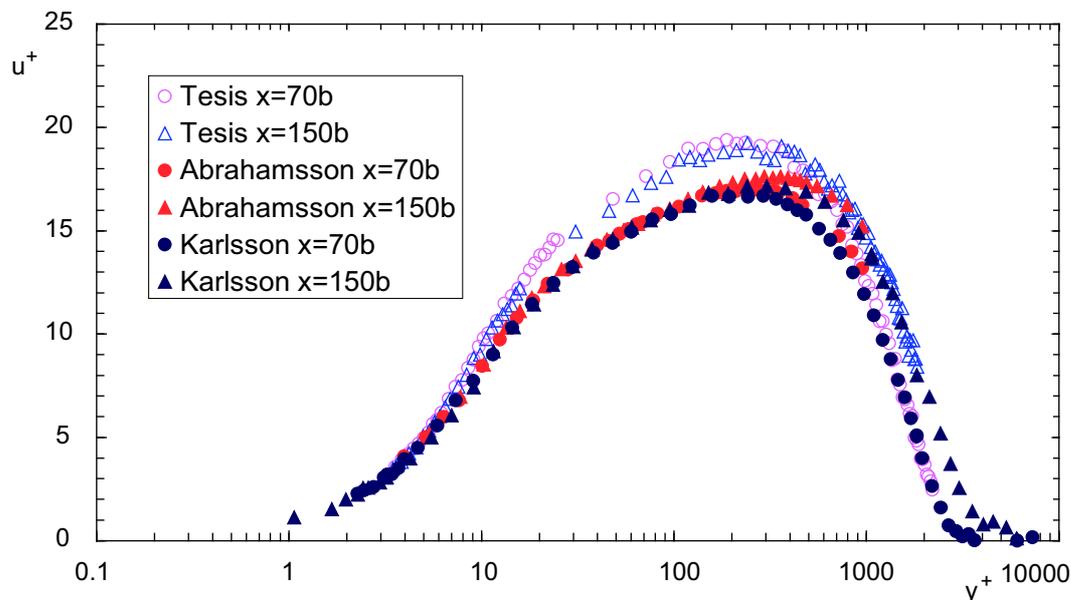


Figura 3.9: Perfiles de velocidad media en coordenadas de pared para $Re=10.000$.

En la figura 3.9 se comparan los perfiles de velocidad media medidos para esta tesis con los medidos por Karlsson y por Abrahamsson para dos posiciones longitudinales con $Re=10.000$. Ninguno de estos estudios confirman las apreciaciones de Launder y Rodi [1] o Wygnanski y otros [34] puesto que se aprecia la existencia de una zona $30 < y^+ < 100$ en la que el perfil de velocidad satisface la ecuación (3.47) con las constantes $A = 5,5$ y B variando entre 5 y 5.5 que se mantiene e incluso crece aguas abajo. En esta región son válidas tanto la escala de longitud exterior $y_{1/2}$ como la interior u/u_τ [2]. Para valores de $y^+ < 30$ se obtiene una dependencia

lineal entre u^+ e y^+ .

Las diferencias entre los perfiles de velocidad de Karlsson y de Abrahamsson con los de esta tesis pueden deberse a los errores cometidos en la medida del coeficiente de fricción. Algunos autores ilustran este efecto indicando que un valor demasiado pequeño en el esfuerzo tangencial conduce a valores pequeños de y^+ , mientras que provoca valores muy grandes de u^+ , de esta manera, el perfil de velocidad es excesivamente alto.

En la figura 3.10 se comparan para la posición longitudinal $x = 70b$ y diferentes Re los perfiles de velocidad en coordenadas de pared, apreciándose el crecimiento de la región logarítmica con el número de Reynolds. Esta tendencia se mantiene aguas abajo.

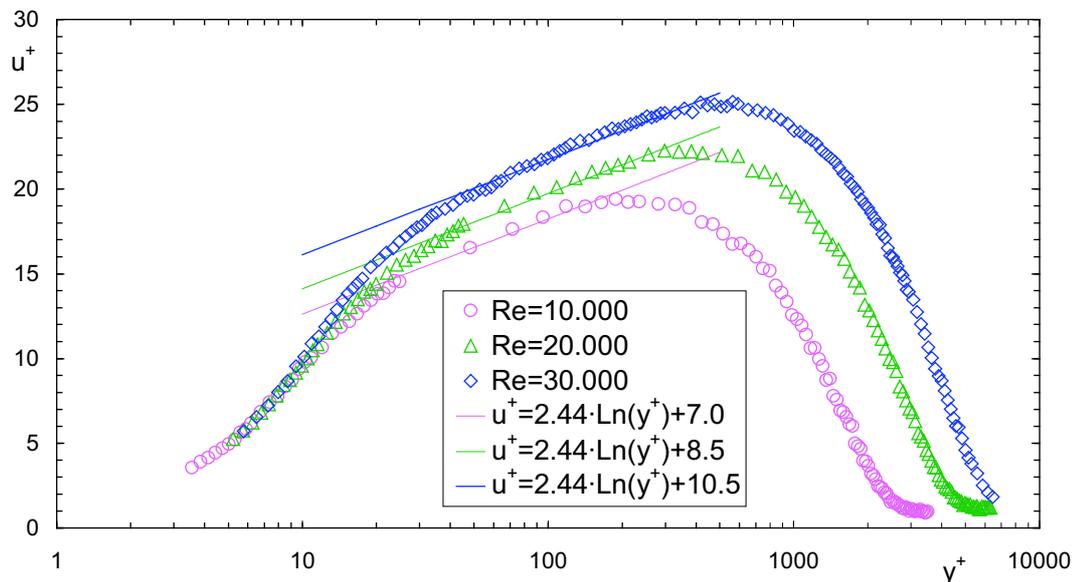


Figura 3.10: Perfiles de velocidad media en coordenadas de pared en $x = 70b$ para distintos Reynolds.

3.2.6. Parámetros turbulentos

En este apartado se revisan las tendencias de las tensiones de Reynolds obtenidas en trabajos experimentales publicados y se comparan con las de éste.

En los trabajos experimentales recopilados por Launder y Rodi [1] son pocos los que recogen medidas de todas las componentes de las tensiones de Reynolds, presentando además una gran dispersión entre ellos. De los trabajos posteriores, los de Karlsson y otros [37, 38, 39] al estar realizados con anemometría láser (LDA) y

medir muy cerca de la pared proporciona las medidas más detalladas de las tensiones de Reynolds.

Abrahamsson y otros [2] también presentan resultados de las tensiones de Reynolds pero utilizando anemometría térmica. Sus datos concuerdan bien con los de Karlsson y otros [37] hasta alrededor de un 60 % del semiancho, a partir de ahí arrojan niveles de turbulencia inferiores. Esto es así porque la anemometría de hilo caliente no contabiliza los flujos reversos, que en la región exterior del chorro tienen mayor intensidad. Venås y otros [43], utilizando la misma instalación que Abrahamsson y anemometría de hilo caliente pulsante obtuvieron en la región exterior del chorro de pared, niveles similares a los de Karlsson y otros [37]).

Los datos de Wygnanski y otros [34] obtenidos con anemometría térmica presentan dependencia con el número de Reynolds sobre todo en la zona exterior. En las medidas con LDA de Abrahamsson y otros [2] no se obtiene esta dependencia. Estos autores argumentan que podría ser debido a la principal diferencia entre ambas instalaciones, la ausencia en la instalación de Wygnanski de pared vertical encima de la ranura de salida. Además los niveles de turbulencia también son inferiores a los de Karlsson lo que se justificaría por la técnica de medida empleada.

Para todas las tensiones de Reynolds no nulas ($\overline{u'^2}/u_m^2$, $\overline{v'^2}/u_m^2$, $\overline{w'^2}/u_m^2$ y $\overline{u'v'}/u_m^2$) se observa un comportamiento semejante para diferentes posiciones longitudinales y diferentes números de Reynolds cuando la distancia a la ranura de salida se adimensionaliza con el semiancho.

Para la intensidad turbulenta en la dirección de la corriente $\overline{u'^2}/u_m^2$ se puede comprobar la existencia de dos valores máximos, uno de ellos en la región interior y el otro en la exterior. Este último alcanza un valor en torno al 4.5 % en la posición $y/y_{1/2} \approx 0,8$. Utilizando coordenadas de pared puede apreciarse que el nivel de turbulencia en la dirección de la corriente para la región interior de los chorros de pared planos supera a los que se tienen en una capa límite turbulenta. Según Abrahamsson y otros [2] esto es consecuencia de la interacción entre la región exterior e interior del flujo lo cual permite el trasvase de energía turbulenta hacia la superficie plana sobre la que progresa el chorro. Adimensionalizando en coordenadas de pared se tiene un perfil diferente para cada posición longitudinal, aumentando con la distancia longitudinal (figura 3.11).

En las fluctuaciones de la velocidad en la dirección normal $\overline{v'^2}/u_m^2$ se aprecia un único máximo alrededor de 80 % del semiancho (región exterior) con un nivel aproximado del 2.5 %. Adimensionalizando con coordenadas de pared se confirma el crecimiento monótono hasta alcanzar el nivel máximo (figura 3.12).

De las medidas de Abrahamsson y otros [2] para las fluctuaciones transversales de la velocidad se observa también la existencia de dos valores máximos, al igual que en el caso de las fluctuaciones longitudinales, uno en las proximidades de la pared y

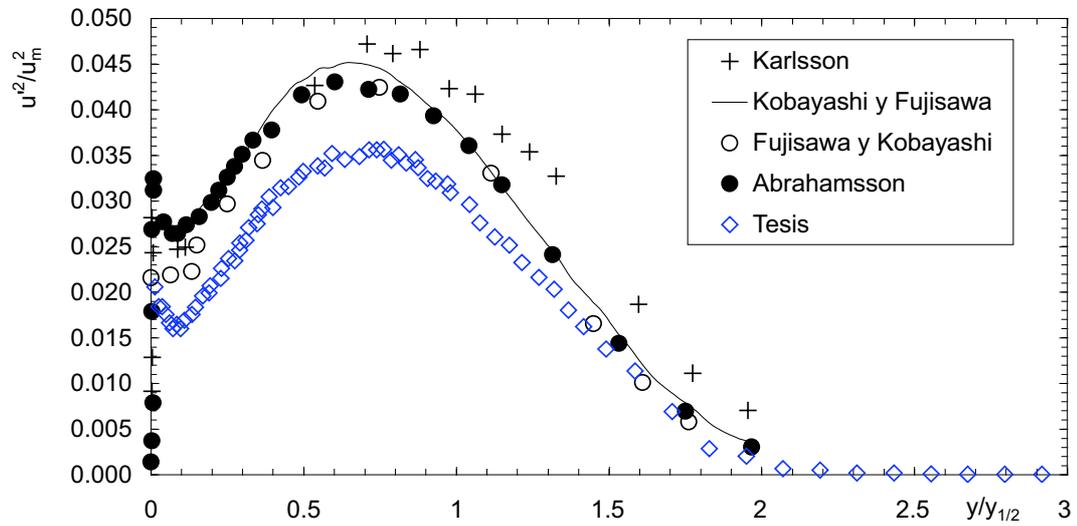


Figura 3.11: Fluctuaciones de la velocidad en la dirección longitudinal para $x = 70b$ y $Re=10.000$.

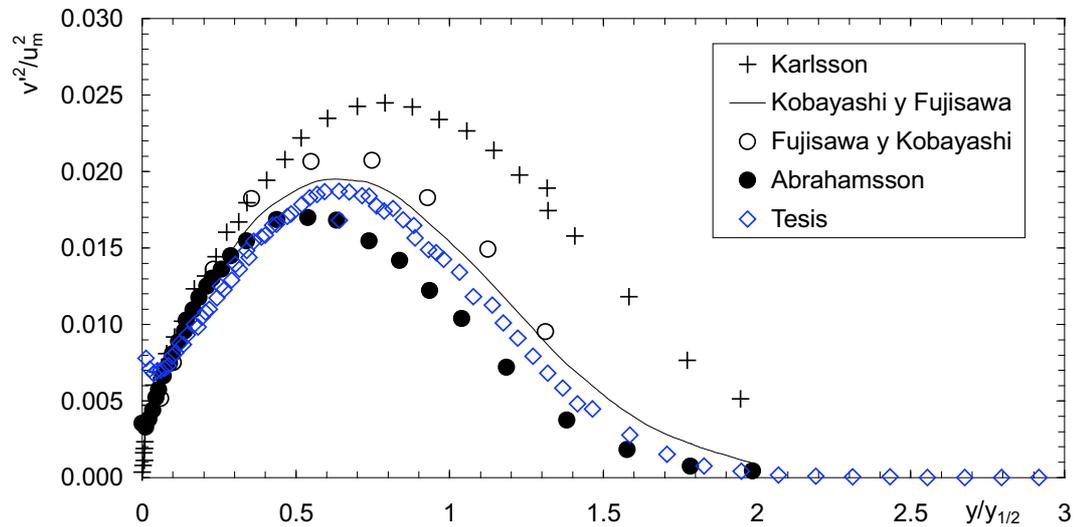


Figura 3.12: Fluctuaciones de la velocidad en la dirección normal para $x = 70b$ y $Re=10.000$.

otro en la zona exterior aproximadamente a un 60 % del semiancho del chorro y con un nivel de $\approx 2,5\%$. Karlsson y otros [37, 39] no midieron esta componente del tensor de Reynolds, pero por analogía con lo observado en las fluctuaciones longitudinales y normales, se puede suponer que se obtendrían niveles superiores a los obtenidos por Abrahamsson y otros [2]. Esto se confirma con las medidas de Karlsson si se asume que $\overline{w'^2} = 1/2(\overline{u'^2} + \overline{v'^2})$.

Para el esfuerzo cortante se observa que las medidas realizadas con HWA presentan buena concordancia entre sí pero difieren de las realizadas con LDA. Se aprecia la existencia de un mínimo en la región interior en $y^+ \approx 300$ y un máximo alrededor del 80 % del semiancho con un nivel de $\approx 1,6\%$ asociados con los de las fluctuaciones turbulentas en la dirección de la corriente y transversales, confirmando la interpretación anterior de la interacción entre la capa exterior e interior [2]. Cuando se adimensionaliza en coordenadas de pared se aprecia la falta de semejanza a partir de $y^+ \approx 100$ con la posición longitudinal. Además la localización del cambio de signo no coincide con el punto de máxima velocidad media (figura 3.13).

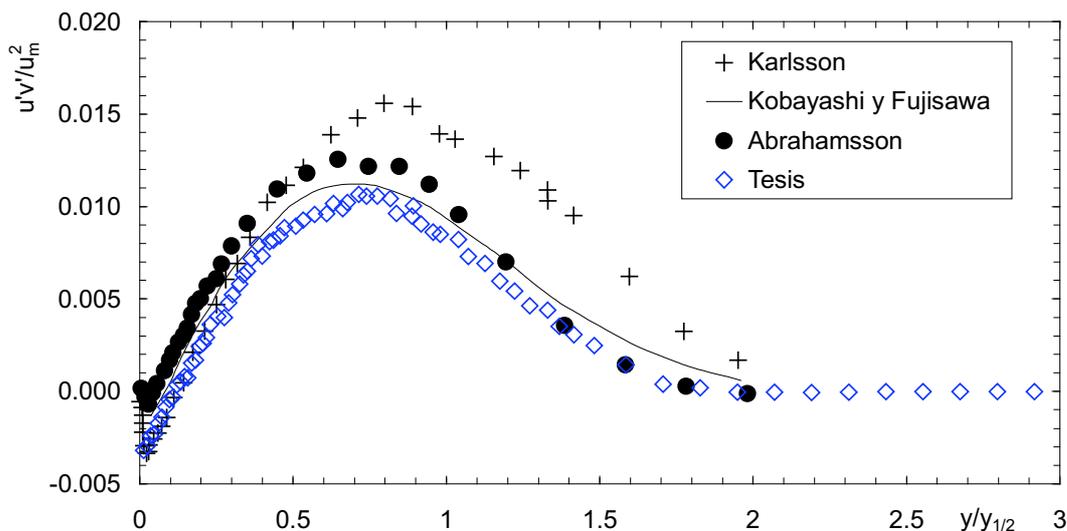


Figura 3.13: Esfuerzo cortante en la dirección normal para $x = 70b$ y $Re=10.000$.

3.3. Medidas en chorros de pared planos inclinados

Una de las contribuciones de esta tesis, es el análisis de chorros planos inclinados, de los que existen pocos trabajos publicados. Se han realizado medidas en las posiciones $x/b = 5, 10, 15, 20, 30, 40, 70, 100$ y 150 de la sección central de la

instalación para $Re=10.000$, 20.000 y 30.000 y $\beta = 10^\circ$, 20° y 30° . En cada punto se han tomado 8.000 muestras durante 8 segundos.

3.3.1. Perfiles de velocidades medias

Las principales diferencias entre el chorro de pared plano paralelo y los chorros de pared planos inclinados aparecen en la zona inicial debido a que en estos últimos la velocidad presenta una componente normal a la pared cuando el chorro sale de la ranura. Según Lai y Lu [52, 53] aparece una zona de recirculación que se extiende aguas abajo una distancia tanto mayor cuanto mayor es el ángulo de inclinación. La zona de influencia del chorro abarca una mayor longitud en dirección normal a la pared con un mayor arrastre del fluido de los alrededores.

En la figura 3.14 se representan los perfiles de velocidad para $\beta = 30^\circ$ en $x = 5b$ y

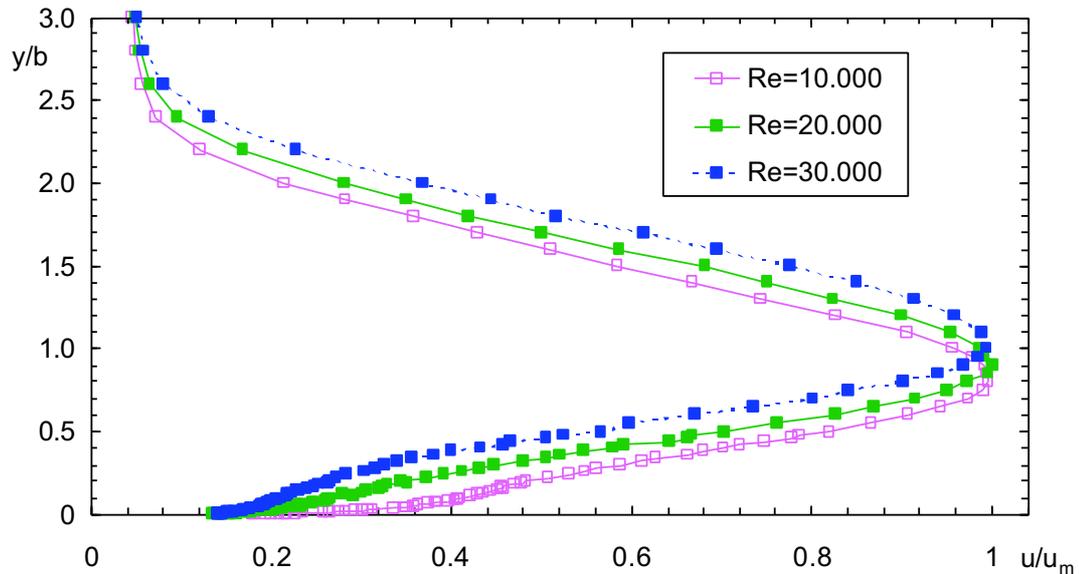


Figura 3.14: Perfiles de velocidad para $\beta = 30^\circ$ en $x = 5b$ con diferentes Re .

diferentes números de Reynolds. Cuando el número de Reynolds aumenta los perfiles de velocidad se alejan de la pared y el punto de inflexión que aparece cerca de la pared se aleja de la misma. Esto parece evidenciar una zona de recirculación más extensa para Reynolds altos tanto en la dirección longitudinal como en la normal a la pared. Este comportamiento es menos acusado para ángulos menores, desapareciendo el punto de inflexión para $x = 10b$.

El alejamiento del punto de readherencia al aumentar el número de Reynolds en el rango $10,000 \leq Re \leq 30,000$ para $\beta = 30^\circ$ no fue observado por Lai y Lu [53] para el rango $6,670 \leq Re \leq 13,340$.

En las figuras 3.15 y 3.16 se representan los perfiles de velocidad media para todas las inclinaciones estudiadas en las posiciones $x = 5b$ y $x = 10b$ adimensionalizados con la velocidad máxima y la altura de la ranura de salida. A medida que crece el ángulo de inclinación se aprecia un alejamiento del punto de velocidad máxima de la pared. Este desplazamiento se va atenuando conforme el chorro evoluciona. Para $Re=10.000$ y 30.000 las tendencias son similares (figuras B.3 y B.4)⁴.

Con el ángulo de $\beta = 30^\circ$ el desplazamiento del punto de velocidad máxima en la zona inicial es más acusado y el chorro se aleja en mayor medida de la pared. A pesar de que las medidas con hilo caliente en la posición $x = 5b$ próximas a la pared están sujetas a errores por el flujo reverso de la recirculación, el cambio de pendiente que aparece en el perfil de velocidad cerca de la pared podría indicar la presencia de esta recirculación. Cambio de pendiente que desaparece en $x = 10b$ donde es de esperar que el flujo se encuentra completamente adherido [53].

Si bien en principio la influencia de la pared en un chorro de pared inclinado pudiera asemejarse cualitativamente a la de un difusor, especialmente en la zona de recirculación, el comportamiento es intrínsecamente diferente dado que en un difusor no existe arrastre de aire. La tendencia del chorro de pared inclinado, más evidente para $\beta = 30^\circ$, a sufrir una deflexión hacia la pared se conoce como efecto Coanda [64]. Considerando el chorro completamente separado de la pared inmediatamente aguas abajo de la ranura de salida, su comportamiento es como el de un chorro libre, arrastrando fluido de los alrededores por ambos lados. El fluido confinado entre el chorro y la pared se acelera cerca de la misma. Debido a la bidimensionalidad del flujo se produce una disminución de presión en esta zona que curva el chorro hacia la pared y lo readhiere.

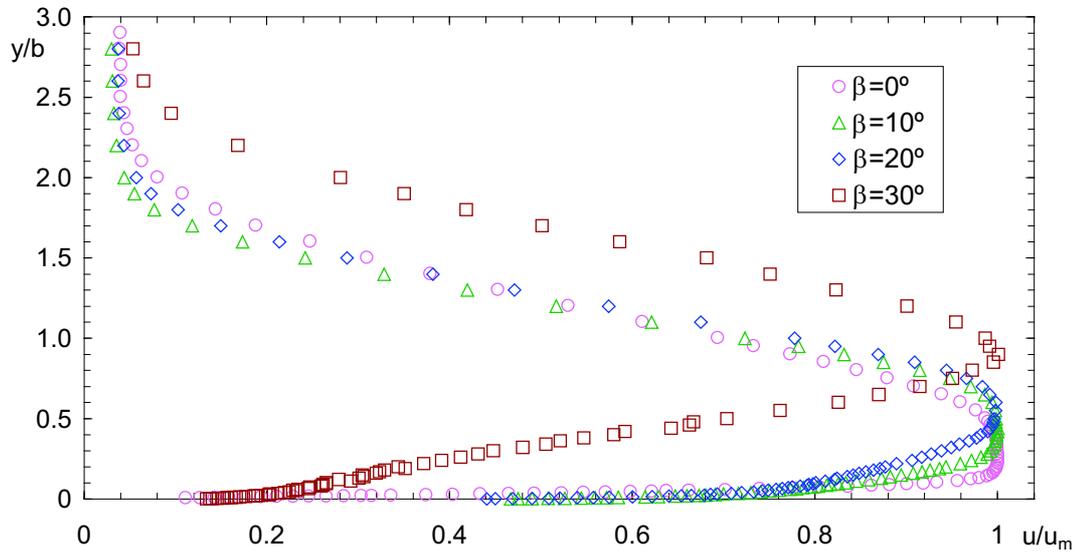
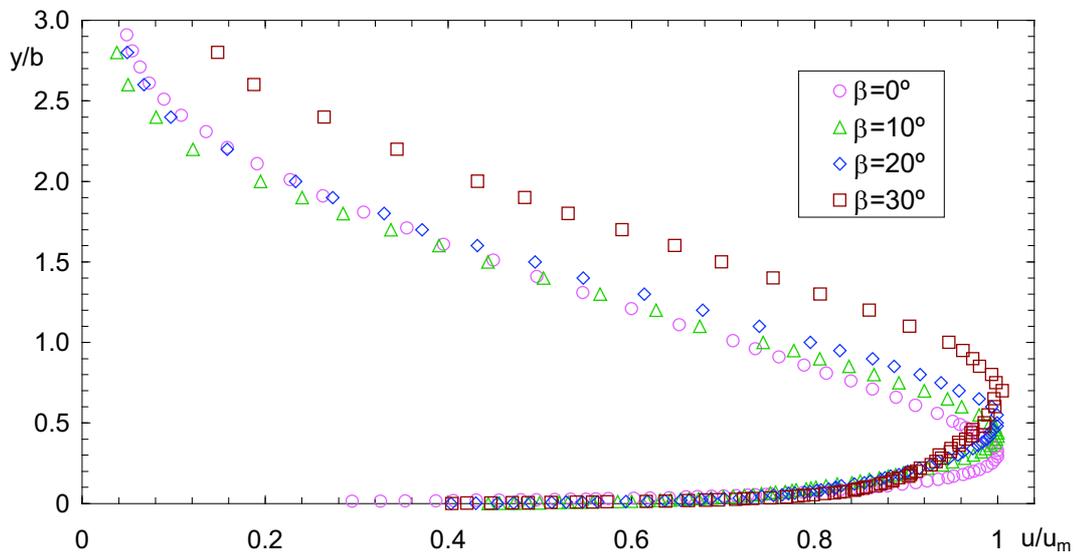
Aguas abajo, para $x \geq 70b$ todos los perfiles de velocidad media adimensionalizados con la velocidad máxima u/u_m y el semiancho $y/y_{1/2}$ son semejantes, independientemente del número de Reynolds (figura 3.17) y del ángulo de inclinación del chorro β (figura 3.18), de forma análoga a como sucede en el caso de un chorro de pared plano paralelo.

3.3.2. Semiancho

En la figura 3.19 se representa la evolución del semiancho para $\beta = 20^\circ$ en el rango de números de Reynolds estudiados. Al igual que ocurría en chorros planos paralelos, la posición del semiancho es independiente del número de Reynolds. Sucede lo mismo para el resto de ángulos (figuras B.5, B.6 y B.7)

Al analizar el semiancho para un número de Reynolds fijo (figura 3.20) se aprecia un aumento del mismo con el ángulo, si bien las diferencias entre los perfiles de

⁴Las figuras no incluidas en este capítulo se encuentran en el apéndice B.

Figura 3.15: Perfiles de velocidad para diferentes β en $x = 5b$ con $Re=20.000$.Figura 3.16: Perfiles de velocidad para diferentes β en $x = 10b$ con $Re=20.000$.

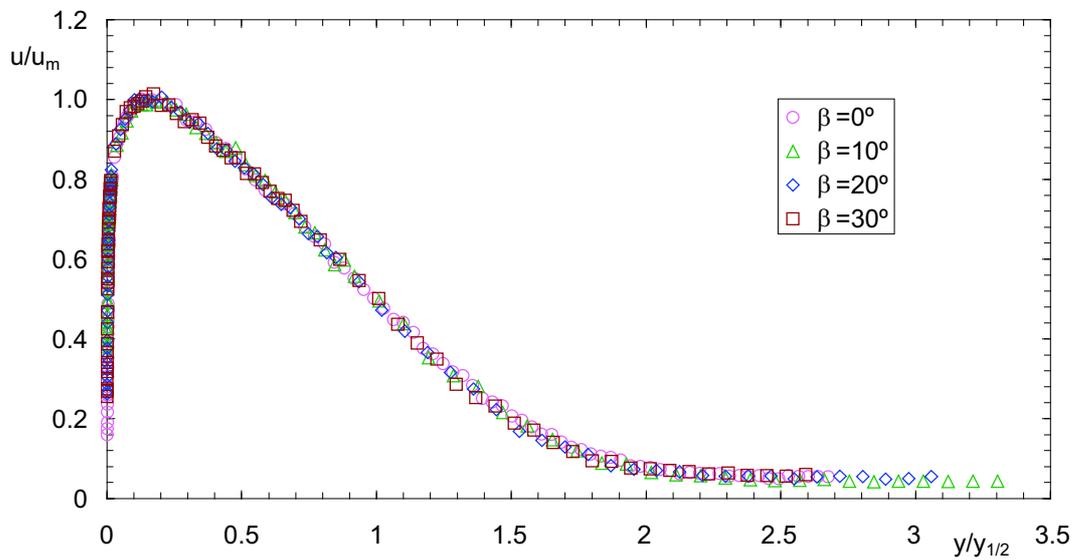


Figura 3.17: Perfiles de velocidad para diferentes β en $x = 70b$ con $Re = 20,000$.

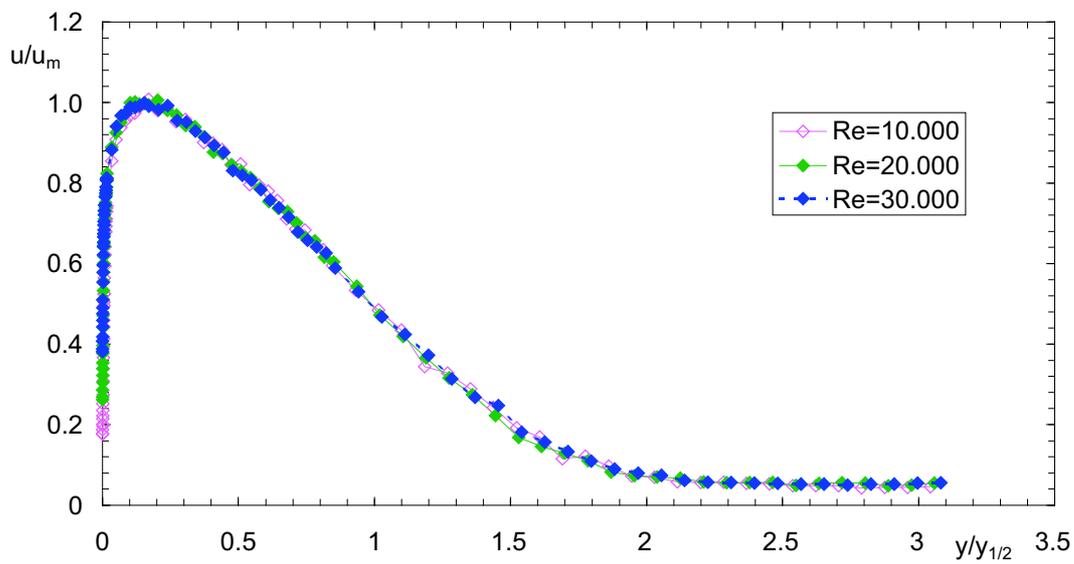
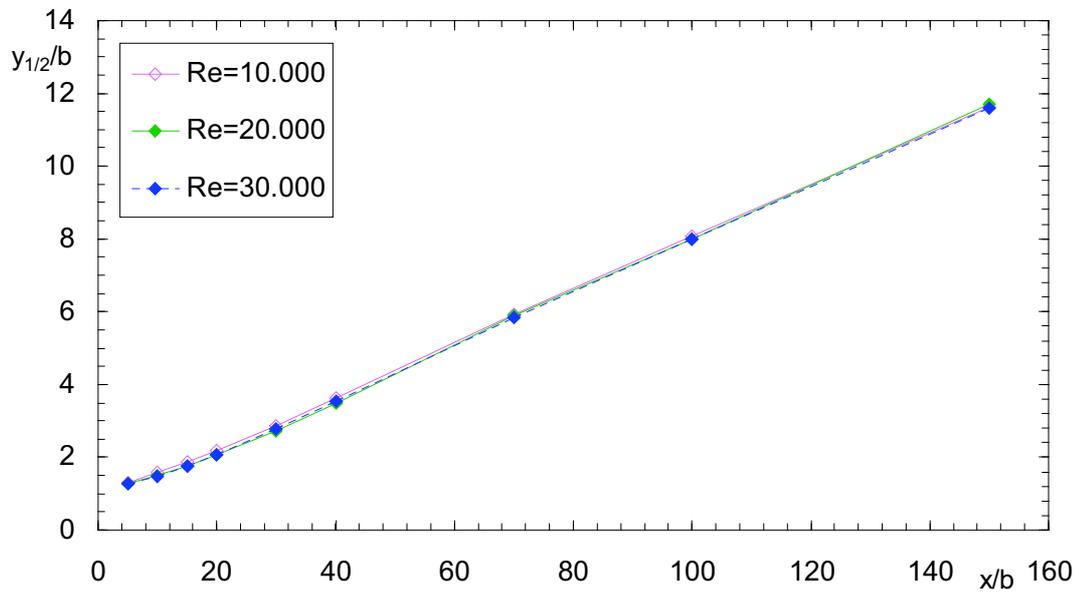
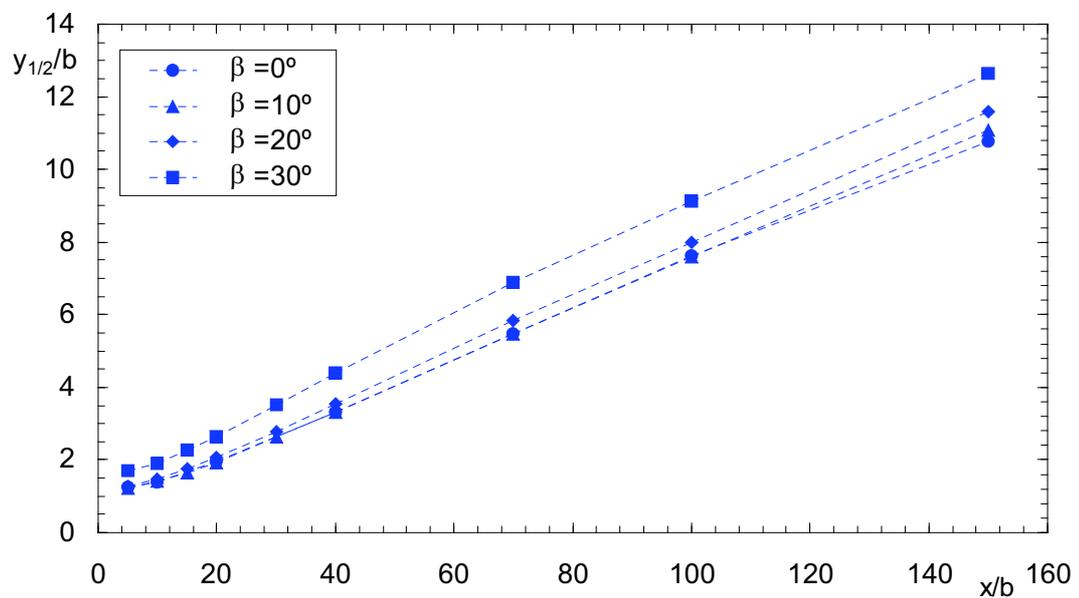


Figura 3.18: Perfiles de velocidad para diferentes Re $\beta = 20^\circ$ en $x = 70b$.

Figura 3.19: Semiancho para $\beta = 20^\circ$ con diferentes Re .Figura 3.20: Semiancho para diferentes β con $Re=30.000$.

$\beta = 10^\circ$ y $\beta = 20^\circ$ son mínimas. Esta tendencia no depende del número de Reynolds (véanse las figuras B.8 y B.9).

3.3.3. Velocidad máxima

La evolución longitudinal del cuadrado de la velocidad máxima adimensionalizada con la velocidad de salida del chorro $(u_0/u_m)^2$, para $\beta = 10^\circ$ (figura 3.21) tiene una evolución similar al chorro de pared plano paralelo, es decir una evolución lineal frente a x/b y disminución de $(u_0/u_m)^2$ al aumentar el número de Reynolds. Sucede igualmente para el resto de ángulos $\beta = 20^\circ$ y 30° (figuras B.11 y B.12).

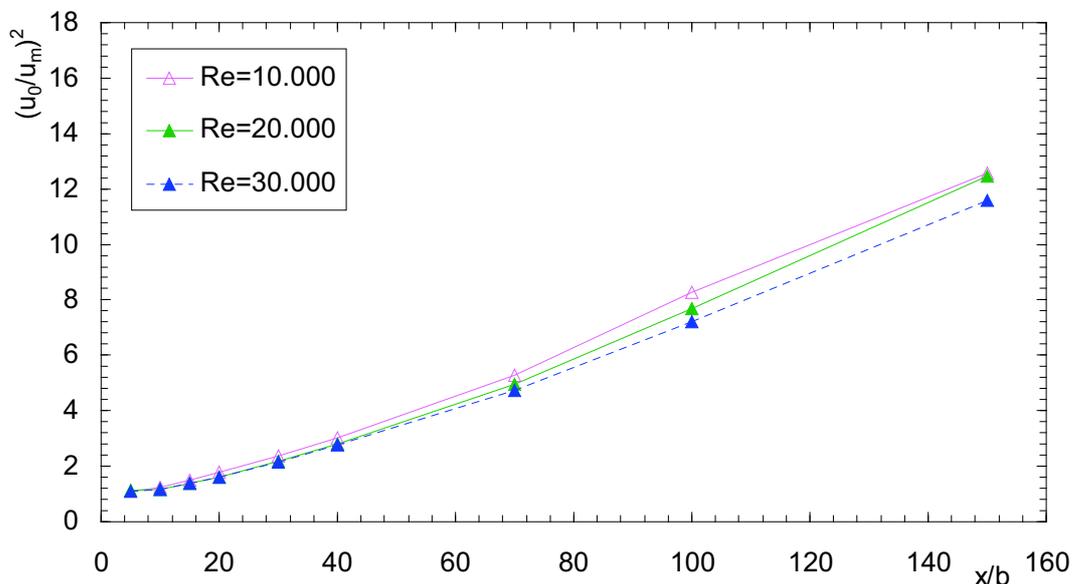


Figura 3.21: Velocidad máxima para $\beta = 10^\circ$ con diferentes Re.

La evolución de $(u_0/u_m)^2$ con x/b para diferentes β y un número de Reynolds fijo muestra una tendencia a aumentar la pendiente con el ángulo de inclinación como se puede apreciar en la figura 3.22 para $\text{Re}=30.000$.

3.3.4. Caudal de aire arrastrado

En la figura 3.23 se muestra la variación del caudal arrastrado, definido como $(Q - Q_0)/Q_0$, con x/b para $\beta = 30^\circ$ y diferentes Reynolds donde Q_0 es el volumen de flujo en la salida del chorro. El caudal Q en cada posición longitudinal se obtiene integrando el perfil de velocidad desde la pared $y = 0$ hasta $y = 2y_{1/2}$. El caudal de

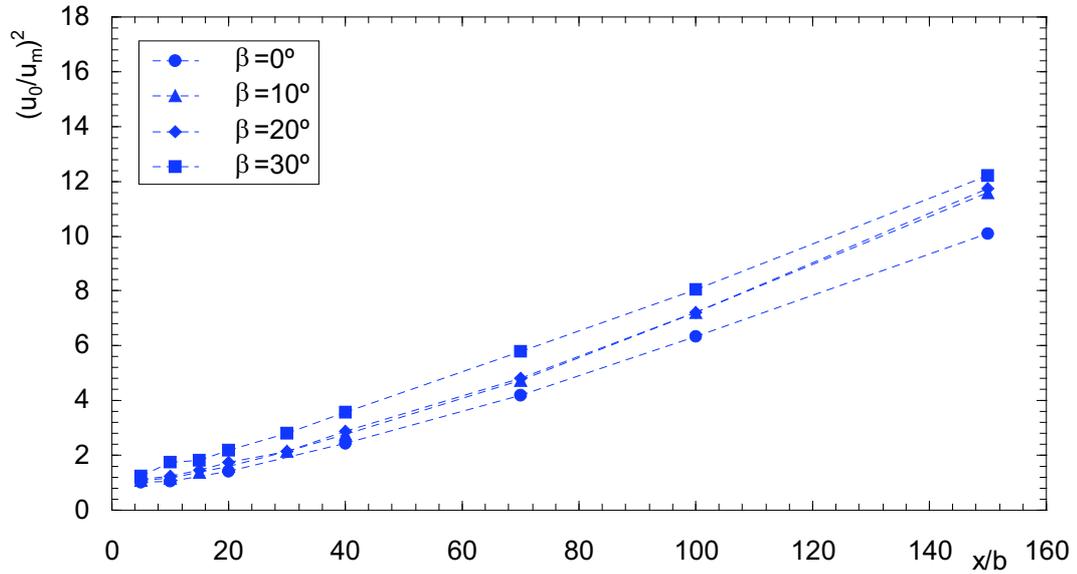


Figura 3.22: Velocidad máxima para diferentes β con $Re=30.000$.

aire arrastrado aumenta con la distancia longitudinal y con la velocidad de salida, con mayor aumento para ángulos grandes (figuras B.15, B.16 y B.17)

Representando la evolución de este parámetro con el ángulo de inclinación para un número de Reynolds fijo (por ejemplo $Re=30.000$ en la figura 3.24) se tiene un aumento del caudal de aire arrastrado al aumentar el ángulo de inclinación, las curvas de $\beta = 10^\circ$ y $\beta = 20^\circ$ prácticamente se solapan. Para otros Reynolds el comportamiento es similar (figuras B.18 y B.19).

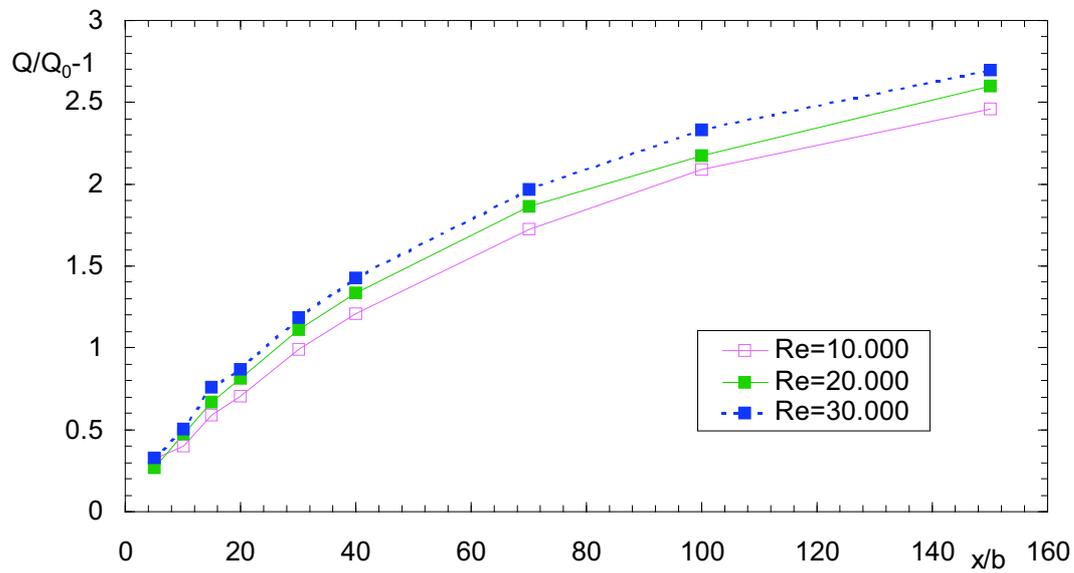


Figura 3.23: Caudal de aire arrastrado para $\beta = 30^\circ$ con diferentes Re.

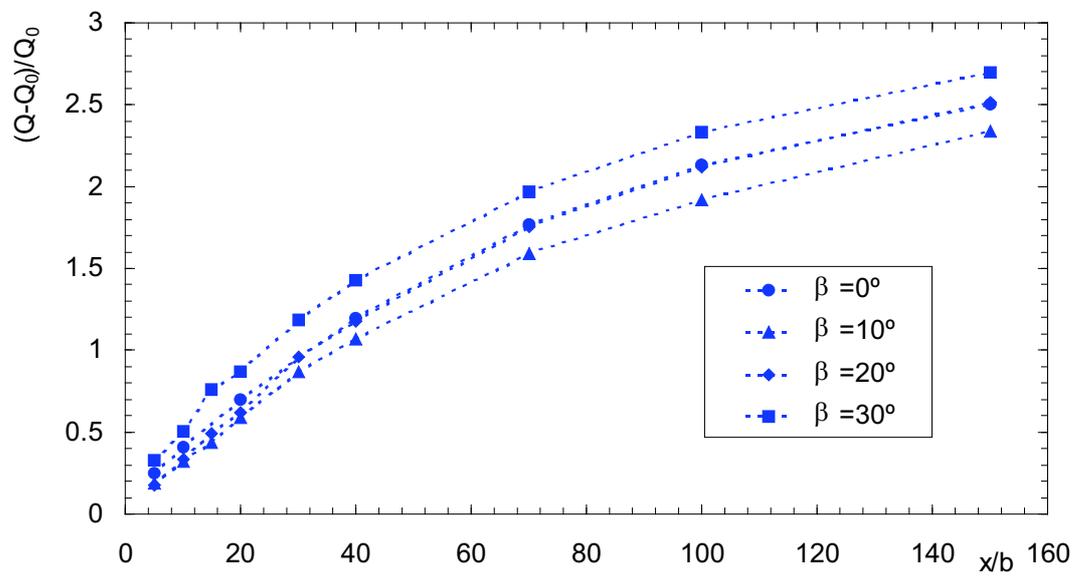


Figura 3.24: Caudal de aire arrastrado para $Re = 30,000$.

Capítulo 4

Modelado numérico de chorros de pared

4.1. Introducción

Uno de los objetivos primordiales de esta investigación es predecir el comportamiento de los chorros de pared planos paralelos e inclinados utilizando la mecánica de fluidos computacional.

Si bien existen diversos trabajos publicados que simulan numéricamente el chorro de pared plano paralelo (Launder y Rodi [4], Rubel y Melnik [65], Adeniji-Fashola y Chen [66], Vasić [45] y Gerodimos y So [3]), no se han encontrado trabajos análogos para los chorros de pared planos inclinados. El estudio numérico de este tipo de flujos se considera por tanto una de las principales aportaciones originales de esta tesis.

En una primera etapa se aborda la simulación numérica de los chorros de pared planos paralelos con diversos modelos de turbulencia, siempre tratando de garantizar la independencia de los resultados de aspectos como: resolución espacial, distribución de celdas, dimensiones del dominio, algoritmo de resolución, etc. Los resultados proporcionados por estos modelos de turbulencia se comparan con medidas propias y con resultados numéricos y experimentales de otros investigadores.

Con el modelo que ha mostrado mejor comportamiento se analiza numéricamente la influencia del número de Reynolds. Posteriormente se procede al estudio los chorros de pared planos inclinados, considerando la influencia del ángulo tanto en la zona próxima a la salida del chorro como en la zona desarrollada.

En una sección transversal del chorro de pared plano se pueden identificar en principio dos regiones: una interior que se extiende desde la pared hasta el punto

de velocidad máxima y otra exterior que se prolonga hasta el borde del chorro. La región exterior es similar a un chorro libre plano mientras que la interior se ha tratado tradicionalmente como una capa límite con gradiente de presión nulo o un flujo de Couette. La interacción entre estas dos regiones crea una región intermedia con características propias que hace que sea uno de los flujos simples, más difíciles de modelar y predecir. El chorro de pared plano representa un desafío para los modelos de turbulencia que afirman reproducir con precisión otros tipos de flujos simples y complejos. La mayoría de los modelos de dos ecuaciones pueden predecir bastante bien chorros planos y capas de mezcla, particularmente sus tasas de crecimiento (Launder y otros [67]). A la vista de esto, el modelado correcto de un chorro de pared plano pasaría por la capacidad del modelo de turbulencia para predecir la región de interacción y la región interior.

Estudios recientes (Wyganski y otros [34]) han demostrado que la ley de la pared sólo se puede aplicar a la región más interna. La extensión de esta zona es mucho más pequeña que en el caso de capas límite o de un flujo en canal (Karlsson y otros [37]). Launder y Rodi [67] indicaron que que esta región no crece con la distancia aguas abajo como en el caso de la capa límite, atribuyéndolo al hecho de que los esfuerzos cortantes en la pared disminuyen más rápidamente que los esfuerzos cortantes en la región exterior, de forma que la relación entre esfuerzos cortantes aumenta con la distancia. Esto significa que los efectos de la región exterior sobre la interior aumentan a medida que evoluciona el flujo, impidiendo el crecimiento normal de la región logarítmica. Por ello, no resulta adecuado emplear funciones de pared para calcular chorros de pared planos; se necesita modelar la región próxima a la pared. Esto supone que no se pueden asumir las hipótesis de equilibrio local de la turbulencia ni la de isotropía de las tensiones de Reynolds.

Una consecuencia inmediata de la intensa interacción existente entre la regiones interior y exterior del chorro de pared plano es el desplazamiento del punto de esfuerzo cortante nulo desde el punto de velocidad máxima hacia la pared. Como se ha visto en el capítulo anterior las medidas experimentales corroboran esta afirmación y muestran que la localización del punto de esfuerzo cortante nulo se sitúa en torno a $0.6y_m$. Resultaría poco creíble que un modelo basado en hipótesis de transporte por gradiente prediga que el punto de esfuerzo cortante nulo no coincide con el punto de gradiente de velocidad media nula. Por otro lado, los modelos de dos ecuaciones que asumen isotropía podrían no ser capaces de predecir las otras características puesto que se asume que las tensiones de Reynolds son funciones lineales del gradiente de velocidades medias. Queda por saber si algunas de las deficiencias de los modelos que suponen transporte por gradiente pueden remediarse relajando la hipótesis de turbulencia en equilibrio.

En Launder y Rodi [4] se puede encontrar un completo resumen sobre la utilización de modelos de dos ecuaciones para simular chorros de pared planos hasta

1983. Desde entonces no se han realizado muchos progresos, incluso los estudios más recientes (Rubel y Melnik [65] y Adeniji-Fashola y Chen [66]) se basan en el uso de funciones de pared, padeciendo las mismas limitaciones que los analizados por Launder y Rodi [4]. Los modelos de dos ecuaciones asumen que existe una clara separación de escalas, por tanto no pueden tener en cuenta efectos de anisotropía o de turbulencia en desequilibrio. A pesar de estos inconvenientes, y debido a su simplicidad, estos modelos se utilizan con frecuencia en aplicaciones industriales.

Se puede conseguir cierto grado de anisotropía utilizando alguna relación no lineal para el tensor de tensiones de Reynolds en lugar de la relación lineal habitualmente asumida. La hipótesis de turbulencia en equilibrio se puede suavizar introduciendo correcciones en las proximidades de las paredes para las ecuaciones que gobiernan la turbulencia, fundamentalmente funciones de amortiguamiento que dependen de algún número de Reynolds local (y^+ , $Re_t = k^2/\nu\varepsilon$, $Re_\varepsilon = y(\nu\varepsilon)^{1/4}/\nu$ ó, $Re_y = yk^{1/2}/\nu$) para tratar de simular los efectos viscosos cerca de la pared. De todos estos números de Reynolds, y^+ depende de u_τ por lo que los modelos que lo utilizan no pueden aplicarse a chorros libres ni a flujos con separación y adherencia. Por otro lado Re_ε y Re_y depende de y por lo que los modelos serán dependientes de la discretización espacial. El único que depende sólo de propiedades locales es Re_t por lo que es el más adecuado para modelado de las proximidades a la pared. La mayoría de los modelos están optimizados para reproducir la conducta que sigue un flujo tipo canal completamente desarrollado en las proximidades a la pared, cuyas características detalladas fueron obtenidas por Kim y otros [68].

4.2. Modelado de la turbulencia

4.2.1. Introducción

La tridimensionalidad y transitoriedad junto con el amplio rango de escalas espaciales y temporales son algunas de las principales características de los flujos turbulentos. Pero incluso las escalas más pequeñas y con fluctuaciones más rápidas, las escalas disipativas, son varios ordenes de magnitud superiores a las escalas moleculares. Por tanto las ecuaciones constitutivas de la viscosidad de Stokes para flujos Newtonianos y de transferencia de calor por conducción de Fourier son suficientemente precisas. Estas leyes constitutivas junto con los principios de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía dan lugar a las ecuaciones de Navier-Stokes¹, que gobiernan los flujos turbulentos. Actualmente no es posible la resolución

¹Si bien tradicionalmente se utiliza este nombre para designar a las ecuaciones de cantidad de movimiento para flujos Newtonianos [69], en mecánica de fluidos computacional es habitual referirse al sistema completo de ecuaciones que gobiernan el flujo como ecuaciones de Navier-Stokes.

exacta de estas ecuaciones, sin embargo, en los últimos años y debido a la rápida evolución de los ordenadores y al desarrollo de algoritmos específicos, ha habido un gran avance en su resolución numérica, es lo que se conoce como mecánica de fluidos computacional, CFD (*Computational Fluid Dynamics*).

La resolución numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes DNS (*Direct Numerical Simulation*) es la manera más evidente y precisa de predecir un flujo turbulento. Se resuelven todas las escalas espaciales y temporales del flujo turbulento sin promediados o aproximaciones, los únicos errores proceden de las discretizaciones numéricas. La idea es tan sencilla como, por lo desorbitando de su coste computacional, difícil de llevar a la práctica. Su utilización queda restringida a flujos de geometría sencilla y números de Reynolds bajos.

Los flujos turbulentos poseen un amplio rango de escalas espaciales y temporales. Generalmente las escalas grandes son mucho más energéticas que las pequeñas y su tamaño e intensidad hacen que sean las escalas más efectivas en el transporte. Por el contrario, las escalas pequeñas son normalmente más débiles y su transporte es de menor magnitud. Basándose en esto, pueden tener sentido simulaciones que traten las escalas grandes con más precisión que las pequeñas. Esto es lo que se hace en una simulación de torbellinos grandes, LES (*Large Eddy Simulation*). Debido a la mayor universalidad y homogeneidad de las escalas pequeñas cabe esperar que los modelos para LES sean relativamente simples y que los ajustes necesarios cuando se apliquen a diferentes flujos sean escasos. Una LES también requiere grandes cantidades de tiempo de cálculo, los programas utilizados para realizar este tipo de simulaciones son normalmente códigos escritos para una geometría específica y contienen muchos elementos de programación especialmente diseñados para obtener el máximo rendimiento de un computador específico. Esta es también la razón por la que a menudo los métodos de discretización son específicos del problema a resolver. Se puede decir que estos métodos se encuentran a caballo entre los modelos RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations*) y la DNS (Piomelli [70]).

El promediado de Reynolds es el tipo de aproximación que con más frecuencia se usa para predecir flujos turbulentos. Se basa en el concepto de promediado de las ecuaciones de Navier-Stokes introducido por Reynolds en 1895. Cada variable ϕ de un flujo turbulento se puede descomponer en suma de un valor promedio y una fluctuación alrededor de ese promedio.

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i, t) + \phi'(x_i, t) \quad (4.1)$$

En flujos estadísticamente estacionarios se utiliza el promediado temporal, para turbulencia homogénea (flujo turbulento que en media es uniforme) resulta más apropiado definir un promediado espacial y si el flujo es no estacionario se utiliza el promediado ensamblado o de conjunto (*ensemble average*), Hinze [61]. Como resultado de aplicar cualquiera de los promediados a las ecuaciones de Navier-Stokes se

obtienen las ecuaciones promediadas de Reynolds o RANS. Para flujos incompresibles en ausencia de fuerzas de volumen las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento promediadas quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \tau_{ij} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $\tau_{ij} = -(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\overline{u_i' u_j'}$ es el tensor de tensiones de Reynolds cinemático y puede interpretarse como una tensión adicional que actúa sobre un elemento fluido además de las debidas a la presión y a las fuerzas viscosas.

La aparición de las tensiones de Reynolds en las ecuaciones de conservación promediadas es la causa de que el sistema de ecuaciones no sea cerrado, es decir, contiene más incógnitas que ecuaciones. Se denominan modelos de turbulencia a las aproximaciones que relacionan las correlaciones desconocidas en función de propiedades conocidas del flujo, se trata en definitiva de cerrar el sistema. Se busca que estas aproximaciones sean lo más generales y precisas posibles. Todos los modelos de turbulencia se fundamentan en representar momentos de cierto orden de las componentes fluctuantes de la velocidad en función de momentos de orden inferior. En cualquier caso la evidencia demuestra que esta asunción es incorrecta; en la mayoría de los flujos el perfil de velocidades medias se establece antes que los momentos de primer orden, lo que significa que los últimos no pueden determinarse exclusivamente a partir de los primeros. Lo mismo sucede con el perfil de momentos de segundo orden respecto de los de tercero (Ferziger [71]).

Los modelos más complejos utilizados actualmente para aplicaciones de ingeniería son los modelos de tensiones de Reynolds RSTM (*Reynolds Stress Turbulence Models*), o cierre de momentos de segundo orden diferenciales². Para cerrar las ecuaciones de Reynolds se plantean las ecuaciones diferenciales de transporte para cada una de las componentes del tensor de tensiones de Reynolds y se modelan sus términos desconocidos. Si en lugar de plantear ecuaciones de transporte diferenciales se plantean ecuaciones de transporte algebraicas se obtienen los denominados modelos de tensiones de Reynolds algebraicos, ARSM (*Algebraic Reynolds Stress Models*) o cierre de momentos de segundo orden algebraicos³.

La otra alternativa más común son los modelos de viscosidad de torbellino⁴, EVM (*Eddy Viscosity Models*). Se basan en relacionar las tensiones de Reynolds directamente con los gradientes de velocidad media a través del concepto de visco-

²Traducción del inglés Differential Second-Moment Closures.

³Traducción del inglés Algebraic Second-Moment Closures.

⁴También conocidos como BVM (*Boussinesq Viscosity Models*)

sidad de torbellino⁵ μ_T introducido por Boussinesq en 1877. El tensor de tensiones de Reynolds se puede descomponer en su parte isótropa y su parte anisótropa:

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{1}{3} \overline{u'_k u'_k} \delta_{ij} + [\overline{u'_i u'_j}]_D \quad (4.3)$$

donde el tensor anisótropo $[\overline{u'_i u'_j}]_D$ es simétrico y sin traza. Si se acepta una relación lineal entre las componentes fuera de la diagonal del tensor de tensiones de Reynolds con el tensor de velocidades de deformación medias:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.4)$$

del tipo:

$$[\overline{u'_i u'_j}]_D = -\nu_T S_{ij} \quad (4.5)$$

se tiene la aproximación de Boussinesq:

$$\overline{\rho u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = -2\mu_T S_{ij} \quad (4.6)$$

Es una práctica común, al menos para cálculos de flujos incompresibles, asumir que el término isótropo de (4.3) está incluido en el gradiente de presión reducida de (4.2). Por tanto no se necesita la parte isótropa del tensor de tensiones de Reynolds para determinar el campo de velocidades medias (Pettersson [72]).

Con este tipo de aproximación se está asumiendo transporte por gradiente e isotropía de las tensiones normales. Además, no se tienen en cuenta los efectos de las tensiones anisótropas. Esto equivale a imponer que los ejes principales del tensor de esfuerzos de Reynolds sean paralelos a los ejes principales del tensor de velocidades de deformación, lo que sin embargo en general no es cierto. La razón radica en que el tensor de velocidades de deformación puede cambiar instantáneamente, por ejemplo por la aplicación de fuerzas de presión, pero las tensiones de Reynolds requieren algo de tiempo hasta adaptarse a los nuevos valores de S_{ij} (Wilcox [73]). Cabe por ello esperar que la aproximación de Boussinesq no produzca buenos resultados en cuanto a campo de velocidades medias para flujos afectados de curvatura fuerte, fuerzas máxicas, etc.

Si se pretende solventar estos inconvenientes sin recurrir a un modelo de cierre de momentos de segundo orden se puede utilizar versiones anisótropas para el tensor de tensiones de Reynolds basadas en modelos no lineales. Speziale [74] propone la siguiente versión no lineal explícita con términos de segundo orden:

$$\overline{\rho u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = -2\mu_T S_{ij} + 4 \frac{C_D \mu_T^2}{k} \left[S_{ik} S_{kj} - \frac{S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}}{3} + \tilde{S}_{ij} - \frac{\tilde{S}_{kk} \delta_{ij}}{3} \right] \quad (4.7)$$

⁵También conocida como viscosidad turbillonaria o viscosidad turbulenta.

con

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} - S_{kj} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - S_{ki} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \quad \text{y} \quad C_D = 1,68 \quad (4.8)$$

Si $C_D \rightarrow 0$ se recupera (4.6). Carft [75] propone una versión no lineal con términos de tercer orden. Otras expresiones no lineales fueron propuestas por Pope [76] o Gatski y Speziale [77] por ejemplo.

Para chorros de pared planos se comprueba desarrollando que el último sumando de (4.7) es nulo, por lo que (4.7) y (4.6) coinciden y lo mismo ocurre para las otras expresiones anisótropas del tensor de tensiones de Reynolds (Ferziger [71], Gerodimos y So [3]). Luego si se pretende incluir los efectos de la turbulencia anisótropa en el chorro de pared plano se necesita recurrir a modelos de segundo orden o modelos de tensiones de Reynolds que plantean ecuaciones de transporte para cada una de las componentes del tensor de tensiones de Reynolds.

Aunque la hipótesis de la viscosidad de torbellino no sea rigurosamente cierta, es de fácil implementación y aplicándola con cuidado puede proporcionar resultados razonablemente buenos para muchos tipos de flujos. Para terminar de formular un modelo de viscosidad de torbellino hay que evaluarla. A través de la analogía establecida por Prandtl entre transporte molecular de cantidad de movimiento en un gas perfecto y transporte turbulento de cantidad de movimiento en un flujo turbulento o por análisis dimensional, se llega a:

$$\mu_T = C\rho\vartheta\ell \quad (4.9)$$

donde C es una constante empírica y ϑ y ℓ son respectivamente escalas de velocidad y longitud de la turbulencia que caracterizan a la macroescala del flujo turbulento.

En los modelos algebraicos o modelos de cero⁶ ecuaciones diferenciales tanto ϑ como ℓ se calculan directamente a partir de magnitudes locales del flujo. Si bien es posible asignar directamente un valor a la viscosidad de torbellino⁷ μ_T , es más frecuente calcular la viscosidad de torbellino en términos de longitud de mezcla. Al contrario que la viscosidad molecular, que es una propiedad intrínseca del fluido, la viscosidad de torbellino y por tanto la longitud de mezcla, depende del flujo, por lo que debe ser especificada de antemano. En este sentido los modelos algebraicos son, por definición, modelos incompletos.

Los modelos algebraicos asumen que los niveles locales de turbulencia sólo dependen de las tasas de generación y disipación locales sin embargo la turbulencia

⁶En referencia al número de ecuaciones diferenciales adicionales a las del flujo medio que se necesitan resolver

⁷Cuando se asigna directamente un valor a μ_T el manual del código PHOENICS recomienda utilizar el que resulte de tomar como ϑ la velocidad promedio en el dominio, como ℓ el 10% del tamaño del dominio y $C = 0,001$. Para flujos en conductos se pueden utilizar expresiones como $\mu_T = 0,035Re\mu(f/8)^{1/2}$ donde el factor de fricción viene dado por: $f = (1,82 \lg Re - 1,64)^2$.

puede transportarse o difundirse a localizaciones donde no existe generación. Para incorporar los efectos de la historia del flujo en la viscosidad de torbellino la mayoría de los modelos de una ecuación (y también de los de dos) calculan la escala de velocidad característica ϑ a partir de la energía cinética de las fluctuaciones turbulentas por unidad de masa, k :

$$\vartheta = \sqrt{k}; \quad k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (4.10)$$

quedando entonces la viscosidad de torbellino como:

$$\mu_T = C \rho k^{1/2} \ell \quad (4.11)$$

Los modelos de turbulencia de dos ecuaciones no sólo proporcionan medios para el cálculo de k , sino también de la longitud de escala turbulenta o equivalentes. Por consiguiente los modelos de dos ecuaciones son completos, es decir, pueden utilizarse para predecir propiedades de un flujo turbulento dado sin conocimiento previo alguno sobre la estructura de la turbulencia. La mayoría de los modelos parten de la aproximación de Boussinesq (4.6) y de la ecuación modelada de la energía cinética turbulenta, no existiendo un criterio tan uniforme a la hora de determinar la longitud de escala turbulenta ℓ . Dependiendo de la variable para la que se proponga la segunda ecuación de transporte, varían las expresiones que la relaciona con el resto (véase la tabla 4.1).

Cuadro 4.1: Relaciones entre las variables de los modelos de turbulencia de dos ecuaciones.

Magnitud para la que se propone la segunda ecuación de transporte	Relaciones	Referencia
Tasa de disipación específica, ω (s^{-1})	$\mu_T \sim \rho k / \omega; \ell \sim k^{1/2} / \omega$ $\varepsilon \sim \omega k$	Kolmogorov (1942)
Disipación por unidad de masa, ε ($m^2 s^{-3}$)	$\mu_T \sim \rho k^2 / \varepsilon; \ell \sim k^{3/2} / \varepsilon$	Chou (1945)
Energía cinética turbulenta \times longitud de escala turbulenta, $k\ell$ ($m^3 s^{-2}$)	$\mu_T \sim \rho k^{1/2} \ell; \varepsilon \sim k^{3/2} / \ell$	Rotta (1951)
Tiempo de disipación turbulento, τ (s)	$\mu_T \sim \rho k \tau; \ell \sim k^{1/2} \tau$ $\varepsilon \sim k / \tau$	Zeirman y Wolfstein (1986)

Independientemente de la elección de la segunda variable para el modelo de turbulencia, la disipación, la viscosidad de torbellino y la longitud de escala se relacionan basándose en argumentos dimensionales.

Como en los modelos de una ecuación, no hay ninguna razón por la que μ_T deba depender únicamente de parámetros de la turbulencia tales como k , ℓ , ε y ω ; en general la relación entre cada una de las tensiones de Reynolds con las componentes de la tasa de deformaciones medias depende tanto del flujo medio como de las escalas de la turbulencia. Por tanto, los modelos de turbulencia de dos ecuaciones no son más válidos que los de una para aplicarlos universalmente a los flujos turbulentos y se puede esperar que resulten inadecuados en muchos flujos turbulentos que no estén en equilibrio (Wilcox [73]).

4.2.2. Modelo k - ε estándar

4.2.2.1. Formulación

Si bien el primer modelo de turbulencia de dos ecuaciones fue un modelo tipo k - ω propuesto por Kolmogorov en 1942, actualmente el modelo más popular es el modelo k - ε . Aunque existen trabajos anteriores, el trabajo clave en el desarrollo del modelo k - ε fue el de Jones y Launder [78]. Los coeficientes presentados entonces fueron reajustados posteriormente por Launder y Sharma [79] y es habitual referirse a este último trabajo como modelo k - ε estándar.

Su formulación se basa en modelar los términos desconocidos de las ecuaciones exactas de k :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ &\quad - \mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \overline{p' u'_j} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

y de ε :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= -2\mu (\overline{u'_{i,k} u'_{j,k}} + \overline{u'_{k,i} u'_{k,i}}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\mu \overline{u'_k u'_{i,j}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} - \\ &\quad - 2\mu \overline{u'_{i,k} u'_{i,m} u'_{k,m}} - 2\mu \nu \overline{u'_{i,km} u'_{i,km}} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \overline{\mu u'_j u'_{i,m} u'_{i,m}} - 2\nu \overline{p'_{,m} u'_{j,m}} \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Modelando convenientemente los términos desconocidos de estas dos ecuaciones se formula el modelo k - ε estándar como:

$$\mu_T = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon \quad (4.14)$$

Energía cinética turbulenta:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \left(2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.15)$$

Tasa de disipación:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4.16)$$

Coefficientes de cierre:

$$C_{\varepsilon 1} = 1,44; \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92; \quad C_\mu = 0,09; \quad \sigma_k = 1,0; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad (4.17)$$

4.2.2.2. Condiciones de contorno

Para resolver las ecuaciones del modelo son necesarias condiciones de contorno. Normalmente son análogas a las condiciones aplicadas a cualquier ecuación escalar, sin embargo, en las paredes sólidas puede haber diferencias significativas.

Una posibilidad es resolver las ecuaciones con precisión hasta la pared. Esto es lo que hacen los modelos denominados de bajos Reynolds o modelos con corrección en la pared. En la sección 4.2.3 se explican con más detalle estos modelos. Para altos números de Reynolds, la subcapa viscosa de una capa límite es tan delgada que es difícil utilizar suficiente número de puntos de mallado para resolverla. Este problema se puede evitar usando las funciones de pared, que se basan en la existencia de una región logarítmica en el perfil de velocidades; el perfil de velocidades de una capa límite turbulenta se muestra en la figura 4.1 en la capa logarítmica, el perfil es:

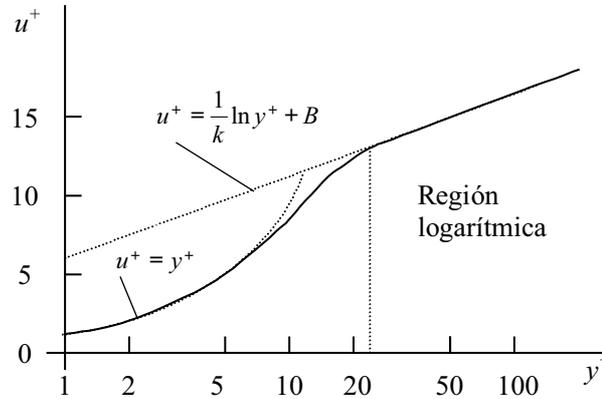


Figura 4.1: Velocidades en la capa límite turbulenta.

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \quad (4.18)$$

donde \bar{u} es la velocidad media paralela a la pared, u_τ es la velocidad de fricción, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$, τ_w es la tensión de cortadura en la pared, κ es la denominada constante

de von Karman ($\kappa = 0,41$), B es una constante empírica relacionada con el espesor de la subcapa viscosa ($B \approx 5,2$ en una capa límite de placa plana) e y^+ es la distancia adimensionalizada desde la pared:

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \quad (4.19)$$

Frecuentemente se asume que el flujo está en equilibrio local, lo que quiere decir que la producción de energía cinética turbulenta y su disipación son prácticamente iguales. En ese caso, se puede comprobar:

$$u_\tau = C_\mu^{1/4} \sqrt{k} \quad (4.20)$$

Con esta ecuación y la (4.19) se puede obtener una expresión que relacione la velocidad en el primer punto sobre la pared y la tensión de cortadura en la pared.

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 = \rho C_\mu^{1/4} \kappa \sqrt{k} \frac{\bar{u}}{\ln(y^+ E)} \quad (4.21)$$

donde $E = e^{\kappa B}$. El volumen de control más próximo a la pared tiene una cara que limita con ella. En la ecuación de cantidad de movimiento paralela a la pared para ese volumen de control se necesita el esfuerzo de cortadura. Este puede obtenerse de la ecuación (4.21), es decir, se utiliza la condición de contorno para obtener un sistema cerrado de ecuaciones.

Cuando se utiliza la condición de contorno tipo “ley de la pared” normalmente se impone que el flujo difusivo de k a través de la pared sea nulo, lo que conduce a la condición de contorno de que la derivada normal de k sea nula. La condición de contorno para la disipación normalmente se obtiene asumiendo equilibrio (balance entre producción y disipación) en las inmediaciones de la pared. La producción en la región de la pared se puede calcular de:

$$P_k \approx \tau_w \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.22)$$

que es una aproximación válida cerca de la pared para el término dominante de la ecuación (4.6). Esta aproximación es válida porque el esfuerzo cortante es prácticamente constante en esta región. Se necesita la disipación (=producción) en el punto medio del volumen de control más cercano a la pared. La derivada de la velocidad se puede obtener del perfil de velocidades logarítmico (4.18).

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_P = \frac{u_\tau}{\kappa y_P} = \frac{C_\mu^{1/4} \sqrt{k_P}}{\kappa y_P} \quad (4.23)$$

que junto con la relación (4.21) proporciona una segunda relación entre las tensiones de cortadura en la pared y las velocidad en el primer punto del mallado. De estas dos ecuaciones se pueden obtener ambas magnitudes.

Cuando se utilizan las ecuaciones anteriores no se aplica la ecuación para ε en el volumen de control próximo a la pared; lo que se hace es asignar ε en el centro del volumen de control igual a:

$$\varepsilon_P = \frac{C_\mu^{1/4} k_P^{3/2}}{\kappa y_P} \quad (4.24)$$

Esta expresión se obtiene de la relación $\varepsilon \approx k^{3/2}/\ell$ con la aproximación de la longitud de escala:

$$\ell = \frac{\kappa}{C_\mu^{3/4}} y \approx 2,5y \quad (4.25)$$

que es válida cerca de la pared bajo las condiciones utilizadas para obtener el modelo de la “ley de la pared”.

Las condiciones de contorno anteriores son válidas cuando el primer punto del mallado se encuentra dentro de la región logarítmica, es decir, cuando $30 < y_P^+ < 100$. Los problemas aparecen en flujos separados; dentro de la región de recirculación y, especialmente, en las regiones de separación y de readherencia, las condiciones anteriores no se satisfacen. Normalmente se ignora el hecho de que las funciones de pared no sean válidas en estas regiones y se aplican igualmente. Sin embargo, si estas condiciones no se cumplen en una porción considerable de los contornos limitados por pared aparecen errores importantes (Ferziger [80]). En esas regiones deberían emplearse versiones de los modelos de bajos números de Reynolds (sección 4.2.3).

En contornos sin pared se pueden utilizar las siguientes condiciones de contorno:

- Si el flujo de los alrededores es turbulento:

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} = -\varepsilon \quad ; \quad \bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4.26)$$

- En una corriente libre:

$$k \approx 0 \quad ; \quad \varepsilon \approx 0 \quad ; \quad \mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \approx 0 \quad (4.27)$$

Normalmente no se conocen k ni ε en el flujo de entrada. Si se desconoce k se suele asignar un valor pequeño, alrededor de $10^{-4} \bar{u}^2$. El valor de ε se suele seleccionar de forma que la longitud de escala sea aproximadamente un décimo de la anchura de la capa de cortadura o del tamaño del dominio. Si se pueden medir a la entrada las tensiones de Reynolds y las velocidades medias, ε se puede estimar usando la suposición de equilibrio local; lo que conduce, para una sección de $x = cte.$ a:

$$\varepsilon \approx -\bar{uv} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.28)$$

4.2.2.3. Implementación del modelo k - ε estándar

La implementación de este modelo es relativamente simple. Las ecuaciones RANS tienen la misma forma que las ecuaciones laminares donde la viscosidad molecular μ , se reemplaza por la viscosidad efectiva $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$. La diferencia más importante es que hay que resolver dos nuevas ecuaciones en derivadas parciales. Debido a que las escalas temporales asociadas a la turbulencia son mucho más cortas que las asociadas al flujo medio, las ecuaciones para el modelo k - ε son mucho más rígidas que el resto, por lo que el método de solución debe tener en cuenta esta rigidez.

En el procedimiento de resolución numérica, primero se desarrolla una iteración separada de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de la corrección de presión en la que el valor de la viscosidad de torbellino está basado en los valores de k y ε de la iteración anterior. Cuando se ha completado se realiza una iteración separada de las ecuaciones de la energía cinética y la tasa de disipación turbulenta. Dado que estas ecuaciones son altamente no lineales se linealizan antes de iterar. Después de completar una iteración de las ecuaciones del modelo de turbulencia, se está en condiciones de volver a calcular la viscosidad de torbellino y empezar una nueva iteración de la ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento.

La rigidez es la razón por la que las ecuaciones del flujo medio y de la turbulencia se tratan separadamente; el acoplamiento de estas ecuaciones puede provocar que la convergencia sea difícil de alcanzar. Pasos temporales demasiado grandes (o su equivalencia en un método iterativo) pueden conducir a valores negativos de k o de ε y a inestabilidades numéricas. Por ello es necesario utilizar subrelajaciones para estas magnitudes en el método iterativo; los valores son similares a los utilizados para las ecuaciones de cantidad de movimiento (0.6 a 0.8 para flujo compresible).

Los perfiles de energía cinética turbulenta y de su disipación normalmente presentan mayores fluctuaciones que los de velocidad media. Estas fluctuaciones son difíciles de capturar; probablemente se debería de utilizar un mallado más fino para las magnitudes turbulentas que para el flujo medio, pero en raras ocasiones se hace así. Si se emplea el mismo mallado para todas las magnitudes existe la posibilidad de que la solución presente oscilaciones que puedan conducir alternativa y localmente a valores negativos de las magnitudes turbulentas. Esta posibilidad se puede evitar combinando localmente un esquema de diferencias centradas con discretizaciones upwind de bajo orden para los términos convectivos de las ecuaciones de k y de ε . Esto aumenta el error de la solución pero es necesario cuando se utiliza el mismo tipo de mallado para todas las magnitudes (Ferziger [80]).

4.2.3. Modelos k - ε para números de Reynolds bajos

La versión estándar del modelo k - ε está ajustada para números de Reynolds elevados. En las proximidades a los contornos sólidos no se satisface esta condición. Habitualmente se utilizan funciones empíricas denominadas “funciones de pared” que relacionan las tensiones cortantes en la pared con las velocidades en el nodo más próximo a la pared, situado a propósito en la región logarítmica (sección 4.2.2.2).

Las versiones para bajos números de Reynolds consideran las zonas próximas a la pared (subcapa límite laminar y zona de transición). Si se pretende describir con cierto grado de precisión el flujo en esta zona con un modelo de viscosidad de torbellino hay que recurrir a este tipo de modelos, que requieren una discretización más densa en las proximidades a las paredes y por tanto mayor tiempo de cálculo (Pérez-Segarra [81]).

En 1985 Patel [82] realiza una revisión de los modelos de turbulencia para números de Reynolds bajos. En su trabajo concluye que los modelos de Jones y Launder [83], Launder y Sharma [79] y Chien [84] proporcionaban los mejores resultados.

La imposibilidad de medir algunas magnitudes turbulentas en las inmediaciones de los contornos sólidos ha impedido durante muchos años la evolución tanto de los modelos de viscosidad de torbellino para bajos Reynolds como de los modelos de cierre de segundo orden. Desde que se dispone de datos de DNS esto ha cambiado. La información detallada que proporciona una DNS junto con las restricciones matemáticas de consistencia asintótica han servido para formular modelos cada vez más precisos y universales.

Desde la revisión de Patel se han propuesto muchos modelos k - ε con funciones de corrección más precisas que tienen en cuenta los efectos viscosos en las proximidades a la pared. Entre ellos, y por orden cronológico, los modelos de Nagano y Hishida [85], Myong y Kasagi [86], Deng y Piquet [87], Karlsson y otros [88], Michelassi y otros [89], Nagano y Tagawa [90], So y otros [91], Durbin [92], Yang y Shih [93], Zhang y otros [94], Abe y otros [95], So y otros [96] o Sarkar [97] fueron ajustados con datos de DNS para flujo en canal. Ninguno de ellos son geoméricamente independientes, si no que dependen de la coordenada normal.

En 1997 Sarkar y So [98] comparan ocho modelos de turbulencia k - ε para bajos Reynolds, los tres con los que Patel [82] obtuvo los mejores resultados y otros cinco más modernos asintóticamente consistentes. Resolvieron con ellos tres tipos de flujos: un flujo de Couette, un flujo plano en canal y una capa límite sobre una placa plana, comparándolos frente a datos de simulación numérica directa con números de Reynolds muy bajos. Concluyeron que los mejores resultados se obtenían con los modelos asintóticamente consistentes.

Todos los modelos tipo k - ε analizados por Sarkar y So responden a la siguiente estructura:

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4.29)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon + \chi \quad (4.30)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{1}{T_t} P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\hat{\varepsilon}}{T_t} + \xi \quad (4.31)$$

donde D/Dt es la derivada sustancial, $P_k = \nu_t (\partial u / \partial y)^2$ es la producción de k , P es la presión media, T_t es una escala de tiempos turbulenta, $\hat{\varepsilon}$, es una disipación reducida, t es el tiempo, χ y ξ son funciones de corrección cerca de la pared para las ecuaciones de k y de ε respectivamente, f_1 y f_2 son funciones de amortiguamiento y σ_k , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ y C_μ son constantes del modelo. En los modelos Chien [84], Jones y Launder [78] y de Launder y Sharma [79] la variable ε de la ecuación (4.31) es una disipación reducida a la que se ha sustraído su valor en la pared. En el resto de modelos la variable de la ecuación de ε es la tasa de disipación real. Esto se puede comprobar fácilmente analizando la condición de contorno para la disipación en la pared, ε_w (tabla 4.4).

Las diferencias entre estos modelos se resumen en las tablas 4.2 a 4.4. Las constantes de cierre σ_k , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ y C_μ propuestas por los autores aparecen en la tabla 4.2, junto con la abreviatura de cada modelo que se utilizará en lo sucesivo, las funciones de corrección χ y ξ y la escala temporal turbulenta T_t en la tabla 4.3 y las funciones de amortiguamiento f_1 , f_2 y f_μ y la condición de contorno en la pared para la tasa de disipación ε_w en la tabla 4.4.

Las tasas de disipación reducidas $\tilde{\varepsilon}$ y ε^* que aparecen en la tabla 4.3 para los modelos SSA y SZS vienen dadas por $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)$ y $\varepsilon^* = \varepsilon - 2\nu k/y^2$ respectivamente. Los diferentes números de Reynolds de las tablas 4.3 y 4.4 se definen como:

$$Re_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon} \quad Re_y = \frac{y\sqrt{k}}{\nu} \quad Re_\varepsilon = \frac{(\nu\varepsilon)^{1/4} y}{\nu} \quad (4.32)$$

además de y^+ dado por:

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.33)$$

Como condiciones de contorno en la pared se utiliza $k = 0$ y $u = 0$ en todos los modelos mientras que ε_w depende del modelo. Como los modelos CH, JL, y LS resuelven una forma reducida de la ecuación de disipación su condición de contorno es $\varepsilon_w = 0$ en la pared. Para el modelo MK $\varepsilon_w = [4k_1^+ y_1^{+2} - \varepsilon_1^+]$ donde los subíndices w y 1 se usan para denotar la pared y el primer punto de la malla respectivamente.

Cuadro 4.2: Coeficientes de cierre y nomenclatura.

Modelo	Autor	σ_k	σ_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	C_μ
JL	Jones y Launder [78]	1,0	1,3	1,55	2,0	0,090
LS	Launder y Sharma [79]	1,0	1,3	1,44	1,92	0,090
CH	Chien [84]	1,0	1,3	1,35	1,8	0,090
MK	Myong y Kasagi [86]	1,4	1,3	1,4	1,8	0,090
KTS	Karlsson y otros [88]	1,0	1,3	1,44	1,92	0,090
SZS	So y otros [91]	0,75	1,45	1,5	1,83	0,096
YS	Yang y Shih [93]	1,0	1,3	1,44	1,92	0,090
SSA	Sarkar y So [97]	1,0	1,45	1,5	1,83	0,096

Cuadro 4.3: Funciones de corrección para las proximidades de la pared.

Modelo	χ	T_t	ξ
JL	$-2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)^2$	k/ε	$2\nu\nu_t(\partial^2 u/\partial y^2)^2$
LS	$-2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)^2$	k/ε	$2\nu\nu_t(\partial^2 u/\partial y^2)^2$
CH	$-2\nu k/y^2$	k/ε	$2\nu\varepsilon e^{-y^+/2}/y^2$
MK	0	k/ε	0
KTS	0	k/ε	0
SZS	0	k/ε	$\left[-2,0\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{k} + 1,5\frac{(\varepsilon^*)^2}{k}\right] e^{-(\text{Re}_t/64)^2}$
YS	0	$\frac{k}{\varepsilon} + \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$	$\nu\nu_t(\partial^2 u/\partial y^2)^2$
SSA	0	k/ε	$\left[-0,57\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{k} + 0,5\frac{(\varepsilon^*)^2}{k} - 2,25\frac{\varepsilon}{k}P_k\right] e^{-(\text{Re}_t/40)^2}$

Cuadro 4.4: Funciones de amortiguamiento y condiciones de contorno para las proximidades de la pared.

Modelo	f_1	f_2	f_μ	ε_ω
JL	1	$1 - 0,3 e^{-\text{Re}_t^2}$	$\exp\left[-\frac{2,5}{1+\text{Re}_t/50}\right]$	0
LS	1	$1 - 0,3e^{-\text{Re}_t^2}$	$\exp\left[-\frac{3,4}{(1+\text{Re}_t/50)^2}\right]$	0
CH	1	$1 - 0,3e^{-(\text{Re}_t/6)^2}$	$1 - e^{-0,0115y^+}$	0
MK	1	$1 - \frac{2}{9}e^{-(\text{Re}_t/6)^2}$	$\left(1 + \frac{3,45}{\sqrt{\text{Re}_t}}\right) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{70}\right)\right]$	$\frac{4k_1^+}{y_1^{+2}} - \varepsilon_1^+$
KTS	1	$1 - e^{-0,02(y^+)^2}$	$1 + \frac{0,39}{y^+} \frac{(1-2,468y^+)}{\exp[-3 \cdot 10^{-5}(y^+)^{2,9}]}$	$\nu \left(\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}\right)_w$
SZS	1	1	$\left[1 + \frac{3,45}{\sqrt{\text{Re}_t}}\right] \tanh\left(\frac{y^+}{115}\right)$	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y}\right)_w^2$
YS	1	1	$[1 - \exp(-1,5 \cdot 10^{-4}\text{Re}_y - 5 \cdot 10^{-7}\text{Re}_y^3 - 1 \cdot 10^{-10}\text{Re}_y^5)]^{1/2}$	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y}\right)_w^2$
SSA	1	1	$\left(1 + 3/\text{Re}_t^{3/4}\right) [1 + 80e^{-\text{Re}_\varepsilon}] \cdot \left[1 - e^{(-\text{Re}_\varepsilon/43 - \text{Re}_\varepsilon^2/330)}\right]^2$	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y}\right)_w^2$

En la corriente libre se utilizan las condiciones de contorno $u = v = 0$, $k = 0$ y $\varepsilon = 0$.

Sarkar y So concluyen que para obtener una buena predicción de la distribución espacial de k se necesita que el modelo sea asintóticamente consistente cerca de la pared. Consideran que la función de amortiguamiento f_μ es el parámetro más influyente a la hora de predecir adecuadamente el flujo. Los modelos SSA e YS son los que proporcionan los mejores resultados para los tres flujos estudiados.

Para esta investigación se ha elegido un modelo k - ε estándar, el modelo LS que resuelve una ecuación de ε reducida y los modelos SSA e YS ya que son los que proporcionan los mejores resultados con los flujos simples analizados por Sarkar y So.

4.3. Procedimiento numérico

Las simulaciones fueron realizadas con el código de propósito general de mecánica de fluidos FIRE v7.2a desarrollado por AVL.

4.3.1. Dominio computacional

Tanto el chorro de pared plano paralelo como inclinado se simulan hasta una distancia longitudinal x aguas abajo de la ranura de salida de 210 veces la altura de la misma $b = 10$ mm. Así se puede estudiar la región inicial y la de flujo desarrollado.

4.3.1.1. Chorro paralelo

Es conocido que el chorro de pared plano paralelo presenta un crecimiento lineal en la dirección normal a la pared y , a medida que evoluciona en la longitudinal x . El dominio espacial elegido presenta ese mismo crecimiento (figura 4.2). En concreto, para el chorro de pared plano paralelo se ha optado por fijar el límite superior del dominio a una distancia de la pared de tres veces el valor del semiancho⁸ $y_{1/2}$ en $x = 2$ m y en $x = 0$ este límite se fija en $3b$, quedando así definido el ángulo α de inclinación del dominio en su límite superior. Con estos límites se pretende evitar la posible influencia de las condiciones de contorno en la solución. En la sección 4.4.4 se analiza en más detalle este aspecto.

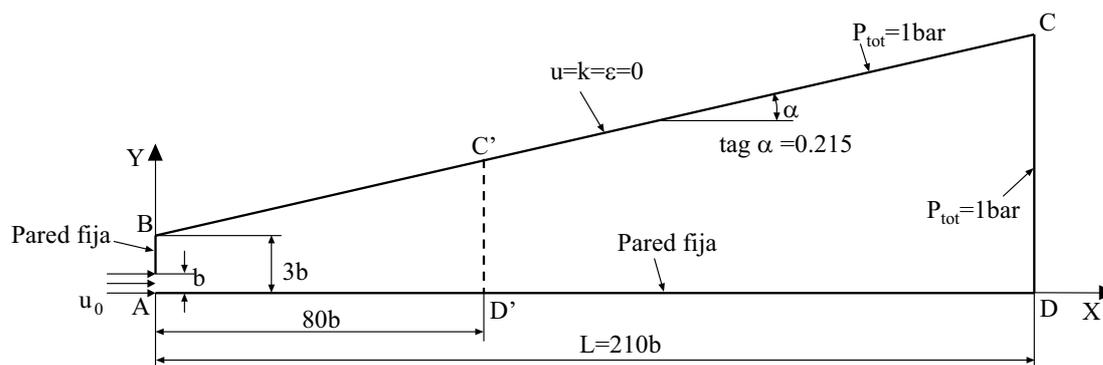


Figura 4.2: Dominio computacional para el chorro de pared plano paralelo y condiciones de contorno.

⁸Calculado a partir de los datos de Karlsson y otros [37]

Para el chorro de pared plano paralelo se realiza un estudio de independencia de la discretización espacial en un dominio con una longitud en la dirección x de $80b$ (ABC'D' en la figura 4.2). Las simulaciones consideradas como definitivas se desarrollan en un dominio de $210b$ (ABCD en la figura 4.2). En la sección 4.4.3 se justifica la validez de este procedimiento.

4.3.1.2. Chorro inclinado

En el caso de los chorros de pared planos inclinados la zona perturbada en la dirección y es obviamente más extensa que para el caso paralelo, especialmente en la zona inicial. Por este motivo se ha optado por alejar aun más el límite superior del dominio, hasta $y = 4b$ en $x = 0$ y hasta $y = 4y_{1/2}$ en $x = 2$ m.

La zona inicial de dominio requiere de una malla más fina que la zona desarrollada. Al no poder emplear mallas no estructuradas se optado por dividir el dominio computacional en dos partes. La zona inicial del chorro se simula en un dominio que se extiende longitudinalmente desde la salida hasta $x = 15b$ (ABC'D' en la figura 4.3, con $\beta = 10^\circ, 20^\circ$ ó 30°). La zona desarrollada se simula en un dominio que abarca desde $x = 10b$ hasta $x = 210b$ (A'B'CD en la figura 4.3). Los valores de las variables calculados en el plano $x = 10b$ para el modelo de la zona inicial se utilizan como condiciones de contorno de entrada para el dominio de la zona desarrollada.

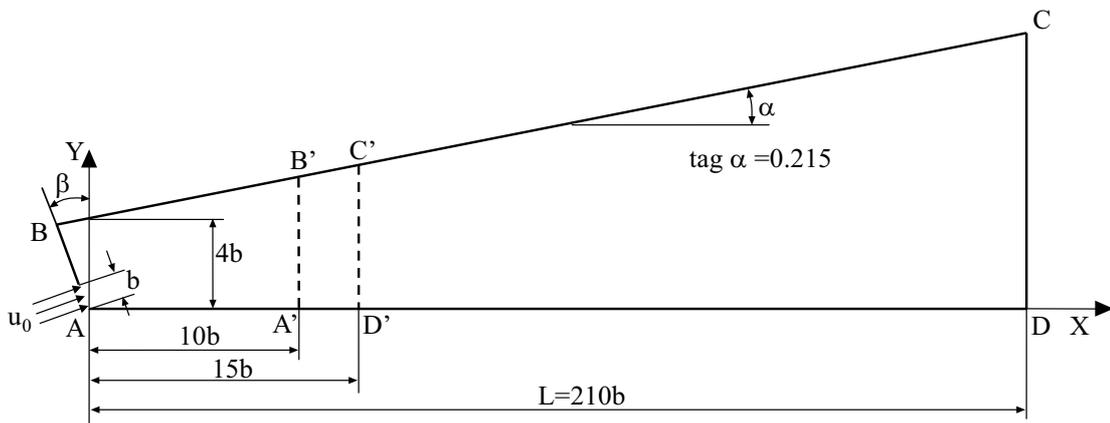


Figura 4.3: Dominio computacional para el chorro de pared plano inclinado.

4.3.2. Condiciones de contorno

Para asegurar la bidimensionalidad del flujo se impone en ambas caras XY del dominio la condición de simetría, gradiente normal de cualquier variable nulo. En la figura 4.2 se indican el resto de condiciones de contorno para el chorro de pared plano paralelo. En $x = 0$ y hasta una altura $y = b$ se impone una velocidad de entrada u_0 de 15, 30 ó 45 m/s en función del número de Reynolds que se desee simular 10.000, 20.000 ó 30.000 respectivamente, a la energía cinética turbulenta se le asigna el valor del 1% de la energía cinética a la entrada y a la escala de longitud turbulenta el valor 0.001 m (véase sección 4.2.2.2). En el resto del plano $x = 0$ y en todo el plano $y = 0$ se impone la condición de pared fija. En el caso inclinado las condiciones de contorno a la entrada son semejantes teniendo en cuenta las inclinaciones β que en cada caso presentan la velocidad y el límite del dominio. En el plano de salida, $x = x_{max}$, se impone presión estática igual a 1 atm, al igual que en límite superior, $y = y_{max}$ donde además se asigna $u = k = \varepsilon = 0$, siguiendo las recomendaciones de Gerodimos y So [3] y de So y otros [91].

4.3.3. Ecuaciones

El chorro de pared es un flujo bidimensional y por tanto es necesario resolver la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para dos componentes, la ecuación de conservación de la masa y las ecuaciones de transporte de las variables turbulentas. Todos los modelos de turbulencia utilizados resuelven dos ecuaciones de transporte: una para la energía cinética turbulenta k y otra para su tasa de disipación ε . En el rango de velocidades que se va a trabajar el número de Mach es muy pequeño y por tanto el flujo es incompresible.

4.3.4. Procedimiento de cálculo

Aunque el proceso es estacionario y por tanto no serían necesarias las condiciones iniciales, el procedimiento de cálculo considera al tiempo como una variable ficticia de forma que las variables evolucionan en el tiempo hasta alcanzar un estado estacionario. Las condiciones iniciales son el punto de partida en el proceso iterativo y aunque no influyen en la solución final si que influyen en la velocidad de la convergencia.

En una primera fase se realiza una simulación con una discretización espacial grosera del dominio de cálculo. El estado inicial se corresponde con un chorro de aire que empieza a salir por la tobera y se desarrolla en un ambiente de aire en reposo. Partiendo de este estado se realiza todo el cálculo hasta alcanzar el estado de equilibrio. El criterio que determina si se ha alcanzado el equilibrio se basa en

monitorizar el valor que toman magnitudes globales como el caudal, el semiancho o la velocidad máxima en una posición x cercana a x_{max} y dejar avanzar la simulación hasta que estos parámetros se estabilizan.

Seguidamente se procede a realizar un refinamiento de la malla. Los valores de las magnitudes fluidas en las celdas de la malla basta se interpolan para obtener las magnitudes en las celdas de la malla refinada y utilizarlos como estado inicial. Se lanza la simulación hasta que se alcanza nuevamente el estado de equilibrio y se repite el proceso si es necesario.

Se ha verificado que el estado obtenido tras sucesivos refinamientos es idéntico al que se llega si se simula desde el principio todo el proceso transitorio en la malla fina, pero con un tiempo de cálculo de aproximadamente la mitad.

Para llevar a cabo esta operación es necesario cargar las dos mallas en el mismo fichero (.geo y .lnk) asignándoles una variable bandera que las identifica. Del mismo modo en el fichero de condiciones de contorno (.bnd) se asignan las condiciones de contorno que corresponden a cada una de las dos mallas. Indicando el paso temporal y la variable bandera asociada a la malla nueva en los ficheros: .lnk y .geo, junto a la bandera que identifica las condiciones de contorno nuevas en el fichero .bnd el programa realiza un cambio desde el dominio basto al refinado.

4.3.5. Modelos de turbulencia en el código

En el código FIRE están disponibles el modelo $k-\varepsilon$ estándar y el modelo de tensiones de Reynolds de Speziale y otros [99]. Además, en este trabajo se han introducido tres modelos de turbulencia de dos ecuaciones que se adaptan a los números de Reynolds bajos (los modelos SSA, YS y LS). Para ello se ha hecho uso de las *funciones de usuario*, subrutinas escritas en FORTRAN a las que llama el programa principal en cada iteración. Su cometido es flexibilizar el código en los casos que no están contemplados en el programa estándar. Las funciones de usuario se activan asociando un valor de entrada a la bandera distinto de cero. Se pueden ejecutar distintas partes de cada subrutina (distintos modelos de turbulencia) en función del valor de entrada de la bandera que activa la subrutina.

Las funciones de usuario empleadas para introducir los modelos de turbulencia y las condiciones de contorno que llevan asociados, son las siguientes:

- *usrswu.f*: únicamente se utiliza para imponer la condición $u = 0$ en el límite superior de la malla. Esta función es común para los métodos SSA, YS y LS.
- *usrste.f*: se utiliza para asignar el valor del número de Prandtl σ_k (tabla 4.2) e introducir las funciones de corrección χ (tabla 4.3) de cada modelo de tur-

bulencia en la ecuación de transporte de k (ecuación 4.30). Además permite imponer la condición $k = 0$ en el límite superior de la malla.

- *usr sed.f*: se emplea tanto para introducir las funciones de corrección ξ (tabla 4.3) en la ecuación de transporte de ε (ecuación 4.31) como para imponer las condiciones de contorno en el límite superior. Además se imponen los valores correspondientes en cada modelo de las constantes σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$ y $C_{\varepsilon 2}$ (tabla 4.2) en la ecuación de ε y el valor de la función de amortiguamiento f_2 (tabla 4.4).
- *usr vis.f*: la subrutina actúa sobre el valor de la viscosidad efectiva suma de la laminar y de la turbulenta. Se calcula el valor de la viscosidad turbulenta introduciendo las funciones de amortiguamiento f_μ (tabla 4.4) y las constantes C_μ (tabla 4.2) de cada modelo de turbulencia y se le suma la viscosidad laminar para obtener la viscosidad efectiva.

El listado completo de estas subrutinas se incluye en los apéndices A.1 a A.4.

Para imponer la condición de contorno de la tasa de disipación de energía cinética en la pared ε_w (tabla 4.4) el programa no dispone de la correspondiente *función de usuario* por lo que fue necesario modificar una subrutina del código fuente facilitada por la compañía ha que desarrollado el código. El listado de esta subrutina no se incluye en los apéndices porque no se dispone de autorización para hacerla pública.

4.3.6. Proceso de resolución

Mediante una formulación de volúmenes finitos y con ayuda de un esquema de diferencias se transforman las ecuaciones diferenciales de transporte en ecuaciones algebraicas que el código resolverá con el algoritmo elegido. El dominio espacial se divide en celdas o volúmenes de control que rodean a los nodos. Las ecuaciones diferenciales se integran en esos volúmenes de control a lo largo del tiempo. La integración temporal utiliza un esquema temporal implícito.

El tiempo simulado se divide en unidades denominadas pasos temporales. La magnitud de cada paso temporal puede variar a lo largo del tiempo simulado y su valor se puede definir en segundos. En cada paso temporal se utiliza un proceso iterativo para calcular la solución de cada ecuación del flujo. Es decir un paso temporal consta de varias iteraciones y cada iteración consta a su vez de varios ciclos del algoritmo de resolución.

Al cálculo de una ecuación del flujo en una celda se le denomina ciclo. En cada ciclo FIRE sustituye las soluciones de la variable en la ecuación del flujo para obtener una constante. El programa calcula un residual restando esta constante de

la constante que se obtendría sustituyendo la solución exacta. En cada iteración el programa compara el residual de corrección de la presión (masa) promediado en todas las celdas del dominio, con el criterio de convergencia. En caso de que se extienda la comprobación de la convergencia a otras variables se comprueban los residuales de las ecuaciones adicionales que se hayan especificado.

Si el residual de masa promediado en todo el dominio es mayor que el criterio de convergencia el programa empieza la siguiente iteración. Se calculan iteraciones hasta que se satisface el criterio de convergencia, o bien, hasta que se alcance el número máximo de iteraciones determinado. En ese momento el programa empieza el siguiente paso temporal. FIRE procesa pasos temporales hasta que el programa sea detenido por el usuario, o bien se detiene él mismo cuando se alcanza el número máximo de pasos temporales.

La técnica empleada para acoplar las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento es un procedimiento iterativo de “estimación y corrección” del campo de presiones. El método se denomina SIMPLE (*SemiImplicit Method for Pressure-Linked Equations*) y fue desarrollado por Spalding. Se basa en expresar los valores reales de las variables como la suma de un valor aproximado y de un valor corrector. Operando se obtienen una ecuación de corrección para la presión y otra para la velocidad de forma que se asegura el cumplimiento de la ecuación de continuidad. Los pasos de este método son:

- Suponer un campo de presiones
- Resolver las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento.
- Resolver la ecuación de continuidad expresada en términos de corrección de la presión.
- Realizar la corrección de la presión y las velocidades.
- Repetir iterativamente desde el segundo punto hasta que el término fuente de la ecuación de continuidad sea inferior a una tolerancia.
- Calcular los coeficientes para k y resolver la ecuación de k .
- Calcular los coeficientes para ε y resolver la ecuación de ε .
- Comprobar la convergencia: si no converge volver al primer paso, en otro caso empezar un nuevo paso temporal.

Los factores de subrelajación determinan el porcentaje de cambio que se permite dentro de cada iteración. Un factor de subrelajación próximo a 0 aumenta la

estabilidad de la solución pero también incrementa el tiempo de cálculo. Un valor próximo a 1 hace que la solución sea más inestable y que ésta se alcance de una forma más rápida. El objetivo es buscar los valores que proporcionen una solución de compromiso entre la estabilidad y la rapidez de la simulación.

Al integrar las ecuaciones de transporte en un volumen finito aparecen como incógnitas magnitudes en las caras de las celdas. Los esquemas de diferencias determinan como se evalúan estas incógnitas en función de las magnitudes en los nodos. FIRE dispone de los siguientes esquemas de diferencias:

- UPWIND: es un esquema de primer orden. Aproxima los valores en las caras de las celdas por el valor de la magnitud en el nodo más cercano situado aguas arriba. Proporciona una solución libre de oscilaciones y estable con un coste computacional bajo. Sin embargo la precisión es de primer orden y aparece difusión numérica, tiende a amortiguar los gradientes elevados, cuando las celdas no están alineadas con la líneas de corriente.
- HIBRIDO: combina, en función del número de Peclet, el esquema UPWIND de primer orden con el esquema de diferencias centradas (CDS) de segundo orden. El esquema CDS aproxima el valor en las caras de las celdas mediante la media ponderada de los valores en los dos nodos más cercanos. El número de Peclet compara el valor relativo de la convección y de la difusión. En flujos dominados por la difusión ($Pe < 2$) el esquema CDS proporciona soluciones estables y de alta precisión, mientras que en flujos dominados por la convección ($Pe > 2$) conduce a inestabilidades y oscilaciones en la solución. Para evitar este problema el esquema HIBRIDO conmuta entre el esquema CDS cuando el número de Peclet es menor de 2 y el esquema UPWIND cuando $Pe > 2$.
- CTVD: Es un esquema de disminución de la variación total construido sobre la base del esquema de diferencias centradas. Para conseguir la condición de disminución de la variación total que asegura la estabilidad de la solución en los esquemas de segundo o mayor orden se introducen funciones limitantes. Las funciones limitantes dependen de los cocientes entre los gradientes de celdas vecinas. Estos cocientes se hacen negativos en presencia de un extremo local, y entonces la función limitante actúa reduciendo el esquema a una precisión de primer orden. La función limitante para el esquema de diferencias centradas es del tipo $\min\text{mod}^9$. Este esquema está recomendado para flujos con gradientes acusados.
- CTVU: Es un esquema de disminución de la variación total centrado. Ofrece una mezcla entre los esquemas UPWIND y CTVD. Un factor de mezcla igual

⁹ $\min\text{mod}(1,r) = \max[0, \min(1,r)]$

a 0 corresponde al esquema UPWIND y un valor de 1 se corresponde con el esquema CTVD anterior. Para flujos laminares y estacionarios se recomienda un factor de mezcla de 0.8-0.9, y en flujos transitorios el factor debe estar en el rango 0.3-0.5.

- BQDS: Mezcla el esquema UPWIND con el QUICK:

$$\phi_i = \gamma_i \phi_i^Q + (1 - \gamma_i) \phi_i^U \quad (4.34)$$

donde γ_i es el factor de mezcla, ϕ_i^Q es la contribución del esquema QUICK y ϕ_i^U es la contribución del esquema UPWIND. El esquema QUICK es de tercer orden, cuadrático y tipo UPWIND. Se basa en interpolar mediante una parábola dos nodos situados aguas arriba y un nodo situado aguas abajo. Reduce la difusión numérica respecto del esquema UPWIND pero en flujos convectivos aparecen problemas de estabilidad de la solución. El criterio del esquema BQDS para determinar el factor de mezcla es forzar a que todos los elementos de la matriz de coeficientes sean positivos lo que asegura la estabilidad de la solución. El esquema BQDS mejora la precisión en flujos estacionarios pero requiere un 8% más de memoria.

- BQDU: Mezcla de un esquema UPWIND de primer orden con el esquema QUICK de tercer orden mediante un factor de mezcla definido por el usuario. Es similar al anterior pero se puede especificar el factor de mezcla entre 0 y 1. Un factor de mezcla igual a 0 se corresponde con el esquema UPWIND y un factor 1 se corresponde con el esquema QUICK de tercer orden.

Se eligió el esquema de diferencias CTVD, después de compararlo con el esquema HÍBRIDO en el chorro de pared plano paralelo. El resto de esquemas de diferencias de orden superior plantearon problemas de convergencia.

Para cada celda existe una ecuación algebraica que expresa cada variable en función de los valores de dicha variable en las celdas vecinas. El programa resuelve el sistema matricial de ecuaciones algebraicas resultante mediante un algoritmo de resolución. Los algoritmos de resolución disponibles en FIRE son:

- Algoritmo de gradiente conjugado incompleto (ICCG): apropiado para flujos incompresibles y funciona bien para todos los números de Courant, especialmente para números menores que 5. Solamente se puede emplear en mallas estructuradas.
- Algoritmo de ortogonalización minimización con relleno de nivel cero generalizado (GCCG): es más general y se puede emplear con cualquier tipo de mallas.

- Algoritmo CICG: es igual al ICCG pero se puede emplear en mallas no estructuradas.
- Algoritmo GSTB: el mismo que GCCG pero mejorado para flujos estacionarios e incompresibles.

Además FIRE dispone de una opción denominada “Auto” que elige el algoritmo de resolución más adecuado para cada tipo de malla y características de la simulación. Esta opción ha sido habilitada para llevar a cabo las simulaciones. Se fijaron un número mínimo y máximo de 10 y 100 ciclos por iteración, con una tolerancia de 0.1 para todas las ecuaciones salvo la de corrección de presión que se ha adoptado una tolerancia de 0.05.

El modo de ejecución elegido ha sido el de pasos temporales, su magnitud se ha modificado en el sentido de ir aumentando, a medida que la simulación avanza.

4.3.7. Convergencia y estacionaridad de la solución

Las simulaciones se han realizado con un criterio de convergencia para el residual de masa de 10^{-7} que en algunos casos se ha extendido a otras magnitudes (10^{-6} para las velocidades y 10^{-5} para las magnitudes turbulentas). Cuando las simulaciones se han considerado terminadas los residuales de todas las magnitudes son inferiores a 10^{-7} . Se ha fijado un número de iteraciones mínimo de 5 y máximo de 100 y ajuste automático de los factores de subrelajación. Se ha aplicado un criterio de convergencia muy estricto a los residuales con el fin de lograr una gran precisión en los resultados de la simulación.

Para comprobar que el flujo ha alcanzado el estado estacionario, se ha representado la evolución temporal de los residuales de velocidad, masa y magnitudes turbulentas promediados por el número de celdas. También se representa la evolución temporal de la velocidad máxima u_m , el semiancho $y_{1/2}$, en diversas posiciones x y el caudal en el tercio superior del chorro en una posición cercana a la salida. Habitualmente a esta técnica se le denomina monitorización y es importante elegir variables que caractericen el comportamiento del flujo. Cuando la variación de todas estas magnitudes se da más allá de su séptima cifra significativa durante 200 pasos temporales seguidos se asume que el flujo ha alcanzado un estado de equilibrio y se da por finalizada la simulación. En el apéndice A.5 se muestra la secuencia de código Fortran donde se muestran las características de la monitorización de estos parámetros durante la simulación.

4.4. Independencia de los resultados numéricos de la discretización espacial

Para poder aceptar los resultados de una simulación se necesita tener la certeza de que éstos son independientes de la discretización espacial. Esta premisa se ha tenido en cuenta en todas y cada una de las simulaciones, se han realizado estudios de independencia de la malla para el chorro de pared paralelo, con todos los modelos de turbulencia y con todos los números de Reynolds, para los chorros de pared inclinados tanto para las simulaciones de la zona de inicial como para las de la zona de chorro desarrollado y para todos los ángulos considerados. Se debe señalar que, para el chorro de pared plano paralelo y por motivos de coste computacional, este estudio se ha realizado en un dominio de menor longitud que el definitivo (hasta $x = 80b$ en lugar de hasta $x = 210b$); ahora bien, previa comprobación de que las conclusiones son extrapolables.

4.4.1. Mallas preliminares para el chorro de pared plano paralelo

Si se pretende resolver el flujo en las proximidades a la pared se precisa una discretización espacial muy fina de esa zona. Gerodimos y So [3] dan algunas indicaciones acerca del número y distribución de celdas en la zona comprendida entre la pared e $y^+ = 65$. Tratando de seguir este criterio se divide el dominio en la dirección normal a la pared en tres regiones. La región n_{y_1} se extiende desde la pared hasta la recta¹⁰ de $y^+ = 65$, la región n_{y_2} abarca el espacio comprendido desde la recta de $y^+ = 65$ hasta una segunda recta que une el borde superior de la ranura de salida, $y = b$ en $x = 0$, con el $y = 1/3y_{max}$ en $x = x_{max}$; el resto del dominio sería la región n_{y_3} .

En todas las regiones existe una concentración de celdas creciente en dirección hacia la pared, y pequeños. El Δx de las celdas próximas a la pared es creciente con x en paralelo al aumento del Δy producido por el ensanchamiento de la malla aguas abajo manteniendo la relación $\Delta x/\Delta y$ semejante para la primera fila de celdas.

Se han desarrollado mallas con distintas distribuciones de celdas. En la tabla 4.5 se muestra para cada malla, el número de celdas n_x en la dirección x , el número de celdas n_y y su distribución por regiones (n_{y_1} , n_{y_2} , n_{y_3}) en dirección y así como

¹⁰El cálculo de las rectas de $y^+ = 65$ se realizó promediando los datos de Wygnanski y otros [34], Karlsson y otros [37] y Abrahamsson y otros [2] en el rango $x=0.7-2m$, obteniendo:

$$y(y^+ = 65) = 0,0018625x + 0,001466 \quad (4.35)$$

Cuadro 4.5: Distribución de celdas, semiancho y velocidad máxima en las mallas preliminares.

Malla ij	n_x	$n_y(n_{y_1}, n_{y_2}, n_{y_3})$	$y_{1/2}(x = 70b)$	$u_m(x = 70b)$
Malla02	86	60(18,24,18)	0.0500	7.315
Malla11	86	55(27,17,11)	0.0503	7.283
Malla21	86	69(27,24,18)	0.0502	7.294
Malla31	140	103(41,36,26)	0.0503	7.258
Malla12	171	55(27,17,11)	0.0515	7.217
Malla14	342	55(27,17,11)	0.0521	7.185
Malla15	683	55(27,17,11)	0.0527	7.149
Malla16	1445	55(27,17,11)	0.0528	7.139
Malla24	342	69(27,24,18)	0.0511	7.224
Malla25	683	69(27,24,18)	0.0516	7.187
Malla26	1445	69(27,24,18)	0.0519	7.170
Malla34	560	103(41,36,26)	0.0507	7.231

los resultados del semiancho $y_{1/2}$ y de la velocidad máxima u_m en la posición $x = 70b$ obtenidos con el modelo de turbulencia SSA. Las mallas con el primer número coincidente tienen las mismas celdas en la dirección y y la misma distribución por regiones. Las mallas con el segundo número coincidente tienen la misma relación de aspecto en las celdas contiguas a la pared.

El procedimiento seguido fue el siguiente: a partir de los resultados de velocidad máxima y semiancho obtenidos con las mallas 02, 11, 21 y 31 se evidencia que, excepto para la malla02, las variaciones son muy pequeñas, optándose por continuar el análisis con la de menor coste computacional, la malla11. Tomando esta distribución de celdas en la dirección y se procedió a aumentar las celdas en la dirección x , mallas 11, 12, 13, 14, 15 y 16. Nuevamente, excepto para la primera, los resultados son muy similares, con diferencias del orden del 2% para $y_{1/2}$ y 1% para u_m , eligiéndose la malla12. Se amplió el estudio a las mallas 24, 25, 26 y 34 indicando que las diferencias encontradas en los resultados no justificaban el excesivo aumento del coste computacional, considerándose que la malla 12 presenta una buena relación de compromiso entre coste computacional y la independencia de los resultados.

4.4.2. Independencia de la malla para los modelos de turbulencia

Todo el análisis anterior se ha realizado con el modelo de turbulencia SSA, sin embargo las conclusiones obtenidas no tienen por que ser válidas para otros modelos de turbulencia. Para extender este estudio a los modelos de turbulencia SSA, YS y LS se comparan los resultados de la malla 12 con los de la malla 34, que tiene un 50% más de celdas en cada una de las tres regiones n_{y_1} , n_{y_2} , n_{y_3} y el doble de celdas en dirección x . En la figura 4.4 se muestran los valores del semiancho para diferentes posiciones longitudinales obtenidos con los tres modelos de turbulencia en las dos mallas. En la tabla 4.6 se compara la pendiente del semiancho en la zona lineal y la velocidad máxima y el semiancho para la posición $x/b = 70$, observándose que las variaciones en estas magnitudes en ambas mallas son inferiores al 2%.

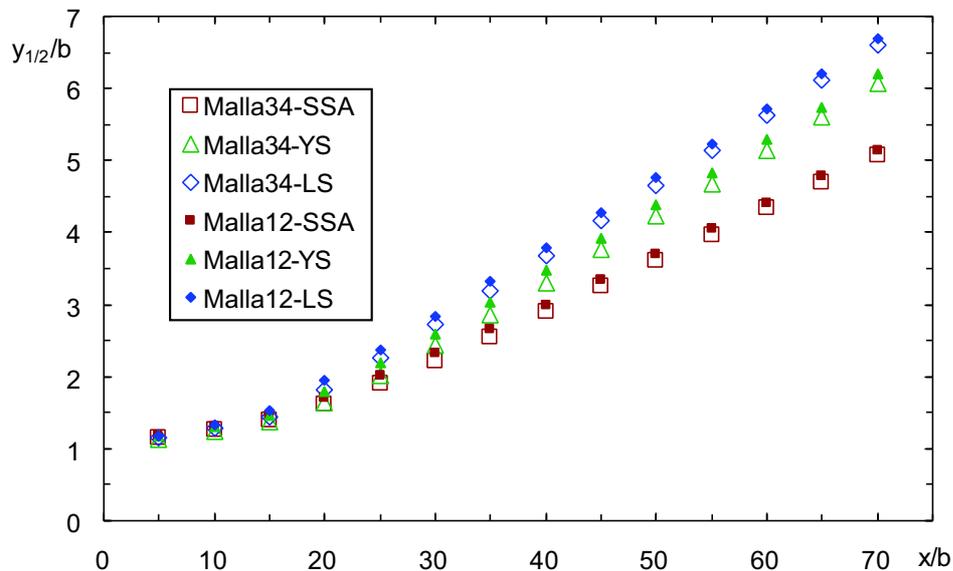


Figura 4.4: Influencia de la densidad de la malla en la evolución del semiancho para los modelos de turbulencia de bajos Reynolds.

Para todos los modelos de turbulencia la malla34 proporciona pendientes de crecimiento del semiancho ligeramente superiores a los de la malla12. En cuanto a los valores del semiancho y de la velocidad máxima para la posición $x = 70b$ las diferencias son también muy pequeñas. Todos estos resultados aparecen en la tabla 4.6.

Para el modelo $k-\varepsilon$ estándar se necesita emplear una malla diferente ya que en lugar de resolver la zona próxima a la pared utiliza una función de pared. La primera celda debe de estar situada dentro de la zona logarítmica. Haciendo un

Cuadro 4.6: Pendiente del semiancho, velocidad máxima en $x/b = 70$ y semiancho en $x/b = 70$ para las mallas preliminares con diferentes modelos de turbulencia.

	$dy_{1/2}/dx$			u_m			$y_{1/2}$		
	SSA	YS	LS	SSA	YS	LS	SSA	YS	LS
Malla12	0.071	0.091	0.096	7.24	6.75	6.45	0.051	0.062	0.067
Malla34	0.072	0.092	0.097	7.24	6.78	6.49	0.051	0.061	0.066
Variac.	1.27 %	1.54 %	0.93 %	0.04 %	0.4 %	0.6 %	1.36 %	2.09 %	1.35 %

estudio similar al anterior se determinó que una malla con $n_x = 99$ y $n_y = 82$ (1,26,55) para el dominio pequeño ($x_{max} = 0,8m$) es suficientemente refinada como para obtener resultados independientes.

4.4.3. Influencia de la longitud del dominio

Todo el análisis de independencia de la malla mostrado se ha realizado en un dominio corto que abarca desde $x = 0b$ hasta $x = 80b$ de menor longitud que aquel en el que se pretenden realizar las simulaciones definitivas, que abarca desde $x = 0b$ hasta $x = 210b$. El único motivo para trabajar de esta manera ha sido el excesivo coste computacional que hubiera supuesto realizar todo el trabajo anterior en el dominio definitivo.

Sin embargo este análisis no sería correcto si los resultados dependiesen de la longitud del dominio. Realizando simulaciones con una malla equivalente a la 12 pero prolongada hasta $x = 210b$ se observa que los resultados coinciden exactamente con los de la malla12 corta en la región común $0 < x < 80b$. En la figura 4.5 se muestra la evolución del semiancho con x/b con la malla corta y la definitiva para los cuatro modelos de turbulencia. La diferencias en la tasa de crecimiento del semiancho son inferiores al 0.04 % para todos los modelos de turbulencia excepto para el $k-\varepsilon$ que son de 0.28 %. En la velocidad máxima y el semiancho en $x = 70b$ las diferencias son del orden de 0.0001 %.

Las mismas conclusiones se han obtenido cuando se comparan los resultados para la malla34 con su equivalente extendida hasta $x = 210b$. Se puede deducir que cuando se obtenga la independencia de los resultados respecto de la malla en el dominio pequeño ($x_{max} = 80b$), entonces se extrapola la independencia de los resultados respecto de la malla al dominio definitivo ($x_{max} = 210b$).

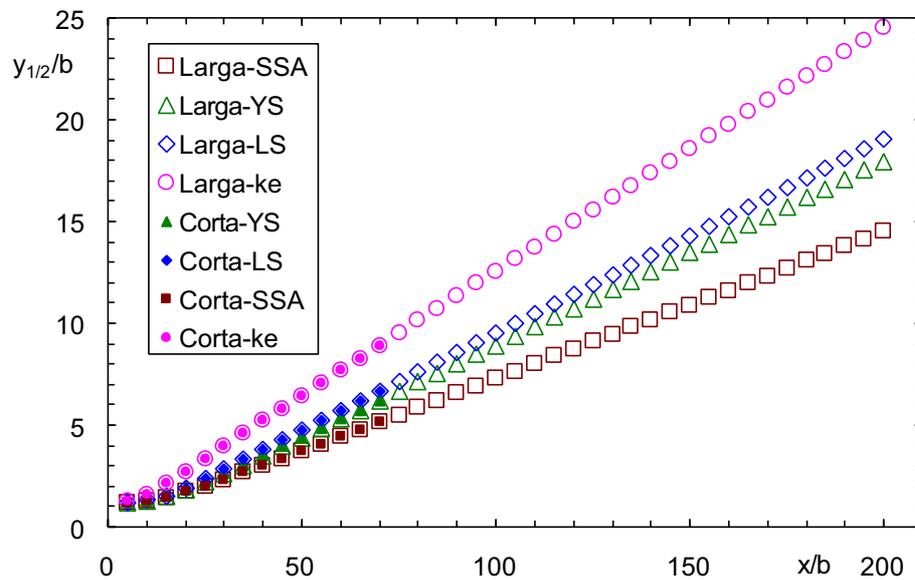


Figura 4.5: Influencia de la longitud del dominio en la evolución del semiancho.

4.4.4. Influencia del ángulo del límite superior del dominio

La posible proximidad del límite superior del dominio podría influir en el desarrollo del flujo. Si la coordenada y_{max} en $x = 0$ se mantiene fija el único parámetro que influye en esta proximidad es el ángulo de inclinación del límite superior. Al objeto de analizar su posible influencia en los resultados se ha simulado el chorro de pared plano paralelo en un dominio de $x = 210b$ de longitud empleando mallas con distinta pendiente en su límite superior: la denominada A1 con pendiente 0.2145 y la A2 con pendiente 0.1751.

En la figura 4.6 se representa la evolución del semiancho en las dos mallas para los tres modelos de turbulencia. Para el modelo SSA los resultados obtenidos con ambas mallas coinciden plenamente. Sin embargo para el YS y, en mayor grado, el LS se aprecia para la malla de menor ángulo de apertura una separación de la linealidad en la región más alejada de la tobera. Esto se atribuye a la proximidad de las condiciones de contorno en la parte superior del dominio para los modelos de turbulencia que predicen una tasa de crecimiento del chorro mayor.

En la tabla 4.7 se indican los valores de la tasa de crecimiento del semiancho y la velocidad máxima y el semiancho para la posición $x = 200b$ obtenidos para los tres modelos de turbulencia con las dos mallas.

En vista de los resultados se continua el estudio del chorro de pared plano con la malla de mayor pendiente 0.2145.

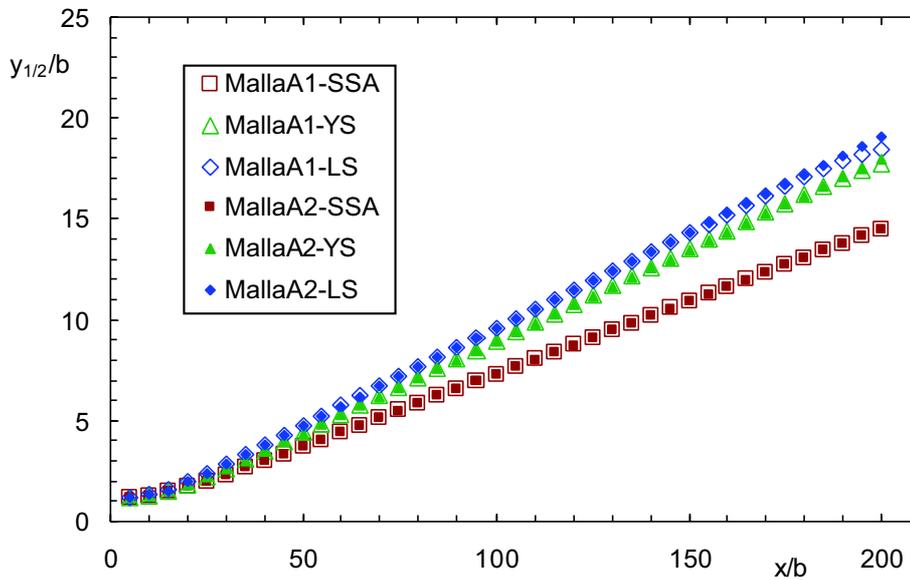


Figura 4.6: Influencia del ángulo de apertura de la malla en el semiancho $y_{1/2}/b$.

4.4.5. Independencia de los resultados de la malla para el chorro de pared plano inclinado

El estudio numérico del chorro de pared plano inclinado se ha realizado en dos dominios computacionales, uno para la región inicial y otro para la zona desarrollada descritos en la sección 4.3.1.2. Las principales diferencias entre el chorro de pared plano paralelo y el inclinado están en la zona inicial mientras que la zona desarrollada presenta características similares. El estudio de independencia de los resultados respecto de la malla se centrará principalmente en la zona inicial y para $\beta = 30^\circ$.

4.4.6. Zona inicial

Una primera serie de mallas preliminares se muestran en la tabla 4.8. En la primera columna aparece el nombre de la malla haciendo referencia al ángulo de inclinación, la longitud del dominio y a la densidad de la malla. La segunda columna indica el número de celdas en la dirección x , en la tercera columna se muestra el número de celdas en dirección y y entre paréntesis el número de celdas que existe en las regiones: $(y^+ < 65)$; $(y^+ = 65, y = b)$; $(b < y < L_y)$. En las dos últimas columnas aparece la longitud de la malla en dirección x , L_x y la longitud de la malla en dirección y , L_y para la posición $x = 0$.

Cuadro 4.7: Influencia del ángulo de crecimiento de la malla en la velocidad máxima y el semiancho para la posición $x = 200b$ con diferentes modelos de turbulencia.

	tag α			u_m			$y_{1/2}$		
	SSA	YS	LS	SSA	YS	LS	SSA	YS	LS
MallaA1	0.072	0.090	0.092	4.13	3.83	3.68	0.145	0.177	0.184
MallaA2	0.072	0.091	0.095	4.13	3.84	3.70	0.145	0.180	0.191
Variac.	0.12 %	0.72 %	2.89 %	0.11 %	0.31 %	0.59 %	0.15 %	1.47 %	3.22 %

En la tabla 4.9 se recogen los valores de u_m , $y_{1/2}$ y el caudal en $x = 10b$ y el porcentaje de variación de estos parámetros al pasar de una malla a otra.

Cuadro 4.8: Características de la primera serie de mallas preliminares.

Malla	n_x	$n_y(n_{x_1}, n_{x_2}, n_{x_3})$	L_x	L_y
B30-x10-1	98	55(27,17,11)	$10b$	$3b$
B30-x10-2	98	110(54,34,22)	$10b$	$3b$
B30-x10-3	196	110(54,34,22)	$10b$	$3b$

Para comprobar la posibilidad de simular el chorro inclinado con una malla única que presente mayor densidad en la zona inicial se ha desarrollado una segunda serie de mallas con $L_x = 80b$ y un salto en su densidad en $x = 10b$. En la tabla 4.10 se muestran las características de la segunda serie de mallas preliminares. El criterio seguido en la nomenclatura es el mismo que en la tabla 4.8 además en la segunda columna se indica entre paréntesis el número de celdas en $0 < x < 10b$.

Las diferencia entre los resultados proporcionados por la malla B30-x80-1 y B30-x80-2 son del orden del 2-3 %. Al pasar a la malla B30-x80-3, las variaciones son también del orden del 2-3 %. Pero el tiempo de cálculo se hace excesivo ya que además de aumentar el número de celdas en la dirección x es necesario reducir el incremento temporal. Por otro lado, al no poder construir mallas no estructuradas no se puede modificar el número de celdas en dirección y . Por estos motivos se abandonaron este tipo de mallas.

De análisis de los resultados de los dos primeros grupos de mallas preliminares se

Cuadro 4.9: Pendiente del semiancho, velocidad máxima y semiancho y el caudal en $x = 10b$ para la primera serie de mallas preliminares.

	B30-x10-1	B30-x10-2	B30-x10-3	Variac. 1-2	Variac. 2-3
u_m	11.3154	12.8315	13.21921	-11.8	-2.93
$y_{1/2}$	0.01979	0.01847	0.01776	7.15	3.997
Q	0.19818	0.2042	0.2035	-0.294	0.344

Cuadro 4.10: Características de la segunda serie de mallas preliminares.

Malla	$n_x(n_{x_1})$	$n_y(n_{x_1}, n_{x_2}, n_{x_3})$	L_x	L_y
B30-x80-1	219(98)	55(27,17,11)	$80b$	$3b$
B30-x80-2	317(196)	55(27,17,11)	$80b$	$3b$
B30-x80-3	513(392)	55(27,17,11)	$80b$	$3b$

decidió alejar el contorno derecho hasta $x = 15b$ evitando la proximidad al punto de adherencia y que los resultados en $x = 10b$ no se vean afectados por las condiciones de contorno. También se incrementa la altura de la malla para permitir la curvatura del flujo en la zona de recirculación. En la tabla 4.11 se indican las características geométricas de este tercer grupo de mallas.

La tabla 4.12 muestra los resultados obtenidos. Cuando se pasa de la malla B30-x15-1 a B30-x15-2 se aumenta la densidad de la malla en la dirección x y los resultados apenas varían en un 2%. Se decidió aumentar el número de celdas en dirección y en la región exterior obteniendo una variación en los resultados del 9%. Por lo tanto se necesita como mínimo la densidad de la malla B30-x15-3. En principio habría que seguir profundizando en el estudio de independencia del mallado pero supondría un excesivo coste computacional trabajar con mallas de mayor densidad.

4.4.7. Zona de desarrollo

La malla de la región desarrollada comprende la región $x = 10b$ hasta $x = 200b$. Es igual a la malla definitiva utilizada para el chorro de pared plano paralelo (malla 12 con pendiente 0.2145) eliminando la región $0 < x < 10b$. Se ha considerado que las conclusiones del estudio de independencia de la malla realizado para el chorro

Cuadro 4.11: Características de la tercera serie de mallas preliminares para chorros planos inclinados.

Malla	$n_x(n_{x_1})$	$n_y(n_{y_1}, n_{y_2}, n_{y_3})$	L_x	L_y
B30-x15-1	132(98)	55(27,20,22)	15 <i>b</i>	4 <i>b</i>
B30-x15-2	264(196)	55(27,20,22)	15 <i>b</i>	4 <i>b</i>
B30-x15-3	264(196)	100(27,35,38)	15 <i>b</i>	4 <i>b</i>

Cuadro 4.12: Pendiente del semiancho, velocidad máxima y semiancho y el caudal en $x = 15b$ para la tercera serie de mallas preliminares.

	B15-x80-1	B15-x80-2	B15-x80-3	Variac. 1-2	Variac. 2-3
u_m	12.1227	12.3097	13.5138	-8.9106	-1.519
$y_{1/2}$	0.01968	0.01926	0.01764	9.1837	-2.818
Q	0.20634	0.20107	0.20107	3.5411	0.8886

de pared plano paralelo siguen válidas en este caso. No obstante se ha construido otra malla con el doble de celdas en las direcciones x e y y las diferencias entre los resultados de estas dos mallas son inferiores al 2%.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Una vez realizada la verificación de la independencia de los resultados numéricos de aspectos tales como el dominio computacional, su discretización espacial o el algoritmo de resolución se procede con la ejecución de las simulaciones, con los criterios de estacionariedad y convergencia expuestos con anterioridad. En este capítulo se presentan y discuten los resultados obtenidos con estas simulaciones, comparándolos entre sí y con datos experimentales de diversas fuentes seleccionados a partir del estudio realizado en el capítulo 3.

5.1. Chorro de pared plano paralelo

Para el chorro de pared plano paralelo se han realizado dos grupos de simulaciones. En un primer grupo se han empleado varios modelos de turbulencia y un número de Reynolds fijo a la salida. Contrastando los resultados numéricos con datos experimentales se ha analizado la capacidad de cada modelo de turbulencia para predecir el comportamiento de diversos parámetros del flujo. Para el segundo grupo de simulaciones se ha tomado uno de estos modelos de turbulencia para analizar la influencia del número de Reynolds en el flujo. Nuevamente se contrastan los resultados numéricos con datos experimentales. En todas las simulaciones el dominio computacional llega hasta $x = 210b$.

5.1.1. Modelos de turbulencia

Con un número de Reynolds a la salida de 10.000 se han realizado simulaciones del chorro de pared plano paralelo empleando el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ estándar basado en la hipótesis de números de Reynolds altos y las variantes con correcciones

para números de Reynolds bajos propuestas por Launder y Sharma [79], Yang y Shih [93] y de Sarkar y So [98], denominadas respectivamente LS, YS y SSA.

5.1.1.1. Magnitudes medias

Comparando en $x = 70b$ los perfiles de velocidad adimensionalizados con la velocidad máxima u_m y el semiancho $y_{1/2}$ en la sección transversal (figura 5.1) se aprecia que los resultados de los tres modelos de turbulencia para números de Reynolds bajos se ajustan muy bien a los datos experimentales, exceptuando de momento la zona próxima a la pared se analiza con detalle más adelante. El modelo $k-\varepsilon$, sin embargo, predice un comportamiento más alejado del experimental.

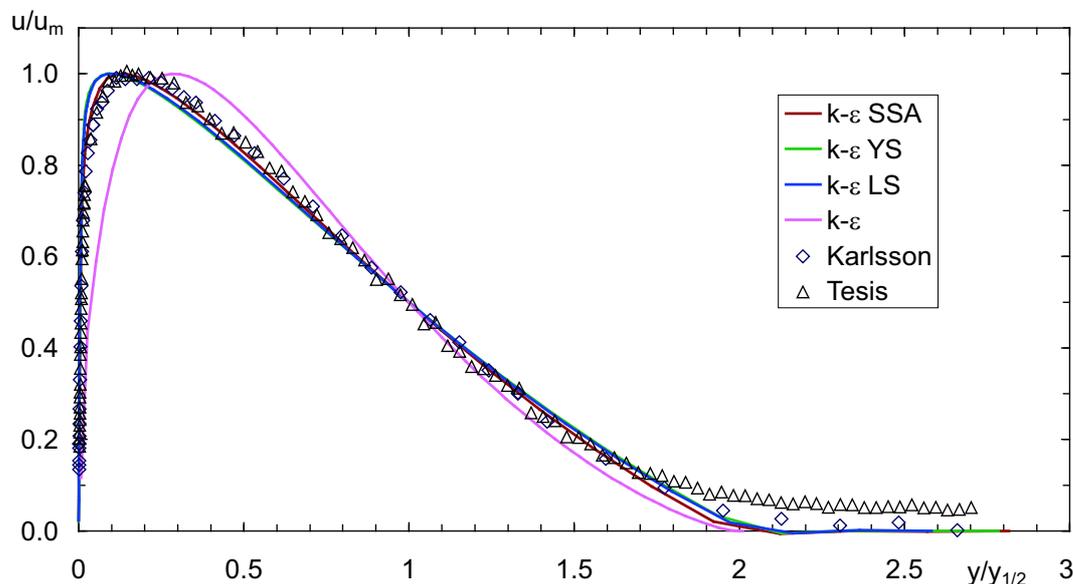


Figura 5.1: Perfiles de velocidad en $x = 70b$ para un chorro de pared plano paralelo con $Re = 10,000$.

En la figura 5.2 se presentan los resultados de la evolución del semiancho obtenidos con los cuatro modelos de turbulencia para $Re = 10^4$ junto con los intervalos en que se encuentran los datos experimentales de Karlsson y otros [37], Abrahamsson y otros [2] y los obtenidos en este trabajo.

Todos los modelos predicen un comportamiento lineal para la evolución del semiancho que se observa en la zona de flujo desarrollado. La región lineal¹ para el

¹Para obtener la región lineal se ha calculado la recta de regresión para la región $100b \leq x \leq 200b$, obteniéndose una desviación inferior al 0.1%. Se prolonga esta recta hacia x bajos y se toma como criterio que la zona lineal desaparece cuando los valores se separan de la recta más de un

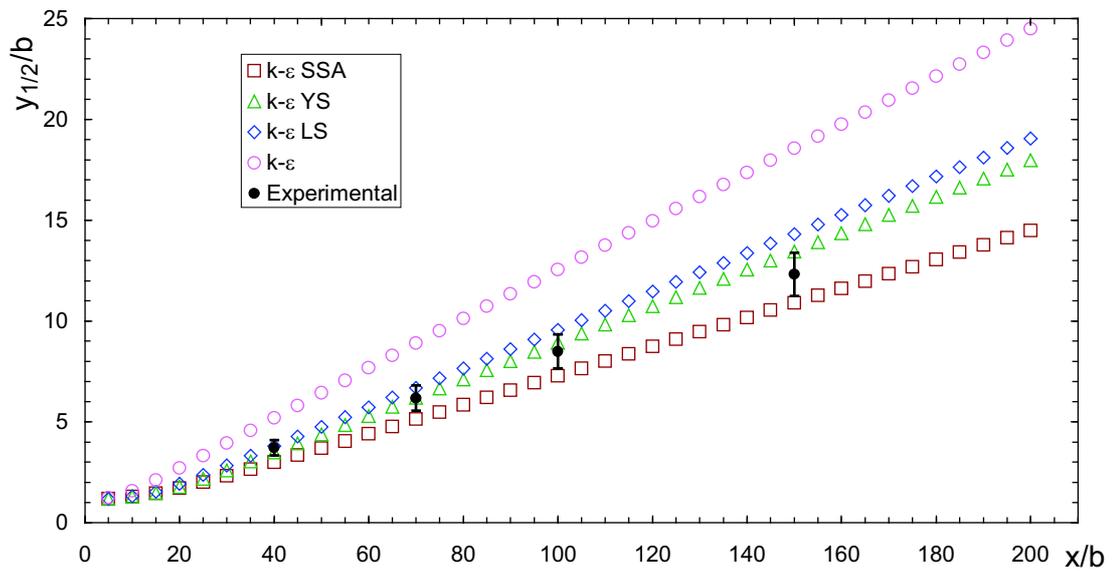


Figura 5.2: Evolución del semiancho para un chorro de pared plano paralelo con $Re = 10,000$.

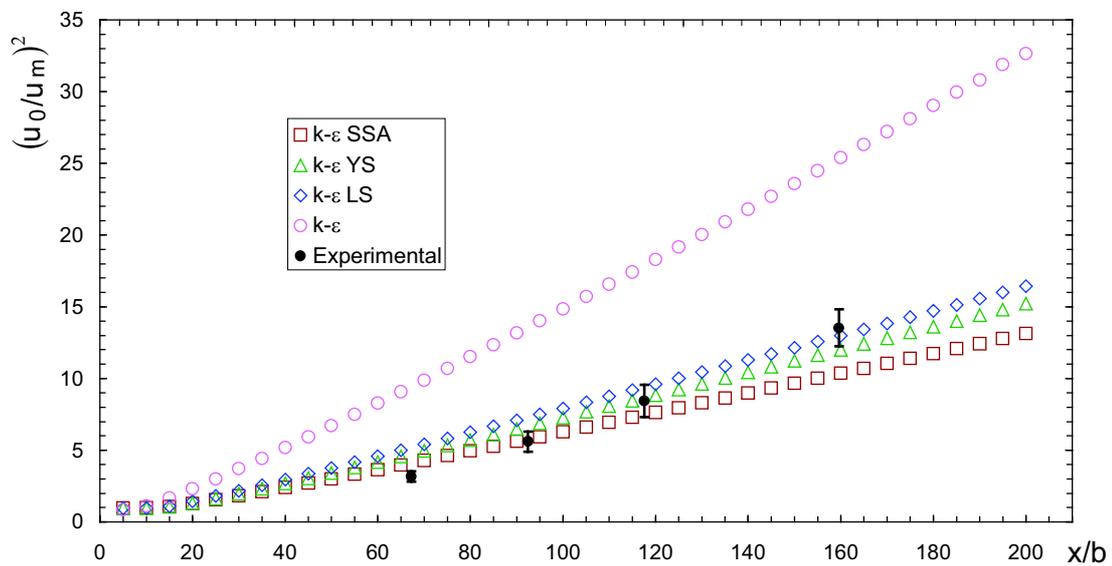


Figura 5.3: Evolución de la velocidad máxima para un chorro de pared plano paralelo con $Re = 10,000$.

modelo SSA comienza en $x = 40b$, para el modelo YS en $x = 30b$, para el LS en $x = 60b$ y para el $k-\varepsilon$ estándar $x = 75b$. En la zona lineal los modelos YS, LS y $k-\varepsilon$ proporcionan crecimientos del semiancho con pendientes de 0,091, 0,095 y 0,121 respectivamente, todas ellas son superiores a la hallada experimentalmente: 0,075. El modelo SSA es el que mejor concordancia presenta con los datos experimentales, con una pendiente de 0,072.

Todos los modelos de dos ecuaciones utilizados son capaces de predecir el comportamiento lineal del inverso del cuadrado de la velocidad máxima encontrado experimentalmente (figura 5.3). Con el mismo criterio que para el semiancho se ha obtenido que la región lineal para la evolución de $(u_0/u_m)^2$ comienza más lejos de la salida que para el semiancho: $x = 85b$ para el modelo SSA, $x = 80b$ para el YS, $x = 75b$ para el LS y $x = 100b$ para el modelo $k-\varepsilon$. Los datos experimentales muestran una pendiente mayor a la proporcionada por cualquiera de los modelos para Reynolds bajos. Las predicciones del modelo $k-\varepsilon$ estándar están mucho más alejadas de los datos experimentales que las del resto.

Un parámetro que proporciona información de la posición relativa del máximo de la velocidad es el cociente $y_m/y_{1/2}$. De datos experimentales se deduce que en la región de flujo desarrollado toma el valor 0,15; obteniéndose valores de 0,12 con el modelo de turbulencia SSA, 0,09 con el YS, 0,09 con el LS y 0,27 con el $k-\varepsilon$ estándar.

5.1.1.2. Magnitudes turbulentas

Si bien básicamente todos los modelos para Reynolds bajos proporcionan predicciones similares para la velocidad en la región exterior, los cálculos de $\overline{u'v'}$ y de k con el modelo SSA difieren notablemente respecto de los modelos YS y LS.

En la figura 5.4 se presentan los valores de la energía cinética turbulenta en $x = 70b$ para los cuatro modelos de turbulencia frente a datos experimentales de Abrahamsson [2], evidenciándose que el modelo SSA proporciona mejor concordancia con los datos experimentales. Si bien no se aprecia con claridad en la figura 5.4, los tres modelos de turbulencia para Reynolds bajos predicen un máximo y un mínimo relativos en las proximidades de la pared. Gerodimos y So [3] establecen la comparación de sus resultados numéricos con el modelo SSA con los experimentales de Karlsson y otros [37] encontrando una concordancia mejor y en un rango más amplio que la aquí indicada. Ahora bien, no se han podido determinar las hipótesis que estos autores debieron realizar para, a partir de medidas con anemómetro laser de dos componentes, determinar la energía cinética turbulenta con la que establecen su comparación. Los otros dos modelos de Reynolds bajos proporcionan tendencias similares pero más alejadas de los datos experimentales. El modelo $k-\varepsilon$ estándar ni

quiera es capaz de predecir que la energía cinética se anule al acercarse a la pared.

En cuanto al esfuerzo cortante turbulento en $x = 70b$, es el modelo SSA el que se ajusta mejor a los datos experimentales, el resto sobreestima este parámetro (figura 5.5). Los tres modelos de Reynolds bajos predicen el mínimo relativo cerca de la pared.

Los cuatro modelos predicen semejanza para estas magnitudes, incluida la k . Gerodimos y So [3], citando datos experimentales de Wygnanski y otros [34] señalan la existencia de semejanza en $x > 70b$ para u y para $-\overline{u'v'}$ pero no para k . Sin embargo los resultados de Abrahamsson y otros [2] si muestran esta semejanza. Por el tipo de instalación y metodología de medida se podría afirmar que los datos de Abrahamsson son tanto o más fiables que los de Wygnanski por lo que el comportamiento predicho por los modelos de turbulencia no tiene por que ser incorrecto.

5.1.1.3. Región próxima a la pared

Para estudiar la región próxima a la pared, se adimensionalizan las magnitudes con la velocidad de fricción u_τ y con la viscosidad cinemática ν , es decir, se expresan los perfiles en coordenadas de pared:

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (5.1)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (5.2)$$

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.3)$$

determinando el esfuerzo cortante en la pared a partir del gradiente de velocidades en la región viscosa (5.3). Es por tanto necesario situar varias celdas en dicha región para poder calcular $\partial u / \partial y$ con precisión. En las siguientes gráficas no se han reflejado los resultados obtenidos con el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ debido a que con este modelo no se resuelve la región viscosa (la celda más cercana a la pared se sitúa en la zona logarítmica donde se aplica la ley de la pared).

En la figura 5.6 se aprecia para todos los modelos como la velocidad queda subestimada en la zona próxima a la velocidad máxima respecto de los datos experimentales. En esta figura se representa además la ley logarítmica:

$$u^+ = (1/\kappa) \ln(y^+) + B \quad (5.4)$$

con $\kappa = 0,41$ y $B = 5,0$ para la zona con el mismo nombre y la ley lineal $u^+ = y^+$ para la zona viscosa. Las medidas experimentales de diversos autores muestran la existencia de una región logarítmica limitada a la región: $20 < y^+ < 80$. Los

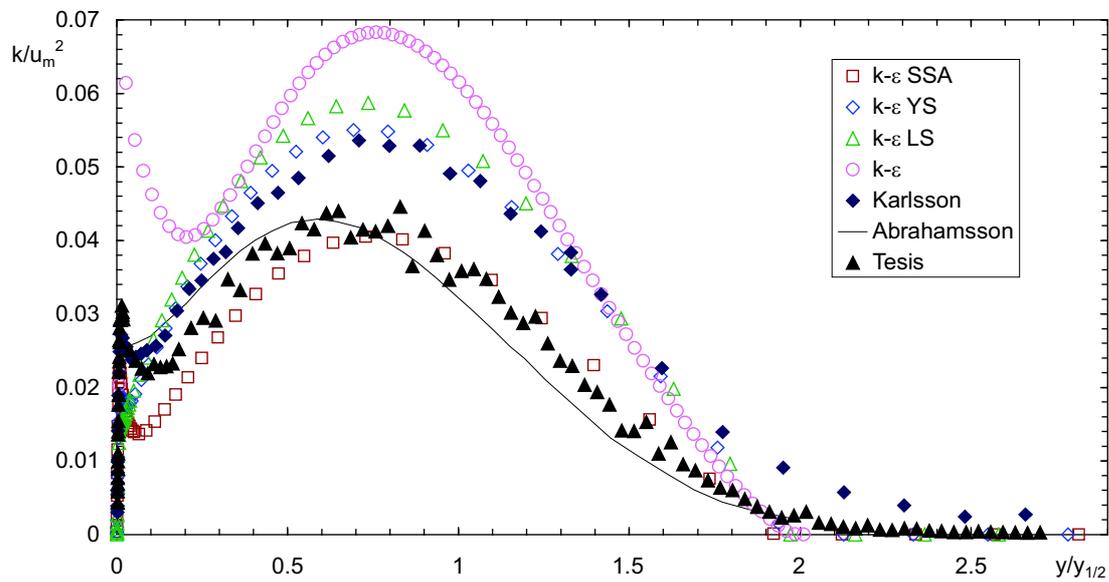


Figura 5.4: Energía cinética turbulenta en $x = 70b$ para un chorro de pared plano paralelo con $Re = 10,000$.

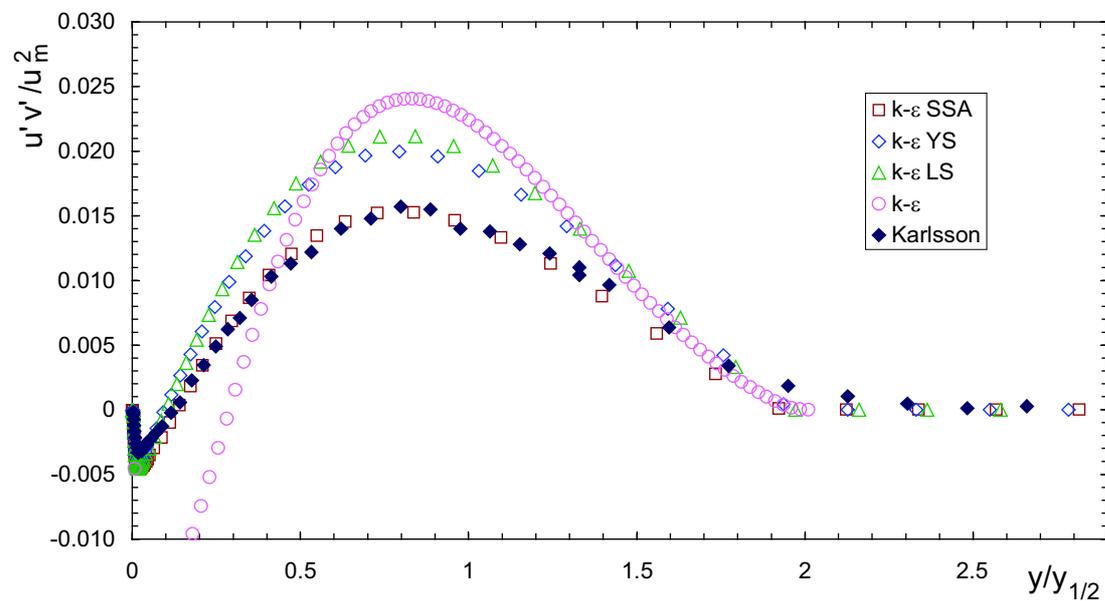


Figura 5.5: Esfuerzo cortante turbulento en $x = 70b$ para un chorro de pared plano paralelo con $Re = 10,000$.

modelos de turbulencia predicen una región logarítmica aún de menor extensión. Todos predicen el valor de 0.41 para la constante de Karman κ , sin embargo difieren en el valor del coeficiente B . Es decir la región logarítmica se ajusta en cada modelo de turbulencia con rectas paralelas de la misma pendiente y situadas a distinta altura. En la tabla 5.1 aparecen las predicciones de cada modelo de turbulencia en cuanto a extensión y valores de la constante de Karman κ y del coeficiente B .

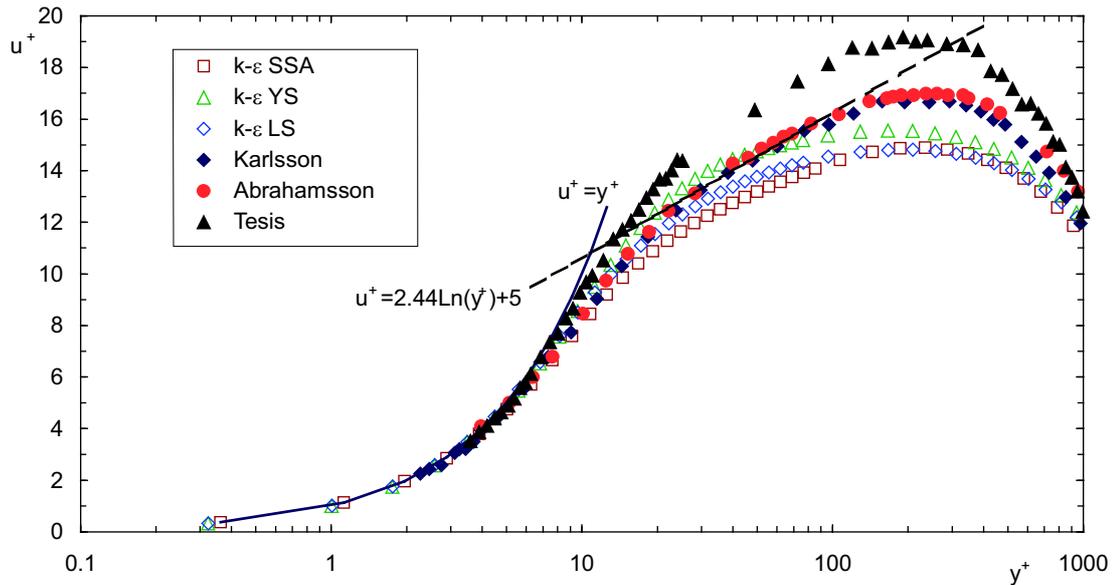


Figura 5.6: Velocidad en coordenadas de pared para $x = 70b$ para un chorro de pared plano paralelo con $Re = 10,000$.

Cuadro 5.1: Predicciones de la ley logarítmica.

Modelo	Región logarítmica	κ	B
SSA	$20 < y^+ < 50$	0.41	3.8
YS	$20 < y^+ < 50$	0.41	4.3
LS	$20 < y^+ < 40$	0.41	5.5

Tanto los perfiles de energía cinética turbulenta (figura 5.7) como los de esfuerzo cortante turbulento (figura 5.8) en coordenadas de pared en la zona próxima a la pared son reproducidos con precisión por los tres modelos de turbulencia de bajos Reynolds.

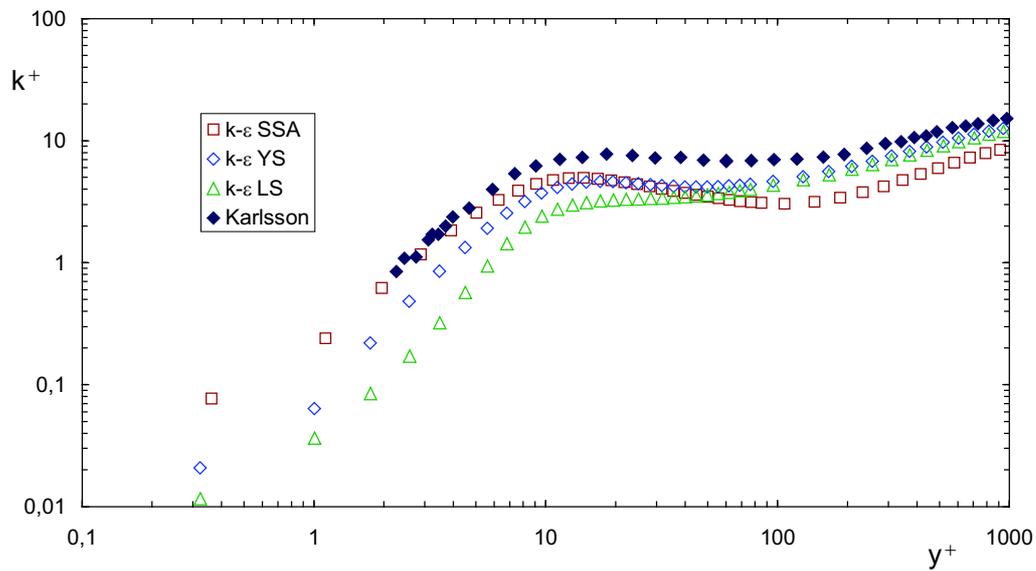


Figura 5.7: Energía cinética turbulenta en coordenadas de pared para $x = 70b$ para un chorro de pared plano paralelo con $Re = 10,000$.

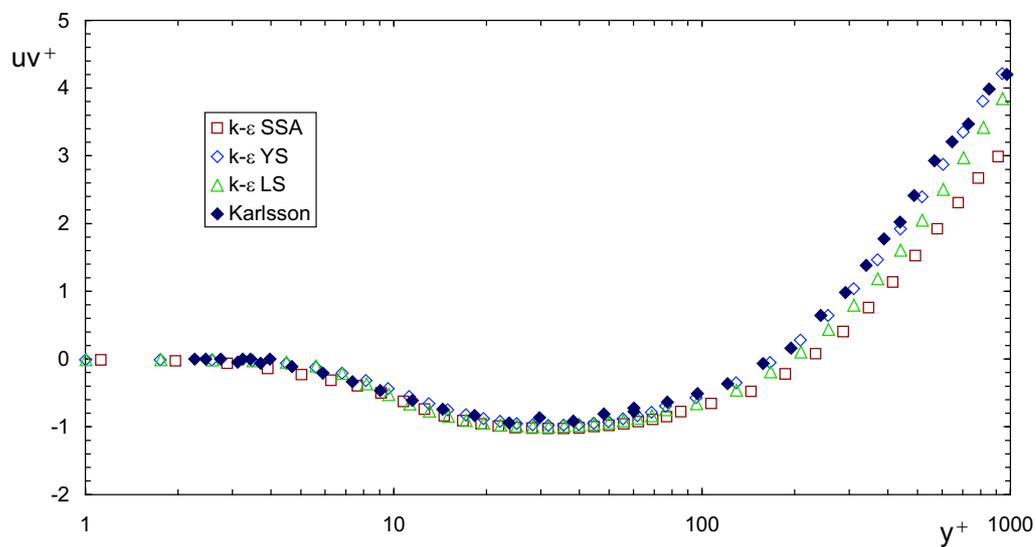


Figura 5.8: Esfuerzo cortante turbulento en coordenadas de pared para $x = 70b$ para un chorro de pared plano paralelo con $Re = 10,000$.

5.1.2. Influencia del número de Reynolds en el chorro de pared plano paralelo

Del análisis de los resultados anteriores se puede establecer que el modelo SSA [96] es el que predice un comportamiento del chorro de pared plano paralelo más próximo al experimental para la mayoría de las variables analizadas. Por tanto se va a emplear este modelo de turbulencia para realizar un estudio paramétrico sobre la influencia del número de Reynolds del chorro en la salida en la evolución de éste. Con la velocidad de salida de $u_0 = 15$ m/s se obtiene un $Re=10.000$, con $u_0 = 30$ m/s un $Re=20.000$ y con $u_0 = 45$ m/s se consigue $Re=30.000$.

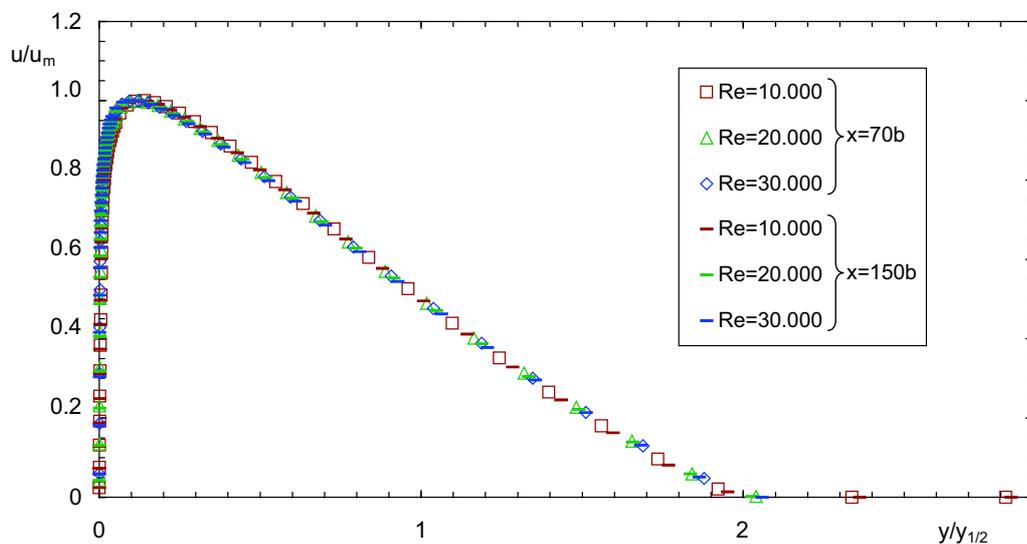


Figura 5.9: Perfiles de velocidad de un chorro de pared plano paralelo en las posiciones $x=70b$ y $x=150b$ para diferentes Re .

Representando los perfiles de velocidad en las posiciones $x = 70b$ y $x = 150b$ adimensionalizados con u_m e $y_{1/2}$ para los distintos números de Reynolds se aprecia la existencia de semejanza (figura 5.9). Analizando la zona próxima a la pared de estos perfiles (figura 5.10) se observa la presencia de la zona viscosa y la zona logarítmica. La extensión normal de esta última crece al aumentar el número de Reynolds, además de aumentar ligeramente su extensión para posiciones alejadas de la tobera. Estas tendencias han sido apreciadas por Abrahamsson y otros [2] en sus medidas con anemometría térmica y por las medidas con velocimetría láser de Karlsson y otros [37] respectivamente (figura 3.9). La velocidad máxima sigue estando subestimada para todos los Reynolds analizados.

En las figuras 5.11 y 5.12 se analiza la tendencia de las dos variables utilizadas para adimensionalizar los perfiles de velocidad u_m e $y_{1/2}$. Al aumentar el número de

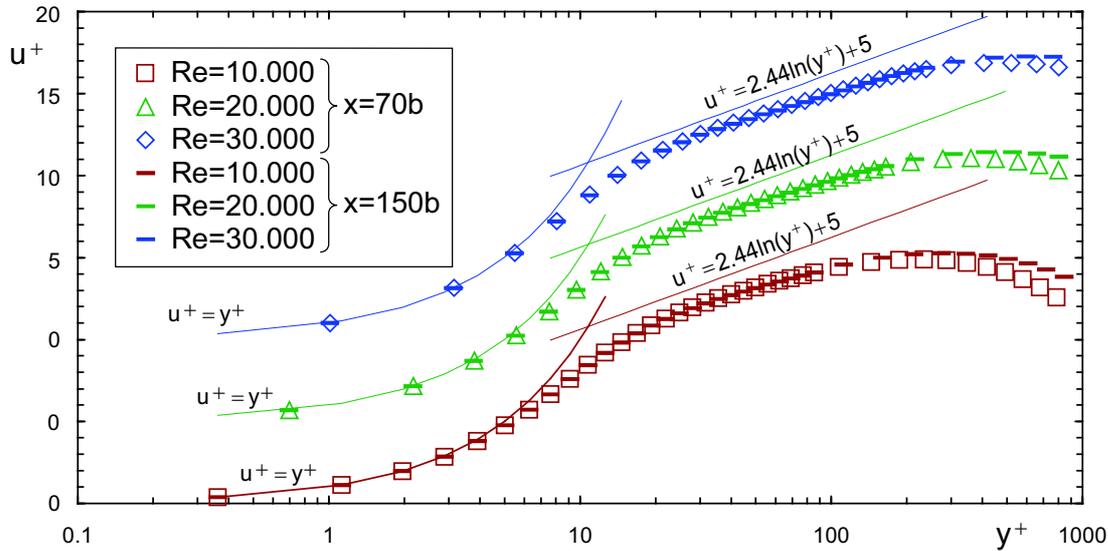


Figura 5.10: Perfiles de velocidad en coordenadas de pared en las posiciones $x=70b$ y $x=150b$ para diferentes números de Reynolds de un chorro de pared plano paralelo.

Reynolds disminuye el semiancho del chorro y aumenta la velocidad máxima. Con el mismo criterio que en 5.1.1.1 se aprecia que la región de comienzo del comportamiento lineal del semiancho y de la velocidad máxima no se ven alteradas por el número de Reynolds. La estimación dada en la zona desarrollada para la pendiente del semiancho y de $(u_0/u_m)^2$ para números de Reynolds a la salida de 10.000, 20.000 y 30.000 se muestra en la tabla 5.2. Estos resultados concuerdan con los encontrados experimentalmente (véanse las figuras 3.4 y 3.6).

Cuadro 5.2: Pendiente del semiancho y de la velocidad máxima en la región lineal para diferentes Re .

Re	$dy_{1/2}/dx$	$d(u_0/u_m)^2/dx$
10000	0.0720	0.06800
20000	0.0707	0.06459
30000	0.0700	0.06261

Con la adimensionalización de Narashima [12] se elimina la dependencia de la evolución del semiancho y de la velocidad máxima con el número de Reynolds. Esta adimensionalización se realiza en función del flujo de cantidad de movimiento cinemático por unidad de longitud en la salida del chorro J_0 y de la viscosidad

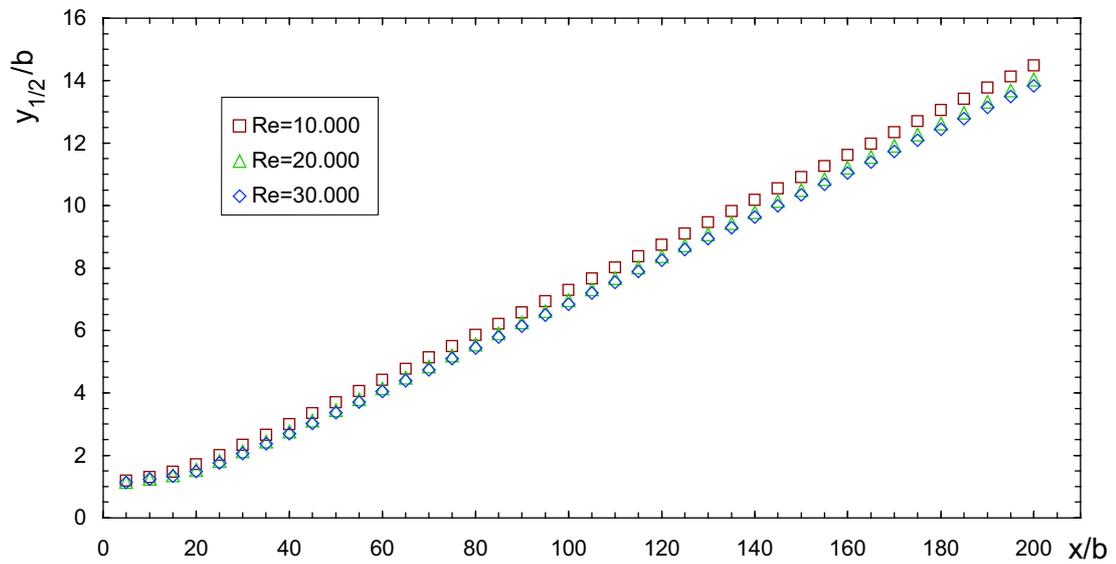


Figura 5.11: Evolución del semiancho de chorro de pared plano paralelo en $x = 70b$ para distintos números de Reynolds.

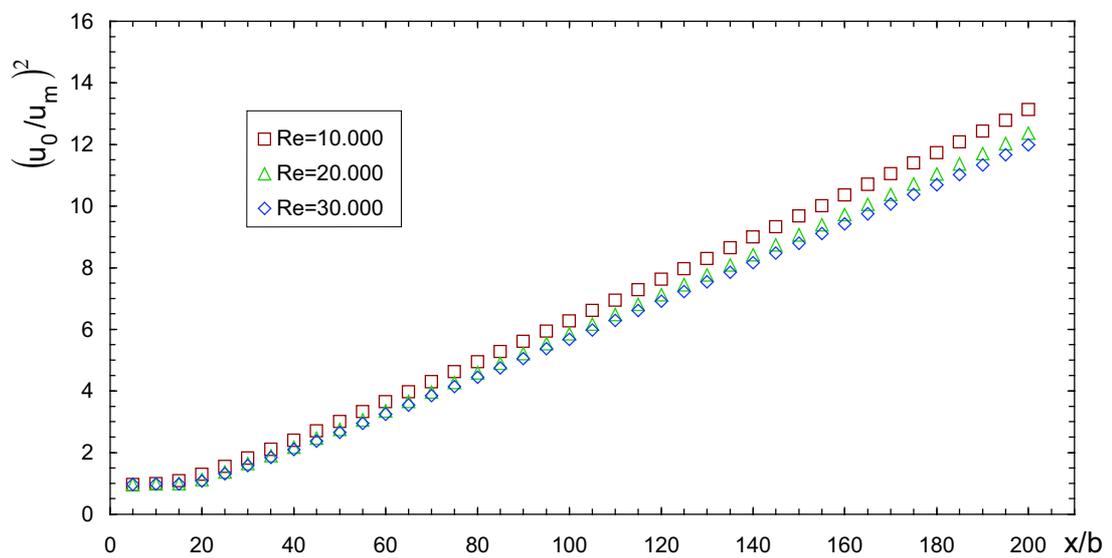


Figura 5.12: Evolución de la velocidad máxima de chorro de pared plano paralelo en $x = 70b$ para distintos números de Reynolds.

cinemática ν . Los resultados de las simulaciones correspondientes a la región desarrollada del chorro se pueden ajustar por una ley potencial si se emplea esta adimensionalización (figuras 5.13 y 5.14), obteniéndose gran coincidencia entre las curvas que ajustan los resultados de la simulación con los datos experimentales.

Las leyes potenciales son de la forma:

$$\left[y_{1/2} \frac{J}{\nu^2} \right] = A_y \left[(x - x_0) \frac{J}{\nu^2} \right]^{B_y} \quad (5.5)$$

$$\left[u_m \frac{\nu}{J} \right] = A_u \left[(x - x_0) \frac{J}{\nu^2} \right]^{B_u} \quad (5.6)$$

donde x_0 es el origen virtual que corresponde a la coordenada x en la que coincide la velocidad máxima u_m con la velocidad de salida u_0 .

Las constantes que se ajustan a los resultados numéricos son: $B_u = -0,4793$, $A_u = 2,2322$, $B_y = 0,9722$ y $A_y = 0,1659$ mientras que para las medidas de Abrahamsson se obtiene: $B_u = -0,4197$, $A_u = 0,5043$, $B_y = 0,9248$ y $A_y = 0,5637$. Los valores de A_u y A_y son muy similares mientras que en los de B_u y B_y existen más discrepancia. Esto se puede deber al hecho señalado por Narasimha y otros [12] de que los valores de las constantes dependen mucho del valor de los exponentes estimados.

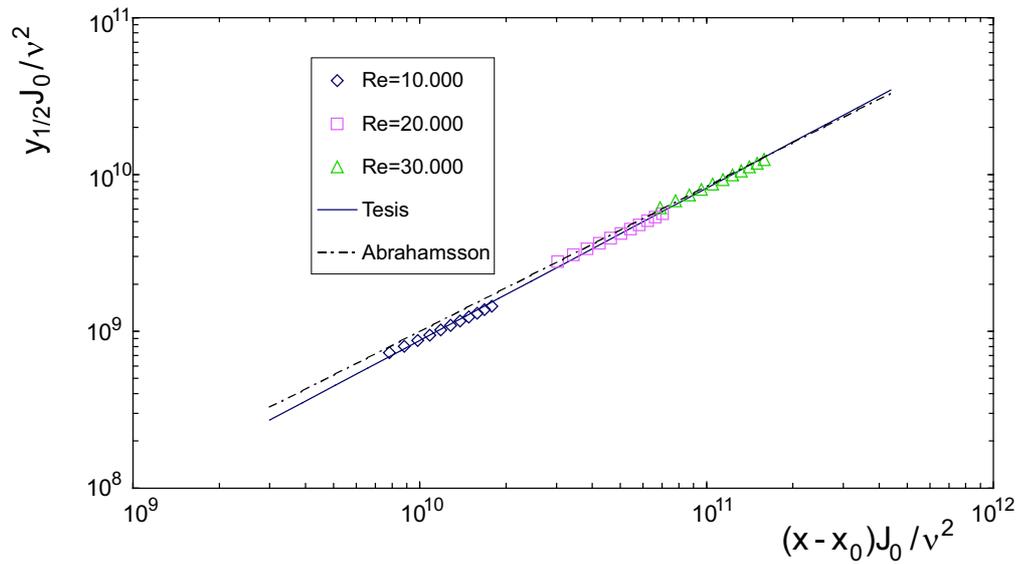


Figura 5.13: Evolución del semiancho adimensionalizado con el flujo de cantidad de movimiento en $x = 70b$ para un chorro de pared plano paralelo.

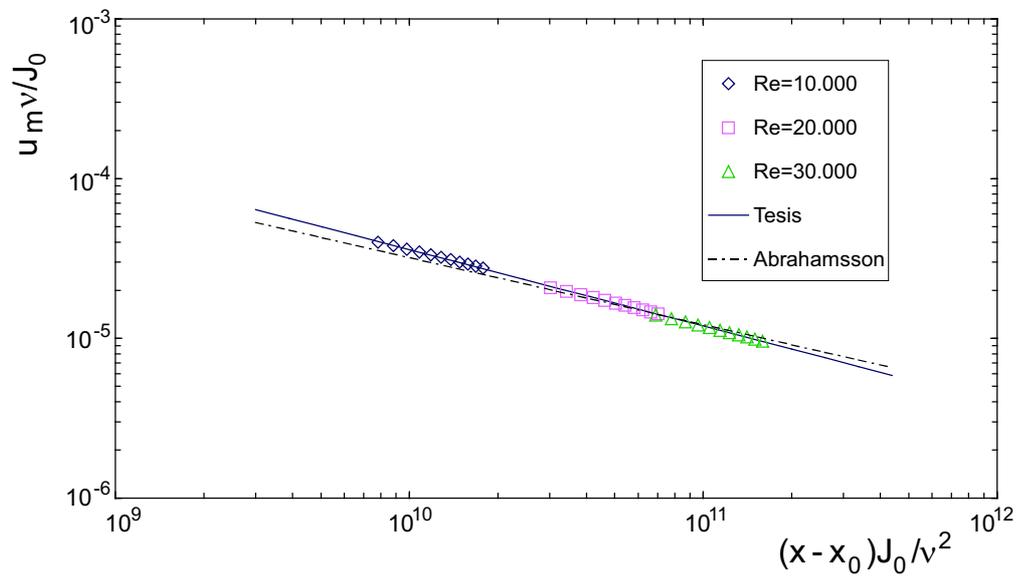


Figura 5.14: Evolución de la velocidad máxima adimensionalizada con el flujo de cantidad de movimiento en $x = 70b$ para un chorro de pared plano paralelo con $Re= 10,000$.

5.2. Chorro de pared plano inclinado

Se han realizado simulaciones de chorros de pared planos inclinados con ángulos de 10° , 20° y 30° y números de Reynolds en la salida de 10.000, 20.000 y 30.000 hasta una distancia $x = 210b$. Además para $\beta = 5^\circ$ y 15° y $Re=10.000$ se simula hasta $x = 15b$ con el objeto de determinar con mayor precisión el ángulo para el que se produce en desprendimiento. Las simulaciones se han realizado en dos etapas. En primer lugar se simula el flujo desde la salida del chorro hasta $x = 15b$. Esta zona inicial presenta un flujo de mayor complejidad que requiere una discretización espacial más fina y un estudio más detallado. En $x = 10b$ ya se ha superado la zona de recirculación, la complejidad del flujo es similar a la de un chorro de pared plano paralelo necesitando una discretización espacial menos fina. Los resultados en $x = 10b$ de estas simulaciones realizadas hasta $x = 15b$ se utilizan como condiciones de contorno de entrada en un dominio computacional con menor resolución espacial donde se completa la simulación hasta $x = 210b$.

En primer lugar se discuten los resultados de las simulaciones de la zona inicial ($0 \leq x \leq 10b$) analizando los aspectos particulares de esta región, luego se analiza la zona alejada de la salida ($10 \leq x \leq 210b$).

5.2.1. Región inicial

En la figura 5.15 se aprecia la influencia del ángulo de salida del chorro en el campo de velocidad para la región inicial. El perfil de velocidad pierde su forma plana y se inclina hacia la pared hasta adherirse. Es lo que se conoce como *efecto Coanda*. Cuando el chorro empieza a salir por la tobera se comporta como un chorro libre, entrando el fluido por ambos lados del chorro. El fluido de la región confinada entre el chorro y la pared se acelera junto a la pared produciéndose una depresión que provoca la curvatura del chorro hasta adherirse a la pared, Squire [64].

Se define el semiancho positivo $y_{+1/2}$ del chorro para una posición longitudinal x dada como la coordenada y donde $u = u_m/2$ y $\partial u/\partial y < 0$ y se puede definir el semiancho negativo $y_{-1/2}$ como la coordenada y donde $u = u_m/2$ y $\partial u/\partial y > 0$. En la figura 5.15 se señala la posición de ambos semianchos en los diferentes perfiles de velocidad representados. Para ángulos pequeños ($\beta = 10^\circ$ y 20°) la evolución de $y_{+1/2}$ es prácticamente lineal incluso en esta región inicial, con los ángulos mayores este parámetro $y_{+1/2}$ describe una curva, más acusada para $\beta = 30^\circ$.

Cerca de la tobera los perfiles de velocidad son casi planos para $\beta = 0^\circ$, la posición de velocidad máxima y_m está mucho más cerca de la pared que en el resto de los ángulos. Al aumentar el ángulo β , la posición del máximo describe una curva más pronunciada para rodear la zona de recirculación.

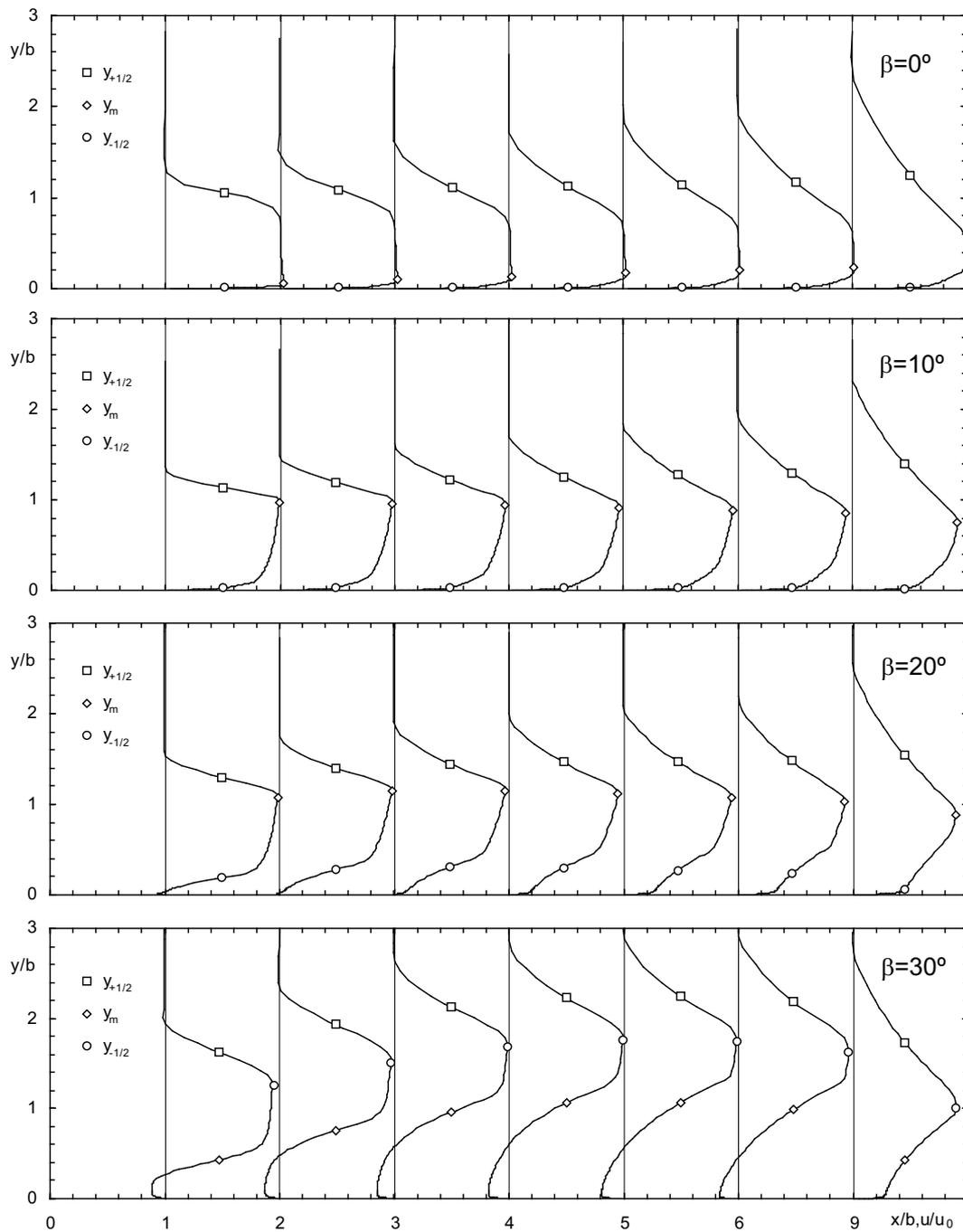


Figura 5.15: Perfiles de velocidad, posición de los semianchos $y_{+1/2}$ e $y_{-1/2}$ y de la velocidad máxima y_m en la región de inicial de un chorro de pared plano con $\beta = 0^\circ$, 10° , 20° y 30° para $Re=20.000$.

Los esfuerzos cortantes, obtenidos aplicando la hipótesis de Boussinesq, para $Re=10.000$ y diferentes ángulos de inclinación se comparan en la figura 5.16. En cada perfil se aprecia la existencia de dos máximos: uno negativo cerca de la pared característico de la transferencia de cantidad de movimiento entre la capa de cortadura interna y la de la zona de recirculación de flujo y otro positivo en la zona exterior correspondiente a la capa de cortadura entre el borde del chorro y el entorno en reposo. Ambas capas de cortadura crecen aguas abajo hasta llegar a solaparse (véanse también las figuras C.3 y C.4).

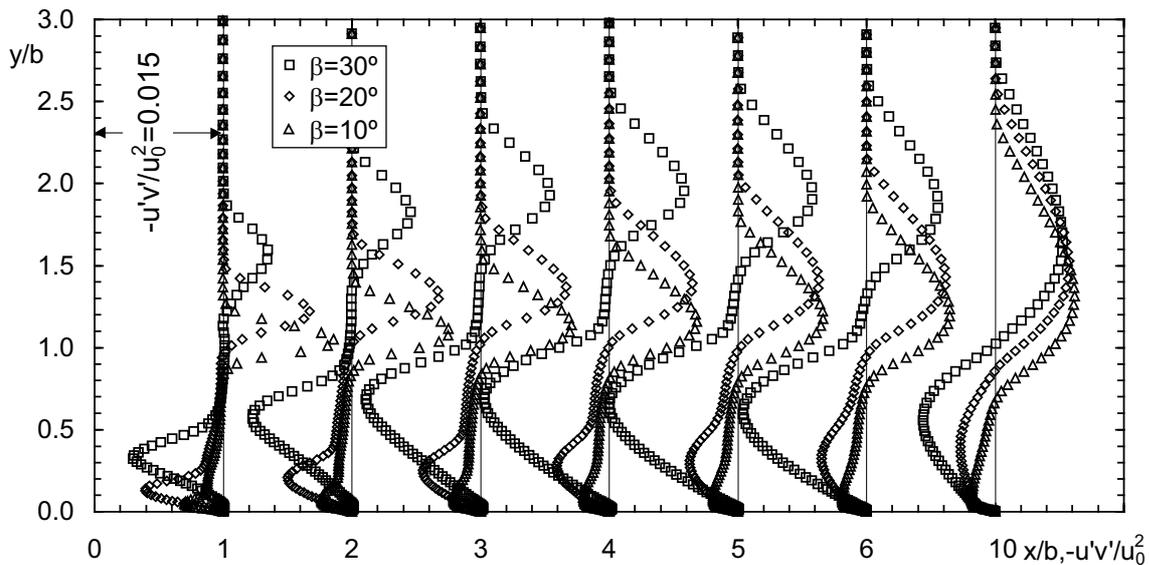


Figura 5.16: Esfuerzos cortantes en la región inicial para $Re=10.000$.

Los resultados de la simulación del chorro de pared inclinado para ángulos de salida $\beta < 15^\circ$ con el modelo de turbulencia SSA no han mostrado indicios de recirculación. En la figura 5.17 se comparan los resultados de simulación numérica con las medidas experimentales de Lai y Lu [53] y Newman [48] con $Re=10.000$. La simulación predice un crecimiento de la posición del punto de adherencia con el ángulo más acentuado que las medidas experimentales.

El caudal entrante (figura 5.18) crece al alejarse de la tobera más rápidamente para el chorro paralelo que para el chorro inclinado. Este crecimiento del caudal se hace más pequeño al aumentar el ángulo de salida β .

La figura 5.19 compara los perfiles de velocidad en $x = 10b$ para $Re=10.000$ y diferentes β calculados numéricamente con los experimentales. En ambos casos se aprecia una mayor apertura del chorro al aumentar β , más acusada para los numéricos. Cerca de la pared es donde las diferencias son más significativas. Para los Reynolds más altos el comportamiento es similar (figuras C.5 y C.6).

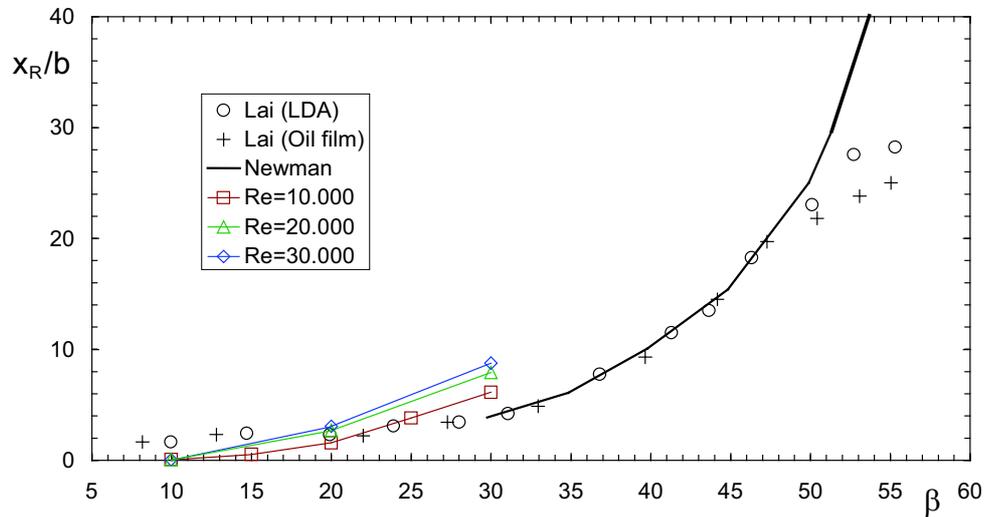


Figura 5.17: Posición del punto de adherencia para un chorro de pared plano inclinado.

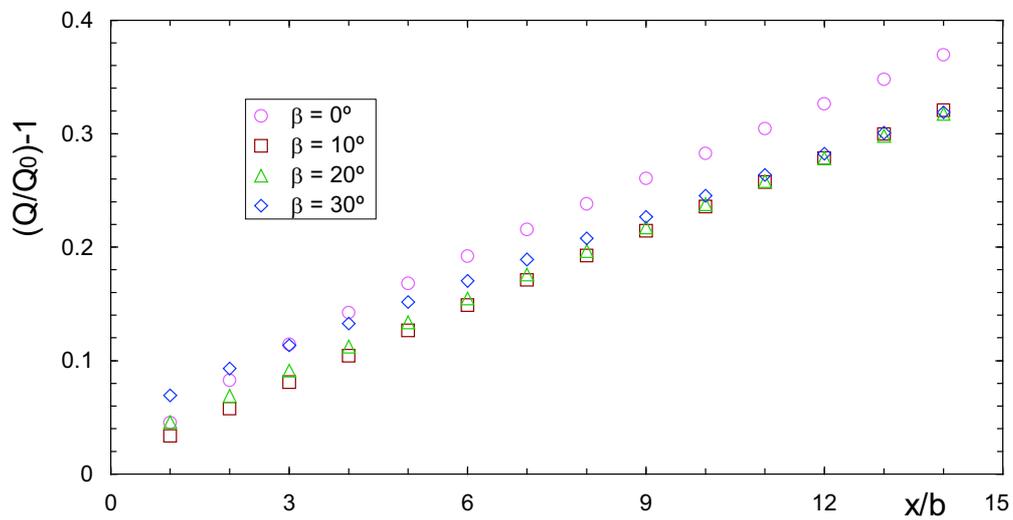


Figura 5.18: Evolución del caudal arrastrado en la zona inicial para $Re=10.000$.

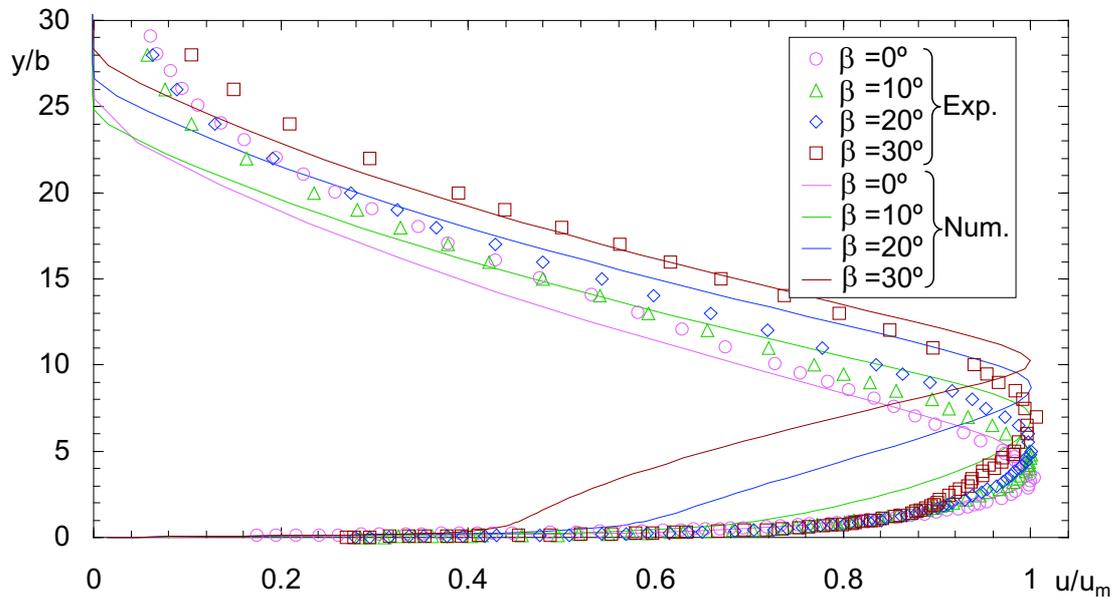


Figura 5.19: Perfiles de velocidad para diferentes β en $x = 10b$ para $Re=10.000$ numéricos y experimentales.

5.2.2. Influencia del número de Reynolds en la región inicial

En el estudio de Lai y Lu [53] se afirma que la posición del punto de adherencia es independiente del valor del número de Reynolds a la salida dentro del rango $6,670 < Re < 13,340$, sin embargo en la figura 6 de su trabajo se aprecia un crecimiento de x_R con el número de Reynolds para $\beta > 30^\circ$ altos. Esta misma tendencia se observa en la figura 5.17 para $\beta = 20^\circ$ y 30° con los resultados de la simulación numérica.

La zona de recirculación (figura 5.20) crece en altura y longitud al aumentar el número de Reynolds, lo que condiciona todo el campo fluido en la región inicial, especialmente para $\beta = 30^\circ$. Al aumentar el número de Reynolds el chorro necesita más distancia para curvarse hacia la pared y el punto de adherencia se aleja de la ranura de salida (figura 5.17). Del mismo modo, superado el punto de adherencia, cuanto más lejos de la tobera se adhiere el chorro a la pared, más distancia necesita para empezar a ensancharse por la parte exterior (véanse también las figuras C.7 y C.8).

Los perfiles de velocidad en $x = 12b$ no son semejantes para distintos números de Reynolds (figura 5.21). La capa límite cerca de la pared ha penetrado más en la estructura inicial del chorro para el número de Reynolds más pequeño, consecuencia de haberse adherido a la pared más cerca de la tobera de salida. A partir del máximo

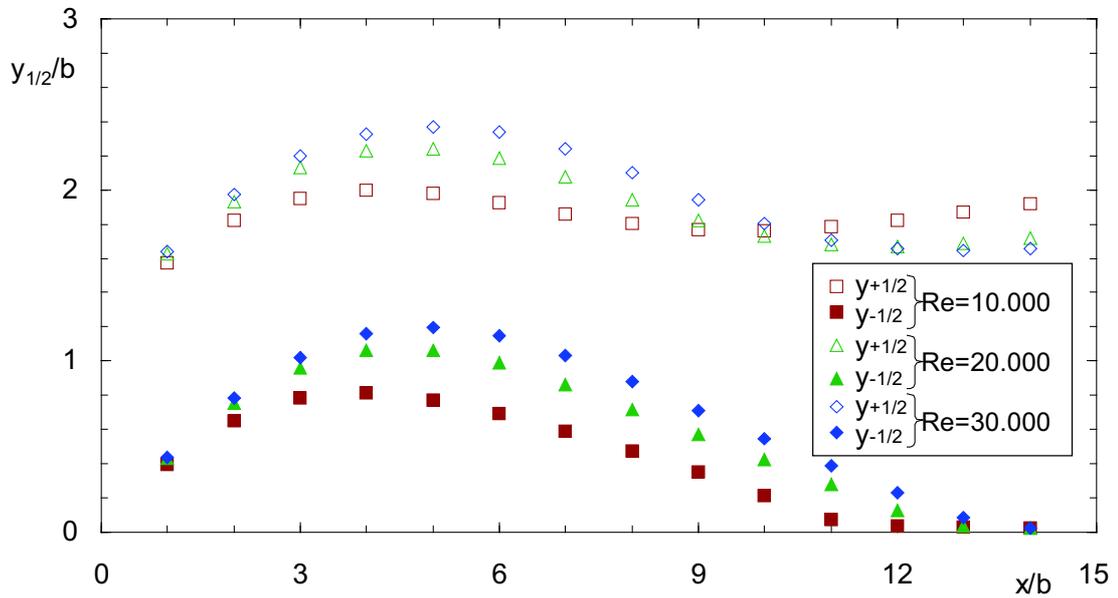


Figura 5.20: Evolución de los semianchos para $\beta = 30^\circ$ en función del Reynolds para la zona inicial.

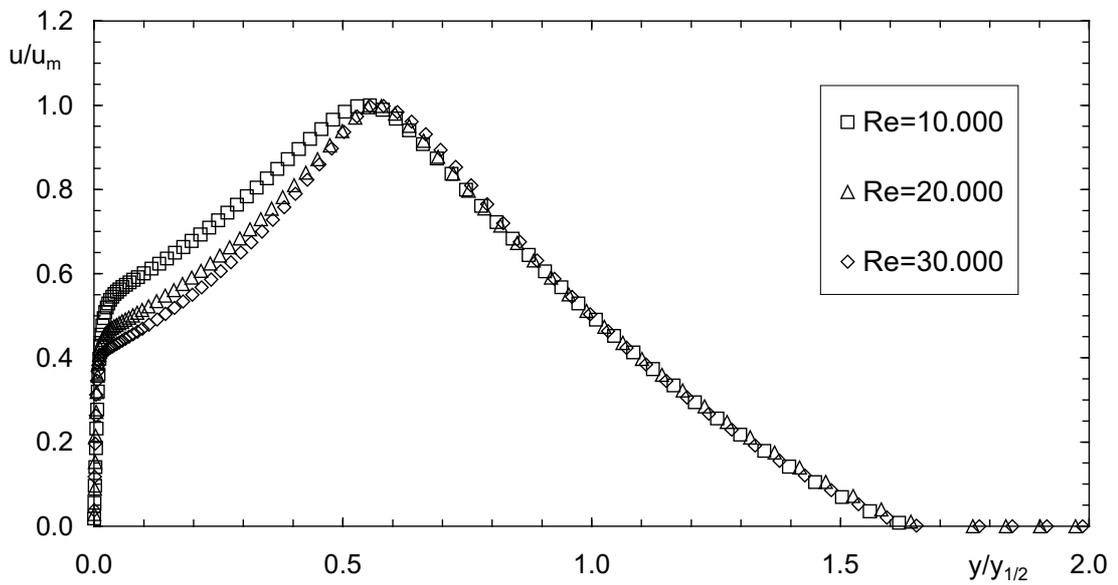


Figura 5.21: Perfiles de velocidad en $x = 12b$ para diferentes Reynolds con $\beta = 30^\circ$.

los perfiles se superponen. En posiciones más alejadas de la tobera las capas de cortadura interior y exterior condicionan la forma del chorro de tal manera que se pierde la influencia de la zona de recirculación en la región inicial (véanse también las figuras C.9 y C.10).

Los esfuerzos cortantes para diferentes Reynolds y $\beta = 30^\circ$ se comparan en la figura 5.22. En cada perfil se aprecia la existencia de los dos picos antes mencionados. Para números de Reynolds pequeños y cerca de la tobera los esfuerzos cortantes adimensionalizados con el cuadrado de la velocidad de salida del chorro presentan máximos más acusados, al contrario de lo ocurre en posiciones alejadas para el máximo cerca de la pared (véanse también las figuras C.11 y C.12).

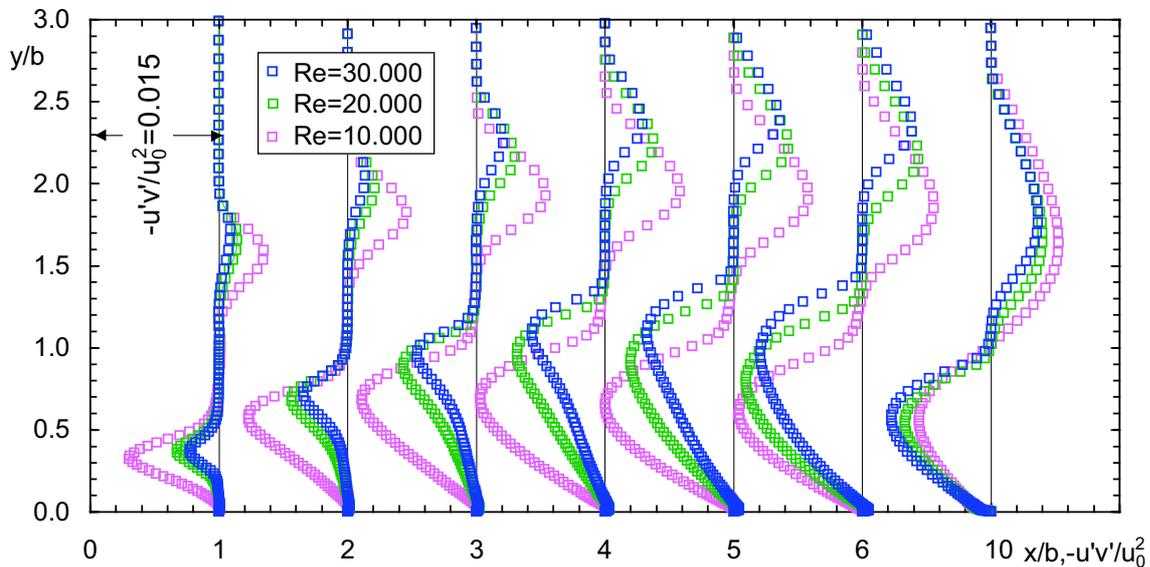


Figura 5.22: Esfuerzos cortantes en la región inicial para $\beta = 30^\circ$.

5.2.3. Región desarrollada

Las simulaciones efectuadas predicen perfiles de velocidad del chorro de pared inclinado ($\beta = 30^\circ$) semejantes para posiciones $x \geq 70b$ si se adimensionalizan con el semiancho $y_{1/2}$ y la velocidad máxima u_m , (figura 5.23) o si se representan en coordenadas de pared (figura 5.24).

En chorros de pared planos paralelos se aprecia tanto experimental (figura 3.9) como numéricamente (figura 5.10) un aumento de la extensión de la zona logarítmica con el número de Reynolds. El modelo numérico predice un comportamiento análogo para los chorros de pared planos inclinados (figura 5.25).

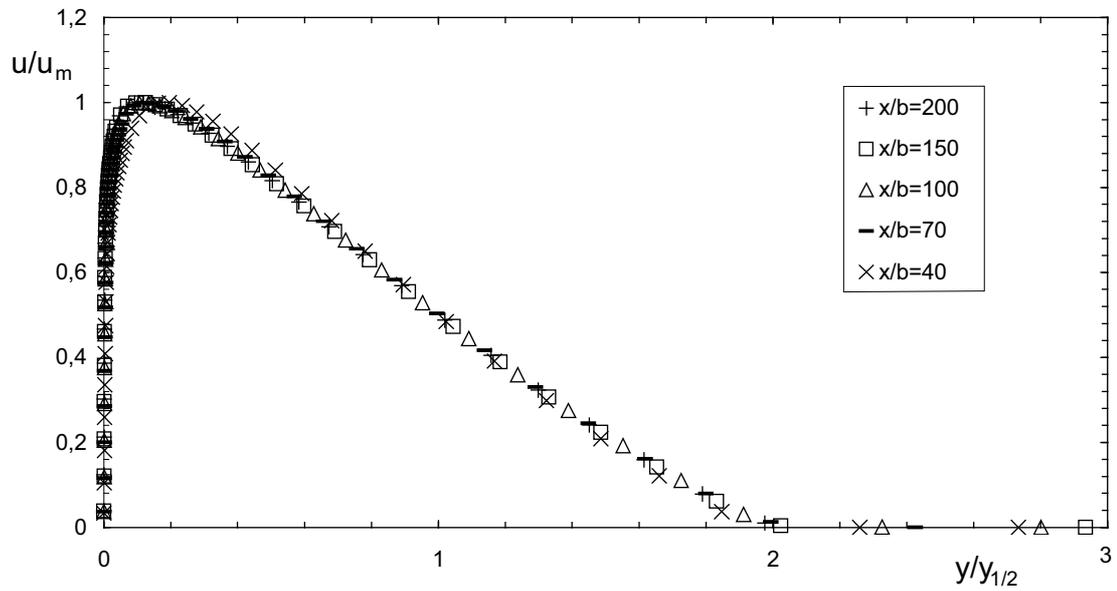


Figura 5.23: Perfiles de velocidad en distintas posiciones longitudinales para $\beta = 30^\circ$ con $Re=20.000$.

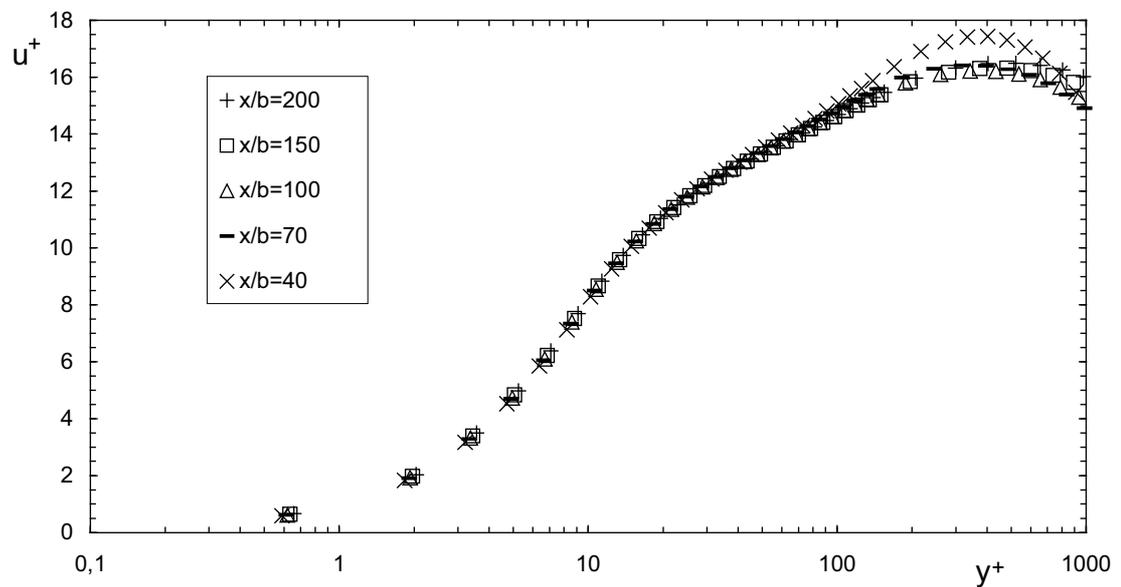


Figura 5.24: Perfiles de velocidad en coordenadas de pared en en distintas posiciones longitudinales para $\beta = 30^\circ$ con $Re=20.000$.

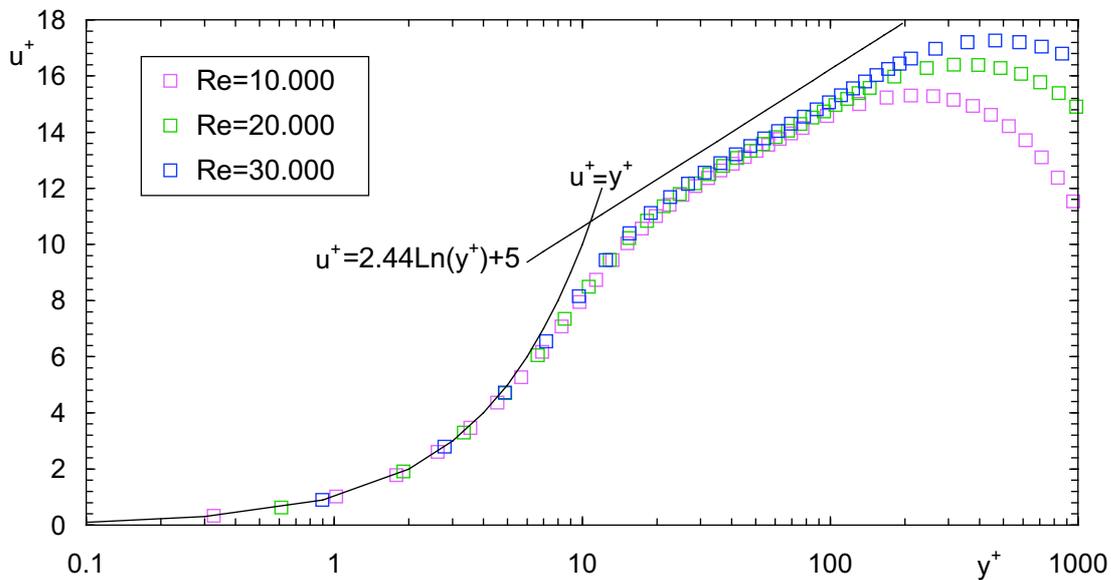


Figura 5.25: Perfiles de velocidad en coordenadas de pared en $x = 70b$ Para $\beta = 30^\circ$ y diferentes Reynolds.

El modelo numérico (figura 5.26) predice una variación lineal de $(u_0/u_m)^2$ frente a x/b en la zona desarrollada así como la tendencia a aumentar su pendiente con el número de Reynolds (sección 3.2.2), excepto para $\beta = 30^\circ$. Las discrepancias surgen en el valor de esa pendiente y sobre todo en el desplazamiento del origen virtual x_0 (véanse también las figuras C.15 y C.16).

Para el semiancho los resultados numéricos predicen un crecimiento lineal con x/b con la misma pendiente encontrada experimentalmente (figura 5.27). Numéricamente no se aprecia variación alguna de este parámetro con β .

La posición de la velocidad máxima y_m evoluciona de forma diferente para los distintos ángulos β en las posiciones iniciales. En cambio aguas abajo $x > 70b$ las simulaciones predicen un comportamiento independiente de β (figura 5.28).

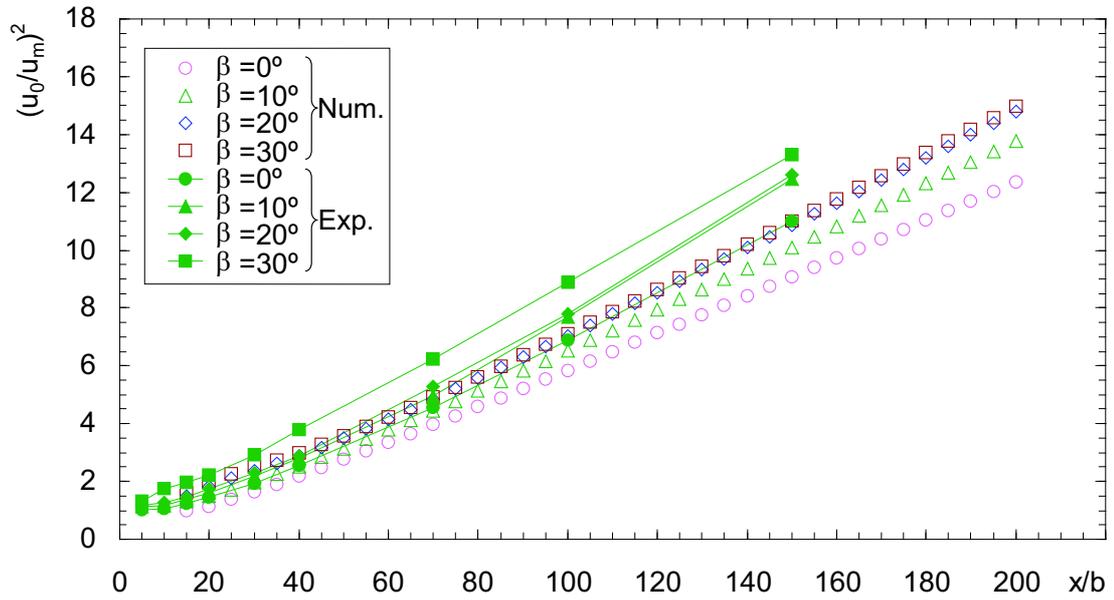


Figura 5.26: Evolución experimental y numérica de la velocidad máxima con la distancia longitudinal para diferentes β y $Re=20.000$.

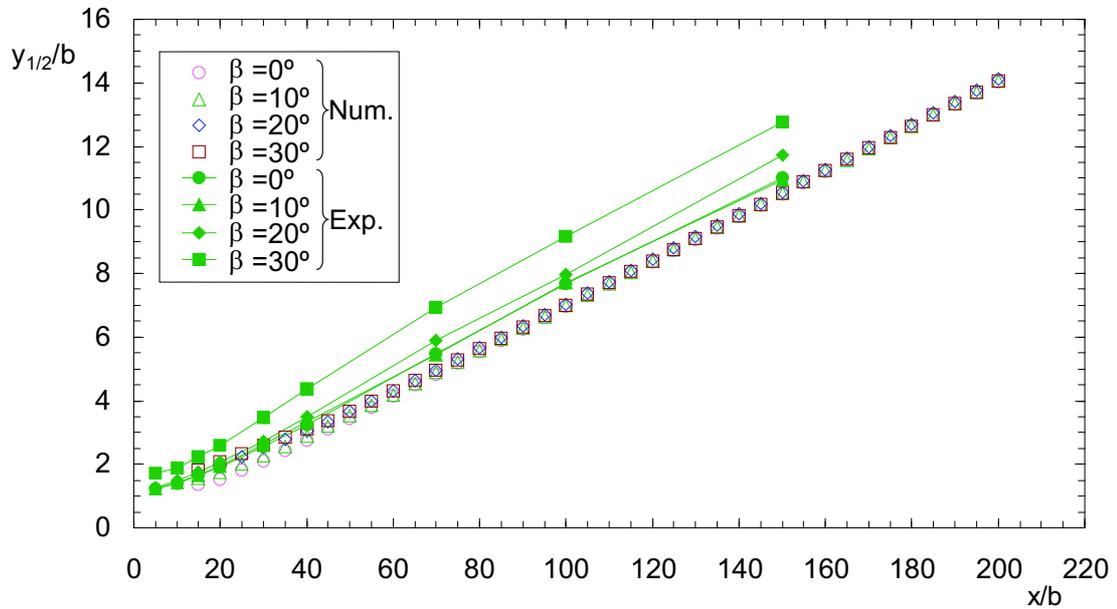


Figura 5.27: Evolución experimental y numérica del semiancho con la distancia longitudinal para diferentes β y $Re=20.000$.

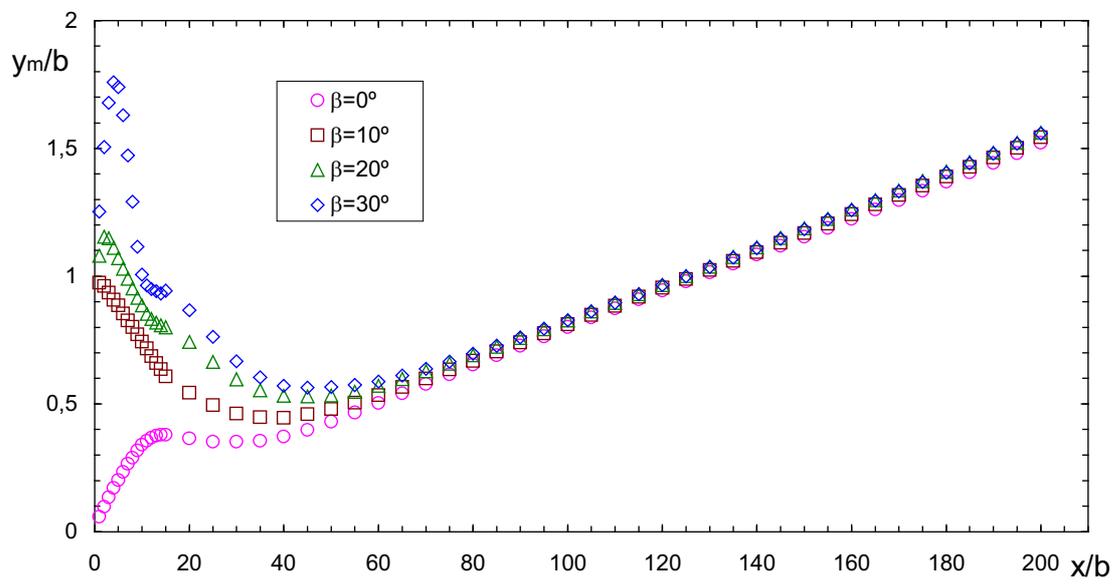


Figura 5.28: Evolución de la posición de la velocidad máxima para distintos β con $Re=20.000$.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

En este último capítulo se realiza una exposición de las conclusiones más importantes del trabajo realizado. A continuación se proponen una serie de trabajos que se podrían acometer en un futuro próximo con el fin de avanzar en la caracterización experimental y la simulación numérica de los chorros de pared planos.

6.1. Conclusiones

Se ha diseñado y construido una **instalación experimental** para el estudio de chorros de pared planos paralelos e inclinados hasta números de Reynolds de 30.000. La bidimensionalidad del chorro generado está garantizada hasta $x/b=150$ y el nivel de turbulencia en la salida permanece inferior al 0.5%. Para la caracterización de los chorros de pared se ha utilizado la anemometría térmica. El desplazamiento y posicionamiento de la sonda en el flujo se realiza con un desplazador 3D.

Se han realizado medidas del campo de velocidad para un **chorro de pared plano paralelo** con números de Reynolds de 10.000, 20.000 y 30.000 desde $x=10b$ hasta $x=150b$. Los resultados obtenidos, que se han contrastado con datos de otros autores, permiten concluir:

La existencia en el chorro de una zona intermedia de características propias, consecuencia de la interacción entre la capa interior con características de capa límite y la región exterior semejante a un chorro libre plano o una capa de cortadura libre.

Existe semejanza suficientemente aguas abajo de la ranura de salida para los perfiles de velocidad cuando se adimensionalizan con la velocidad máxima local y el semiancho. En la zona exterior del chorro la anemometría térmica proporciona valores de la velocidad superiores a los de la anemometría láser, posiblemente debido

a que la primera no contabiliza los flujos reversos, que en la región exterior del chorro tienen mayor intensidad.

El inverso del cuadrado de la velocidad máxima varía linealmente con la distancia longitudinal, disminuyendo la pendiente al aumentar el número de Reynolds.

El semiancho presenta una evolución lineal, con una ligera disminución de la pendiente al aumentar el número de Reynolds.

Las dependencias con el número de Reynolds que presentan la velocidad máxima y el semiancho desaparecen al adimensionalizar con la cantidad de movimiento cinemática por unidad de longitud a la salida del chorro.

La obtención del esfuerzo tangencial en la pared directamente del gradiente de velocidad en la subcapa límite laminar medido con anemometría térmica resulta poco precisa.

Se aprecia la existencia de una zona logarímicamente en el perfil de velocidad que aumenta su extensión aguas abajo y con el número de Reynolds, lo que concuerda con resultados recientes de otros autores. Sin embargo, hasta 1994 se pensaba que esta zona desaparecía suficientemente aguas abajo; posiblemente debido a la falta de bidimensionalidad de las primeras instalaciones.

Para la intensidad turbulenta en la dirección de la corriente se ha comprobado la existencia de dos máximos, uno en la región interior próxima a la pared y otro en la exterior. En las fluctuaciones de la velocidad en la dirección normal se aprecia un único máximo en la región exterior.

Para el esfuerzo cortante se observa que las medidas realizadas con anemometría térmica presentan buena concordancia entre sí pero difieren de las realizadas con anemometría láser. Se aprecia un mínimo en la región interior y un máximo en la exterior asociados con los de las fluctuaciones turbulentas en la dirección longitudinal y transversal. Además la localización del cambio de signo no coincide con el punto de máxima velocidad media.

Se han realizado medidas del campo de velocidad para **chorros de pared planos inclinados** con ángulos de 10° , 20° y 30° con números de Reynolds de 10.000, 20.000 y 30.000 desde $x=5b$ hasta $x=150b$.

Para todos los ángulos estudiados el chorro sufre una deflexión hacia la pared hasta adherirse a la misma. Con ángulos de inclinación superiores a 10° aparece una zona de recirculación en las inmediaciones de la salida del chorro. La extensión de esta zona aumenta con el ángulo y con el número de Reynolds.

En la evolución longitudinal de los chorros inclinados se pueden distinguir dos zonas: una inicial de desarrollo próxima a la salida en la que las características del chorro dependen fuertemente del ángulo de inclinación y otra más aguas abajo en la

que los perfiles de velocidad son independientes del número de Reynolds y del ángulo de inclinación cuando se adimensionalizan con la velocidad máxima y el semiancho.

Se aprecia un comportamiento lineal del semiancho con la distancia aguas abajo, no encontrándose evidencias de dependencia con el número de Reynolds pero sí con el ángulo, aumentando el semiancho con éste.

La evolución longitudinal de la velocidad máxima con el número de Reynolds es análoga a la de chorros planos paralelos para todos los ángulos. El inverso del cuadrado de la velocidad máxima aumenta de pendiente con el ángulo de inclinación.

El caudal arrastrado aumenta con la distancia longitudinal y con el número de Reynolds. Su variación con el ángulo de inclinación es más compleja. De 0° a 10° el caudal arrastrado disminuye y para ángulos mayores aumenta progresivamente.

Se ha utilizado el código de propósito general FIRE para **simular el flujo** de un **chorro de pared plano**. Además del modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ estándar que dispone el código se han implementado tres modelos de turbulencia tipo $k-\varepsilon$ con correcciones cerca de la pared. Para los cuatro modelos se ha realizado un estudio de independencia de los resultados respecto de la discretización espacial.

Se han realizado simulaciones del chorro de pared plano paralelo para $Re=10.000$ con el modelo $k-\varepsilon$ estándar y tres modelos para Reynolds bajos: el YS de Yang y Shih [93], el LS de Launder y Sharma [79] y el modelo SSA de Sarkar y So [97]. Los resultados obtenidos se han contrastado con medidas experimentales propias y de otros autores. Los tres modelos de turbulencia con correcciones cerca de la pared predicen el chorro de pared paralelo con más precisión que el modelo $k-\varepsilon$ estándar, especialmente en lo relativo a la tasa de crecimiento del chorro.

El modelo de turbulencia que produce resultados más próximos a las medidas experimentales es el modelo de Sarkar y So [97] desarrollado en 1995 y contrastado frente a datos DNS en 1997 por Sarkar y So [98]. Las predicciones de este modelo de turbulencia son muy ajustadas en lo relativo al campo de velocidades. Sin embargo predice valores de energía cinética turbulenta inferiores a los experimentales.

Se ha comprobado la capacidad del modelo de SSA para reproducir el comportamiento del chorro de pared plano paralelo frente a distintos números de Reynolds (10.000, 20.000 y 30.000), mostrando excelente concordancia con los datos experimentales.

Se ha desarrollado un modelo numérico con el que se han simulado **chorros de pared planos inclinados** con ángulos de 10° , 20° y 30° y números de Reynolds de 10.000, 20.000 y 30.000 con el modelo de turbulencia SSA.

En la zona inicial el modelo numérico predice una zona de recirculación para ángulos de inclinación superiores a 10° y reproduce el comportamiento con el ángulo y el número de Reynolds hallado experimentalmente.

Para la zona desarrollada el modelo numérico predice una variación lineal del inverso del cuadrado de la velocidad máxima así como la tendencia a aumentar su pendiente con el número de Reynolds, excepto para 30° . Las discrepancias con los datos experimentales surgen en el valor de esa pendiente y sobre todo en el desplazamiento del origen virtual.

Para el semiancho del chorro paralelo los resultados numéricos predicen un crecimiento lineal con la misma pendiente encontrada experimentalmente. Sin embargo para los chorros inclinados los resultados numéricos no presentan apenas variación de este parámetro con el ángulo de inclinación del chorro, a diferencia de los experimentales. Como posibles causas se apuntan la escasa capacidad de los modelos basados en la hipótesis de Boussinesq para predecir flujos afectados de fuerte curvatura y que el estudio realizado para analizar la independencia de los resultados respecto de la discretización espacial debiera de ser más amplio.

6.2. Trabajos futuros

Diversos autores mantienen que los modelos de tensiones Reynolds tienen una mayor capacidad predictiva que los de dos ecuaciones. Se propone como posible trabajo futuro simular el chorro de pared plano mediante este tipo de modelos de cierre de segundo orden utilizando para contrastar las medidas experimentales disponibles.

También sería conveniente profundizar en el estudio de la independencia de la simulación numérica respecto de la discretización espacial para los chorros inclinados. Con ello se descartaría una de las posibles causas de las discrepancias encontradas entre los resultados experimentales y numéricos en los chorros de pared inclinados.

Se podría intentar aprovechar el carácter parabólico del chorro de pared plano paralelo y de los inclinados en la zona desarrollada para disminuir considerablemente el tiempo de cálculo.

Respecto al estudio experimental se podría utilizar una sonda doble para caracterizar la región inicial de los chorros inclinados, aunque con anemometría térmica convencional seguirían sin poderse determinar con exactitud los flujos reversos.

La obtención del esfuerzo cortante en la pared a partir del perfil de velocidad obtenido con anemometría térmica está afectada de errores. Sería conveniente la utilización de otra técnica experimental que proporcionase resultados más fiables.

En ninguno de los trabajos consultados se realizan medidas hasta números de Reynolds de 30.000. La disponibilidad de estos datos junto con la medida del esfuerzo cortante permitirían verificar las hipótesis del reciente trabajo de George y otros [44], donde proponen adimensionalizar los esfuerzos cortantes con el cuadrado

de la velocidad de fricción en lugar de con el cuadrado de la velocidad máxima. Así mismo, se podrían comprobar otras de las conclusiones de este trabajo teórico tales como si la velocidad máxima es en efecto proporcional a una potencia del semiancho o si se aprecia alguna desviación de la linealidad para el crecimiento del semiancho.

Bibliografía

- [1] Launder B.E. and Rodi W. The turbulent wall jet. *Prog. Aerospace Sci.*, 19:81–128, 1981.
- [2] Abrahamsson H., Johansson B., and Lofdahl L. A turbulent plane two-dimensional wall-jet in a quiescent surrounding. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 13(5):533–556, 1994.
- [3] Gerodimos G. and So R.M.C. Near-wall modeling of turbulent wall jets. *Journal of Fluids Engineering*, 119:304–313, June 1997.
- [4] Launder B.E. and Rodi W. The turbulent wall jet measurements and modeling. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15:429–59, 1983.
- [5] P.V. Nielsen. Ventilation in commercial and residential buildings. Lecture series 07, von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1998.
- [6] Cloutman L.D. and Green R.M. On the wall jet from the ring crevice of internal combustion engine. Technical Report UCRL-ID-124311, Lawrence Livermore National Lab., CA, United States, Oct. 1966.
- [7] Förthmann E. Turbulent jet expansion. English translation N.A.C.A. TM-789, 1936. (Original paper in German, 1934. Ing. Archiv, 5).
- [8] Glauert. The wall jet. *J. Fluid Mech*, 1:625–643, 1956.
- [9] Sigalla A. Measurements of skin friction in a plane turbulent wall jet. *Royal Aero. Soc*, 62:873–877, 1958.
- [10] Bradshaw P. and Gee M.T. Turbulents wall jets with and without an external stream. *Aero. Res. Council, R&M*, 3252, 1960.
- [11] Tailland A. and Mathieu J. Jet pariétal. *Journal de Mécanique*, 6:103–131, 1967.

-
- [12] Narasimha R., Narayan K., and Parthasarathy S.P. The turbulent wall jet. *Prog. Aerospace Sci.*, pages 81–128, 1973.
- [13] Alcaraz E., Charnay G, and Mathieu J. Measurements in a wall-jet over a convex surface. *Phys. of Fluids*, 20:203–210, 1977.
- [14] George A. R. An investigation of a wall jet in a free stream. Report 479, Princeton University, 1960.
- [15] Schwarz W.H. and Cosart W.P. The two dimensional wall jet. *J. Fluid Mech.*, 10:481, 1961.
- [16] Myers G.E., Schauer J.J., and Eustis R.H. Plane turbulent wall jet flow development and friction factor. *J. Basic Eng., Trans ASME*, 85(47), 1963.
- [17] Patel R.P. *Self-preserving, two dimensional turbulent jets and wall jets in a moving stream*. M. eng. thesis, Dept. of Mech. Eng., Mc Gill University, montreal, 1962.
- [18] Gartshore I. and Hawaleshka O. The design of a two-dimensional blowing slot and its application to a turbulent wall jet in a still air. Technical Note 64-5, Dpt. of Mechanical Engineering, McGill University, Montreal, Canada, 1964.
- [19] McGahan W.A. *The incompressible turbulent wall jet in an adverse pressure gradient*. PhD thesis, Mass. Inst. of Tecnology, Cambridge, Massachusetts, 1966.
- [20] Giles J.A., Hays A.P., and Sawyer R.A. Turbulent wall jets on logarithmic spiral surfaces. *Aeronaut. Quart.*, 17:201, 1966.
- [21] Guitton D.E. *Some contributions to the study of equilibrium and non-equilibrium wall jets over curved surfaces*. Mech. eng, McGill University, Montreal, Canada, 1970.
- [22] Verhoff A. Steady and pulsating two-dimensional turbulent wall jets in an uniform stream. Rept 723, Princeton University, 1970.
- [23] Wilson D.J. *An experimental investigation of the mean velocity, temperature and turbulence fields in plane and curved two-dimensional wall jets: Coanda effect*. Mech. eng., University of Minnesota, 1970.
- [24] Goldstein R.J. Wilson D.J. Turbulent wall jets with cylindrical streamwise surface curvature. *J. Fluids Eng.*, 98:550, 1970.
- [25] Neale D.H. *Experimental study of two-dimensional turbulent wall jet development with and without longitudinal free-stream gradient*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 1971.

-
- [26] Kobayashi R. and Fujisawa N. Turbulence characteristics of plane wall jets. Technical Report 352, Institute of High Speed Mechanics, Tohoku University, Japan, 1982.
- [27] Kobayashi R. and Fujisawa N. Curvature effects on two-dimensional turbulent wall jets. *Ingenieur-Archiv*, 53:409–417, 1983.
- [28] Fujisawa N. and Kobayashi R. Turbulence characteristics of wall-jets along strong convex surfaces. *Int. J. Mech. Sci.*, 29:311–320, 1987.
- [29] Noguchi Y. and Sawyer R.A. Two-dimensional turbulent jet on a combined wall having step changes in wall curvature. *ASME Winter Annual Meeting, New Orleans*, December 1985.
- [30] Rodman L.C., Jarrah M.A., Wood N.J., and Roberts L. Turbulence measurements in a plane wall jet. *AIAA Paper*, (86-0209), 1986.
- [31] Rodman L.C., Wood N.J., and Roberts L. Experimental investigation of straight and curved annular wall-jets. *AIAA J.*, 27:1059–1067, 1989.
- [32] Schneider M.E. *Laser Doppler measurements of turbulence in a two-dimensional wall-jet on a flat plate in stagnant surroundings*. PhD thesis, Univ. of Minnesota, 1987.
- [33] Schneider M.E. and Golstein R.J. Laser doppler measurement of turbulence parameters in a two-dimensional plane wall jet. *Phys. Fluids*, 6(9):3116–3129, September 1994.
- [34] Wygnanski I., Katz Y., and Horev E. On the applicability of various scaling laws to the turbulent wall jet. *J. Fluid Mech.*, 234:669–690, 1992.
- [35] Katz Y., Horev E., and Wygnanski I. The forced turbulent wall jet. *J. Fluid Mech.*, 242:577–609, 1992.
- [36] Zhou M.D. and Heine C. and Wygnanski I. The effects of excitation on the coherent and random motion in a plane wall jet. *J. Fluid Mech.*, 310:1–37, 1996.
- [37] Karlsson R.I., Eriksson J., and Persson J. Lda measurements in a plane wall jet in a large enclosure. *6th International symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics. Lisbon, Portugal*, 1992.
- [38] Karlsson R.I. *Near-wall turbulent flows*, chapter Near-wall measurements of turbulence structure in boundary layers and wall jets, pages 423–432. R.M.C. So and C.G. Speziale and B.E. Launder (Editors). Elsevier Science Publishers B.V., 1993.

-
- [39] Eriksson J.G., Karlsson R.I., and Persson J. An experimental study of a two-dimensional plane turbulent wall jet. *Experiments in fluids*, 25:50–60, 1998.
- [40] Nizou P.Y., Roiland M., and Tida T. Velocity profile and skin friction formulation for a plane turbulent wall-jet. *3rd International symposium on applications of laser anemometry to fluid dynamics. Lisbon*, 1986.
- [41] Osaka H., Fujii H. Sugihara M., and Mochizuki S. Coherent structure of a plane turbulent wall-jet. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu*, 53:824–831, 1987.
- [42] Fujisawa N. and Shirai H. Measurement of turbulence energy balance in a two-dimensional wall-jet along a plane surface. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu*, 53(491):1947–1952, 1987.
- [43] Venås B., Abrahamsson H., Krogstad P.-Å., and Löfdahl L. Pulsed hot-wire measurements in two- and three-dimensional wall jets. *Experiments in Fluids*, 27(3):210–218, 1999.
- [44] George W.K., Abrahamsson H., Eriksson J., Karlsson R.I., Löfdahl L., and Wosnik M. A similarity theory for the turbulent plane wall jet without external stream. *J. Fluid Mech.*, 425:637–411, December 2000.
- [45] Vasić S. Comparative validation on turbulence models in prediction of the plane wall jet. *Seventh annual conference of the computational fluid dynamics, Society of Canada, Halifax*, 1997.
- [46] Tangemann R. and Gretler W. Numerical simulation of a two-dimensional turbulent wall jet in an external stream. *Forschung im Ingenieurwesen*, 66:31–39, 2000.
- [47] Bourque C. and Newman B.G. Reattachment of a two-dimensional incompressible jet to an adjacent flat plate. *Aeronaut. Quarterly*, 11:201–232, 1960.
- [48] Newman B.C. *In boundary layer and Flow control*, chapter The deflection of plane jet by adjacent boundaries – Coanda effect, pages 323–265. Lachmann G.V., Pergamon Press New York, 1961.
- [49] Bourque C. *Advances in Fluidics*, chapter Reattachment of a two-dimensional jet to an adjacent flat plate, pages 192–204. F.T. Brown (ed.), ASME, New York, 1967.
- [50] Perry C.C. *Advances in Fluidics*, chapter Two-dimensional jet attachment, pages 205–217. F.T. Brown (ed.), ASME, New York, 1967.
- [51] Marsters G.F. The attachment of a ventilated p'lane jet to an inclined plane wall. *aeronaut. Quarterly*, (60-74), 1978.

- [52] Lai J.C.S. and Lu D. Effect of wall inclination on the mean flow and turbulence characteristics in a two-dimensional wall jet. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 17(4):377–385, Agosto 1996.
- [53] Lai J.C.S. and Lu D. An inclined wall jet: Mean flow characteristics and effects of acoustic excitation. *Experiments in fluids*, 29(1):45–55, 2000.
- [54] Zamora C. Desarrollo de una instalación para la caracterización de chorros de pared. Proyecto fin de carrera, E.T.S. Ingenieros Industriales de la Universidad de Valladolid, 2000.
- [55] Hussein J.H., Capp S.P., and George W.K. Velocity measurements in a high-reynolds-number, momentum-conserving, axisymmetric, turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, 258:31–75, 1994.
- [56] Hanneman A. Flying hot-wire measurements in a two dimensional wall jet. Technical report, Department of Thermo and Fluid Dynamics at Chalmers University of Technology, June 1997.
- [57] Fingerson L.M. and Freymuth P. Thermal anemometers. Technical report, TSI Incorporated.
- [58] Dantec Measurement Technology. Streamline installation & user's guide. Manual, 2000.
- [59] Rajaratnam N. *Turbulent jets*, volume 5 of *Developments in water science*. Elsevier, Amsterdam, 1 edition, 1976.
- [60] Tennekes H. and Lumley J.L. *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, 1972.
- [61] Hinze J.O. *Turbulence*. McGraw-Hill, 2 edition, 1975.
- [62] Kotsovinos N.E. and Angelidis P.B. The momentum flux in turbulent submerged jets. *J. Fluid Mech.*, 229:453–470, 1991.
- [63] Wills J.A.B. The correction of hot-wire readings for proximity to a solid boundary. *J. Fluid Mech.*, 1962.
- [64] Squire H.B. Jet flow and its effect on aircraft. *Aircraft Eng.*, 22:66, 1950.
- [65] Rubel A. and Melnik R.E. Jet, wake and wall jet solutions using a $k-\varepsilon$ turbulence model. *AIAA Paper*, (AIAA-84-1523), 1984.
- [66] Adeniji-Fashola A.A. and Chen C.P. Inlet turbulence intensity level and cross-stream distribution effects on the heat transfer in plane wall jets. *International communication on heat and mass transfer*, 16:833–842, 1989.

- [67] Launder B.E., Morse A., Rodi W., and Spalding D.B. Prediction of free shear flows - a comparison of the performance of six turbulence models. *NASA SP-321*, pages 361–426, 1972.
- [68] Kim J., Moin P., and Moser R.D. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *Journal of Fluids Mechanics*, 177:133–166, 1897.
- [69] Crespo A. *Mecánica de fluidos*, chapter XI. E.T.S.I.I. de la Universidad Politécnica de Madrid. Sección de publicaciones, Madrid, 1989.
- [70] Piomelli U. Large-eddy and direct simulation of turbulent flows. Lecture Series 04, von Karman Institute for Fluid Dynamics, March 2000.
- [71] Ferziger J.H. The physics and simulation of turbulence - state of the art 1998. Lecture Series 05, von Karman Institute for Fluid Dynamics, March 1998.
- [72] Pettersson B.A. *Near-wall turbulence modelling of rotating and curved shear flows*. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology, 1998.
- [73] Wilcox D.C. *Turbulence Modeling in CFD*. DCW Industries, Inc, California, 1993.
- [74] Speziale C.G. On linear kl and $k-\varepsilon$ models of turbulence. *Journal Fluid Mechanics*, 178:459–475, 1987.
- [75] Craft T.J., Launder B.E., and Suga K. Extending the applicability of eddy viscosity model through the use of deformation invariant and non-linear elements. *Proc. 5th Int. IAHR Symp. On Refined Flow Modeling and Turbulence Measurements, Paris*, 1993.
- [76] Pope S.B. A more general effective viscosity hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics*, 72:331–340, 1975.
- [77] Gatski T.B. and Speziale C.G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 254:59–78, 1993.
- [78] Jones W.P. and Launder B.E. The prediction of laminarization with two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Trasfer*, 15:301–314, 1972.
- [79] Launder B.E. and Sharma B.I. Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Lett. Heat Mass Transfer*, 1:131–138, 1974.
- [80] Ferziger J.H. and Peric M. *Computational methods for fluid dynamics*, chapter 9, pages 253–282. Springer, Germany, 1997.

- [81] Pérez-Segarra C.D., Cadafalch J., and Oliva A. Análisis de flujos turbulentos en base a modelos tipo rans. *Actas del XIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, pages 608–614, 1999.
- [82] Patel V.C., Rodi W., and Scheuerer G. Turbulence models for near-wall and low reynolds number flows: A review. *AIAA Journal*, 23(9):1309–1319, 1985.
- [83] Jones W.P. and Launder B.E. The prediction of laminarization with two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:301–314, 1972.
- [84] Chien K.Y. Predictions of channel and boundary layer flows with a low-reynolds number two equations model of turbulence. *AIAA Journal*, 20:33–38, 1982.
- [85] Nagano Y. and Hishida M. Improved form of the $k-\varepsilon$ model for wall turbulent shear flows. *J. Fluids Eng.*, 109:156–160, 1987.
- [86] Myong H.K. and Kasagi N. A new approach to the improvement of the $k-\varepsilon$ turbulence model for wall bounded shear flows. *JSME Int. J.*, 33:63–72, 1990.
- [87] Deng G.B. and Piquet J. $k-\varepsilon$ turbulence model for low reynolds number wall-bounded shear flow. Technical Report Paper 26-2, Technical University of Munich, Proc. 8th Turbulent Shear Flows, Munich, Germany, 1991.
- [88] Karlsson R.I., Tinoco H., and Svenson U. An improved form of the near-wall $k-\varepsilon$ model based on new experimental data. Technical Report Paper 26-3, Technical University of Munich, Proc. 8th Turbulent Shear Flows, Munich, Germany, 1991.
- [89] Michelassi V., Rodi W., and Scheuerer G. Testing a low reynolds number $k-\varepsilon$ turbulence model based on direct simulation data. Technical Report Paper 26-5, Technical University of Munich, Proc. 8th Turbulent Shear Flows, Munich, Germany, 1991.
- [90] Nagano Y. and Tagawa M. An improved $k-\varepsilon$ model for boundary layer flows. *J. Fluids Eng.*, 112:33–39, 1990.
- [91] So R.M., Zhang H.S., and Speziale C.G. Near-wall modeling of the dissipation-rate equation. *AIAA Journal*, 29:2069–2076, 1991b.
- [92] Durbin P.A. Near-wall turbulence models without damping functions. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3:1–13, 1991.
- [93] Yang Z. and Shih T.H. New time scale based $k-\varepsilon$ model for near-wall turbulence. *AIAA Journal*, 31(1191-1198), 1993.

-
- [94] Zhang H.S., So R.M., Speziale C.G., and Lai Y.G. A near-wall two-equation model for compressible turbulent flows. *AIAA J.*, 31:196–199, 1993.
- [95] Abe K., Kondoh T., and Nagano Y. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows, flow field calculations. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37:139–151, 1994.
- [96] So R.M., Aksoy H., Yuang S.P., and Sommer T.P. Development of a near-wall reynolds-stress closure based on the ssg model for the pressure strain. Contractor Rept. 4618, NASA, 1994.
- [97] Sarkar A. *An improved near-wall k_ϵ model for the calculation of wall-bounded turbulent flows*. Master's thesis, Arizona State University, Temple, Arizona, 1995.
- [98] Sarkar A. and So R.M.C. A critical evaluation of near-wall two-equation models against direct numerical simulation data. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 18:197–208, 1997.
- [99] Speziale C. G., Sarkar S., and Gatski T.B. Modeling the pressure-strain correlation of turbulence, an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.*, 227:245–272, 1991.

Apéndice A

Subrutinas

A.1. Subrutina *usrσου.f*

```
C=====
C          SUBROUTINE USRSUU
C=====
C
C          USER_FUNCTION - MODIFY MOMENTUM SOURCE
C
C          USRSUU IS A SPECIAL PURPOSE ROUTINE FOR MODIFYING THE
C          MOMENTUM SOURCES IN THE INTERNAL COMPUTATIONAL DOMAIN.
C
C          NOMENCLATURE:
C
C          SU1(NC) ..... U1-MOMENTUM SOURCE
C          SU2(NC) ..... U2-MOMENTUM SOURCE
C          SU3(NC) ..... U3-MOMENTUM SOURCE
C          U1(NC),U2(NC),U3(NC) .... CARTESIAN VELOCITY COMPONENTS
C                                     STORED AT CELL CENTER NC
C          ISRSUU: DATASET IDENTIFICATION SPECIFIED IN .TIM-FILE
C
C=====
C-----PARAMETERS
C          INCLUDE 'CPARA1.INC'
C-----DIMENSIONS
C          INCLUDE 'CDIM.INC'
C-----COMMON BLOCKS
C          INCLUDE 'CCOMM.INC'
C%MP include CMPCOM
C-----
C
C          C8=1.E-8
```

```

C=====
      IF (ISRSUU.EQ.1) THEN
C-----
C      IMPOSICIÓN DE U=0 EN EL CONTORNO SUPERIOR
C-----
C-----DIRECCIÓN ARRIBA (3)
      IB=3
C-----LOCALIZACIÓN DE CELDAS DEL CONTORNO SUPERIOR TIPO PRESIÓN TOTAL
      IA=NCOUTA(IB)
      IE=NCOUTA(IB+1)-1
      IS=(IB-1)*NINTCF
C-----SE RECORREN LAS CELDAS TIPO PRESIÓN TOTAL
      DO 1 N=IA,IE
      NC=LBOUND(N)
C-----CELDA INTERNA (NC) Y CELDA DE CONTORNO (KC)
      SP1(NC)=SP1(NC)-10.E+8
      SU1(NC)=SU1(NC)
1      CONTINUE
C-----DIRECCIÓN ABAJO (1)
      IB=1
C-----LOCALIZACIÓN DE CELDAS DEL CONTORNO INFERIOR TIPO PARED FIJA
      IA=NCFIXW(IB)
      IE=NCFIXW(IB+1)-1
      IS=(IB-1)*NINTCF
C-----SE RECORREN LAS CELDAS TIPO PARED FIJA
      DO 2 N=IA,IE
C-----CELDA INTERNA (NC) Y CELDA DE CONTORNO (KC)
      NC=LBOUND(N)
      KC=LCC(NC+IS)
      KN=LCC(NC+NSFIO3)
      KS=LCC(NC+NSFIO1)
C-----SE HACEN TENDER LAS VELOCIDADES A CERO EN LA PARED
      UU1=U1(KN)*XC2(NC)/(XC2(KN)+C8)
      UU2=U2(KN)*XC2(NC)/(XC2(KN)+C8)
      SP1(NC)=-10.E+20
      APX1(NC)=1/10.E+20
      SU1(NC)=SU1(NC)+10.E+20*UU1
2      CONTINUE
      ENDIF
C-----
      RETURN
      END

```

A.2. Subrutina *usrste.f*

```

C=====
C      SUBROUTINE USRSTE
C=====
C
C      USER_FUNCTION - MODIFY T.K.E. SOURCE
C
C      USRSTE IS A SPECIAL PURPOSE ROUTINE FOR MODIFYING THE
C      T.K.E SOURCES IN THE INTERNAL COMPUTATIONAL DOMAIN.
C
C      ISRSTE: DATASET IDENTIFICATION SPECIFIED IN .TIM-FILE
C
C=====
C-----PARAMETERS
C      INCLUDE 'CPARA1.INC'
C-----DIMENSIONS
C      INCLUDE 'CDIM.INC'
C-----COMMON BLOCKS
C      INCLUDE 'CCOMM.INC'
C      REAL YY(1000),UU(1000)
C      REAL XX(8),YM1(8),UMAX1(8)
C%MP include CMPCOM
C-----
C-----
C-----DELIMITER
C-----
C-----
C      DEFINICIÓN DE CONSTANTES
C-----
C      XINI=0.0
C      C8=1.E-8
C-----
C      CONDICIÓN DE CONTORNO k=0 EN EL CONTORNO SUPERIOR
C-----
C      IF (ISRSTE.EQ.1) THEN
C-----DIRECCIÓN ARRIBA (3)
C      IB=3
C-----START- AND END-ADDRESS OF LBOUND ARRAY
C      IA=NCOUTA(IB)
C      IE=NCOUTA(IB+1)-1
C      IS=(IB-1)*NINTCF
C-----LOOP OVER ALL BOUNDARY CELLS TYPE VELOCITY
C      DO 1 N=IA,IE
C      NC=LBOUND(N)
C-----GET INTERNAL (NC) AND EXTERNAL (KC) CELL ADDRESS
C      SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+8
C      SU4(NC)=SU1(NC)

```

```

1      CONTINUE
      ENDIF
C      #####
C      ##                MODELO de TURBULENCIA SSA                ##
C      #####
      IF (ISRSTE.EQ.2) THEN
        PRTE=1
C-----DIRECCIÓN ARRIBA (3)
        IB=3
C-----START- AND END-ADDRESS OF LBOUND ARRAY
        IA=NCOUTA(IB)
        IE=NCOUTA(IB+1)-1
        IS=(IB-1)*NINTCF
C-----LOOP OVER ALL BOUNDARY CELLS TYPE VELOCITY
        DO 2 N=IA,IE
          NC=LBOUND(N)
C-----GET INTERNAL (NC) AND EXTERNAL (KC) CELL ADDRESS
          SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+8
          SU4(NC)=SU1(NC)
2      CONTINUE
C-----EN LA PRIMERA FILA DE CELDAS Y SOBRE LA PARED DIRECCIÓN ABAJO (1)
        IB=1
C-----START- AND END-ADDRESS OF LBOUND ARRAY
        IA=NCFIXW(IB)
        IE=NCFIXW(IB+1)-1
        IS=(IB-1)*NINTCF
C-----LOOP OVER ALL BOUNDARY CELLS TYPE PARED FIJA
        DO 222 N=IA,IE
          NC=LBOUND(N)
C-----GET INTERNAL (NC) AND EXTERNAL (KC) CELL ADDRESS
          KN=LCC(NC+NSFIO3)
          KS=LCC(NC+NSFIO1)
C          KNN=LCC(KN+NSFIO3)
          TE1=TE(KN)*XC2(NC)/(XC2(KN)+C8)
C          WRITE (*,*) NC,TE1
          SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+25
          SU4(NC)=SU4(NC)+10.E+25*TE1
222     CONTINUE
        ENDIF
C      #####
C      ##                MODELO de TURBULENCIA YS                ##
C      #####
      IF (ISRSTE.EQ.3) THEN
        DO 3 NC=NINTCI,NINTCF
          PRTE=1
          IF (NC.GT.(NINTCF-NBS)) THEN
            SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+8
            SU4(NC)=SU4(NC)
          ELSE
C-----EN LA PRIMERA FILA DE CELDAS Y SOBRE LA PARED

```

```

      IF ((XC1(NC).GT.XINI).AND.(NC.LE.NBS)) THEN
      KN=LCC(NC+NSFIO3)
      TE1=TE(KN)*XC2(NC)/(XC2(KN)+C8)
      SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+25
      SU4(NC)=SU4(NC)+10.E+25*TE1
    ENDIF
  ENDIF
3  CONTINUE
  ENDIF
C  #####
C  ##          MODELO de TURBULENCIA LS          ##
C  #####
  IF (ISRSTE.EQ.4) THEN
    DO 4 NC=NINTCI,NINTCF
      PRTE=1
      IF (NC.GT.(NINTCF-NBS)) THEN
        SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+8
        SU4(NC)=SU4(NC)
      ELSE
C-----EN LA PRIMERA FILA DE CELDAS Y SOBRE LA PARED
        IF ((XC1(NC).GT.XINI).AND.(NC.LE.NBS)) THEN
          KN=LCC(NC+NSFIO3)
          TE1=TE(KN)*XC2(NC)/XC2(KN)
          SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+25
          SU4(NC)=SU4(NC)+10.E+25*TE1
        ELSE
          KN=LCC(NC+NSFIO3)
          KS=LCC(NC+NSFIO1)
C-----
C  ATENCIÓN A ESTAS DERIVADAS EN MALLAS INCLINADAS
C-----
          DRAIZKDY=SQRT(TE(KN))-SQRT(TE(KS))
          DRAIZKDY= DRAIZKDY/(XC2(KN)-XC2(KS))
          V3=-2*VISCL(NC)*VOL(NC)*DRAIZKDY*DRAIZKDY
          SP4(NC)=SP4(NC)
          SU4(NC)=SU4(NC)+V3
        ENDIF
      ENDIF
4  CONTINUE
  ENDIF
C-----
  RETURN
  END

```

A.3. Subrutina *usrsted.f*

```

C=====
      SUBROUTINE USRSED
C=====
C
C   USER_FUNCTION - MODIFY DISSIPATION SOURCE
C
C   USRSED IS A SPECIAL PURPOSE ROUTINE FOR MODIFYING THE
C   DISSIPATION SOURCES IN THE INTERNAL COMPUTATIONAL DOMAIN.
C
C   ISRSED: DATASET IDENTIFICATION SPECIFIED IN .TIM-FILE
C
C=====
C----PARAMETERS
      INCLUDE 'CPARA1.INC'
C----DIMENSIONS
      INCLUDE 'CDIM.INC'
C----COMMON BLOCKS
      INCLUDE 'CCOMM.INC'
C%MP include CMPCOM
C-----
C----
C----DELIMITER
C----
C-----
C   DEFINICIÓN DE CONSTANTES
C-----
      XINI=0.0
      C10=1.E-10
      C8=1.E-8
C=====
C   LLAMADA A LA SUBRUTINA QUE PROPORCIONA LA PRODUCCIÓN DE k
C=====
      CALL CGET_PROD (NMCELL,PDUM00,PDUM01)
C=====
C-----
C-----
C   IMPOSICIÓN DE  $e=0$  EN EL CONTORNO SUPERIOR
C-----
C-----
      IF (ISRSED.EQ.1) THEN
C----DIRECCIÓN ARRIBA (3)
      IB=3
C----LOCALIZACIÓN CELDAS DEL CONTORNO SUPERIOR TIPO PRESIÓN TOTAL
      IA=NCOUTA(IB)
      IE=NCOUTA(IB+1)-1
      IS=(IB-1)*NINTCF

```

```

C-----SE RECORREN LA CELDAS DEL CONTORNO SUPERIOR TIPO PRESIÓN TOTAL
      DO 1 N=IA,IE
      NC=LBOUND(N)
C-----CELDA INTERIOR (NC) Y CELDA DE CONTORNO (KC)
      SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+8
      SU4(NC)=SU4(NC)
1      CONTINUE
      ENDIF
C      #####
C      ##                MODELO de TURBULENCIA SSA                ##
C      #####
      IF (ISRSED.EQ.2) THEN
C-----CONSTANTES DEL MODELO DE TURBULENCIA
      CTURB1=1.50
      CTURB2=1.830
      CTURB3=0
      CAPP=0.41
      PRED=1.
C-----SE RECORREN TODAS LAS CELDAS DEL DOMINIO
      DO 2 NC=NINTCI,NINTCF
C-----
C      CÁLCULO DE Pk ES LA PRODUCCIÓN DE k
C-----
      PK=PDUM00(NC)/(VOL(NC)*VOL(NC))
C-----LOCALIZACIÓN DE LAS CELDAS SUPERIOR KN E INFERIOR KS A LA ACTUAL NC
      KS=LCC(NC+NSFIO1)
      KN=LCC(NC+NSFIO3)
C-----
C      IMPOSICIÓN DE e=0 EN EL CONTORNO SUPERIOR
C-----
      IF (KN.GT.NINTCF) THEN
      SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+8
      SU4(NC)=SU4(NC)
      ELSE
C-----
C      EL CÁLCULO DE LA DERIVADA dk/dy QUE TIENE DISTINTA EXPRESIÓN EN
C      LA PRIMERA FILA DE CELDAS JUNTO A
C      LA PARED, EN ESAS CELDAS SU CELDA SUR ES EXTERIOR.
C-----
      IF (KS.LE.NINTCF) THEN
C-----
C      ATENCIÓN AL CÁLCULO DE LA d/dy EN UNA MALLA INCLINADA
C-----
      IF (XC1(KN).LT.XC1(NC)) THEN
      KNE=LCC(KN+NSFIO2)
131    PE=KNE
      IF ((XC1(PE).LT.XC1(NC)).AND.(KNE.LE.NINTCF)) THEN
      KNE=LCC(PE+NSFIO2)
      GOTO 131
      ENDIF

```

```

KSW=LCC(KS+NSFIO4)
242 PW=KSW
IF ((XC1(PW).GT.XC1(NC)).AND.(KSW.LE.NINTCF)) THEN
  KSW=LCC(PW+NSFIO4)
  GOTO 242
ENDIF
IF ((KNE.LE.NINTCF).AND.(KSW.LE.NINTCF)) THEN
  TN=TE(KN)+(TE(KNE)-TE(KN))*(XC1(NC)-XC1(KN))/(XC1(KNE)-XC1(KN))
  YN=XC2(KN)+(XC2(KNE)-XC2(KN))*(XC1(NC)-XC1(KN))/(XC1(KNE)-XC1(KN))
  TS=(TE(KS)-TE(KSW))*(XC1(NC)-XC1(KSW))/(XC1(KS)-XC1(KSW))
  TS=TE(KSW)+TS
  YS=(XC2(KS)-XC2(KSW))*(XC1(NC)-XC1(KSW))/(XC1(KS)-XC1(KSW))
  YS=YS+XC2(KSW)
ELSE
  TN=TE(KN)
  TS=TE(KS)
  YN=XC2(KN)
  YS=XC2(KS)
ENDIF
ELSE
  TN=TE(KN)
  TS=TE(KS)
  YN=XC2(KN)
  YS=XC2(KS)
ENDIF
DRAIZKDY=(SQRT(TN+C8)-SQRT(TS+C8))/(YN-YS)
ELSE
  DRAIZKDY=SQRT(TE(NC)+C8)/XC2(NC)
ENDIF
C-----
C  CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE CORRECCIÓN DE LA DISIPACIÓN Vji, Y
C  DE LOS PARÁMETROS INTERMEDIOS RET, EPS1, EPS2, Y ADICIÓN DE
C  LA FUNCIÓN DE CORRECCIÓN A LA ECUACIÓN DE LA DISIPACIÓN A
C  TRAVÉS DEL TÉRMINO FUENTE
C-----
  RET=TE(NC)*TE(NC)*DENS(NC)/(VISCL(NC)*ED(NC)+C10)
  EPS1=ED(NC)-2*VISCL(NC)*DRAIZKDY*DRAIZKDY/(DENS(NC)+C10)
  EPS2=ED(NC)-2*VISCL(NC)*TE(NC)/(XC2(NC)*XC2(NC)*DENS(NC)+C10)
  VJI=-0.57*ED(NC)*EPS1/(TE(NC)+C10)+0.5*EPS2*EPS2/(TE(NC)+C10)
  VAUX=-2.25*ED(NC)*(VIS(NC)-VISCL(NC))*PK/(TE(NC)+C10)
  VJI=VJI+VAUX/(DENS(NC)+C10)
  VJI=VJI*EXP(-RET*RET/1600)
  SP4(NC)=SP4(NC)+V2*DENS(NC)*VOL(NC)-V4
  SU4(NC)=SU4(NC)+VJI*DENS(NC)*VOL(NC)+V3+V5
ENDIF
2 CONTINUE
ENDIF
C #####
C ##          MODELO de TURBULENCIA YS          ##
C #####

```

```

      IF (ISRSSED.EQ.3) THEN
        CTURB1=1.440
        CTURB2=0
        CTURB3=0
        PRED=1.
      DO 3 NC=NINTCI,NINTCF
C-----
C  IMPOSICIÓN DE CONDICIÓN DE CONTORNO EN EL LÍMITE SUPERIOR
C-----
      IF (NC.GE.(NINTCF-NBS)) THEN
        SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+8
        SU4(NC)=SU4(NC)
      ELSE
C-----
C    CÁLCULO DE LA DERIVADA SEGUNDA DE U RESPECTO DE y DOS VECES
C-----
        KS=LCC(NC+NSFIO1)
        KN=LCC(NC+NSFIO3)
        DY1=XC2(KN)-XC2(NC)
        DY2=XC2(NC)-XC2(KS)
        DY=DY1*DY1+DY2*DY2
      IF ((XC1(NC).GT.XINI).AND.(NC.LE.NBS)) THEN
        DY2=XC2(NC)
        DY=DY1*DY1+DY2*DY2
        DDY=2*(U1(KN)-2*U1(NC)-((U1(KN)-U1(NC))*(DY1-DY2)/DY1))
        DDY=DDY/DY
      ELSE
        DDY=2*(U1(KN)+U1(KS)-2*U1(NC)-((U1(KN)-U1(NC))*(DY1-DY2)/DY1))
        DDY=DDY/DY
      ENDIF
C-----
C    CÁLCULO DE PK ES LA PRODUCCIÓN DE k
C-----
        PK=PDUM00(NC)/(VOL(NC)*VOL(NC))
C-----
C    CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE CORRECCIÓN DE LA DISIPACIÓN Vji, DEL
C    TÉRMINO QUE CORRESPONDE A LA CONSTANTE ANULADA AL PRINCIPIO
C    C2 Y DEL PARÁMETRO TT, Y SUMA DE LA FUNCIÓN DE CORRECCIÓN A
C    LA ECUACIÓN DE LA DISIPACIÓN A TRAVÉS DEL TÉRMINO FUENTE
C-----
        VJI=VISCL(NC)*(VIS(NC)-VISCL(NC))*DDY*DDY/(DENS(NC)+C10)
        TT=(TE(NC)/(ED(NC)+C10))+SQRT(VISCL(NC)/(ED(NC)*DENS(NC)+C10))
        V2=-1.92*DENS(NC)*VOL(NC)/(TT+C10)
        VJI=VJI*DENS(NC)*VOL(NC)
        SP4(NC)=SP4(NC)+V2
        SU4(NC)=SU4(NC)+VJI+V3
      ENDIF
    3  CONTINUE
      ENDIF
C  #####

```

```

C      ##                MODELO de TURBULENCIA LS                ##
C      #####
C      IF (ISRSED.EQ.4) THEN
C      CTURB1=1.440
C      CTURB2=0
C      CTURB3=0
C      DO 4 NC=NINTCI,NINTCF
C      PRED=1.3
C      PRED=1.
C-----
C      IMPOSICIÓN DE CONDICIÓN DE CONTORNO e=0 EN EL LÍMITE SUPERIOR
C-----
C      IF (NC.GE.(NINTCF-NBS)) THEN
C      SP4(NC)=SP4(NC)-10.E+8
C      SU4(NC)=SU4(NC)
C      ELSE
C-----
C      CÁLCULO DE PRODUCCIÓN DE k Y DE LA DERIVADA SEGUNDA DE U
C      RESPECTO DE Y DOS VECES
C-----
C      KS=LCC(NC+NSFI01)
C      KN=LCC(NC+NSFI03)
C      DY1=XC2(KN)-XC2(NC)
C      DY2=XC2(NC)-XC2(KS)
C      DY=DY1*DY1+DY2*DY2
C      IF ((XC1(NC).GT.XINI).AND.(NC.LE.NBS)) THEN
C      DY2=XC2(NC)
C      DY=DY1*DY1+DY2*DY2
C      DDY=2*(U1(KN)-2*U1(NC)-((U1(KN)-U1(NC))*(DY1-DY2)/DY1))
C      DDY=DDY/DY
C      ELSE
C      DDY=2*(U1(KN)+U1(KS)-2*U1(NC)-((U1(KN)-U1(NC))*(DY1-DY2)/DY1))
C      DDY=DDY/DY
C      ENDIF
C-----
C      CÁLCULO DE Pk ES LA PRODUCCIÓN DE k
C-----
C      PK=PDUM00(NC)/(VOL(NC)*VOL(NC))
C-----
C      CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE CORRECCIÓN DE LA DISIPACIÓN Vji, DEL
C      TÉRMINO QUE CORRESPONDE A LA CONSTANTE DEL TÉRMINO ANULADA AL
C      PRINCIPIO C2 Y DEL PARÁMETRO TT, Y SUMA DE LA FUNCIÓN DE
C      CORRECCIÓN A LA ECUACIÓN DE LA DISIPACIÓN A TRAVÉS DEL
C      TÉRMINO FUENTE
C-----
C      VJI=2*VISCL(NC)*(VIS(NC)-VISCL(NC))*DDY*DDY/DENS(NC)
C      TT=(TE(NC)/(ED(NC)+C10))
C      RET=TE(NC)*TE(NC)*DENS(NC)/(VISCL(NC)*ED(NC)+C10)
C      VF2=1.-0.3*EXP(-RET*RET)
C      V2=-1.92*DENS(NC)*VOL(NC)*VF2/(TT+C10)

```

```
VJI=VJI*DENS(NC)*VOL(NC)
SP4(NC)=SP4(NC)+V2
SU4(NC)=SU4(NC)+VJI+V3
ENDIF
4 CONTINUE
ENDIF
RETURN
END
```

A.4. Subrutina *usrvis.f*

```

C=====
C      SUBROUTINE USRVIS
C=====
C
C      USER_FUNCTION - LAMINAR VISCOSITY
C
C      USRVIS IS A SPECIAL PURPOSE ROUTINE FOR SPECIFYING FUNCTIONAL
C      RELATIONS FOR LAMINAR VISCOSITY IN THE INTERNAL COMPUTATIONAL
C      DOMAIN. THE VISCOSITY IN THE EXTERNAL DOMAIN (E.G. INLETS,
C      OUTLETS, WALLS OR PLANES OF SYMMETRY) WILL BE MIRRORED OR
C      LINEARLY EXTRAPOLATED FROM INTERNAL VALUES ACCORDING TO THE
C      BOUNDARY TYPES OR THE SPECIAL REQUIREMENTS OF THE USER.
C
C      REMARK: QUANTITIES, WHICH ARE NOT MIRRORED OR EXTRAPOLATED TO
C              ONE OF THE BOUNDARIES SPECIFIED BELOW, WILL BE ZERO
C              OR WILL HAVE ANY VALUE ASSIGNED TO IT SOMEWHERE ELSE
C              IN THE PROGRAM.
C
C      ISRVIS: DATASET IDENIFICATION SPECIFIED IN .TIM-FILE
C
C=====
C-----PARAMETERS
C      INCLUDE 'CPARA1.INC'
C-----DIMENSIONS
C      INCLUDE 'CDIM.INC'
C-----LOCAL VARIABLES
C      DIMENSION UGP(3,3)
C-----COMMON BLOCKS
C      INCLUDE 'CCOMM.INC'
C%MP include CMPCOM
C-----DATA FOR BLOOD-VISCOSITY
C      SAVE VISO,VIS1,A
C      DATA VISO/.13/
C      DATA VIS1/.005/
C      DATA A/8./
C-----
C-----
C-----DELIMITER
C      C8=1.E-8
C      C10=1.E-10
C      IF(ISRVIS.EQ.1) THEN
C          VISCL(NC)=15.E-6*DENS(NC)
C          CTURBM=.09
C          CTURB1=1.44
C          CTURB2=1.92
C          CTURB3=0.

```

```

      PRTE=1
      PRED=1.2174
      CAPPA=0.4187
      DO 1 NC=NINTCI,NINTCF
        VIST=CTURBM*DENS(NC)*TE(NC)*TE(NC)/(ED(NC)+.00001)
        VIS(NC)=VISCL(NC)+VIST
1     CONTINUE
      ENDIF
C     #####
C     ##                MODELO de TURBULENCIA SSA                ##
C     #####
      IF(ISRVIS.EQ.2) THEN
        CTURBM=0.096
        DO 2 NC=NINTCI,NINTCF
          VISCL(NC)=15.E-6*DENS(NC)
C-----
C     CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO PARA LA VISCOSIDAD
C     DEL MODELO, CALCULANDO ANTES LOS NÚMEROS DE REYNOLDS:
C     RET,REED, INTRODUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO FNU
C     EN LA VISCOSIDAD TURBULENTA VIST.
C     CÁLCULO DE LA VISCOSIDAD EFECTIVA VIS (QUE USA FIRE)
C-----
          RET=TE(NC)*TE(NC)*DENS(NC)/(VISCL(NC)*ED(NC)+C10)
          VAUX2=VISCL(NC)*ED(NC)/DENS(NC)
          REED=DENS(NC)*XC2(NC)*SQRT(SQRT(VAUX2))/(VISCL(NC))
          FNU=(1+3/(SQRT(SQRT(RET*RET*RET+C10))))*(1+80*EXP(-REED))
          VAUX=1-EXP((-REED/43)-(REED*REED/330))
          FNU=FNU*VAUX*VAUX
          VIST=CTURBM*DENS(NC)*TE(NC)*TE(NC)*FNU/(ED(NC)+.00001)
          VIS(NC)=VISCL(NC)+VIST
2     CONTINUE
      ENDIF
C     #####
C     ##                MODELO de TURBULENCIA YS                ##
C     #####
      IF(ISRVIS.EQ.3) THEN
        CTURBM=0.09
        DO 3 NC=NINTCI,NINTCF
          VISCL(NC)=15.E-6*DENS(NC)
C-----
C     CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO PARA LA VISCOSIDAD
C     DEL MODELO, CALCULANDO ANTES EL NUMERO DE REYNOLDS REY,
C     INTRODUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO FNU EN LA
C     VISCOSIDAD TURBULENTA VIST.
C     CÁLCULO DE LA VISCOSIDAD EFECTIVA VIS (QUE USA FIRE)
C-----
          REY=XC2(NC)*SQRT(TE(NC))*DENS(NC)/(VISCL(NC)+C10)
          AUX=-.00015*REY-.0000005*REY*REY*REY-1.E-10*REY*REY*REY*REY*REY
          FNU=(1-EXP(AUX+C10))
          IF (FNU.GT.0) THEN

```

```

        FNU=SQRT(FNU)
    ELSE
        FNU=0
    ENDIF
    VIST=CTURBM*DENS(NC)*TE(NC)*TE(NC)*FNU/(ED(NC)+.00001)
    VIS(NC)=VISCL(NC)+VIST
3  CONTINUE
    ENDIF
C  #####
C  ##          MODELO de TURBULENCIA LS          ##
C  #####
    IF(ISRVIS.EQ.4) THEN
        CTURBM=0.09
        DO 4 NC=NINTCI,NINTCF
            VISCL(NC)=15.E-6*DENS(NC)
C-----
C  CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO PARA LA VISCOSIDAD
C  DEL MODELO, CALCULANDO ANTES EL NÚMERO DE REYNOLDS RET,
C  INTRODUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO FNU EN LA
C  VISCOSIDAD TURBULENTA VIST
C  CÁLCULO DE LA VISCOSIDAD EFECTIVA VIS (QUE USA FIRE)
C-----
        RET=TE(NC)*TE(NC)*DENS(NC)/(VISCL(NC)*ED(NC)+C10)
        AUX=1+(RET/50)
        FNU=EXP(-3.4/(AUX*AUX))
        VIST=CTURBM*DENS(NC)*TE(NC)*TE(NC)*FNU/(ED(NC)+.00001)
        VIS(NC)=VISCL(NC)+VIST
4  CONTINUE
    ENDIF
    RETURN
    END

```

A.5. Subrutina para monitorización de variables globales

```

C=====
C   MONITORIZACIÓN: RESIDUALES, SEMIANCHO, CAUDAL Y CAUDAL DEL
C   TERCIO SUPERIOR QUE CONTROLAN LA CONVERGENCIA Y LA ESTACIONARIDAD
C=====
      IF (CONT.NE.1) THEN
        OPEN (2,FILE="CONVERGEa",STATUS='NEW')
        OPEN (3,FILE="CONVERGEb",STATUS='NEW')
        OPEN (4,FILE="CONVERGEc",STATUS='NEW')
        OPEN (5,FILE="CONVERGED",STATUS='NEW')
        CONT=1
        TS=1
      ELSE
        IF (ITER.EQ.1) THEN
          IF (MOD(TS,5.0).EQ.0) THEN
C-----
          XX(1)=0.05
          XX(2)=0.1
          XX(3)=0.2
          XX(4)=0.4
          XX(5)=0.7
          XX(6)=1.0
          XX(7)=1.5
          XX(8)=2.0
C-----
          SITUARSE EN EL VÉRTICE SUR-OESTE -----
          P1=1
121  P4=LCC(P1+NSFIO4)
          IF (P4.LE.NINTCF) THEN
            P1=P4
            GOTO 121
          ENDIF
131  P4=LCC(P1+NSFIO1)
          IF (P4.LE.NINTCF) THEN
            P1=P4
            GOTO 131
          ENDIF
          VERTICESW=P1
          PINI=VERTICESW
C-----
          PADH=10
          II=1
          DO 555 I=1,8
            IF (XC1(VERTICESW).GT.XX(I)) THEN
              II=I+1
            ENDIF

```

```

555 CONTINUE
C-----
353  UMAX=0
      IMAX=1
      P1=PINI
      I=1
313  P2=LCC(P1+NSFIO2)
      IF (XC1(P1).GE.XX(8)) THEN
          GOTO 373
      ENDIF
C-----BUSCA SI ESTA SITUADO EN HORIZONTAL
      IF ((I.EQ.1).AND.(U1(P1).LE.0).AND.(U1(P2).GT.0)) THEN
          PADH=(U1(P2)*XC1(P1)-U1(P1)*XC1(P2))/(U1(P2)-U1(P1))
      ENDIF
      IF ((XC1(P1).LE.XX(II)).AND.(XC1(P2).GT.XX(II))) THEN
C-----INTERPOLA EN DIRECCIÓN HORIZONTAL
          Y=XC2(P1)+(XC2(P2)-XC2(P1))*(XX(II)-XC1(P1))/(XC1(P2)-XC1(P1))
C-----CARGA EL PERFIL DE VELOCIDADES EN LOS ARRAY YY,UU ****
          YY(I)=Y
          U=U1(P1)+(U1(P2)-U1(P1))*(XX(II)-XC1(P1))/(XC1(P2)-XC1(P1))
          UU(I)=U
          ELSE
C-----SI NO ESTÁ SITUADO EN HORIZONTAL
          IF (XC1(P1).LT.XX(II)) THEN
              P1=P2
              GOTO 313
          ELSE
              P1=LCC(P1+NSFIO4)
              GOTO 313
          ENDIF
      ENDIF
C-----INCREMENTO EN VERTICAL SI SE ESTÁ DENTRO DEL DOMINIO
      P3=LCC(P1+NSFIO3)
      IF (P3.LE.NINTCF) THEN
C-----SI ES LA FILA INFERIOR GUARDO EL PUNTO PARA BUSCAR OTRO PLANO DE CORTE
          IF (I.EQ.1) THEN
              PINI=P1
          ENDIF
          P1=P3
          I=I+1
          IF (I.LE.NBE) THEN
              GOTO 313
          ENDIF
      ENDIF
C-----CÁLCULO DE Umax,ymax CON EL PERFIL GUARDADO
      DO 323 I=1,NBE,1
          IF (UU(I).GT.UMAX) THEN
              IMAX=I
              UMAX=UU(I)
          ENDIF

```

```

323  END DO
      Y1=YY(IMAX-1)
      Y2=YY(IMAX)
      Y3=YY(IMAX+1)
      UU1=UU(IMAX-1)
      UU2=UU(IMAX)
      UU3=UU(IMAX+1)
      DET=Y1*Y1*(Y2-Y3)-Y1*(Y2*Y2-Y3*Y3)+Y2*Y3*(Y2-Y3)
      A=(Y2-Y3)*UU1-(Y1-Y3)*UU2+(Y1-Y2)*UU3
      B=-UU1*((Y2*Y2)-(Y3*Y3))
      B=B+((Y1*Y1)-(Y3*Y3))*UU2
      B=B-((Y1*Y1)-(Y2*Y2))*UU3
      C=Y2*Y3*(Y2-Y3)*UU1-Y1*Y3*(Y1-Y3)*UU2+Y1*Y2*(Y1-Y2)*UU3
      A=A/DET
      B=B/DET
      C=C/DET
      YMAX=-B/(2*A)
      UMAX=A*YMAX*YMAX+B*YMAX+C
      YUNTERCIO=2*YY(NBE)/3
C-----CÁLCULO DEL SEMIANCHO, CAUDAL Y CAUDAL DEL TERCIO SUPERIOR
DO 55 I=1.,NBE
  IF ((UU(I-1).GT.UMAX/2).AND.(UU(I).LT.UMAX/2)) THEN
    YM1(II)=YY(I-1)+(YY(I)-YY(I-1))*(UMAX/2-UU(I-1))/(UU(I)-UU(I-1))
  END IF
  IF (I.EQ.1) THEN
    Q=0
    Q3=0
    M=0
  ELSE
    Q=Q+0.5*(YY(I)-YY(I-1))*(UU(I)+UU(I-1))
    M=M+0.5*1.2*(YY(I)-YY(I-1))*(UU(I)*UU(I)+UU(I-1)*UU(I-1))
    IF ((YY(I).GE.YUNTERCIO).AND.(YY(I-1).LE.YUNTERCIO)) THEN
      Q3=Q
      UI=UU(I-1)+(UU(I)-UU(I-1))*(YUNTERCIO-YY(I-1))/(YY(I)-YY(I-1))
      Q3=Q3+0.5*(YUNTERCIO-YY(I-1))*(UI+UU(I-1))
    END IF
  END IF
55  CONTINUE
    Q3=Q-Q3
    UMAX1(II)=UMAX
    I=1
    II=II+1
    IF (II.LE.8) THEN
      GOTO 353
    ENDIF
C-----
373  WRITE (2,22) TS,RS1,RS2,RS4,RS5,RS6,Q,Q3,YMAX
      WRITE (3,23) YM1(1),UMAX1(1),YM1(2),UMAX1(2),YM1(3),UMAX1(3)
      WRITE (4,24) PADH,YM1(4),UMAX1(4),YM1(5),UMAX1(5)
      WRITE (5,23) YM1(6),UMAX1(6),YM1(7),UMAX1(7),YM1(8),UMAX1(8)

```

```
ENDIF
TS=TS+1
ELSE
  RS1=RSUM(1)
  RS2=RSUM(2)
  RS4=RSUM(4)
  RS5=RSUM(5)
  RS6=RSUM(6)
ENDIF
ENDIF
22  FORMAT (F6.0,8E14.6) 23  FORMAT (6E14.6) 24  FORMAT (5E14.6)
```

Apéndice B

Resultados experimentales

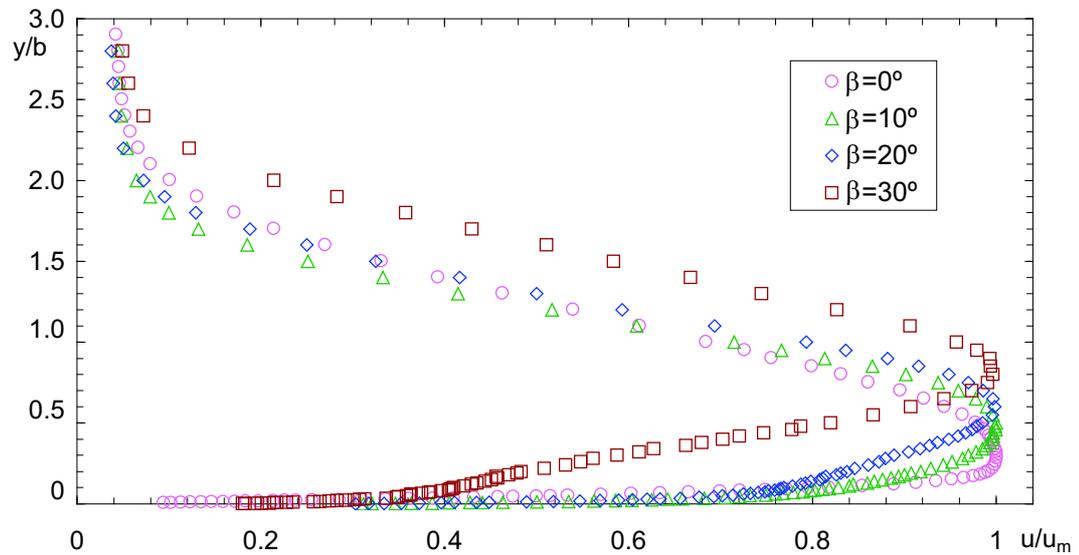


Figura B.1: Perfiles experimentales de velocidad para diferentes β en $x = 5b$ con $Re=10.000$.

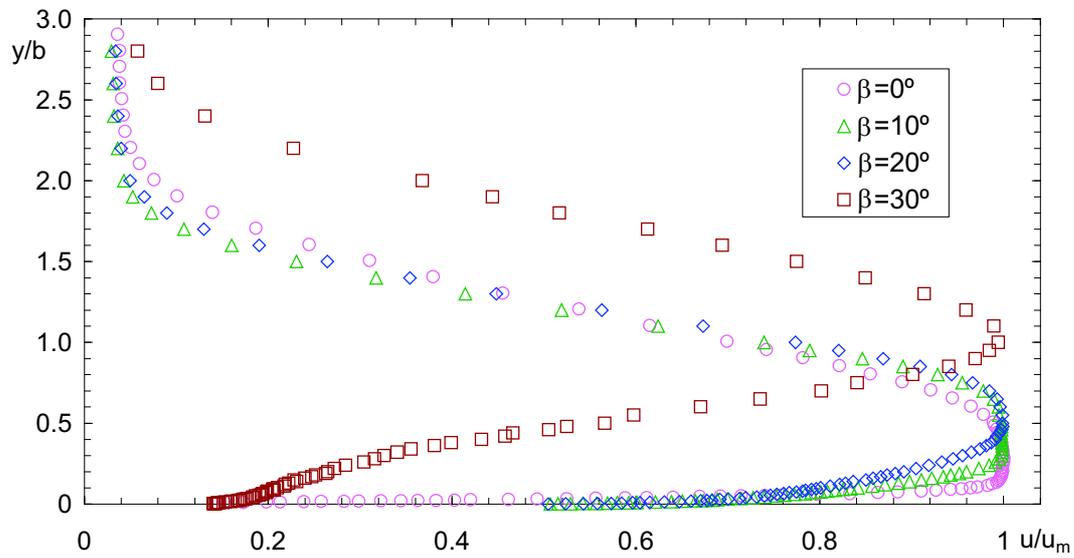


Figura B.2: Perfiles experimentales de velocidad para diferentes β en $x = 5b$ con $Re=30.000$.

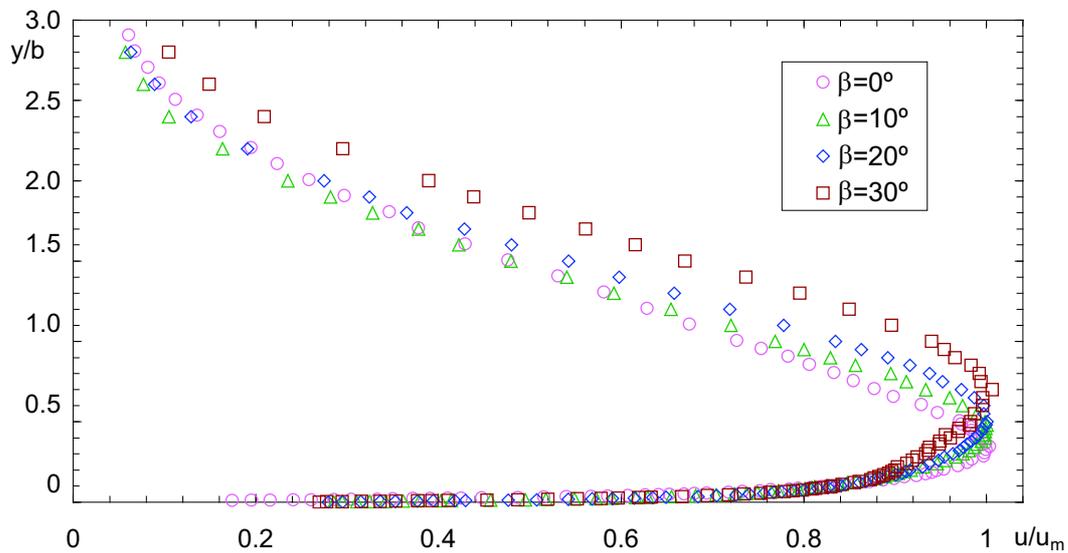


Figura B.3: Perfiles experimentales de velocidad para diferentes β en $x = 10b$ con $Re=10.000$.

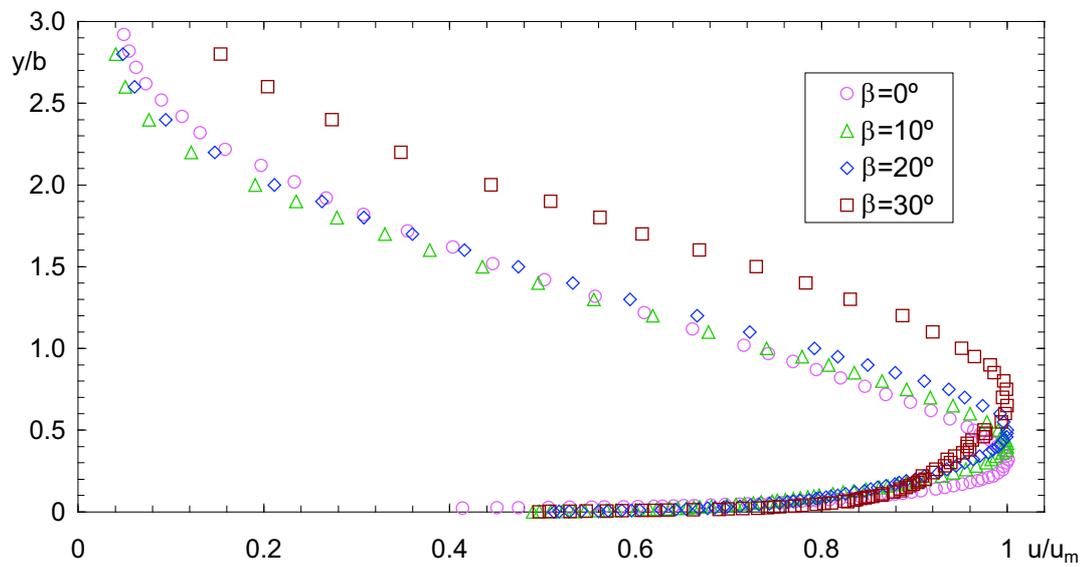


Figura B.4: Perfiles experimentales de velocidad para diferentes β en $x = 10b$ con $Re = 30,000$.

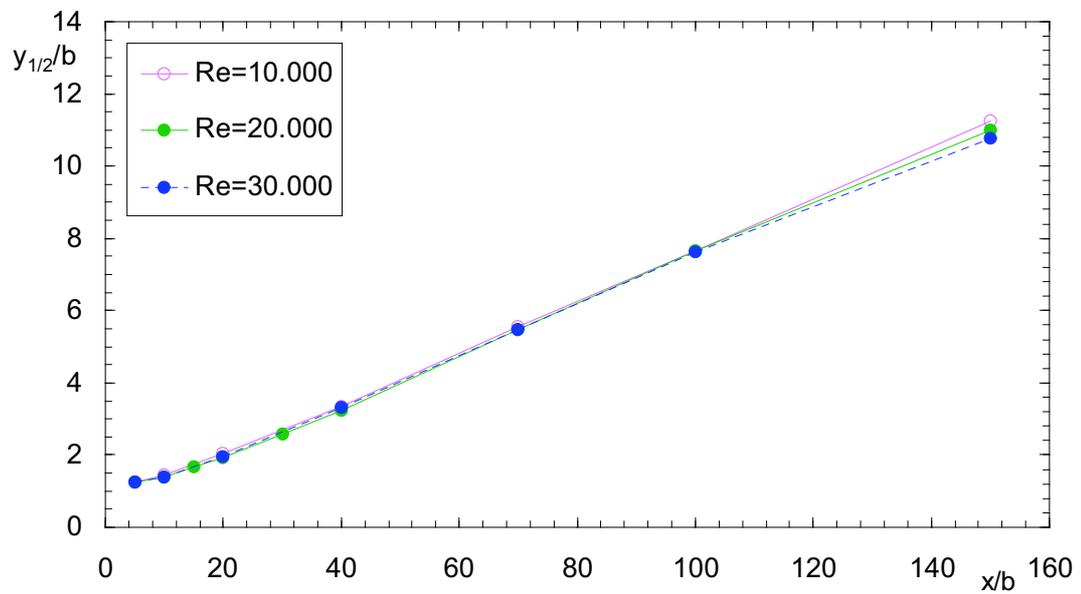
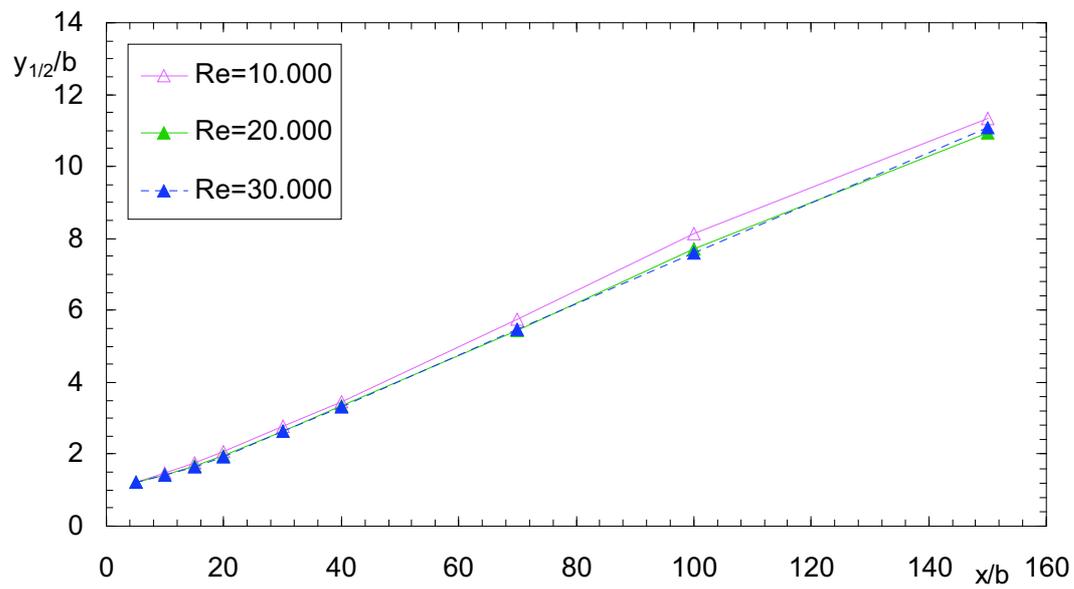
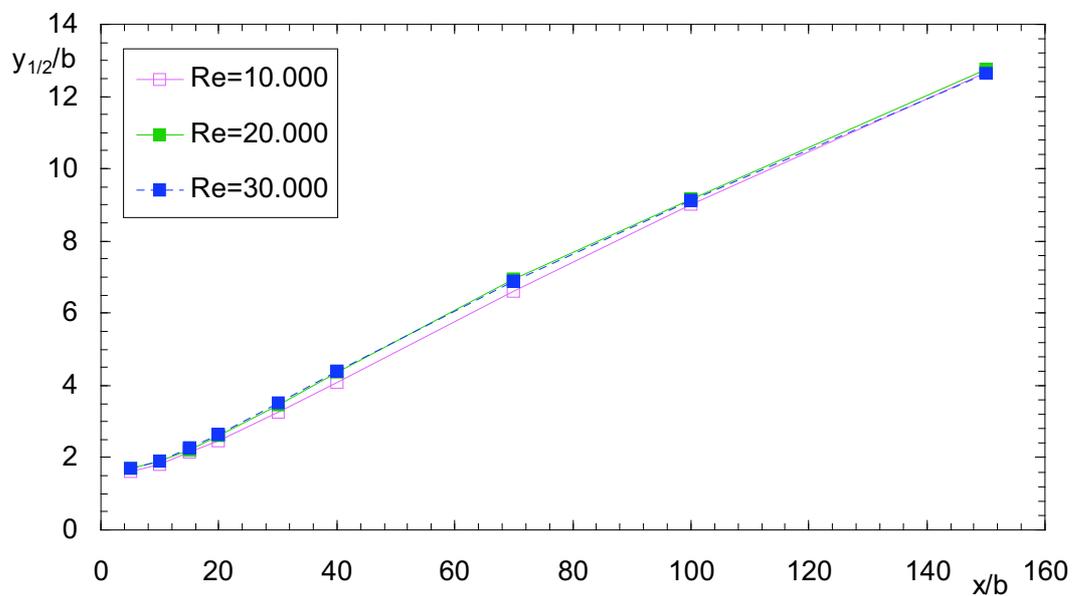


Figura B.5: Semianchos experimentales para $\beta = 0^\circ$ con diferentes Re .

Figura B.6: Semianchos experimentales para $\beta = 10^\circ$ con diferentes Re .Figura B.7: Semianchos experimentales para $\beta = 30^\circ$ con diferentes Re .

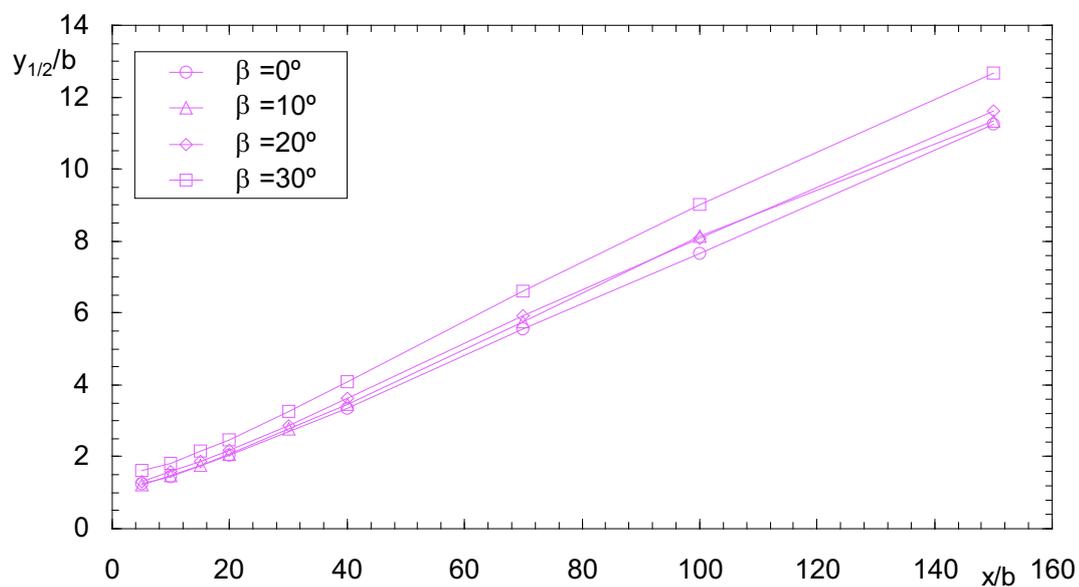


Figura B.8: Semianchos experimentales para diferentes β con $Re=10.000$.

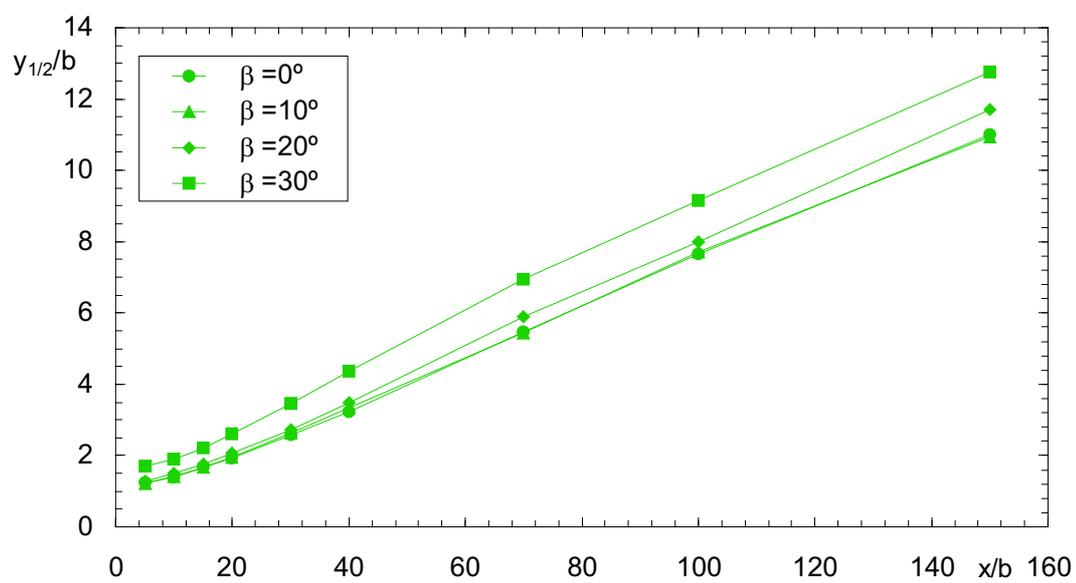


Figura B.9: Semianchos experimentales para diferentes β con $Re=20.000$.

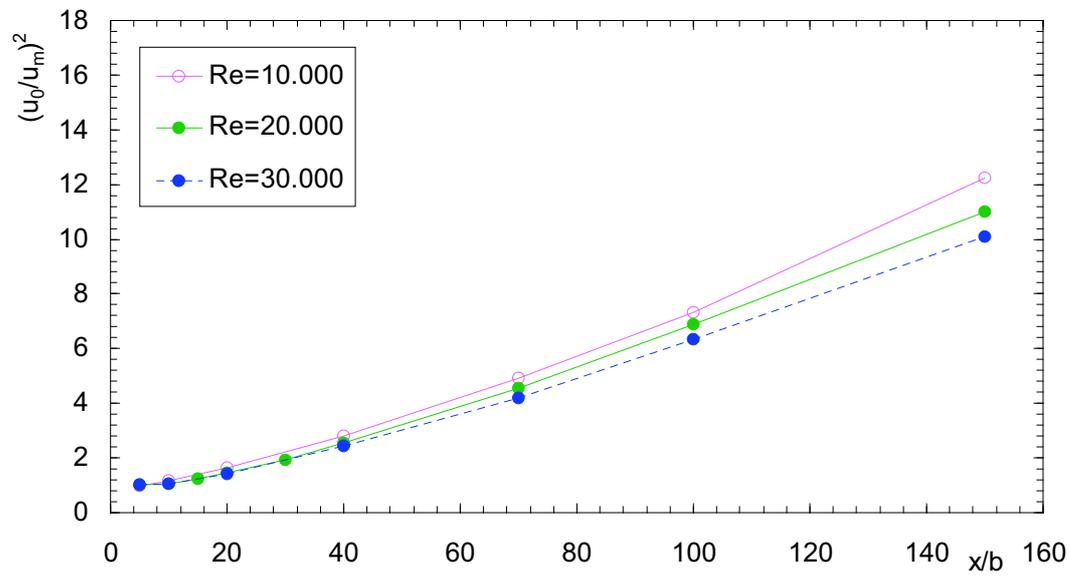


Figura B.10: Velocidad máxima experimental para $\beta = 0^\circ$ con diferentes Re.

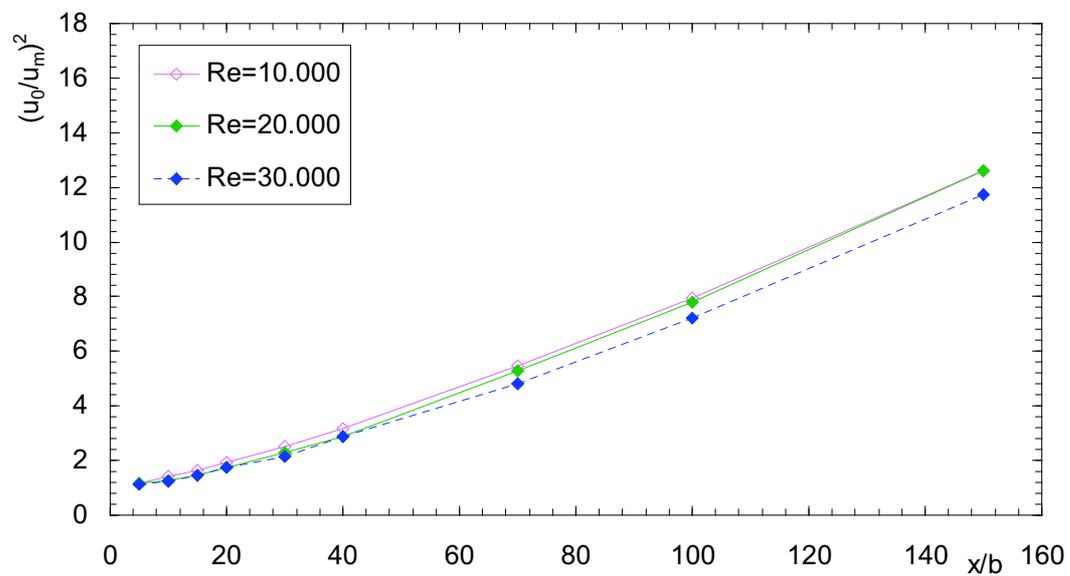


Figura B.11: Velocidad máxima experimental para $\beta = 20^\circ$ con diferentes Re.

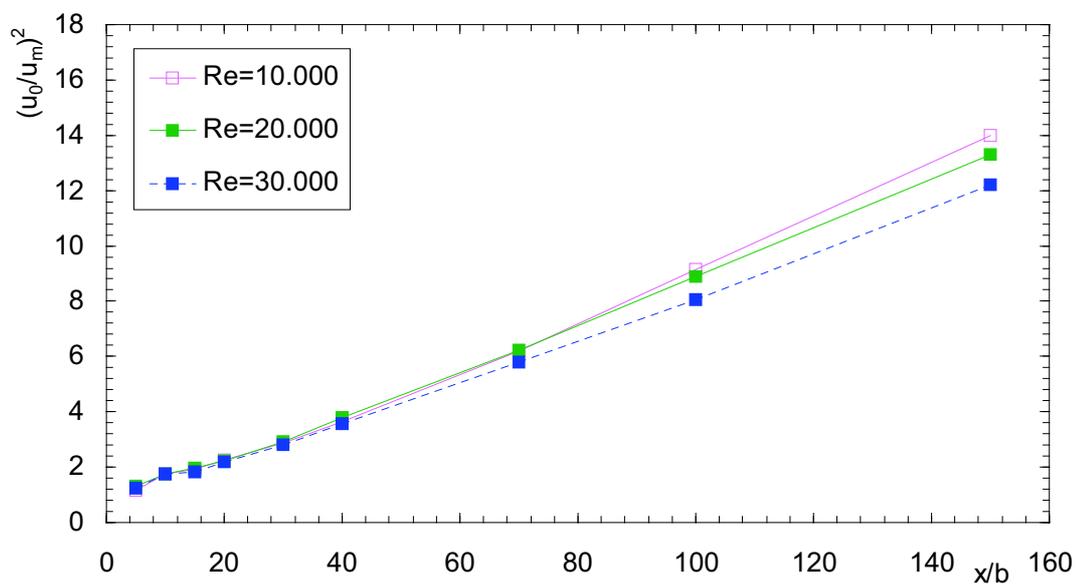


Figura B.12: Velocidad máxima experimental para $\beta = 30^\circ$ con diferentes Re.

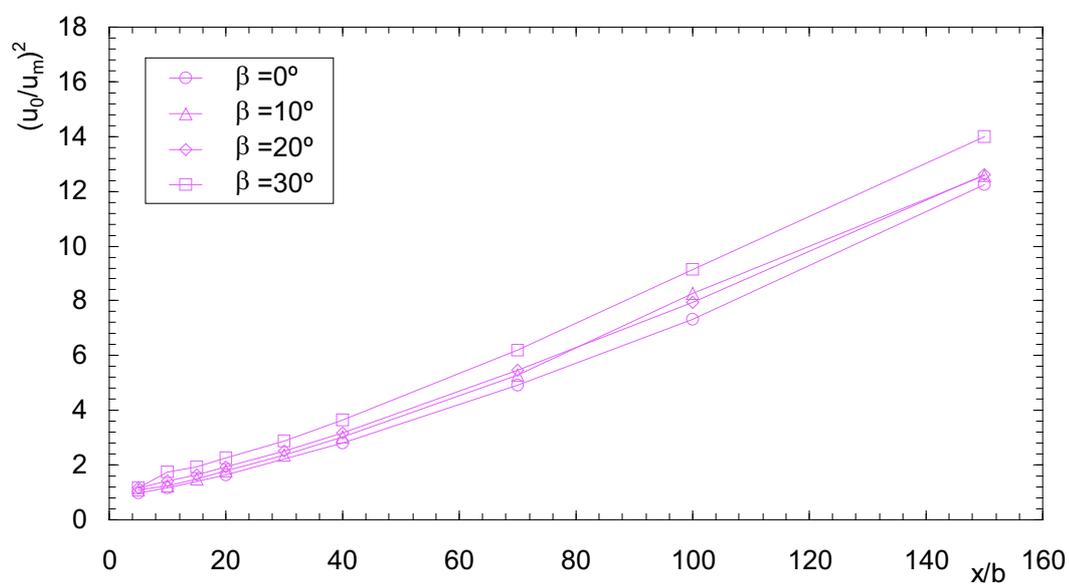


Figura B.13: Velocidad máxima experimentales para diferentes β con Re=10.000.

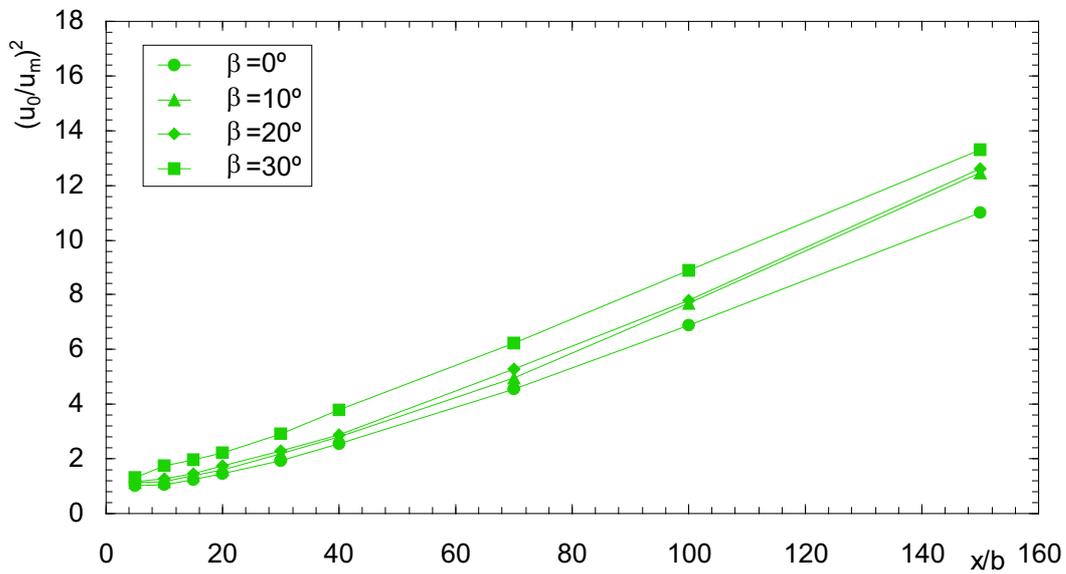


Figura B.14: Velocidad máxima experimental para diferentes β con $Re=20.000$.

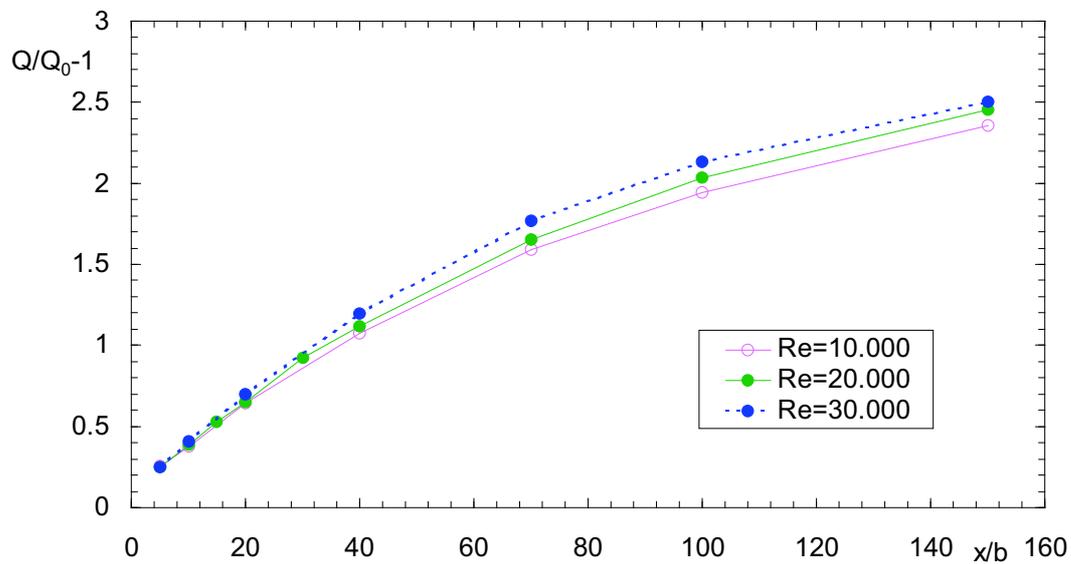


Figura B.15: Caudal de aire arrastrado para $\beta = 0^\circ$ con diferentes Re .

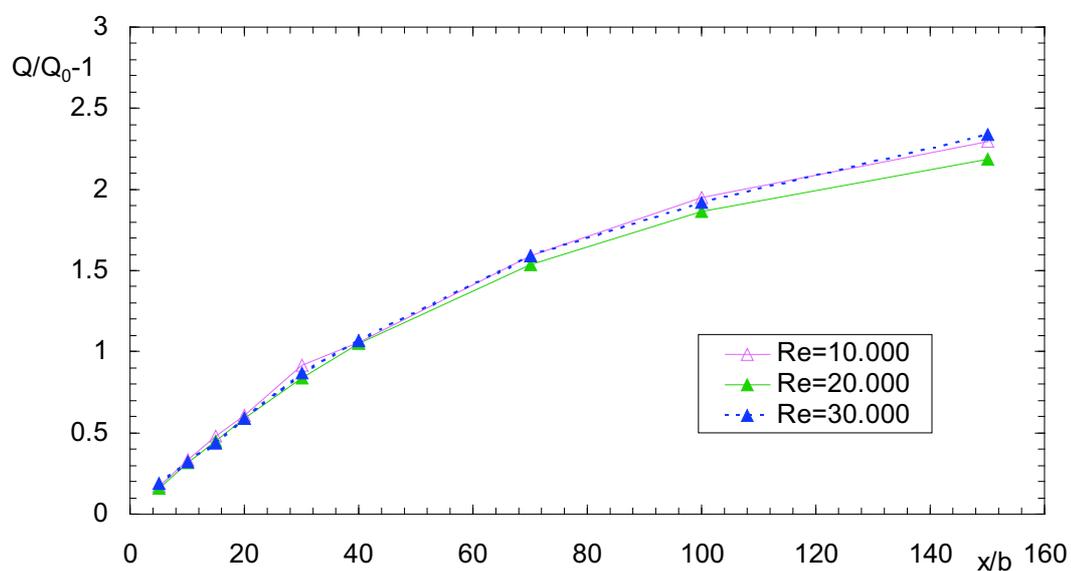


Figura B.16: Caudal de aire arrastrado para $\beta = 10^\circ$ con diferentes Re .

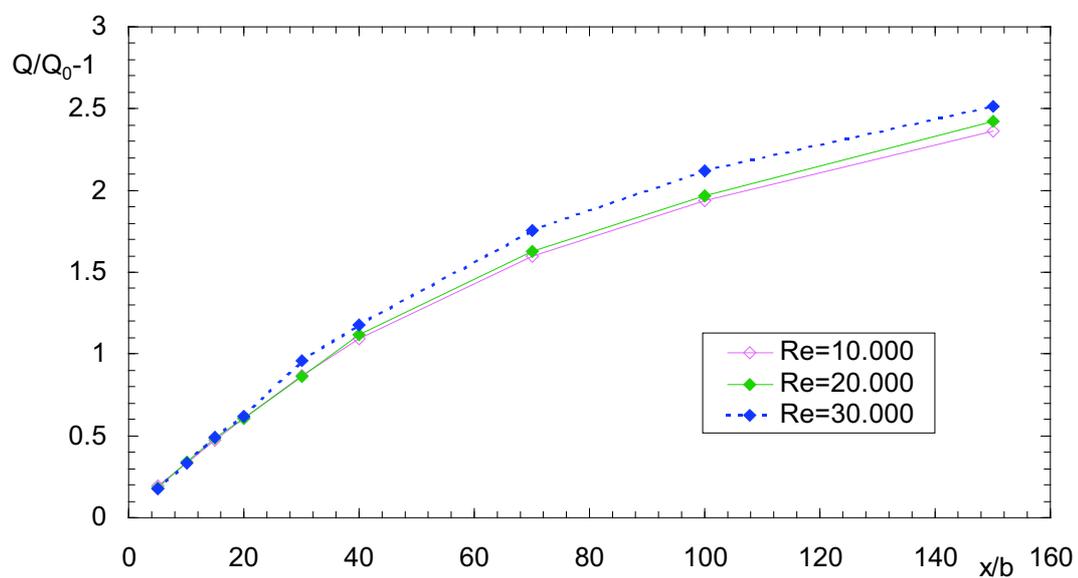
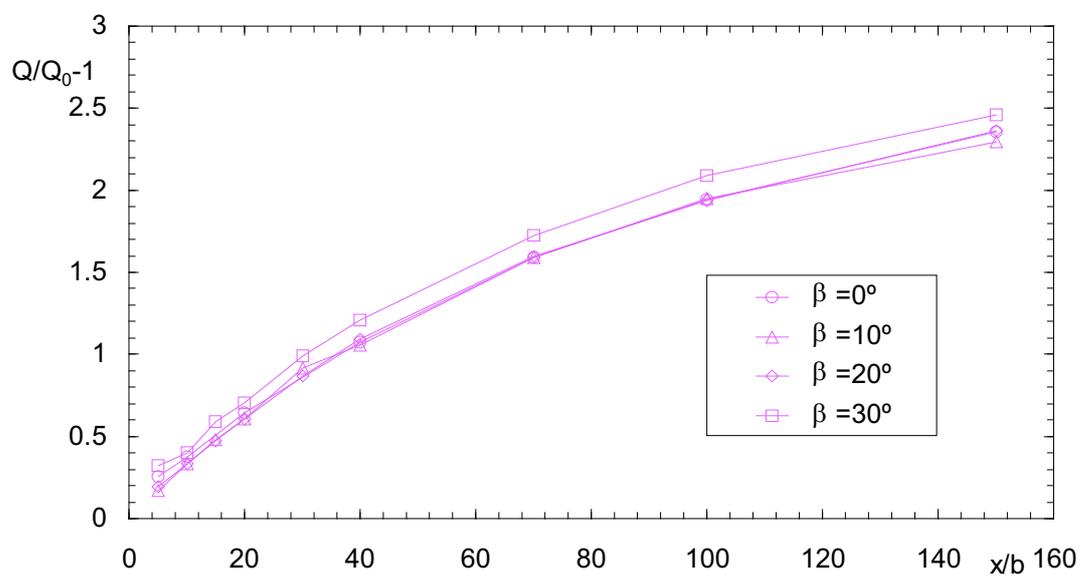
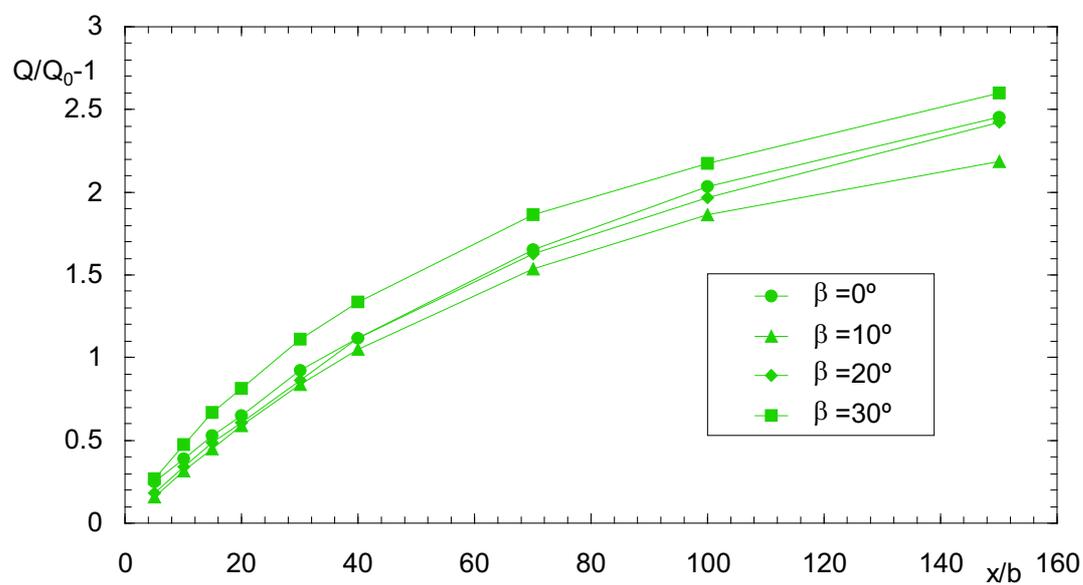


Figura B.17: Caudal de aire arrastrado para $\beta = 20^\circ$ con diferentes Re .

Figura B.18: Caudal de aire arrastrado para $Re=10.000$.Figura B.19: Caudal de aire arrastrado para $Re=20.000$.

Apéndice C

Resultados numéricos

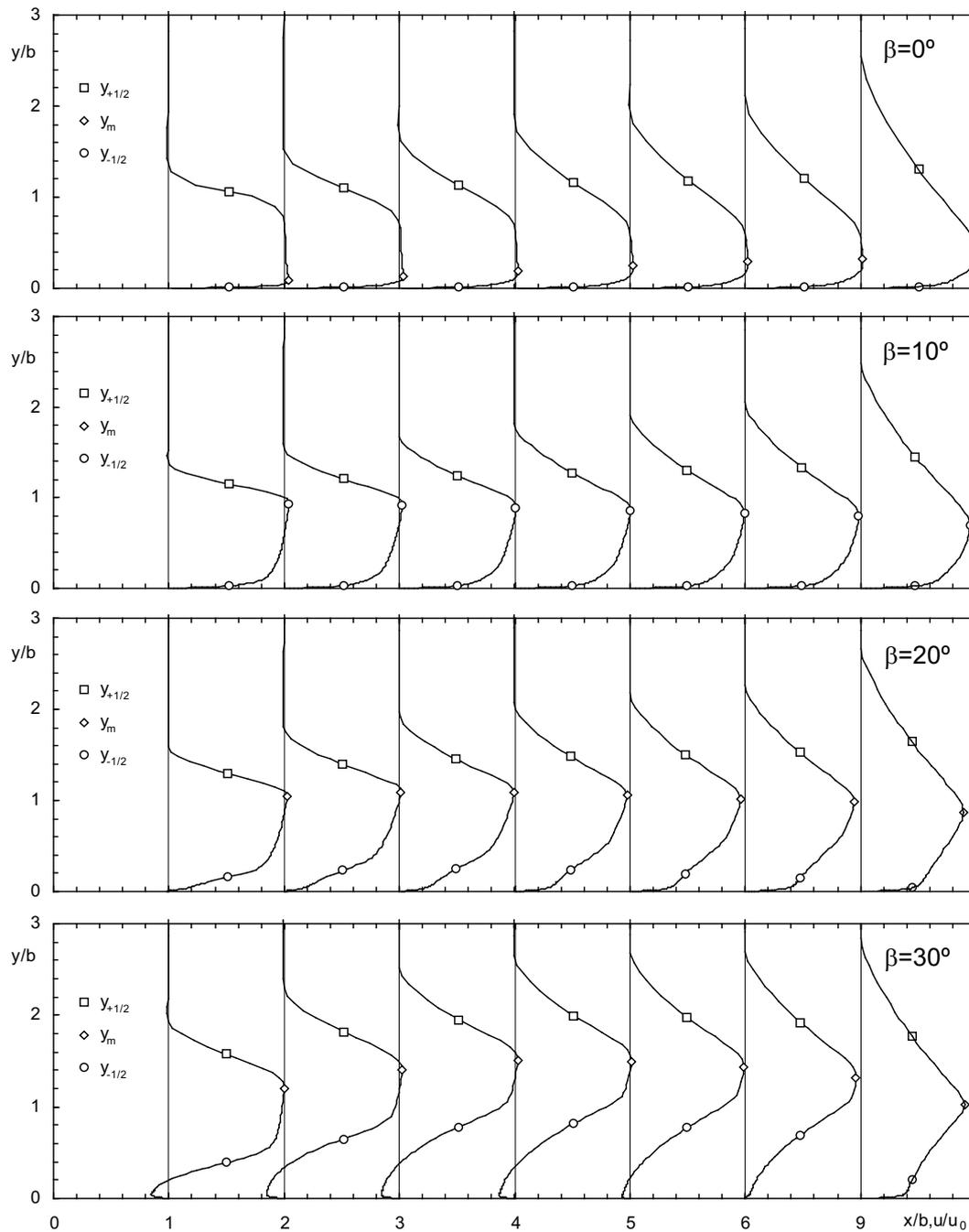


Figura C.1: Perfiles de velocidad, posición de los semianchos $y_{+1/2}$ e $y_{-1/2}$ y de la velocidad máxima y_m en la región de inicial de un chorro de pared plano con $\beta=0^\circ$, 10° , 20° y 30° para $Re=10.000$.

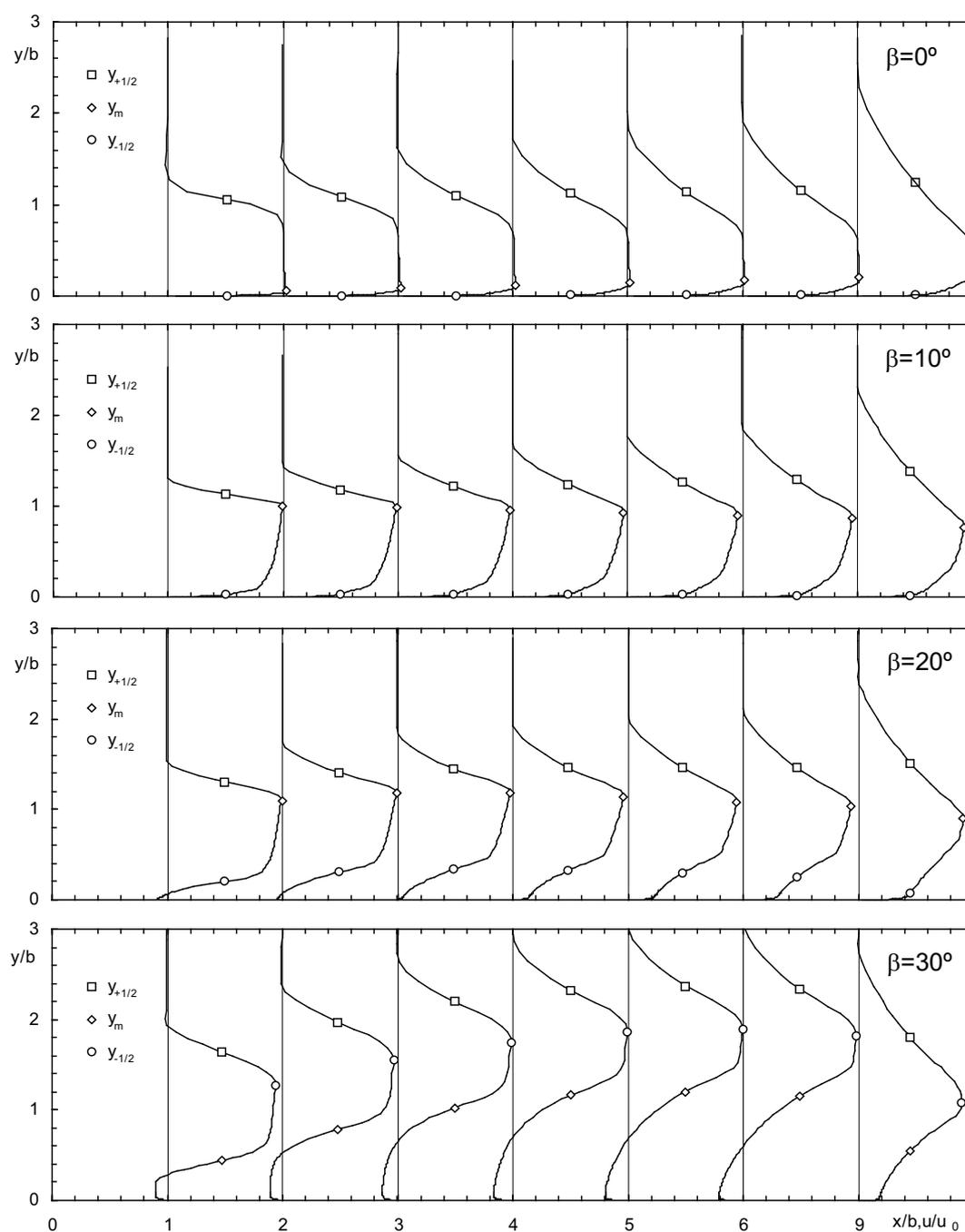
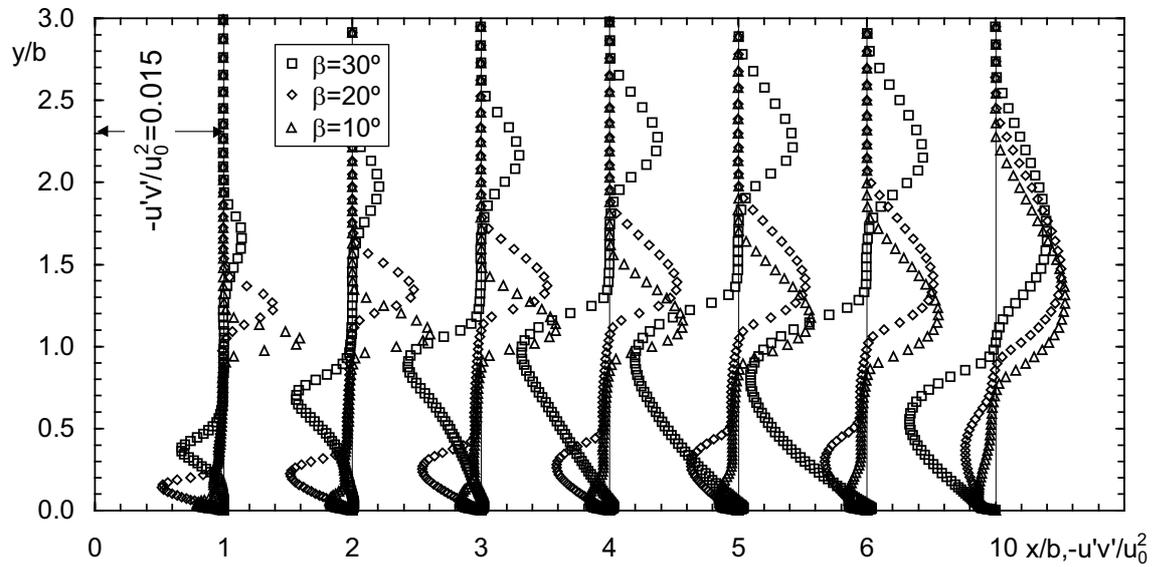
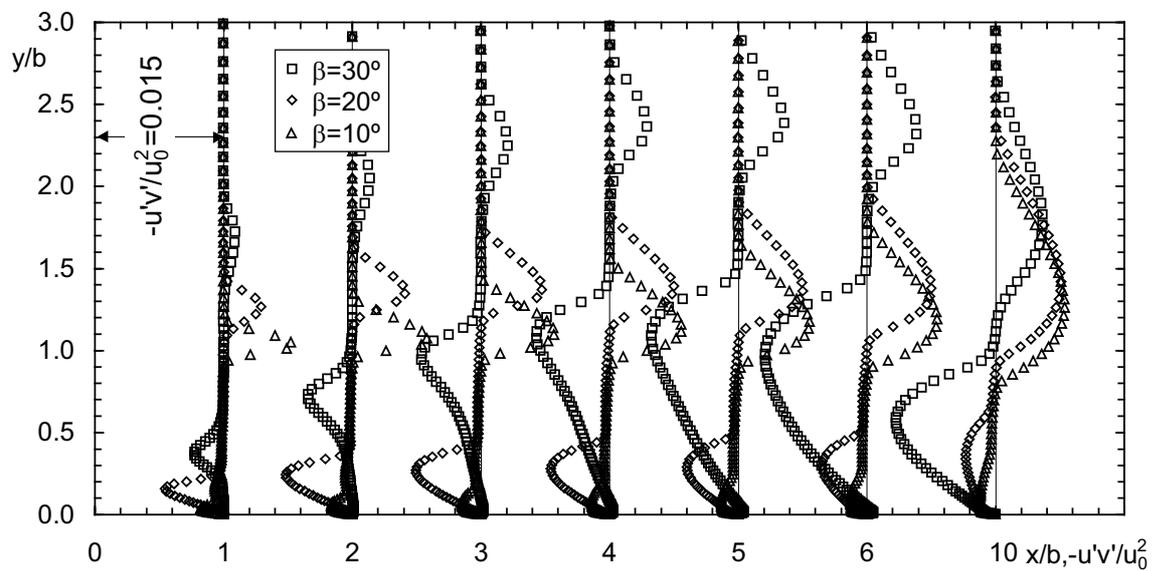


Figura C.2: Perfiles de velocidad, posición de los semianchos $y_{+1/2}$ e $y_{-1/2}$ y de la velocidad máxima y_m en la región de inicial de un chorro de pared plano con $\beta=0^\circ$, 10° , 20° y 30° para $Re=30.000$.

Figura C.3: Esfuerzos cortantes en la región inicial para $Re=20,000$.Figura C.4: Esfuerzos cortantes en la región inicial para $Re=30,000$.

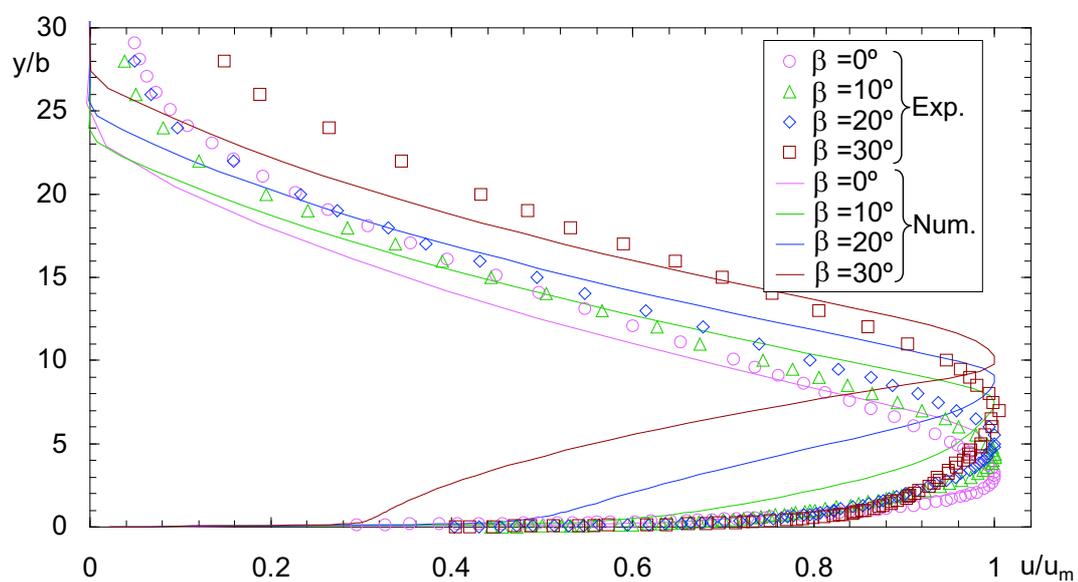


Figura C.5: Perfiles de velocidad para diferentes β en $x = 10b$ para $Re=20.000$ numéricos y experimentales.

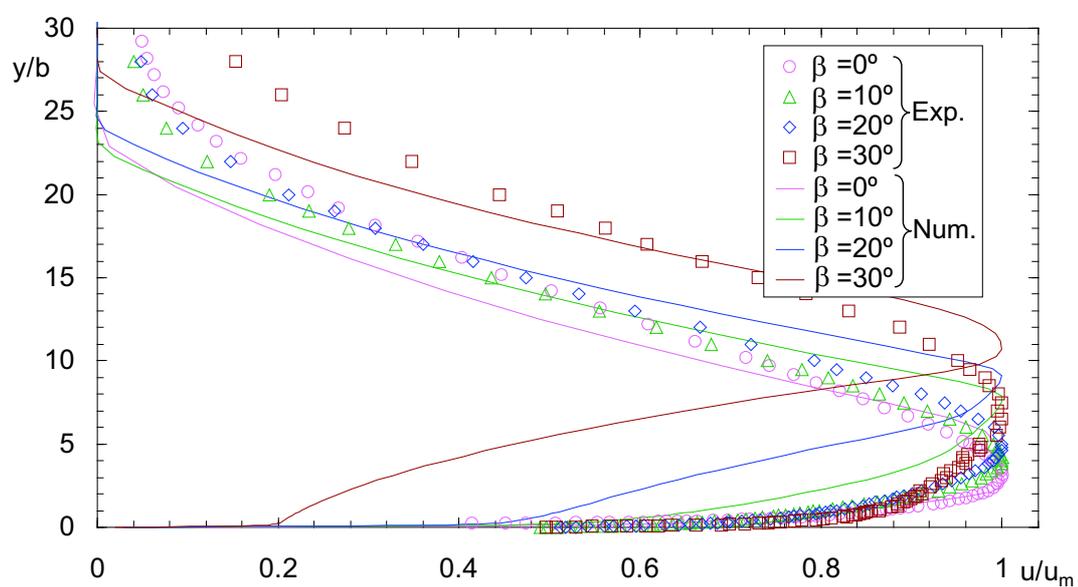


Figura C.6: Perfiles de velocidad para diferentes β en $x = 10b$ para $Re=30.000$ numéricos y experimentales.

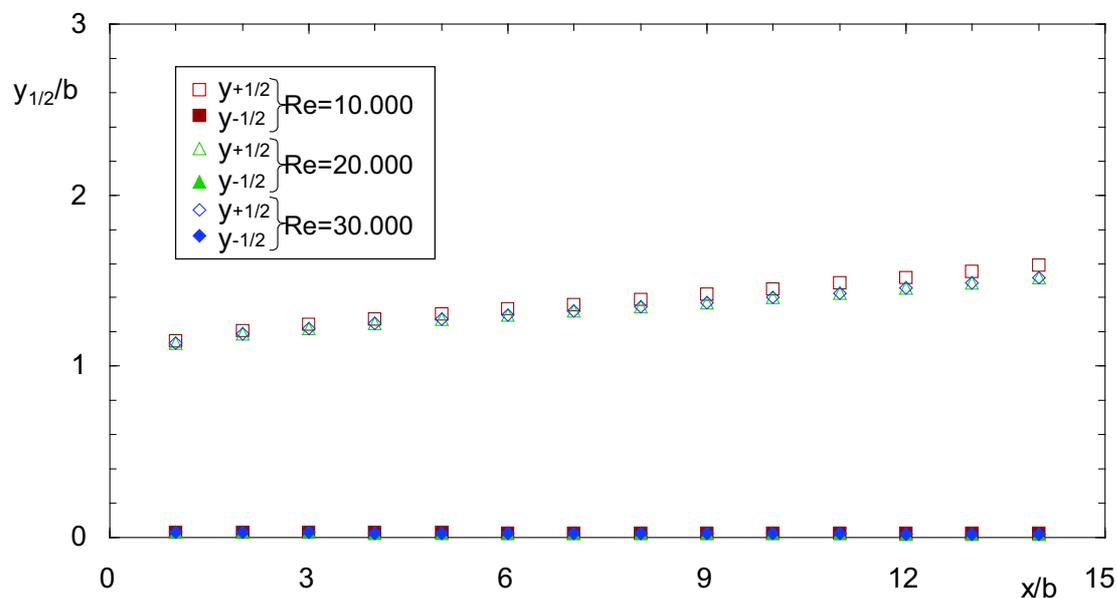


Figura C.7: Evolución de los semianchos para $\beta = 10^\circ$ en función del Reynolds para la zona inicial.

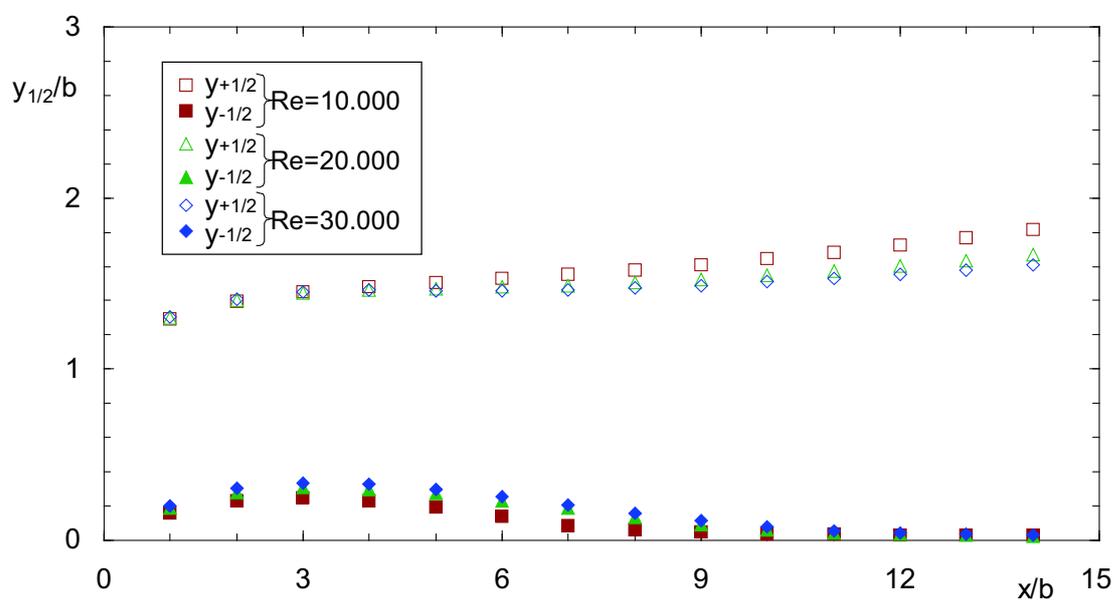


Figura C.8: Evolución de los semianchos para $\beta = 20^\circ$ en función del Reynolds para la zona inicial.

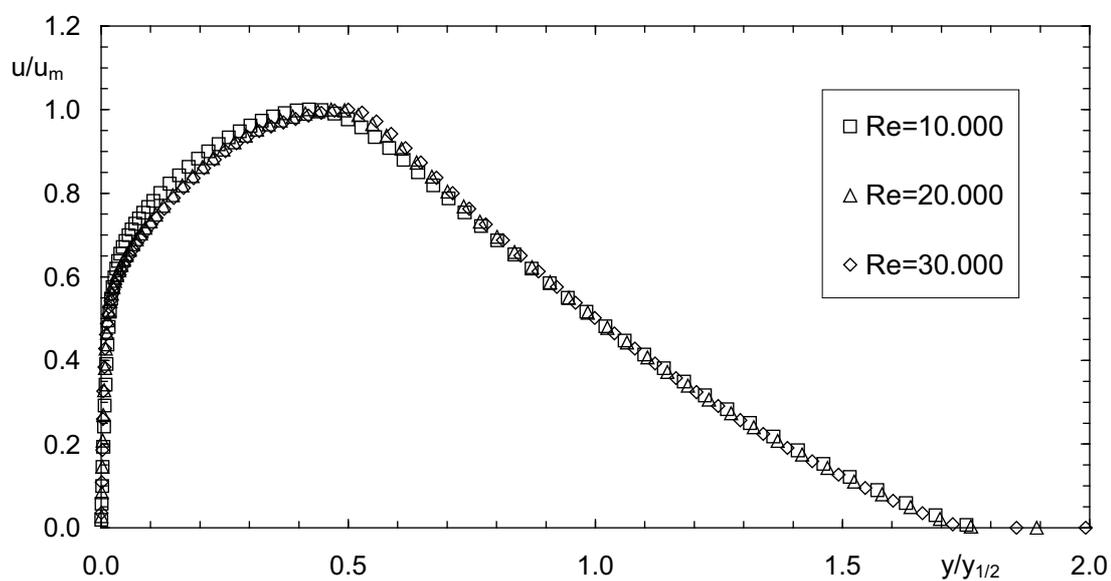


Figura C.9: Perfiles de velocidad en $x = 12b$ para diferentes Reynolds con $\beta = 10^\circ$.

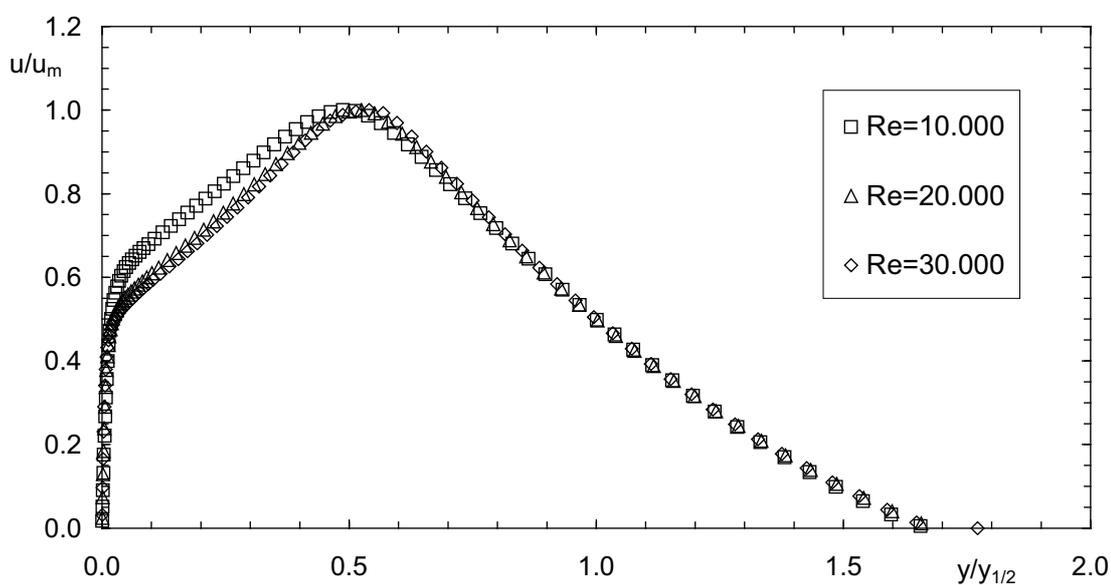
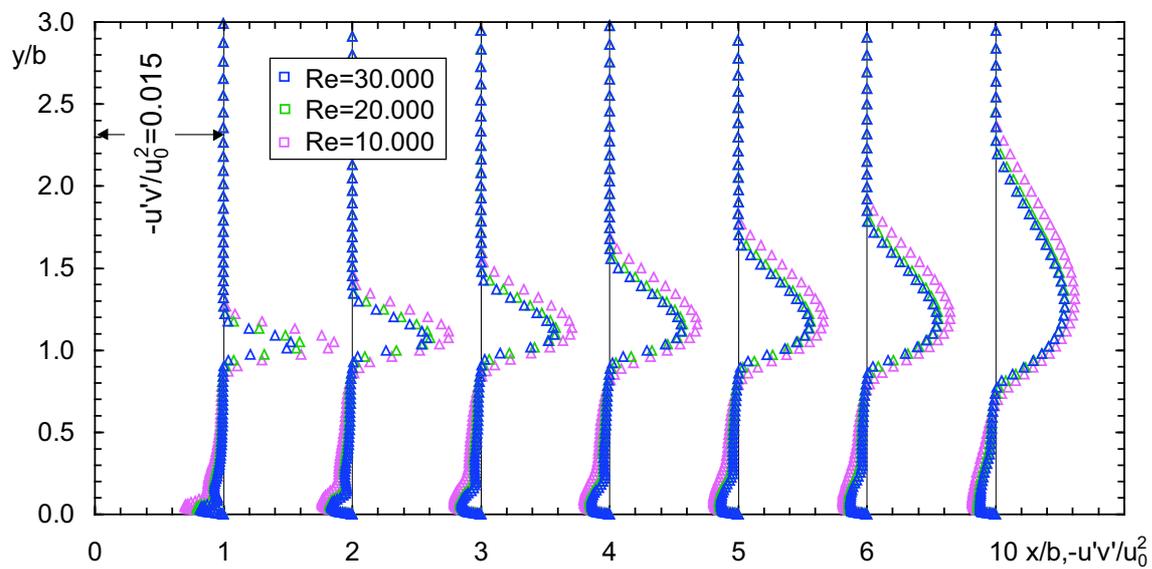
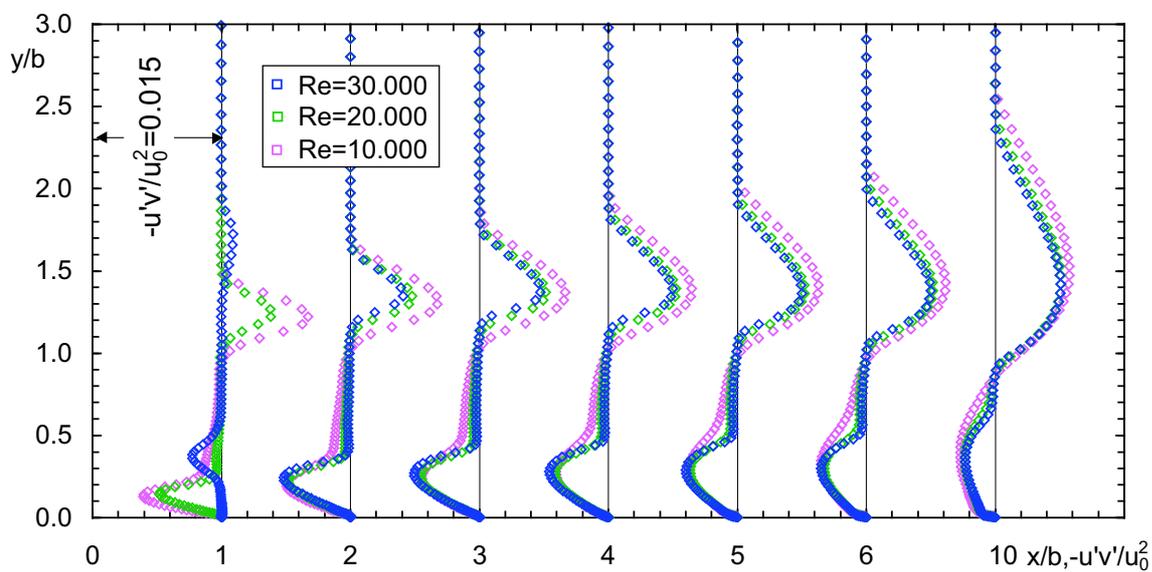


Figura C.10: Perfiles de velocidad en $x = 12b$ para diferentes Reynolds con $\beta = 20^\circ$.

Figura C.11: Esfuerzos cortantes en la región inicial para $\beta = 10^\circ$.Figura C.12: Esfuerzos cortantes en la región inicial para $\beta = 20^\circ$.

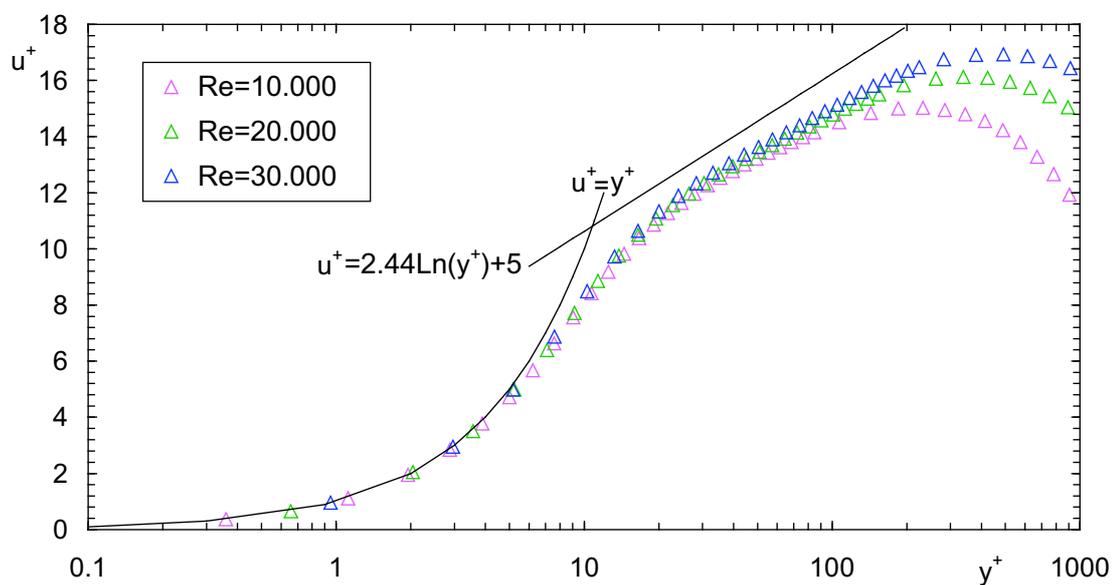


Figura C.13: Perfiles de velocidad en coordenadas de pared en $x = 70b$ Para $\beta = 10^\circ$ y diferentes Reynolds.

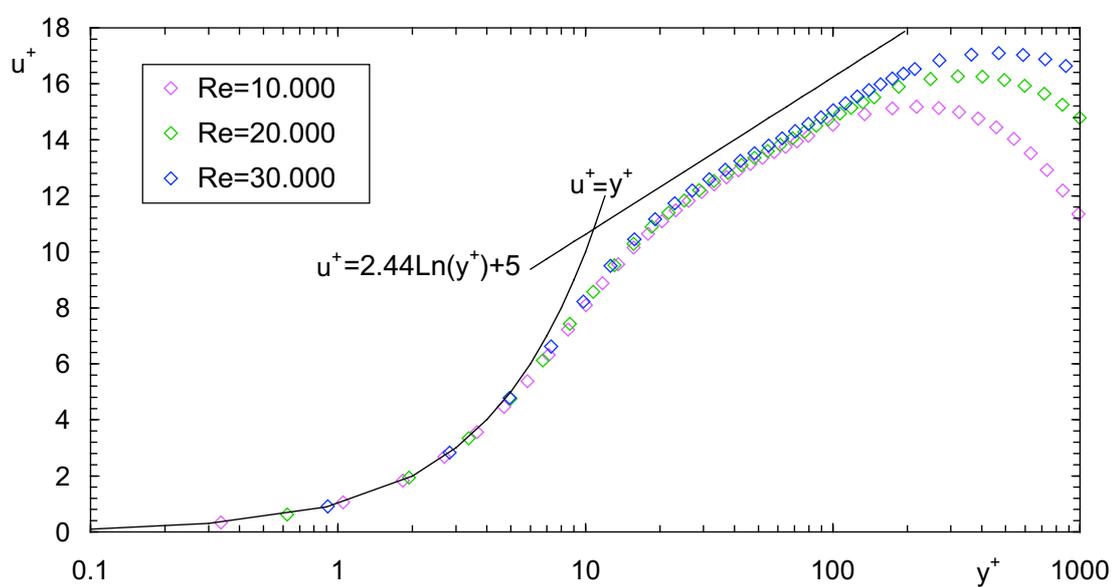


Figura C.14: Perfiles de velocidad en coordenadas de pared en $x = 70b$ Para $\beta = 20^\circ$ y diferentes Reynolds.

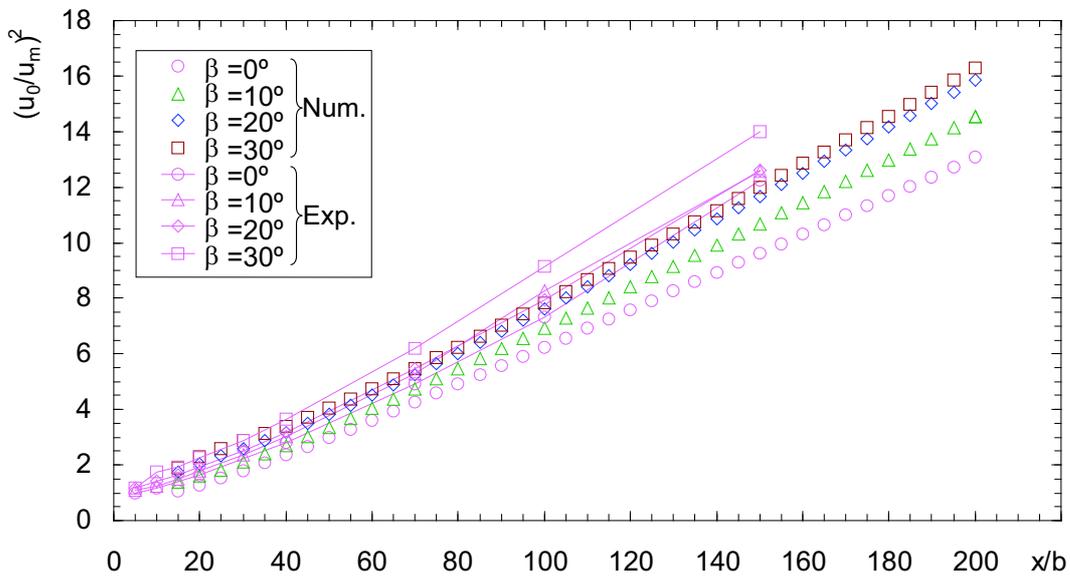


Figura C.15: Evolución experimental y numérica de la velocidad máxima con la distancia longitudinal para diferentes β y $Re=10.000$.

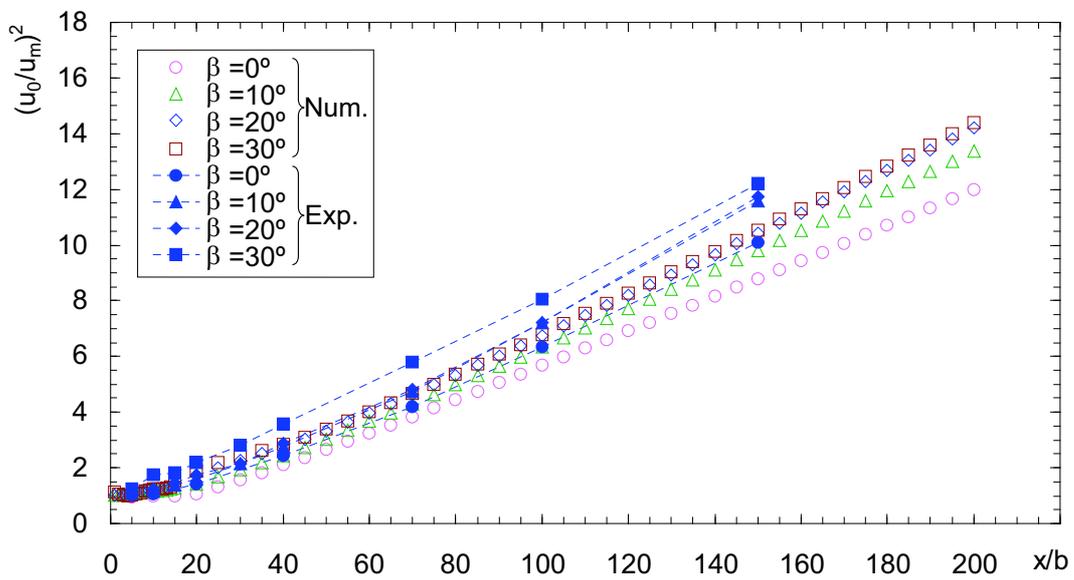


Figura C.16: Evolución experimental y numérica de la velocidad máxima con la distancia longitudinal para diferentes β y $Re=30.000$.

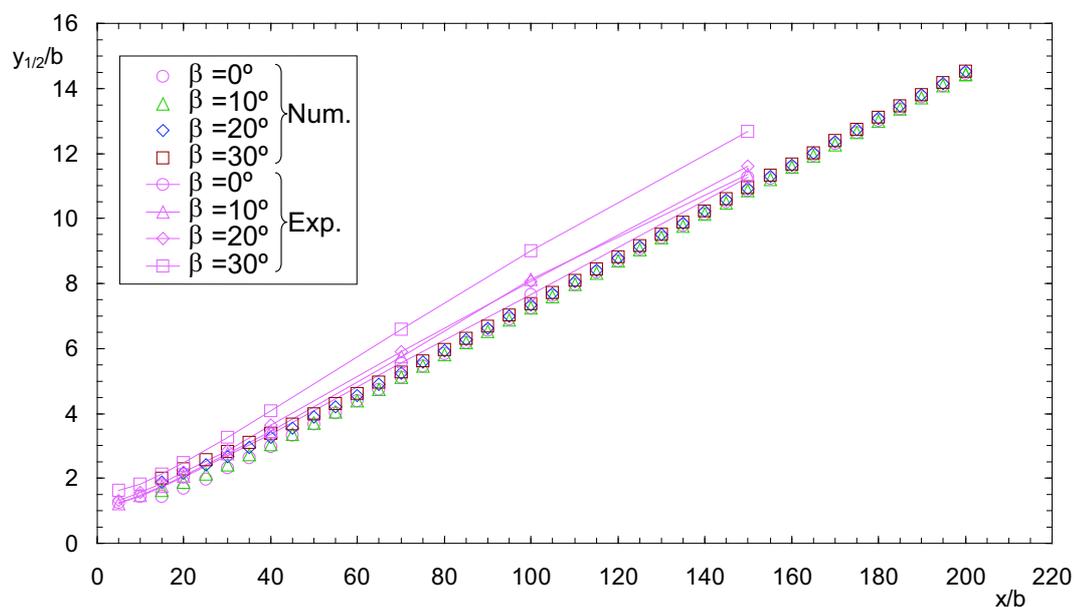


Figura C.17: Evolución experimental y numérica del semiancho con la distancia longitudinal para diferentes β y $Re=10.000$.

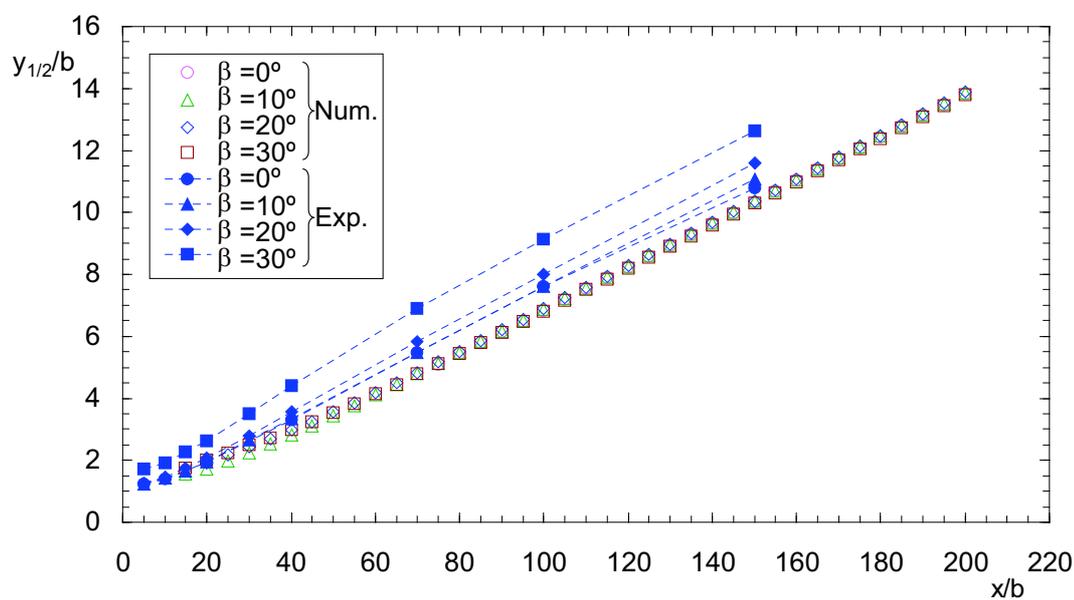


Figura C.18: Evolución experimental y numérica del semiancho con la distancia longitudinal para diferentes β y $Re=30.000$.

