Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL:

OPERADORES DE EXTENSIÓN Y CASIANALITICIDAD EN CLASES ULTRAHOLOMORFAS DE CARLEMAN. APLICACIÓN AL PROBLEMA DE MOMENTOS DE STIELTJES EN ESPACIOS DE GELFAND-SHILOV

Presentada por D. Alberto Lastra Sedano para optar al grado de doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:
Dr. D. Javier Sanz Gil

D. JAVIER SANZ GIL, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA: Que la presente memoria, "Operadores de extensión y casianaliticidad en clases ultraholomorfas de Carleman. Aplicación al problema de momentos de Stieltjes en espacios de Gelfand-Shilov", ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática, por D. Alberto Lastra Sedano, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a diecisiete de abril de dos mil nueve.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento a mi director de tesis, el profesor Dr. D. Javier Sanz Gil por haber aceptado dirigir este trabajo, por su constante ánimo y apoyo en todo momento y por su paciencia a la hora de mi aprendizaje. También por su disposición para atenderme y ayudarme siempre ante cualquier dificultad, ya fuera en cuanto a temas matemáticos como personales; sin duda puedo darle las gracias desde la admiración y la amistad.

Debo también agradecer el apoyo permanente de mis padres, a los que agradezco su sacrificio para poder llevar a cabo mis estudios, mi formación académica y personal. Creo haber intentado aprovechar sus consejos y las oportunidades que me han confiado, y por todo ello también les doy las gracias.

Mi gratitud también va dirigida a toda mi familia de los que sé que siempre estarán apoyándome y en especial a mi abuelo Valentín que ya hace algún tiempo ejerce las funciones de ángel de la guarda; gracias a todos mis amigos repartidos entre Burgos y Valladolid principalmente, aunque no me puedo olvidar de los dispersos por toda la geografía española y de todos los que se encuentran a lo ancho del mundo. No daré ningún nombre pues no me perdonaría olvidar injustamente a alguien. Todos vosotros sabéis quienes sois. Os agradezco todo lo que habéis aportado a lo largo del tiempo con vuestro grano de arena a esta tesis, aun sin tener ninguna relación con el mundo de las matemáticas.

Me gustaría también agradecer el apoyo de los miembros del Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática por su atención hacia mí, disposición para ofrecerme su ayuda, y cuyos consejos y estímulo han sido siempre de inestimable ayuda. En especial quiero resaltar la colaboración de los profesores Dr. D. Félix López Fernández-Asenjo, Dr. D. Manuel Núñez Jiménez y Dr. Dª Ana María Sanz Gil, que revisaron el trabajo y realizaron comentarios y sugerencias de gran valía.

Je veux remercier également professeur Vincent Thilliez qui m'a accueilli à l'Université Lille I avec gentilesse et aussi pour réviser la thèse. J'ai aussi que remercier professeur Stephane Malek pour notres échanges mathématiques. J'espere qui dans le future nous avons plus discussions et j'espere pouvoir mantenir le contacte.

Por último, agradecer a la Junta de Castilla y León y el Fondo Social Europeo por concederme una beca de formación como personal investigador y su posterior adscripción a la Universidad de Valladolid en forma de contrato.

A mi hermana

Índice general

Introducción

La memoria que presentamos tiene dos objetivos principales. En primer lugar, se construirán operadores de extensión lineal y continua en clases ultraholomorfas (en el sentido de Carleman) en polisectores, generalizando de este modo el teorema de Borel-Ritt-Gevrey, y se estudiarán propiedades de casianaliticidad en dichas clases. En segundo lugar, se resolverá el problema de momentos de Stieltjes en los espacios de Gelfand-Shilov mediante la construcción de aplicaciones lineales y continuas, inversas por la derecha de la aplicación de momentos.

Antes de comentar los resultados obtenidos, creemos conveniente realizar una revisión concisa del desarrollo de los conceptos fundamentales con los que trabajaremos. Como iremos indicando, en el Capítulo 1 de la memoria, de carácter preliminar, se abordarán algunos de estos aspectos con el debido detalle.

Comenzaremos recordando algunos hechos relevantes de la teoría de desarrollos asintóticos en una y varias variables, recogidos en las Secciones 1.3 y 1.4. H. Poincaré, en el año 1886, introdujo el concepto de desarrollo asintótico en 0 para funciones holomorfas en sectores abiertos S de $\mathbb{C}$ con vértice en 0. Su intención era dar un significado analítico a las soluciones formales en serie de potencias (en general, series divergentes) de ecuaciones diferenciales ordinarias en puntos singulares irregulares. Con la formulación actual de su definición, resultan ser equivalentes los siguientes hechos (ver la Definición 1.3.1 y la Proposición 1.3.2):

(i) La función f admite desarrollo asintótico en S.

(ii) Las derivadas de f admiten desarrollo asintótico en S (entendiendo la propia función como derivada de orden nulo).

(iii) Las derivadas de f permanecen acotadas en los subsectores propios y acotados de S.

R. Gérard e Y. Sibuya [32] extienden en 1979 el concepto de desarrollo asintótico al caso de funciones de varias variables holomorfas en polisectores (productos cartesianos de sectores). En su definición la función se aproxima mediante sumas de la forma

$$\sum_{|\boldsymbol{\beta}|\le k} a_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\beta}}, \quad \boldsymbol{\beta}\in\mathbb{N}_0^n,\ k\in\mathbb{N}_0 \tag{1}$$

(donde $|\boldsymbol{\beta}|$ representa la longitud del multiíndice $\boldsymbol{\beta}$), y se verifican todas las propiedades aritméticas deseables, pero la equivalencia anterior no se conserva, pues es posible construir funciones que admiten desarrollo asintótico mientras que sus derivadas no (un ejemplo, debido a J. A. Hernández, F. López y S. Pérez-Cacho, se puede encontrar en [39]).

Surge la siguiente cuestión:

Dada una serie de potencias arbitraria en torno a $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$,

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}},$$

y un polisector de $\mathbb{C}^n$, ¿existe una función holomorfa en el polisector y que admita por desarrollo asintótico en $\mathbf{0}$ la serie de partida?

Este tipo de problemas de interpolación son denominados de Borel-Ritt, y el correspondiente a una variable fue resuelto afirmativamente en 1916 por J. F. Ritt [68]. En el trabajo de Gérard y Sibuya se da respuesta también afirmativa a esta cuestión, y J.-P. Ramis [64] demuestra la existencia de una función cuyas derivadas sucesivas de cualquier orden admiten por desarrollo asintótico en $\mathbf{0}$ la derivada formal del mismo orden de la serie de partida.

La carencia señalada para esta definición queda subsanada con la introducida por H. Majima en 1983 [50, 51], y que denominó de desarrollo asintótico fuerte. Su idea, a grandes rasgos y sin tener en cuenta consideraciones relativas a la convergencia de las series que escribimos a continuación, está basada en sustituir las sumas parciales (1) por otras del tipo

$$\sum_{\boldsymbol{\beta} \not\geq \boldsymbol{\alpha}} a_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\beta}}, \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^n,\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n.$$

Observemos que en el caso de una variable ambos enfoques coinciden.

La definición de Majima es la siguiente:

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y pongamos $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si $\emptyset \neq J \subset \mathcal{N}$, denotamos por J' a $\mathcal{N} \setminus J$. Sea f una función compleja definida y holomorfa en un polisector $S = \prod_{j=1}^n S_j$ de $\mathbb{C}^n$ con vértice en $\mathbf{0}$. Se dice que f admite desarrollo asintótico fuerte en $\mathbf{0}$ siguiendo S, y se escribe $f \in \mathcal{A}(S)$, si existe una familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f_{\boldsymbol{\alpha}_J} : \emptyset \neq J \subset \mathcal{N},\ \boldsymbol{\alpha}_J \in \mathbb{N}_0^J \right\},$$

donde $f_{\boldsymbol{\alpha}_J}$ es una función holomorfa de $S_{J'} = \prod_{j \in J'} S_j$ en $\mathbb{C}$ si $J \neq \mathcal{N}$, y $f_{\boldsymbol{\alpha}_J} \in \mathbb{C}$ si $J = \mathcal{N}$, verificándose que, si se define para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ la función

$$\mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{F})(\boldsymbol{z}) := \sum_{\emptyset \neq J \subset \mathcal{N}} (-1)^{\#J+1} \sum_{\substack{\boldsymbol{\beta}_J \in \mathbb{N}_0^J \\ \boldsymbol{\beta}_J \leq \boldsymbol{\alpha}_J - \mathbf{1}_J}} \frac{f_{\boldsymbol{\beta}_J}(\boldsymbol{z}_{J'})}{\boldsymbol{\beta}_J!} \boldsymbol{z}_J^{\boldsymbol{\beta}_J}, \qquad \boldsymbol{z} \in S,$$

entonces para cada subpolisector propio y acotado T de S (pondremos $T \prec S$) y cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$, existe $c = c(\boldsymbol{\alpha}, T) > 0$ tal que para cada $\boldsymbol{z} \in T$,

$$|f(\boldsymbol{z}) - \mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{F})(\boldsymbol{z})| \leq c\, |\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}|,$$

donde, si $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ y $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}| = |z_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |z_n|^{\alpha_n}$. En estas condiciones, la familia $\mathcal{F}$ es única y se denomina familia total de desarrollo asintótico fuerte de f, denotada por $\mathrm{TA}(f)$. Sus elementos, que al igual que los coeficientes de la serie de desarrollo asintótico en el caso unidimensional pueden ser obtenidos como límites de las derivadas de f respecto de parte de sus variables cuando estas tienden hacia cero (ver (1.25)), resultan admitir desarrollo asintótico fuerte en el correspondiente polisector y estar ligados por unas condiciones de coherencia (ver (1.26)). Con este concepto de desarrollo fuerte, además de verificarse todas las propiedades algebraicas usuales, es válida la equivalencia comentada anteriormente en el caso unidimensional, cambiando sectores por polisectores, como se probó en [37] (para un material más accesible, ver [39]).

Denominemos $\mathfrak{F}(S)$ al conjunto de las familias coherentes constituidas por funciones $f_{\boldsymbol{\alpha}_J} \in \mathcal{A}(S_{J'})$, al que se dota de estructura vectorial de forma natural. Se pueden considerar las aplicaciones

$$\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}(S) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n} \quad \text{y} \quad \mathrm{TA} : \mathcal{A}(S) \longrightarrow \mathfrak{F}(S), \tag{2}$$

siendo la primera de ellas la definida por

$$\tilde{\mathcal{B}}(f) := \big(D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{0})\big)_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n},$$

donde se ha puesto

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{0}) := \lim_{\substack{\boldsymbol{z} \to \mathbf{0} \\ \boldsymbol{z} \in T \prec S}} D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{z}) = f_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{TA}(f), \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n.$$

Estas aplicaciones son homomorfismos de álgebras diferenciales (preservan suma, producto por escalares, producto de funciones y derivación) si se definen en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ y $\mathfrak{F}(S)$ operaciones producto adecuadas, y son continuas si se dota a $\mathcal{A}(S)$ de su topología natural (ver la Observación 1.4.3) y a $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ y $\mathfrak{F}(S)$ de las topologías producto correspondientes. Respecto al teorema de Borel-Ritt en esta situación, conviene recalcar que el conocimiento de $\tilde{\mathcal{B}}(f)$ no permite en general reconstruir el resto de la familia $\mathrm{TA}(f)$ para una función f que admita desarrollo asintótico fuerte, de modo que se pueden plantear distintos problemas de interpolación. La sobreyectividad de $\tilde{\mathcal{B}}$ y TA fue probada por H. Majima [50, 51], para la segunda de ellas sólo bajo ciertas restricciones que fueron eliminadas por J. A. Hernández [37] mediante una prueba constructiva (que se puede ver también en [38], donde se comparan diferentes modificaciones del concepto de desarrollo asintótico en varias variables que aparecen en la literatura). Otra prueba, no constructiva y basada en el resultado clásico del Análisis Funcional que relaciona la sobreyectividad de una aplicación lineal y continua entre espacios de Fréchet con propiedades de su traspuesta, puede verse en el trabajo de F. Galindo y J. Sanz [30].

Llegados a este punto, surge de forma natural la pregunta de si es posible construir aplicaciones lineales y continuas que sean inversas por la derecha de $\tilde{\mathcal{B}}$ y TA, respectivamente, es decir, aplicaciones que resuelvan los problemas de interpolación de forma lineal y continua en todo el espacio correspondiente y que suelen llamarse, por razones evidentes, operadores de extensión. El primer resultado que probamos en la memoria, Teorema 1.3.4, establece que no existen operadores de extensión en este contexto (nos limitamos a probar el caso unidimensional, pues las ideas son similares en el caso general). El razonamiento que seguimos es una adaptación del realizado por B. S. Mityagin [59], que demostró que no existe una inversa lineal y continua para la aplicación, denominada de Borel, dada por

$$f \in \mathcal{C}^{\infty}[-1,1] \mapsto \{f^{(n)}(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}, \tag{3}$$

que es lineal, sobreyectiva en virtud del teorema clásico de E. Borel [8], y continua cuando damos a $\mathcal{C}^{\infty}[-1,1]$ su topología usual y a $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ la topología producto. Nuestro primer objetivo en la memoria es determinar subclases de $\mathcal{A}(S)$, y las correspondientes en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y en $\mathfrak{F}(S)$, lo más generales posible, de modo que, cuando se les dote de topologías naturales, la restricción de $\tilde{\mathcal{B}}$ y TA a las primeras admita operador de extensión. Para lograrlo, nos apoyaremos en el resultado que, hasta donde conocemos, proporciona la solución más general en el caso unidimensional, debido a V. Thilliez [77], en el que se consideran clases, denominadas ultraholomorfas, consistentes en funciones holomorfas en sectores de la superficie de Riemann del logaritmo cuyas derivadas tienen su crecimiento gobernado en términos de una sucesión numérica fuertemente regular. Aunque daremos a continuación unas ideas generales, las propiedades de las sucesiones fuertemente regulares que necesitaremos están detalladas en la Sección 1.1. Estos problemas de extensión están estrechamente ligados a otros en las denominadas clases ultradiferenciables, que pasamos a comentar brevemente, aunque de nuevo se abordarán con mayor profundidad en las Secciones 1.1 y 1.2. Conviene mencionar que nos limitaremos a considerar las clases denominadas de Carleman o de Roumieu, en las que centramos nuestros resultados, sin entrar en el estudio de cuestiones similares para las clases de Beurling.

A finales del siglo XIX, É. Borel [9, 10] presentó los primeros ejemplos de conjuntos E de funciones complejas indefinidamente derivables en la recta real, que contienen funciones no analíticas (en el sentido real) y que, sin embargo, gozan de la siguiente propiedad, propia de la clase de las funciones analíticas en $\mathbb{R}$:

Si $f \in E$ y para un x_0 se tiene que $f^{(n)}(x_0) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, entonces f es la función idénticamente nula.

Una clase E con esta propiedad se denominará, en consecuencia, casianalítica. En 1912, J. Hadamard [35], inspirado por el trabajo previo de E. Holmgren (1908) para la ecuación del calor, introdujo las clases (denominadas hoy en día ultradiferenciables de Carleman) $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(I)$ de funciones complejas f indefinidamente derivables en un intervalo abierto I cuyas derivadas están sometidas a una limitación de su crecimiento en términos de una sucesión de números reales estrictamente positivos $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$, que expresaremos de la siguiente forma: existen $C = C(f) > 0$ y $A = A(f) > 0$ tales que

$$|f^{(p)}(x)| \leq CA^p p! M_p, \qquad p \in \mathbb{N}_0,\ x \in I.$$

Hadamard planteó el problema de establecer condiciones necesarias y suficientes sobre $\mathbf{M}$ para que la clase sea casianalítica. Este tipo de clases, con $M_p = p!^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 1$, aparece nuevamente poco después en el estudio de M. Gevrey [33] acerca de las soluciones de ciertos tipos de ecuaciones en derivadas parciales, razón por la que dichas clases llevan su nombre (volveremos sobre ellas más adelante). El problema de Hadamard es resuelto por M. Denjoy [22], que da una condición suficiente de casianaliticidad, y T. Carleman, que lo cierra en 1923 (su memoria [14] sigue siendo una excelente exposición sobre el tema; otros textos que incluyen este resultado son [40, 52, 70]). Se admitirá que $\mathbf{M}$ es logarítmicamente convexa (es decir, la sucesión $(M_{p+1}/M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ es creciente), lo que no resta generalidad al problema, en cuyo caso la condición de casianaliticidad es

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{pM_p} = \infty.$$

En otros términos, si se define la clase $\Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0)$ de las sucesiones $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ de números complejos para las cuales existe $A = A(\boldsymbol{\lambda}) > 0$ de modo que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{|\lambda_p|}{A^p p! M_p} < \infty,$$

y se elige $x_0 \in I$, la restricción de la aplicación de Borel

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{C}_{\mathbf{M}}(I) &\longrightarrow \Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0) \\ f &\longrightarrow \mathcal{B}f := (D^p f(x_0))_{p\in\mathbb{N}_0}, \end{aligned}$$

que está bien definida y es lineal, será inyectiva bajo la condición de casianaliticidad. Sin embargo, T. Carleman [14] probó que si además la clase contiene funciones no analíticas, entonces $\mathcal{B}$ no es suprayectiva. Así, cuando se trate de obtener operadores de extensión en este contexto, será natural imponer la condición de no casianaliticidad,

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{pM_p} < \infty.$$

De hecho, H.-J. Petzsche [61] estableció en 1988 la equivalencia entre la suprayectividad de $\mathcal{B}$ y la propiedad de no casianaliticidad fuerte, consistente en la existencia de una constante $A > 0$ de forma que para cada $p \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k\geq p} \frac{M_k}{(k+1)M_{k+1}} \leq A\frac{M_p}{M_{p+1}}.$$

Esta propiedad se probó también necesaria y suficiente para la existencia de operadores de extensión en términos similares a los que aquí construiremos.

Otro resultado clásico que ha sido estudiado en este contexto de clases ultradiferenciables es el teorema de extensión de Whitney [82, 83], que dado un cerrado F de $\mathbb{R}^n$ caracteriza los jets (familias) $\{F^{\boldsymbol{J}} : \boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n\}$ de funciones continuas sobre F que provienen de una función indefinidamente derivable en $\mathbb{R}^n$, es decir, tales que existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que $D^{\boldsymbol{J}}g = F^{\boldsymbol{J}}$ en F para todo $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$. J. Bruna [13] obtuvo una generalización de este teorema para clases de Carleman no casianalíticas y, basándose en ella, J. Chaumat y A.-M. Chollet [18] establecieron el resultado (que describimos en la Sección 1.2) en el que se apoya V. Thilliez [77] para la construcción de los operadores de extensión en clases ultraholomorfas antes mencionados. En estos tres últimos trabajos es necesario imponer a $\mathbf{M}$ una nueva condición, la de crecimiento moderado, consistente en la existencia de una constante $A \geq 0$ de forma que

$$M_{p+\ell} \leq A^{p+\ell} M_p M_\ell \text{ para cada } p, \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Diremos que $\mathbf{M}$ es fuertemente regular si es logarítmicamente convexa, fuertemente no casianalítica y de crecimiento moderado, y, como ya dijimos, será para este tipo de sucesiones para las que obtendremos nuestros resultados.

Aunque no las consideraremos en nuestro estudio, en la literatura aparecen otras clases ultradiferenciables que, basándose en un trabajo de A. Beurling posteriormente mejorado por R. W. Braun, R. Meise y B. A. Taylor [12], se definen no mediante una sucesión $\mathbf{M}$, sino mediante una función peso ω en términos de cuya conjugada de Young se expresa el comportamiento de las derivadas de los elementos de la clase. Para estas clases, que también pueden ser de tipo Roumieu o de tipo Beurling, como antes, se han obtenido numerosos resultados de extensión relacionados con los teoremas de Borel y Whitney, entre los que citamos los de R. Meise y B. A. Taylor [55, 56, 57], J. Bonet, R. Meise y B. A. Taylor [6, 7], J. Bonet, R. W. Braun, R. Meise y B. A. Taylor [5], M. Langenbruch [46], etc. Una buena referencia para estos y otros asuntos relacionados con las clases ultradiferenciables es la monografía de J. Bonet [4]. Otros trabajos muy interesantes de carácter eminentemente expositivo acerca de las clases de Carleman son los de V. Thilliez [76, 78].

Volviendo a las clases ultraholomorfas, las series formales de potencias y los desarrollos asintóticos denominados de Gevrey aparecen de forma constante en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias algebraicas, y en la de sistemas meromorfos, lineales o no, de ecuaciones diferenciales ordinarias en torno a un punto singular irregular. Diremos que una serie de potencias formal $\hat{f} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p/p!$ con coeficientes complejos es Gevrey de orden $\alpha \geq 1$ si existen constantes $C > 0$ y $A > 0$ tales que

$$|a_p| \leq CA^p p!^{\alpha}, \quad p \in \mathbb{N}_0.$$

Equivalentemente, se trata de que la sucesión $(a_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ pertenezca a la clase $\Lambda_\alpha := \Lambda_{\mathbf{M}_{\alpha-1}}(\mathbb{N}_0)$ introducida anteriormente, donde $\mathbf{M}_{\alpha-1} = (p!^{\alpha-1})_{p\in\mathbb{N}_0}$. E. Maillet [49] probó en 1903 que toda solución formal $\hat{f}$ de una ecuación diferencial algebraica es Gevrey para un cierto orden. Si $\alpha = 1$, la serie formal representa una función holomorfa en un cierto disco o una función entera, pero si $\alpha > 1$ la serie diverge en general en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y corresponde estudiar la existencia de funciones que, siendo solución de la ecuación, admitan la serie por desarrollo asintótico. Retomando ideas de É. Borel, É. Le Roy, E. Maillet, R. Nevanlinna, G. H. Hardy y G. N. Watson, principalmente, a finales de los 70 J.-P. Ramis [63, 65, 53] introduce las teorías de desarrollos asintóticos de Gevrey y de k-sumabilidad de series formales de Gevrey. Gracias a una extensión de esta última herramienta, denominada multisumabilidad e introducida por J. Écalle [26, 27], se consiguió dar significado analítico a las soluciones formales en serie de potencias no convergentes antes mencionadas (ver los trabajos de J.-P. Ramis [63, 65], B. L. J. Braaksma [11], J.-P. Ramis e Y. Sibuya [66] o W. Balser [2]). Recordamos las propiedades y resultados básicos de esta teoría asintótica, que se pueden encontrar expuestos de manera excelente en el texto de W. Balser [3].

Sea S un sector con vértice en 0 y α un número real con $\alpha \geq 1$. Diremos que una función f holomorfa en S tiene la serie de potencias formal $\hat{f}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p z^p/p!$ como desarrollo asintótico Gevrey de orden α en S, y escribiremos $f \in \mathcal{G}_\alpha(S)$, si para cada subsector propio y acotado T de S existen constantes $c, A > 0$ (que dependen de T) de forma que para cada $N \in \mathbb{N}_0$ y $z \in T$,

$$\Big|z^{-N}\Big(f(z) - \sum_{p=0}^{N-1} \frac{f_p}{p!} z^p\Big)\Big| \leq cA^N N!^{\alpha-1}.$$

En ese caso, se verifica que

$$f_p = \lim_{z\to 0, z\in T} f^{(p)}(z), \qquad p \in \mathbb{N}_0.$$

Los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $f \in \mathcal{G}_\alpha(S)$.

ii) Para cada subsector propio y acotado T de S, existen constantes $c, A > 0$ para las cuales

$$\sup_{z\in T} |f^{(p)}(z)| \leq cA^p p!^{\alpha} \text{ para cada } p \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

De lo anterior, se deduce fácilmente que si ponemos $f^{(p)}(0) := f_p$ para $p \in \mathbb{N}_0$, la aplicación de Borel $\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{G}_\alpha(S) \to \Lambda_\alpha$ que envía f en la sucesión $(f^{(p)}(0))_{p\in\mathbb{N}_0}$ está bien definida y es lineal. De hecho, si se definen las operaciones producto y derivación de la forma natural, ambos espacios son álgebras diferenciales y $\tilde{\mathcal{B}}$ es un homomorfismo entre ambas. En cuanto a la sobreyectividad de esta aplicación, el teorema de Borel-Ritt-Gevrey, probado por J.-P. Ramis [63] mediante el uso de la transformada incompleta de Laplace, establece su equivalencia con el hecho de que la amplitud o abertura del sector S sea a lo sumo $(\alpha - 1)\pi$. Parece natural entonces intentar obtener operadores de extensión bajo esta condición, lo que fue conseguido por V. Thilliez [75] basándose en resultados para clases ultradiferenciables de J. Chaumat y A.-M. Chollet [16, 17], y, posteriormente y mediante un análisis cuidadoso de la solución en forma integral de Ramis, por J. Sanz [72]. Enunciemos este resultado.

Dados $A > 0$, $\alpha > 1$ y un sector S_γ de amplitud $\pi\gamma$, con $\gamma < \alpha - 1$, se consideran los espacios $\mathcal{A}_{\alpha,A}(S_\gamma)$, de las funciones holomorfas en S_γ tales que

$$\|f\|_{\alpha,A} := \sup_{z\in S_\gamma, p\in\mathbb{N}_0} \frac{|f^{(p)}(z)|}{A^p p!^\alpha} < \infty,$$

y $\Lambda_{\alpha,A}$, formado por las sucesiones $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ de números complejos tales que

$$|\boldsymbol{\lambda}|_{\alpha,A} := \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{|\lambda_p|}{A^p p!^\alpha} < \infty.$$

$(\mathcal{A}_{\alpha,A}(S_\gamma), \|\cdot\|_{\alpha,A})$ y $(\Lambda_{\alpha,A}, |\cdot|_{\alpha,A})$ son espacios de Banach, y la aplicación $\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\alpha,A}(S_\gamma) \to \Lambda_{\alpha,A}$ está bien definida y es lineal y continua. Entonces, existe una constante $c = c(\alpha,\gamma) > 1$ de modo que para cada $A \in (0,\infty)$ existe una aplicación lineal y continua $T_{\alpha,A,\gamma} : \Lambda_{\alpha,A} \to \mathcal{A}_{\alpha,cA}(S_\gamma)$ tal que $\tilde{\mathcal{B}} \circ T_{\alpha,A,\gamma} = \mathrm{Id}_{\Lambda_{\alpha,A}}$, la aplicación identidad en $\Lambda_{\alpha,A}$.

En cuanto a la situación en el caso de varias variables, en 1989 Y. Haraoka [36] estudia las funciones f con desarrollo asintótico fuerte Gevrey de orden $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in [1,\infty)^n$ en polisectores acotados S de $\mathbb{C}^n$ con vértice en $\mathbf{0}$, caracterizadas por que, para cada subpolisector propio y acotado T de S existen constantes $c > 0$ y $\boldsymbol{A} = (A_1,\ldots,A_n) \in (0,\infty)^n$ (que dependen de T) de forma que para cada $\boldsymbol{z} \in T$ y cada $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que

$$|f(\boldsymbol{z}) - \mathrm{App}_{\boldsymbol{J}}(f)(\boldsymbol{z})| \le c\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J}!^{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}}\,|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{J}}|,$$

donde, si $\boldsymbol{J} = (j_1,\ldots,j_n)$, se ha puesto

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{J}} = A_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot A_n^{j_n}, \qquad \boldsymbol{J}!^{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}} = j_1!^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot j_n!^{\alpha_n-1}.$$

Tras definir de forma acorde las series de potencias y las funciones holomorfas de Gevrey, mediante las acotaciones correspondientes sobre sus coeficientes y sus derivadas, respectivamente, se prueba que una función es de Gevrey si, y sólo si, admite desarrollo fuerte de Gevrey, y se obtienen resultados de tipo Borel-Ritt-Gevrey que garantizan que las restricciones naturales de las aplicaciones definidas en (2) son sobreyectivas, bajo ciertas condiciones en el segundo caso. En el trabajo [72] se construyen operadores de extensión lineal y continua para ambos casos, en términos similares a los del resultado unidimensional de V. Thilliez y de J. Sanz anterior. Para ello resulta decisivo el hecho de que la solución en forma integral en el caso unidimensional puede ser adaptada para obtener funciones a valores en un espacio de Banach con comportamiento asintótico prefijado en el sector. Cuando en el lugar de este espacio se coloca un espacio de funciones Gevrey, un isomorfismo natural del tipo

$$\mathcal{A}_{(\alpha,\beta),(A,B)}(S_\gamma \times S_\mu) \simeq \mathcal{A}_{\alpha,A}(S_\gamma, \mathcal{A}_{\beta,B}(S_\mu)) \tag{5}$$

permite deducir resultados bidimensionales. Esta es la idea que será también fructífera para resolver los problemas a los que nos enfrentamos en esta ocasión.

El resultado de extensión unidimensional y para el caso Gevrey fue generalizado por V. Thilliez [77] para clases ultraholomorfas en sectores definidas en términos de una sucesión $\mathbf{M}$ fuertemente regular, resultado que exponemos en la Sección 1.3. La condición para la existencia de estos operadores es de nuevo que la amplitud del sector esté limitada en términos del denominado índice de crecimiento de la sucesión, $\gamma(\mathbf{M})$ (cantidad introducida en la Sección 1.1), lo que concuerda con el caso Gevrey, pues $\gamma((p!^\alpha)_{p\in\mathbb{N}_0}) = \alpha$ para cada $\alpha > 0$.

Llegados a este punto, podemos ya indicar el objetivo de la primera sección del Capítulo 2 de la memoria, que es dar las correspondientes versiones multidimensionales de este último resultado, construyendo inversas por la derecha lineales y continuas para los operadores $\tilde{\mathcal{B}}$ y TA. Fijados $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de números reales estrictamente positivos $\mathbf{M}$, una constante $A > 0$, un polisector S con vértice en $\mathbf{0}$ en $\mathcal{R}^n$ (donde $\mathcal{R}$ es la superficie de Riemann del logaritmo) y un espacio de Banach complejo B, se define $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B)$ como el espacio de Banach de las funciones holomorfas de S en B tales que

$$\sup_{\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^n, \boldsymbol{z}\in S} \frac{\left\|D^{\boldsymbol{J}} f(\boldsymbol{z})\right\|_B}{A^j j! M_j} < \infty,$$

donde j es la longitud del multiíndice $\boldsymbol{J}$. La razón de considerar funciones a valores en un espacio de Banach es posibilitar la reducción del número de variables a una sola mediante el establecimiento de, si no un isomorfismo como en (5), sí al menos aplicaciones lineales y continuas que permitan el paso de uno a otro lado en esa correspondencia. Este es el propósito del Teorema 2.1.1, que ya permite deducir, por un razonamiento inductivo, la existencia de operadores de extensión para $\tilde{\mathcal{B}}$ (Teorema 2.1.2) siempre que la amplitud $\pi\gamma_j$ de cada factor S_j en S sea tal que $\gamma_j < \gamma(\mathbf{M})$. Para abordar el problema correspondiente a TA, se reformulará en términos de la denominada familia de primer orden asociada a cada elemento f de $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B)$, que denotamos por $\tilde{\mathcal{B}}_1(f)$, y que, siendo una subfamilia de $\mathrm{TA}(f)$, la determina por completo cuando se tienen en cuenta las condiciones de coherencia. Tras localizar un espacio adecuado en el que plantear la interpolación (Proposición 2.1.6), se obtiene en el Teorema 2.1.8 el segundo operador de extensión mediante un proceso recurrente, para el que resulta fundamental el estudio, realizado en el Lema 2.1.7, del comportamiento de las derivadas de la función solución del problema unidimensional cuando esta toma sus valores en un espacio de Banach del tipo $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B)$. A diferencia de lo ocurrido en el caso Gevrey antes comentado, en el que el operador de extensión obtenido en [72] fue dado mediante una expresión integral concreta que hacía asequible este estudio, en este caso la tarea es ardua, pues la técnica de construcción del operador de Thilliez se basa en una doble aplicación de los operadores de extensión de tipo Whitney debidos a Chaumat y Chollet y en la solución de un problema $\overline{\partial}$. Debido a su longitud, la prueba del Lema 2.1.7 es pospuesta hasta la última sección del capítulo.

Otro problema clásico es, como ya se ha indicado en el caso ultradiferenciable, el de la casianaliticidad, es decir, el de caracterizar la inyectividad de las aplicaciones de Borel en este contexto, $\tilde{\mathcal{B}}$ y TA, definidas en la clase

$$\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}}) := \bigcup_{A>0} \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}),$$

donde $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ es un polisector producto de sectores S_{γ_j} de amplitud $\pi\gamma_j$, $j=1,\ldots,n$. Diremos que la clase es (s) casianalítica si TA es inyectiva, y casianalítica si lo es $\tilde{\mathcal{B}}$. A este problema se dedica la Sección 2.2. En el caso unidimensional y para las clases Gevrey de orden $\alpha>1$ (es decir, cuando $M_n = n!^{\alpha-1}$, $n\in\mathbb{N}_0$), el resultado es clásico y se denomina el lema de Watson [81]: la clase es casianalítica si, y sólo si, $\gamma \geq \alpha-1$. Medio siglo después, en 1966, B. I. Korenblujm [44] resolvió el problema general en el caso unidimensional, como recordamos en el Teorema 2.2.4, en términos de la no convergencia de la integral logarítmica

$$\int^{\infty} \frac{\log T_{\widetilde{\mathbf{M}}}(r)}{r^{1+1/(\gamma+1)}}\,dr, \tag{6}$$

donde $\widetilde{\mathbf{M}} = (n!M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $T_{\widetilde{\mathbf{M}}}$ es la función de Ostrowski asociada (ver (1.5)). En el caso de varias variables, los trabajos de P. Lelong [48] y W. A. Groening [34] permitieron a J. A. Hernández [37] dar resultados de (s) casianaliticidad para clases ultraholomorfas en polisectores, las derivadas $D^{\boldsymbol{J}}f$ de cuyos elementos están sujetas a estimaciones en términos de una multisucesión $(M_{\boldsymbol{J}})_{\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^n}$. En esta misma línea, en [71] se obtuvieron versiones del lema de Watson para la (s) casianaliticidad y la casianaliticidad de las clases de Gevrey definidas por Y. Haraoka. En la situación que nos ocupa, el resultado de Korenblujm nos permite caracterizar la casianaliticidad en varias variables, en un sentido o en otro y para sucesiones $\mathbf{M}$ arbitrarias, en términos de una integral similar en la que el papel de γ es ahora interpretado bien por $\overline{\gamma} = \text{máx}\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$ (Proposición 2.2.5), bien por $\underline{\gamma} = \text{mín}\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$ (Proposición 2.2.11). A continuación, gracias a resultados clásicos de S. Mandelbrojt [52], damos una nueva condición suficiente de (s) casianaliticidad en la Proposición 2.2.7. Si se trabaja con sucesiones $\mathbf{M}$ fuertemente regulares, es posible establecer sendas generalizaciones del lema de Watson (Proposiciones 2.2.9 y 2.2.14) bajo la condición adicional de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{M_n}{M_{n+1}}\Big)^{1/\gamma(\mathbf{M})} = \infty, \tag{7}$$

donde $\gamma(\mathbf{M})$ denota el índice de crecimiento. También bajo esta hipótesis, satisfecha en particular en el caso Gevrey, es posible probar que la condición $\overline{\gamma} < \gamma(\mathbf{M})$, suficiente para la existencia del operador de extensión correspondiente a la aplicación de Borel $\tilde{\mathcal{B}}$, es de hecho necesaria (Teorema 2.2.15). Estos resultados para sucesiones fuertemente regulares son nuevos incluso en una variable, y generalizan resultados previos de V. Thilliez [77] y de J. Schmets y M. Valdivia [73].

En la Sección 2.3 se estudian resultados de rigidez (Teoremas 2.3.2 y 2.3.4) para los operadores de extensión construidos, consistentes en la determinación de condiciones de anulación sobre las funciones interpoladoras que aseguren que los datos de partida eran nulos. Se adopta la misma línea de argumentación que en los resultados de V. Thilliez [75] para el caso unidimensional. Como se muestra, si la amplitud de los polisectores en los que se trabaja es adecuada, estos resultados se pueden combinar (ver los Corolarios 2.3.3 y 2.3.5) con los lemas de Watson obtenidos anteriormente.

Cerramos el comentario de este capítulo con la descripción de una nueva generalización del teorema de Borel, presentada en la Sección 2.4, y cuya consideración emana de las mismas ideas expuestas en el caso de los problemas interpolatorios relativos al concepto de desarrollo asintótico fuerte. Así, si I y J son sendos intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ con $0 \in I$, $0 \in J$, dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(I \times J)$ se pueden construir las sucesiones de funciones $(g_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, en $\mathcal{C}^\infty(I)$ y $\mathcal{C}^\infty(J)$, respectivamente, dadas por

$$g_m(x) = D^{(0,m)}f(x,0), \quad x \in I,\ m \in \mathbb{N}_0; \quad h_n(y) = D^{(n,0)}f(0,y), \quad y \in J,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Dichas sucesiones están ligadas por unas condiciones de coherencia que se deducen del teorema de Schwarz. Pues bien, probamos en el Teorema 2.4.6 que todo par de sucesiones de funciones bajo estas condiciones proviene de una función f mediante este procedimiento.

El tercer capítulo de la memoria está dedicado a la consideración del problema de momentos de Stieltjes en los espacios de Gelfand-Shilov. Comenzamos realizando una revisión de los resultados existentes al respecto. El problema de momentos, inicialmente propuesto y resuelto por T. J. Stieltjes [74], ha inspirado el trabajo de muchos matemáticos en sus diversas variantes y generalizaciones durante más de un siglo. Se ha mostrado que los momentos son relevantes en distintas áreas del Análisis, tales como las fórmulas de cuadratura, fracciones continuas, teoría de representación o la teoría espectral de operadores. El libro de N. I. Akhiezer [1] es una referencia estándar, y otros temas, tanto teóricos como aplicados, en los que este problema ha tenido influencia, se pueden encontrar en la monografía [45], incluyendo cuestiones del análisis de Fourier, procesamiento de señales, problemas inversos o estadística. Señalemos también que resultados recientes relacionan este tema con el desarrollo asintótico de distribuciones y la teoría de soluciones distribucionales de ecuaciones diferenciales singulares, como puede verse en el libro de R. Estrada y R. P. Kanwal [28] y en las referencias allí incluidas.

En 1989 A. J. Durán [24] obtuvo la siguiente respuesta al llamado problema de momentos de Stieltjes: existe una función f en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de las funciones complejas indefinidamente derivables y de decrecimiento rápido en $\mathbb{R}$, con soporte en $[0,\infty)$ (escribimos $f \in \mathcal{S}(0,\infty)$) y con momentos $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ arbitrariamente prefijados, es decir, tal que

$$\int_0^\infty x^n f(x)\,dx = \mu_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

La integral se denomina el momento n-ésimo de f, $\mu_n(f)$. En otras palabras, podemos decir que la aplicación $\mathcal{M}$ de $\mathcal{S}(0,\infty)$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ que a cada función $f \in \mathcal{S}(0,\infty)$ le asocia su sucesión de momentos es sobreyectiva. Observemos que cuando consideramos la topología usual en $\mathcal{S}(0,\infty)$ y la topología producto en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, esta aplicación es continua, y tiene sentido preguntarse por la existencia de inversas por la derecha lineales y continuas. Como en situaciones anteriores, podemos adaptar el argumento de Mityagin para dar una respuesta negativa (Teorema 3.1.7), por lo que parece natural buscar subespacios de $\mathcal{S}(0,\infty)$ y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, dotados de topologías no triviales adecuadas, que nos permitan construir dichas inversas.

Consideremos los espacios clásicos de Gelfand-Shilov $\mathcal{S}_\alpha(0,\infty)$, con $\alpha > 0$, formados por las funciones $f \in \mathcal{S}(0,\infty)$ para las que existe $q = q(f) > 0$ y, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ existe $C_m = C_m(f) > 0$, de modo que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)| \leq C_m q^n n!^\alpha, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{8}$$

Es sencillo ver que si $f \in \mathcal{S}_\alpha(0,\infty)$, entonces existen $\tilde{C}_0, q_0 > 0$ tales que

$$|\mu_n(f)| \leq \tilde{C}_0 q_0^n n!^\alpha, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

es decir, la sucesión de momentos asociada a f es de la clase Gevrey Λ_α. En sentido contrario, y apoyándose en una idea de A. L. Durán y R. Estrada [25] (que volvieron a probar el resultado de A. J. Durán mediante la combinación de técnicas de transformada de Fourier y el teorema de Borel-Ritt), S.-Y. Chung, D. Kim e Y. Yeom [20, Teorema 3.1] obtuvieron el siguiente resultado:

Sea $\alpha > 2$, entonces para cada $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_\alpha$ existe $f \in \mathcal{S}_\alpha(0,\infty)$ con $\mu_n(f) = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

También se pueden considerar los espacios de Gelfand-Shilov $\mathcal{S}^\alpha(0,\infty)$, con $\alpha > 0$, de las funciones $f \in \mathcal{S}(0,\infty)$ para las que existe $q = q(f) > 0$ y, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ existe $C_m = C_m(f) > 0$, de modo que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| \le C_m q^n n!^\alpha, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{9}$$

Notemos que si $\alpha \le 1$, estas funciones son analíticas en una banda, y por lo tanto $\mathcal{S}^\alpha(0,\infty) = \{0\}$.

Con métodos similares a los utilizados en el resultado previo, J. Chung, S.-Y. Chung y D. Kim [19, Teorema 3.2] probaron que:

Si $\alpha > 1$, entonces para cada $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ existe $f \in \mathcal{S}^\alpha(0,\infty)$ tal que $\mu_n(f) = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Nuestro objetivo en este último capítulo será extender estos dos resultados al caso de espacios de Gelfand-Shilov generales, $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty)$ y $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(0,\infty)$, determinados a partir de una sucesión $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de números positivos que ocupará el lugar de $n!^{\alpha-1}$ en las acotaciones (8) y (9).

Describimos someramente su contenido. En la Sección 3.1 se introducen los espacios funcionales con los que trabajaremos y sus topologías. El estudio del comportamiento de la transformada de Fourier sobre los espacios de Gelfand-Shilov se desarrolla en la Sección 3.2. Se dedica la Sección 3.3 a la solución del problema de momentos para exponentes reales generales en los espacios $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(0,\infty)$ (ver el Teorema 3.3.4), para lo que resulta fructífera una idea de A. Yu. Popov [62]. Finalmente, la Sección 3.4 contiene los resultados para los espacios $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty)$. En este caso, y en el espíritu de los resultados obtenidos en el caso ultraholomorfo, la solución, presentada en el Teorema 3.4.2, viene dada en forma de inversas por la derecha, lineales y continuas, de la aplicación de momentos $\mathcal{M}$ restringida a subclases adecuadas $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(0,\infty)$, con $\mathbf{M}$ fuertemente regular tal que $\gamma(\mathbf{M}) > 1$ y $A > 0$. La construcción sigue los pasos dados en [20], pero requiere un análisis cuidadoso de la continuidad de las diferentes operaciones involucradas en la resolución, y hace intervenir los operadores de extensión de V. Thilliez [77]. Se concluye estudiando hasta qué punto las condiciones impuestas sobre $\mathbf{M}$ para obtener estos operadores son necesarias, mostrando que en algunos casos (que incluyen los espacios $\mathcal{S}_\alpha(0,\infty)$) son de hecho equivalentes a la existencia de aquellos.

Notaciones y terminología

Se denotará por $\mathbb{N}$ al conjunto $\{1, 2, \ldots\}$ y por $\mathbb{N}_0$ al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\mathcal{R}$ denotará la superficie de Riemann del logaritmo. Un sector de $\mathcal{R}$ será un conjunto de la forma

$$S = S_{d,\theta,\rho} = \big\{z : 0 < |z| < \rho, |\arg z - d| < \frac{\theta\pi}{2}\big\},$$

donde $d \in \mathbb{R}$, θ es un número real positivo, y ρ es, bien un número real positivo, bien ∞. La cantidad d se conoce como la dirección de bisección del sector, $\theta\pi$ será su abertura o amplitud, y ρ su radio. En caso de que $\rho = \infty$ tendremos un sector no acotado, que representaremos por $S_{d,\theta}$. Si además $d = 0$, escribiremos

$$S_\theta = S_{0,\theta} = \big\{z : |\arg z| < \frac{\theta\pi}{2}\big\}.$$

Sea S un sector. Diremos que T es un subsector propio de S si es un sector de forma que $\overline{T} \setminus \{0\} \subseteq S$. Diremos que un subsector T de S es propio y acotado si es propio y tiene radio finito, y lo representaremos por $T \prec S$.

Un polisector será un producto cartesiano $S = \prod_{j=1}^{n} S_j \subset \mathcal{R}^n$ de sectores. Decimos que un polisector T es un subpolisector propio de S si $T = \prod_{j=1}^{n} T_j$ con $\overline{T}_j \setminus \{0\} \subseteq S_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. T es acotado si cada uno de sus factores lo es.

Dado $n \in \mathbb{N}$, pondremos $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si J es un subconjunto no vacío de $\mathcal{N}$, denotaremos por $\#J$ a su cardinal.

Dado $\boldsymbol{z} \in \mathcal{R}^n$, escribimos $\boldsymbol{z}_J$ para la restricción de $\boldsymbol{z}$ a J (cuando se considera $\boldsymbol{z}$ como un elemento de $\mathcal{R}^{\mathcal{N}}$).

Dados J y L subconjuntos no vacíos y disjuntos de $\mathcal{N}$ y elementos $\boldsymbol{z}_J \in \mathcal{R}^J$ y $\boldsymbol{z}_L \in \mathcal{R}^L$, se denotará por $(\boldsymbol{z}_J, \boldsymbol{z}_L)$ al elemento de $\mathcal{R}^{J\cup L}$ tal que $(\boldsymbol{z}_J, \boldsymbol{z}_L)_J = \boldsymbol{z}_J$ y $(\boldsymbol{z}_J, \boldsymbol{z}_L)_L = \boldsymbol{z}_L$; también escribimos $J' = \mathcal{N} \setminus J$, y si $j \in \mathcal{N}$ usamos j' en lugar de $\{j\}'$. En particular, usaremos estas convenciones para multiíndices.

Si $S_{\boldsymbol{\theta}} = \prod_{j=1}^{n} S_{\theta_j}$ es un polisector, entonces $S_{\boldsymbol{\theta}_J} = \prod_{j\in J} S_{\theta_j} \subset \mathcal{R}^J$.

Se denotará por $\mathcal{H}(S)$ al conjunto de funciones complejas holomorfas en S, y por $\mathbb{C}\,[[z]]$ al conjunto de series de potencias formales con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Dados $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $m \geq 0$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0, \infty)^n$ y $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathcal{R}^n$, se definen:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n),\\
&|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,\\
&\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \alpha_j \leq \beta_j \text{ para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\},\\
&\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \alpha_j < \beta_j \text{ para cada } j \in \{1, 2, \dots, n\},\\
&\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1),\\
&\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}} = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n},\\
&|\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}| = |\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}} = |z_1|^{\alpha_1} |z_2|^{\alpha_2} \dots |z_n|^{\alpha_n},\\
&\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}}}{\partial \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2} \dots \partial z_n^{\alpha_n}},\\
&m\boldsymbol{t} = (mt_1, mt_2, \dots, mt_n),\\
&\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!,\\
&\boldsymbol{e}_j = (0, \dots, \overset{j)}{1}, \dots, 0).
\end{aligned}
$$

Para $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$, se utilizará con frecuencia la notación $j = |\boldsymbol{J}|$.

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. $B(z_0, r)$ y $\overline{B}(z_0, r)$ denotarán, respectivamente, las bolas abierta y cerrada de centro z_0 y radio r.

Sea A un conjunto. La aplicación identidad en A se denotará por Id_A.

Para un compacto E de $\mathbb{R}^n$ y un punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, E)$ representa la distancia de $\boldsymbol{x}$ a E.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Sucesiones fuertemente regulares

Las clases de funciones y de sucesiones con las que se trabajará en la memoria están definidas mediante restricciones en el crecimiento de sus derivadas o de sus términos, respectivamente. Dichas restricciones serán expresadas en términos de una sucesión numérica que, en aras de una riqueza adecuada de resultados, estará sujeta a determinadas condiciones. En esta primera sección se presentarán dichas condiciones y sus principales consecuencias, haciendo especial énfasis en las sucesiones denominadas fuertemente regulares.

En lo sucesivo, dada una sucesión $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ se supondrá siempre que sus elementos son números reales estrictamente positivos y que $M_0 = 1$.

Definición 1.1.1. Se dice que una sucesión $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ es *logarítmicamente convexa* (en adelante se abreviará diciendo que $\mathbf{M}$ verifica la propiedad (α_0)) si

$$\log(M_p) \leq \frac{\log(M_{p-1}) + \log(M_{p+1})}{2}, \qquad \text{para cada } p \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

o, equivalentemente,

$$M_p^2 \leq M_{p-1}M_{p+1}, \qquad \text{para cada } p \in \mathbb{N}.$$

A la vista de la última expresión, es natural introducir la siguiente

Definición 1.1.2. Se define la *sucesión de cocientes* $\mathbf{m} = (m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ asociada a $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ mediante

$$m_p = M_p/M_{p-1}, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Observación 1.1.3. Es inmediato que $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ cumple la propiedad (α_0) si, y sólo si, la sucesión $\mathbf{m}$ de cocientes asociada es monótona creciente. Más aún, un argumento de convexidad muestra que en este caso también la sucesión $(M_p^{1/p})_{p\in\mathbb{N}_0}$ es monótona creciente. Un resultado clásico del Cálculo Infinitesimal asegura entonces que los límites

$$\lim_{p\to\infty} M_p^{1/p} \qquad \text{y} \qquad \lim_{p\to\infty} m_p$$

existen y coinciden (sean finitos o infinitos). Por otra parte, el crecimiento de $\mathbf{m}$ permite probar sin dificultad que para cada $p, q \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$M_p M_q \leq M_{p+q}.$$

Observación 1.1.4. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, y consideremos la clase $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega)$ de las funciones complejas definidas e indefinidamente derivables en Ω y tales que existe una constante $A = A(f) > 0$ de forma que

$$\sup_{\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^n, \boldsymbol{x}\in\Omega} \frac{|D^{\boldsymbol{J}} f(\boldsymbol{x})|}{A^j j! M_j} < \infty,$$

donde, para cada multiíndice $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$, se ha escrito $j = |\boldsymbol{J}|$. Es obvio que $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega)$ es un espacio vectorial, y es sencillo probar, mediante la fórmula de Leibnitz y teniendo en cuenta que $j!k! \leq (j+k)!$ para todos $j, k \in \mathbb{N}_0$, que si $\mathbf{M}$ cumple (α_0), la clase es cerrada para el producto, es decir, es un álgebra de funciones (de hecho, bastaría con que $(p!M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ cumpliera (α_0), que es una condición más débil). Aunque no se utilizará, (α_0) también implica, bajo las hipótesis lógicas, que la clase es cerrada para la composición (ver [69]).

Supongamos que $\mathbf{M}$ verifica (α_0), como haremos frecuentemente en lo sucesivo. De forma natural surge la pregunta de si esta clase está contenida en la de las funciones analíticas (en sentido real) en Ω. Es claro que esto ocurre si

$$\sup_{p\in\mathbb{N}_0} M_p^{1/p} < \infty, \tag{1.2}$$

y esta condición resulta ser también necesaria para dicha contención, como se puede deducir del trabajo de H. Cartan y S. Mandelbrojt [15]. Puesto que estamos interesados en que la clase $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega)$ sea suficientemente rica, admitiremos que (1.2) no se cumple, lo que, según lo indicado en la Observación 1.1.3, equivale a que $\lim_{p\to\infty} m_p = \infty$. Esto da el significado de la siguiente

Definición 1.1.5. Diremos que $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ cumple la condición (α_1) si cumple la condición (α_0) y además

$$\lim_{p\to\infty} m_p = \infty.$$

Observación 1.1.6. Si $\mathbf{M}$ verifica (α_1), existirá $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $p \geq p_0$ se tenga que $m_p \geq 1$, con lo que $(M_p)_{p \geq p_0 - 1}$ es monótona creciente. Como hacen J. Schmets y M. Valdivia en [73], denominamos *casi-crecientes* a las sucesiones que crecen a partir de un término. Una propiedad sencilla que se deduce del casi-crecimiento de una sucesión $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es que

$$\sup_{(p,q) \in \mathbb{N}_0^2 : 0 \leq q \leq p} \frac{M_q}{M_p} < \infty. \tag{1.3}$$

Observación 1.1.7. Otra cuestión ligada a este tipo de clases es la de la casianaliticidad. Se dice que $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega)$ es *casianalítica* si de las hipótesis:

(i) $f \in \mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega)$, y

(ii) existe $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ tal que f es *plana* en $\boldsymbol{x}_0$, es decir, tal que $D^{\boldsymbol{J}} f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ para todo $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$,

se deduce que f es la función idénticamente nula en Ω. El teorema de Denjoy-Carleman (ver, por ejemplo, [14, 40, 52, 70]) establece condiciones necesarias y suficientes sobre la sucesión $\mathbf{M}$ para que esta propiedad se verifique: suponiendo satisfecha (α_0), se trata de que

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{p M_p} = \infty. \tag{1.4}$$

Definamos a continuación la clase $\Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n)$ constituida por las multisucesiones $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{\boldsymbol{J}})_{\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n}$ de números complejos para las cuales existe $A = A(\boldsymbol{\lambda}) > 0$ de modo que

$$\sup_{\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n} \frac{|\lambda_{\boldsymbol{J}}|}{A^j j! M_j} < \infty.$$

Elegido $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, es obvio que la *aplicación de Borel*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega) &\longrightarrow \Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n) \\ f &\longrightarrow \mathcal{B}f := (D^{\boldsymbol{J}} f(\boldsymbol{x}_0))_{\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n} \end{aligned}$$

está bien definida y es lineal, y si $\mathbf{M}$ verifica las condiciones (α_0) y (1.4), será también, en virtud de la casianaliticidad de la clase, inyectiva. Sin embargo, T. Carleman [14] probó que si $\mathbf{M}$ satisface (α_1) y (1.4), entonces $\mathcal{B}$ no es suprayectiva. Así, puesto que estamos interesados en obtener aplicaciones inversas por la derecha para la aplicación de Borel, también denominadas operadores de extensión (pues asignan a una multisucesión una función cuyas derivadas en un punto son los elementos de aquella), será natural imponer la no verificación de la condición (1.4).

Definición 1.1.8. Diremos que $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ cumple la condición de *no casianaliticidad*, denotada por (γ), si

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{pM_p} < \infty.$$

Observación 1.1.9. De acuerdo con lo anterior, si $\mathbf{M}$ cumple (α_0), en $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega)$ existen funciones f planas en un punto y no idénticamente nulas si, y sólo si, $\mathbf{M}$ satisface (γ).

Cabe mencionar también que las propiedades (α_0) y (γ) implican conjuntamente la propiedad (α_1).

Volvamos a la cuestión de la suprayectividad de $\mathcal{B}$ comentado en la Observación 1.1.7, para la que la condición (γ) es necesaria pero no suficiente. H.-J. Petzsche [61] estableció la equivalencia entre la suprayectividad de $\mathcal{B}$ y una propiedad más fuerte que (γ), que ya aparece en el fundamental trabajo de H. Komatsu [42], y que definimos a continuación.

Definición 1.1.10. Diremos que $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ cumple la condición de *no casianaliticidad fuerte*, a la que denotaremos por (γ_1), si existe una constante $A > 0$ de forma que para cada $p \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k\geq p} \frac{M_k}{(k+1)M_{k+1}} \leq A\frac{M_p}{M_{p+1}}.$$

Cabe destacar que la constante A ha de ser mayor o igual que 1 (basta poner $p = 0$ en la desigualdad anterior).

Introducimos por último una condición, también considerada en [42], que limita la velocidad de crecimiento de $\mathbf{M}$.

Definición 1.1.11. Diremos que $\mathbf{M}$ es *de crecimiento moderado*, o que cumple la condición (μ), si existe una constante $A \geq 0$ de forma que

$$M_{p+\ell} \leq A^{p+\ell} M_p M_\ell \qquad \text{para cada } p, \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Nuevamente debe ser $A \geq 1$ (basta tomar $p = \ell = 0$ en la desigualdad anterior).

H. Komatsu denomina esta propiedad como la de *estabilidad bajo operadores ultradiferenciables*, y W. Matsumoto [54] la relaciona con lo que denomina la *separatividad de clases ultradiferenciables*.

Definición 1.1.12. Diremos que $\mathbf{M}$ es *fuertemente regular* si cumple las propiedades (α_0), (μ) y (γ_1).

Observación 1.1.13. Si $\mathbf{M}$ es una sucesión fuertemente regular, las constantes que aparecen en las definiciones de las propiedades (μ) y (γ_1) pueden ser tomadas iguales (sin más que considerar su máximo).

Como se deduce de lo indicado en las Observaciones 1.1.9 y 1.1.6, toda sucesión que verifique (α_0) y (γ) (en particular, toda sucesión fuertemente regular) es casi-creciente. Aunque V. Thilliez añade a la definición de regularidad fuerte la condición de que $\mathbf{M}$ sea creciente, para nuestros objetivos esta condición no será necesaria.

Cabe mencionar que no hay acuerdo en la literatura a la hora de definir las clases ultradiferenciables: mientras unos autores, y esta ha sido nuestra elección, prefieren acotar las derivadas en términos de $\mathbf{M}$ mediante expresiones del tipo $A^j j! M_j$ (ver, por ejemplo, [18, 77]), otros trabajan con cotas del tipo $A^j M_j$, lo que lleva a una reformulación de las diferentes condiciones definidas hasta ahora (ver, en este caso, [13, 42] entre otros). La denominación de las propiedades (α_1), (γ) y (γ_1) se ha tomado del trabajo de H.-J. Petzsche [61].

El ejemplo más importante de sucesión fuertemente regular es el de las sucesiones de tipo Gevrey.

Definición 1.1.14. Sea $\alpha > 0$. Se llama *sucesión Gevrey de orden* α, denotada por $\mathbf{M}_\alpha$, a la dada por $M_p = p!^\alpha$, $p \in \mathbb{N}_0$.

Pasamos a continuación a definir dos funciones asociadas a una sucesión $\mathbf{M}$ que tendrán relevancia en lo sucesivo. Ambas están ligadas a la función medible $T_{\mathbf{M}} : (0,\infty) \to (0,\infty]$, introducida en este contexto por A. Ostrowski [60], dada por

$$T_{\mathbf{M}}(r) = \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{r^p}{M_p}, \qquad r > 0. \tag{1.5}$$

Definición 1.1.15. Sea $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos que cumple (α_1). Para cada $t > 0$ se definen las cantidades

$$N(t) = \text{mín}\left\{ p \in \mathbb{N}_0 : \inf_{k\in\mathbb{N}_0} \left\{ M_k t^k \right\} = M_p t^p \right\},$$

$$h_{\mathbf{M}}(t) = \inf_{p\in\mathbb{N}_0} M_p t^p = M_{N(t)} t^{N(t)}; h_{\mathbf{M}}(0) = 0. \tag{1.6}$$

Estas funciones gozan de ciertas propiedades que serán de utilidad.

Proposición 1.1.16. Sea $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión cumpliendo (α_1). Entonces:

(i) Para cada $t > 0$, $N(t)$ es el menor entero $p \in \mathbb{N}_0$ de forma que $m_{p+1} \geq \frac{1}{t}$.

(ii) La función N tiene imagen en el conjunto $\mathbb{N}_0$, es monótona decreciente y

$$\lim_{t\to 0^+} N(t) = +\infty \quad \text{ y } \quad N(t) = 0 \text{ para } t \geq \frac{1}{M_1}.$$

(iii) $h_{\mathbf{M}}$ es una función continua en $[0,\infty)$, no decreciente y cuya imagen es el intervalo $[0,1]$. De hecho,

$$h_{\mathbf{M}}(t) = \begin{cases} t^p M_p & \text{si } t \in [1/m_{p+1}, 1/m_p),\ p = 1,2,\ldots, \\ 1 & \text{si } t \geq 1/m_1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Demostración:
Basta observar que para cada $p \in \mathbb{N}$, $m_{p+1} \geq 1/t$ si, y sólo si, $M_{p+1}t^{p+1} \geq M_p t^p$. □

Seguimos en lo queda de esta sección el trabajo de V. Thilliez [77], culminando con la definición del índice de crecimiento de una sucesión fuertemente regular.

Definición 1.1.17. Sea $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular y sea $\gamma > 0$. Decimos que $\mathbf{M}$ satisface la propiedad (P_γ) si existe una sucesión de números reales $m' = (m'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ y una constante $a \geq 1$ para los cuales la sucesión

$$\big((p+1)^{-\gamma} m'_p\big)_{p\in\mathbb{N}}$$

es monótona creciente, y $a^{-1}m_p \leq m'_p \leq a m_p$ para cada $p \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.1.18. Sea $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular. Se tiene que:

(i) Existe $\gamma > 0$ de modo que se cumple la propiedad (P_γ) y existe $a_1 > 0$ para el cual $a_1^p p!^\gamma \leq M_p$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Existen $\delta > 0$ y $a_2 > 0$ de modo que $M_p \leq a_2^p p!^\delta$ para todo $p \in \mathbb{N}_0$.

Definición 1.1.19. Sea $\mathbf{M}$ una sucesión fuertemente regular. Se define el *índice de crecimiento* de $\mathbf{M}$ como

$$\gamma(\mathbf{M}) = \sup\{\gamma \in \mathbb{R} : (P_\gamma) \text{ se cumple}\}.$$

Observación 1.1.20. De acuerdo con lo mencionado anteriormente, si $\mathbf{M}$ es una sucesión fuertemente regular, $\gamma(\mathbf{M}) \in (0,\infty)$. Cabe destacar también que si $\mathbf{M}_\alpha$ es la sucesión Gevrey de orden $\alpha > 0$ entonces $\gamma(\mathbf{M}_\alpha) = \alpha$.

1.2. Resultados de tipo Whitney para clases ultradiferenciables

Dedicamos este apartado a introducir los espacios de funciones, jets y sucesiones que manejaremos, para concluir comentando los resultados de tipo Whitney obtenidos por J. Chaumat y A.-M. Chollet [18] que serán de utilidad para nuestros objetivos. Aunque su versión original corresponde a funciones y jets a valores en $\mathbb{C}$, su generalización a espacios de funciones y de jets con llegada sobre un espacio de Banach no ofrece ninguna dificultad, por lo que omitiremos sus demostraciones, salvo por un breve esbozo de la del resultado principal, Teorema 1.2.11.

De ahora en adelante, Ω será un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, y B denotará un espacio de Banach complejo con norma $\|\cdot\|_B$. Como es natural, $\mathcal{C}^\infty(\Omega, B)$ representa el espacio de las funciones indefinidamente derivables de Ω en B. Extendemos en primer lugar de forma natural la definición de las clases introducidas en la Observación 1.1.4.

Definición 1.2.1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Diremos que una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, B)$ pertenece a la *clase de Carleman* (o de Roumieu) $\mathcal{C}_\mathbf{M}(\Omega, B)$ si existe una constante $A = A(f) > 0$ de forma que

$$\sup_{\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^n, \boldsymbol{x}\in\Omega} \frac{\left\|D^{\boldsymbol{J}} f(\boldsymbol{x})\right\|_B}{A^j j! M_j} < \infty. \tag{1.8}$$

El conjunto formado por las funciones en $\mathcal{C}_\mathbf{M}(\Omega, B)$ que verifican (1.8) para un $A > 0$ prefijado se denotará por $\mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(\Omega, B)$, y resulta ser un espacio de Banach cuando se le dota de la norma dada por el superior en (1.8), que representaremos por $\|\cdot\|_{\mathbf{M},A,\Omega}^B$.

Es claro que

$$\mathcal{C}_\mathbf{M}(\Omega, B) = \bigcup_{A>0} \mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(\Omega, B),$$

de modo que se puede dotar a la clase de Carleman de una estructura de espacio vectorial topológico con la topología de límite inductivo.

Cuando $B = \mathbb{C}$, pondremos

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(\Omega, \mathbb{C}) =: \mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(\Omega), \qquad \mathcal{C}_\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{C}) =: \mathcal{C}_\mathbf{M}(\Omega),$$

lo que es consistente con la notación adoptada en la Observación 1.1.4.

Análogamente, definimos a continuación clases de multisucesiones de elementos de B fuertemente relacionadas con las anteriores, generalizando de nuevo lo hecho en la Observación 1.1.7.

Definición 1.2.2. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos, y $A > 0$. Se define el espacio $\Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$ como el formado por las multisucesiones $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{\boldsymbol{J}})_{\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^n}$ de elementos de B para las cuales

$$|\boldsymbol{\lambda}|_{\mathbf{M},A,B} := \sup_{\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^n} \frac{\|\lambda_{\boldsymbol{J}}\|_B}{A^j j! M_j} < \infty, \tag{1.9}$$

donde j representa la longitud del multiíndice $\boldsymbol{J}$.

El par $(\Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B), |\cdot|_{\mathbf{M},A,B})$ es un espacio de Banach, y el espacio

$$\Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n, B) := \bigcup_{A>0} \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$$

puede ser dotado de la topología límite inductivo. Nuevamente, utilizaremos las notaciones

$$\Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n) := \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, \mathbb{C}), \qquad \Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n) := \Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n, \mathbb{C}).$$

Es sencillo comprobar que, fijado $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, la *aplicación de Borel*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega, B) &\longrightarrow \Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n, B) \\ f &\longrightarrow \mathcal{B}f := (D^{\boldsymbol{J}} f(\boldsymbol{x}_0))_{\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^n}. \end{aligned}$$

está bien definida y es lineal y continua, como lo es, para cada $A > 0$, cuando se considera

$$\mathcal{B} : \mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(\Omega, B) \to \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B).$$

Uno de los objetivos de este epígrafe es presentar los operadores lineales y continuos, inversos por la derecha de $\mathcal{B}$, obtenidos en [18]. Para ello, será necesario introducir la noción de jet de Whitney.

Definición 1.2.3. Sean $n \in \mathbb{N}$ y E un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Un *jet* F sobre E a valores en B es una familia $\left\{F^{\boldsymbol{J}} : \boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n\right\}$ de funciones continuas sobre E con valores en B.

Dado un multiíndice $\boldsymbol{L} \in \mathbb{N}_0^n$, se define la *derivada de orden* $\boldsymbol{L}$ del jet F como el jet

$$D^{\boldsymbol{L}} F = \left\{F^{\boldsymbol{J}+\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n\right\}.$$

Observación 1.2.4. El ejemplo más sencillo de jet es el asociado de forma natural a una función $g\colon E \to B$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en E, definido por $F_g = \left\{D^{\boldsymbol{J}} g : \boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n\right\}$. Además, en este caso para cada $\boldsymbol{L} \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que $D^{\boldsymbol{L}} F_g = F_{D^{\boldsymbol{L}} g}$. La siguiente definición extiende la noción de polinomio de Taylor al caso de los jets, y se dirá que un jet es de Whitney si el comportamiento asintótico de los restos de Taylor coincide con el que se presenta cuando dicho jet proviene de una función g como antes.

Definición 1.2.5. Sean $n \in \mathbb{N}$ y E un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Para todo jet F y todo $p \in \mathbb{N}_0$, se define el *polinomio de Taylor* de F de orden p en $\boldsymbol{\xi} \in E$, denotado por $T^p_{\boldsymbol{\xi}}F$, mediante

$$T^p_{\boldsymbol{\xi}}F(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{J}|\leq p} \frac{1}{\boldsymbol{J}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{J}}F^{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{\xi}), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Para cada $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\boldsymbol{J}| = j$, y para cada $p \in \mathbb{N}_0$ con $p \geq j$, se define el *resto de Taylor* de $F^{\boldsymbol{J}}$ de orden $p-j$ en $\boldsymbol{\xi} \in E$, denotado por $R^{\boldsymbol{J},p}_{\boldsymbol{\xi}}F$, como

$$\begin{aligned} R^{\boldsymbol{J},p}_{\boldsymbol{\xi}}F(\boldsymbol{x}) &= F^{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}) - \sum_{\boldsymbol{K}:|\boldsymbol{J}+\boldsymbol{K}|\leq p} \frac{1}{\boldsymbol{K}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{K}}F^{\boldsymbol{J}+\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{\xi}). \\ &= F^{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}) - T^{p-j}_{\boldsymbol{\xi}}(D^{\boldsymbol{J}}F)(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in E. \end{aligned}$$

Definición 1.2.6. Diremos que un jet F es *de Whitney* sobre E (de clase $\mathcal{C}^\infty$), y lo denotaremos por $F \in \mathcal{J}(E,B)$, si se tiene que para cada $p \in \mathbb{N}_0$ y para cada multiíndice $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$ con $j \leq p$,

$$R^{\boldsymbol{J},p}_{\boldsymbol{\xi}}F(\boldsymbol{x}) = o(|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}|^{p-j}), \qquad (\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}) \in E \times E,\ |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}| \to 0.$$

Definición 1.2.7. Sean $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos, E un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y F un jet sobre E. Diremos que el jet F es un *jet de Whitney de clase* $\mathcal{J}_{\mathbf{M}}(E,B)$ si existen constantes $A = A(F) > 0$ y $C = C(F) > 0$ de forma que para cada $\boldsymbol{x} \in E$ y cada $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene que

$$\left\|F^{\boldsymbol{J}}(x)\right\|_B \leq CA^j j! M_j, \tag{1.10}$$

y para cada $p \in \mathbb{N}_0$, $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$ de longitud $j \leq p$ y todo $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}) \in E \times E$, se tiene que

$$\left\|R^{\boldsymbol{J},p}_{\boldsymbol{\xi}}F(\boldsymbol{x})\right\|_B \leq CA^{p+1} j! M_{p+1} |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^{p+1-j}. \tag{1.11}$$

Observación 1.2.8. No es difícil comprobar, a partir de la fórmula de Taylor, que si el jet $F = F_g$ es el asociado a una función $g \in \mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega, B)$ y a un compacto $E \subset \Omega$, entonces se tiene que $F \in \mathcal{J}_{\mathbf{M}}(E,B)$.

Las próximas dos proposiciones aportan información fundamental acerca del tamaño y las propiedades de aproximación de los polinomios de Taylor asociados a un jet de Whitney en una clase $\mathcal{J}_{\mathbf{M}}(E,B)$, siempre que $\mathbf{M}$ esté sujeta a condiciones adecuadas.

Notación: Para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, E)$ denota la distancia entre $\boldsymbol{x}$ y el compacto E.

Proposición 1.2.9 ([18], Proposición 9)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión que cumple (α_1) y (μ). Entonces existen $D_1, D_2 > 1$ de modo que para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, todo jet de Whitney de clase $\mathcal{J}_{\mathbf{M}}(E, B)$ verificando (1.10) y (1.11), todo $L \geq D_1 A$ y todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que para cada $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$ de longitud j,

$$\left\| (D^{\boldsymbol{J}} T_{\hat{\boldsymbol{x}}}^{2N[L\mathrm{dist}(\boldsymbol{x},E)]} F)(\boldsymbol{x}) \right\|_B \leq C (L D_2)^{j+1} j! M_j, \tag{1.12}$$

y

$$\left\| (D^{\boldsymbol{J}} T_{\hat{\boldsymbol{x}}}^{2N[L\mathrm{dist}(\boldsymbol{x},E)]} F)(\boldsymbol{x}) - F^{J}(\hat{\boldsymbol{x}}) \right\|_B \leq C (L D_2)^{j+1} j! M_{j+1} \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, E), \tag{1.13}$$

donde $\hat{\boldsymbol{x}}$ es un punto en E con distancia mínima a $\boldsymbol{x}$, es decir, tal que $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, E) = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}})$.

Proposición 1.2.10 ([18], Proposición 10)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos que cumple (α_1) y (γ). Entonces existe $D_3 > 1$ de forma que para cada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, todo jet F de Whitney en $\mathcal{J}_{\mathbf{M}}(E, B)$ verificando (1.10) y (1.11), todo $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \in E \times E$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}_0$ y todo $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$ de longitud j se tiene que

$$\left\| D^{\boldsymbol{J}} (T_{\boldsymbol{\xi}_1}^p F - T_{\boldsymbol{\xi}_2}^p F)(\boldsymbol{x}) \right\|_B \leq j! C (D_3 A)^{p+1} M_{p+1} (|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|)^{p+1-j}. \tag{1.14}$$

Pasamos a enunciar el teorema principal del trabajo de J. Chaumat y A.-M. Chollet [18].

Teorema 1.2.11 ([18], Teorema 11)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$, E un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular y

$$F = \left\{ F^{\boldsymbol{J}} : \boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n \right\} \in \mathcal{J}_{\mathbf{M}}(E, B).$$

Existe una función $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R}^n, B)$ de forma que para cada $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$ y para cada $\boldsymbol{x} \in E$, se tiene

$$F^{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}) = D^{\boldsymbol{J}} \mathcal{F}(\boldsymbol{x}).$$

Indicaremos brevemente la demostración del Teorema 1.2.11, pues se necesitará en resultados posteriores. En primer lugar establecemos un resultado, que puede encontrarse en el texto de R. Coifman y G. Weiss [21], en el que se construyen recubrimientos del complementario de un compacto de $\mathbb{R}^n$ mediante una familia numerable de bolas abiertas sujetas a condiciones adecuadas.

Proposición 1.2.12. Sea $n \in \mathbb{N}$. Existen constantes $a \in (0,1)$, $b > 1$, $k > 1$ y $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (que sólo depende de n) de forma que si E es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ existe una familia de bolas abiertas $(B(\boldsymbol{x}_\ell, r_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ que verifica las propiedades siguientes:

(i) $\mathbb{R}^n \setminus E = \cup_\ell B(\boldsymbol{x}_\ell, r_\ell) = \cup_\ell B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$.

(ii) Si $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$ para un cierto $\ell \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$ar_\ell \leq \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, E) \leq br_\ell \qquad \text{y} \qquad a \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, E) \leq \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_\ell, E) \leq b \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, E). \tag{1.15}$$

(iii) Cada bola $B(\boldsymbol{x}_j, kr_j)$ sólo puede tener intersección no vacía con, a lo sumo, n_0 bolas de la familia $(B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$.

Fijado un recubrimiento $(B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n \setminus E$ como el de la Proposición previa, y dada una sucesión $\mathbf{M}$ fuertemente regular, mediante un procedimiento similar al utilizado por J. Bruna en [13] se construye una partición de la unidad asociada al recubrimiento y cuyos elementos tienen el tamaño de sus derivadas adecuadamente gobernado en términos de $\mathbf{M}$.

Proposición 1.2.13 ([18], Proposición 6)**.** Sean el conjunto E, la sucesión $\mathbf{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}_0}$ y la familia $(B(\boldsymbol{x}_\ell, r_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ como se ha indicado. Existe una constante $B_1 > 0$ de forma que para cualquier $\eta > 0$, existe una familia de funciones $(\phi_{\ell,\eta})_{\ell \in \mathbb{N}}$ de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ verificando que:

(i) $0 \leq \phi_{\ell,\eta}(\boldsymbol{x}) \leq 1$, para cada $\ell \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\operatorname{sop}(\phi_{\ell,\eta}) \subseteq B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$.

(iii) $\sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(\boldsymbol{x}) = 1$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

(iv) Para todo $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\boldsymbol{J}| = j$, $\ell \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E$, se tiene que

$$|D^{\boldsymbol{J}} \phi_{\ell,\eta}(\boldsymbol{x})| \leq \eta^j j! M_j \frac{1}{h_{\mathbf{M}}(B_1 \eta \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, E))}.$$

Finalmente, eligiendo de forma adecuada las cantidades L en la Proposición 1.2.9 y η en la Proposición 1.2.13, se puede comprobar que la función dada por

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} F^0(\boldsymbol{x}), & \text{si } \boldsymbol{x} \in E; \\ \sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(\boldsymbol{x}) T_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}^{2N(L\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_\ell, E))} F(\boldsymbol{x}), & \text{si } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases} \tag{1.16}$$

resuelve el problema. Recordamos que la función N es la dada en la Definición 1.1.15, y que para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $\hat{\boldsymbol{x}}_\ell$ es un punto en E a distancia mínima de $\boldsymbol{x}_\ell$. Cabe destacar que para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n - E$, la serie en (1.16) se reduce a una suma finita ya que cada bola en la familia $(B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ corta a lo sumo a una cantidad finita de bolas en dicha familia. Esta cantidad sólo depende de la dimensión del espacio, n.

Puesto que lo utilizaremos en nuestros resultados, destacaremos también de esta demostración la existencia de una constante $C_1 > 0$ de modo que para cada $\ell \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^n$ y $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$ se tiene que

$$\left\| D^{\boldsymbol{J}}(T_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}^{2N(L\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}_\ell,E))}F - T_{\hat{\boldsymbol{x}}}^{2N(L\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}_\ell,E))}F)(\boldsymbol{x})\right\|_B \leq C_1 L^{j+1} j! M_j h_{\mathbf{M}}(Lb\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, E)), \tag{1.17}$$

y también

$$\left\| D^{\boldsymbol{J}}(T_{\hat{\boldsymbol{x}}}^{2N(L\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}_\ell,E))}F - T_{\hat{\boldsymbol{x}}}^{2N(L\mathrm{dist}(\boldsymbol{x},E))}F)(\boldsymbol{x})\right\|_B \leq C_1 j! M_j (Lb)^{j+1} h_{\mathbf{M}}(Lb\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, E)). \tag{1.18}$$

Como consecuencia de este teorema, J. Chaumat y A.-M. Chollet [18] mencionan el siguiente resultado, en el que se generalizan los clásicos teoremas de Borel y Whitney mediante la construcción de operadores lineales y continuos adecuados, inversos por la derecha, respectivamente, de la aplicación de Borel en $\mathbf{0}$ y de la aplicación de restricción a un compacto de las funciones en $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R}^n, B)$.

Corolario 1.2.14. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{M}$ una sucesión fuertemente regular.

(i) Existe una constante $b \geq 1$, que depende sólo de $\mathbf{M}$ y de n, de forma que para cada $A > 0$, existe un operador lineal y continuo

$$E_{A,B} : \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{M},bA}(\mathbb{R}^n, B)$$

satisfaciendo que $\mathcal{B}E_{A,B}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$ para cada elemento $\boldsymbol{\lambda}$ de $\Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$. Además, las extensiones $E_{A,B}\boldsymbol{\lambda}$ pueden construirse con soporte compacto, contenido en un entorno de $\mathbf{0}$ prefijado e independiente de $\boldsymbol{\lambda}$.

(ii) Para cada conjunto abierto y acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz, existe una constante $c \geq 1$, que depende de $\mathbf{M}$, de n y de Ω, tal que para cada número real $A > 0$ existe un operador lineal y continuo

$$F_{A,\Omega,B} : \mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(\Omega, B) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R}^n, B)$$

satisfaciendo que $F_{A,\Omega,B}f|_\Omega = f$ para cada $f \in \mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(\Omega, B)$. Además, la extensión puede construirse con soporte en un compacto de $\mathbb{R}^n$ prefijado (e independiente de f) que contenga un entorno abierto de la adherencia de Ω.

Demostración:
Basta aplicar el Teorema 1.2.11 a los conjuntos $E = \{\mathbf{0}\}$ (identificando de forma natural $\Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n, B)$ con el conjunto $\mathcal{J}_{\mathbf{M}}(\{\mathbf{0}\}, B)$) y $E = \overline{\Omega}$ (identificando ahora cada elemento de $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\Omega, B)$ con el jet en $\mathcal{J}_{\mathbf{M}}(\overline{\Omega}, B)$ que induce), respectivamente. En ambos casos, la extensión del jet inicial es la dada por la expresión en (1.16). $\square$

1.3. Desarrollos asintóticos y clases ultraholomorfas en sectores

Dedicamos esta sección a presentar la noción de desarrollo asintótico de funciones de una variable compleja y sus propiedades fundamentales, así como su relación con las denominadas clases ultraholomorfas de funciones. Las demostraciones de buena parte de los resultados que siguen pueden encontrarse en el texto clásico de W. Wasow [80] o en el más reciente de W. Balser [3].

Consideramos un sector S de la superficie de Riemann del logaritmo con vértice en 0 y una función $f : S \to \mathbb{C}$, con $f \in \mathcal{H}(S)$.

Definición 1.3.1. Diremos que f *admite desarrollo asintótico* cuando z tiende a 0 en S (o abreviadamente, f admite desarrollo asintótico en S) si existe una serie de potencias formal $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$, que se denominará la *serie de desarrollo asintótico* de f, o simplemente el desarrollo asintótico de f, de modo que para todo $N \in \mathbb{N}_0$ y para todo T subsector propio y acotado de S (escribimos $T \prec S$), existe una constante $c = c(N,T) > 0$ de forma que

$$|z|^{-N}\Big|f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\Big| \le c, \qquad z \in T. \tag{1.19}$$

Se denotará por $f(z) \sim \hat{f}(z)$ en S.

Utilizando básicamente la fórmula integral de Cauchy y la fórmula de Taylor, se prueba la siguiente

Proposición 1.3.2. Sean S un sector, $f \in \mathcal{H}(S)$ y $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$. Son equivalentes:

(i) f admite desarrollo asintótico en S dado por $\hat{f}$.

(ii) Para cada $N \in \mathbb{N}_0$ y cada $T \prec S$, existe $\lim_{z\to 0, z\in T} z^{-N}\big(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\big)$.

(iii) Para cada $N \in \mathbb{N}_0$ y cada $T \prec S$, existe $\lim_{z\to 0, z\in T} f^{(N)}(z) \in \mathbb{C}$.

(iv) Para cada $N \in \mathbb{N}_0$ y cada $T \prec S$, se tiene que $\sup_{z\in T} |f^{(N)}(z)| < \infty$.

Si se cumplen estas condiciones, entonces para cada $N \in \mathbb{N}_0$ y cada $T \prec S$ se tiene que

$$f_N = \lim_{z\to 0, z\in T} z^{-N}\big(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\big) = \frac{1}{N!} \lim_{z\to 0, z\in T} f^{(N)}(z),$$

de donde se deduce la unicidad del desarrollo.

Llamaremos $\mathcal{A}(S)$ al conjunto de las funciones $f \in \mathcal{H}(S)$ con desarrollo asintótico en el sector S. Con las operaciones usuales, $\mathcal{A}(S)$ es un álgebra diferencial, y la aplicación que asocia a cada elemento de $\mathcal{A}(S)$ su desarrollo asintótico,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S) &\longrightarrow \mathbb{C}\,[[z]] \\ f &\longrightarrow \hat{f}, \end{aligned} \tag{1.20}$$

es un homomorfismo de álgebras diferenciales, es decir: la serie de desarrollo asintótico de una combinación lineal, producto o derivada de funciones en $\mathcal{A}(S)$ es, respectivamente, la serie obtenida como combinación lineal, producto de Cauchy o derivada formal de las correspondientes series de desarrollo.

Alternativamente, esta aplicación puede entenderse como una extensión de la aplicación de Borel al vértice del sector, mediante la asignación a cada $f \in \mathcal{A}(S)$, con $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, de la sucesión $\tilde{\mathcal{B}}(f) = (f^{(N)}(0))_{N\in\mathbb{N}_0}$ de "derivadas en 0"de f,

$$f^{(N)}(0) := \lim_{z\to 0, z\in T} f^{(N)}(z) = N! f_N, \qquad N \in \mathbb{N}_0,\ T \prec S.$$

Si en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ se definen el producto de acuerdo con la fórmula de Leibnitz para la derivada de un producto, y la derivación como el operador de desplazamiento a la izquierda, entonces $\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}(S) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ es de nuevo un homomorfismo de álgebras diferenciales.

Introducimos a continuación sendas topologías en $\mathcal{A}(S)$ y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. En el primero, consideramos la topología definida por la familia de seminormas $\{p_{N,T}\}_{N\in\mathbb{N}_0, T\prec S}$ dadas por

$$p_{N,T}(f) = \sup_{z\in T} |f^{(N)}(z)|, \qquad f \in \mathcal{A}(S),$$

que lo convierte en un espacio de Fréchet, es decir, un espacio vectorial topológico localmente convexo, metrizable (en particular, Hausdorff) y completo.

Consideramos en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ la topología producto, generada por la familia de seminormas $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ definidas por

$$t_k(\boldsymbol{\alpha}) = \max_{j\le k} |a_j|, \qquad \boldsymbol{\alpha} = (a_N)_{N\in\mathbb{N}_0}, \tag{1.21}$$

con lo que obtenemos de nuevo un espacio de Fréchet.

Pues bien, para estas dos topologías, se tiene la siguiente

Proposición 1.3.3. La aplicación $\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}(S) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ es continua.

Demostración:
Puesto que, dados $f, g \in \mathcal{A}(S)$ y $N \in \mathbb{N}_0$, para un sector $T \prec S$ se tiene que

$$|f^{(N)}(0) - g^{(N)}(0)| \le \sup_{z\in T} |f^{(N)}(z) - g^{(N)}(z)| = p_{N,T}(f - g),$$

la conclusión es inmediata. □

El teorema de Borel-Ritt afirma que, fijado un sector S, la aplicación $\tilde{\mathcal{B}}$ es sobreyectiva. Por lo tanto, se puede establecer una aplicación $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \to \mathcal{A}(S)$ tal que $\tilde{\mathcal{B}} \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}}$. Surge de forma natural la pregunta de si es posible construir una aplicación con esta propiedad y que sea lineal y continua. La respuesta es negativa.

Teorema 1.3.4. Sea S un sector. No existe ninguna aplicación

$$T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \to \mathcal{A}(S)$$

lineal y continua tal que $\tilde{\mathcal{B}} \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}}$.

Demostración:
La demostración de este resultado está basada en la debida a Mityagin [59], que probó la imposibilidad de una construcción similar en relación con el teorema clásico de Borel acerca de la existencia de funciones indefinidamente derivables en el intervalo $[-1, 1]$ con derivadas en 0 arbitrariamente prefijadas.

Supongamos que existe una aplicación $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \to \mathcal{A}(S)$ en las condiciones del enunciado y llegaremos a un absurdo. Llamemos $E_1 = T(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$. Entonces se tiene que

$$E_1 = \{\phi \in \mathcal{A}(S) : \phi = T\tilde{\mathcal{B}}\phi\}.$$

En efecto, si $\phi \in E_1$, existe $\boldsymbol{\alpha} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ para el cual $T(\boldsymbol{\alpha}) = \phi$. Entonces

$$\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\mathcal{B}}T(\alpha) = \tilde{\mathcal{B}}(\phi), \qquad \text{luego} \qquad \phi = T(\boldsymbol{\alpha}) = T\tilde{\mathcal{B}}\phi.$$

Así, hemos visto que $E_1 \subseteq \{\phi \in \mathcal{A}(S) : \phi = T\tilde{\mathcal{B}}\phi\}$. La contención en el otro sentido es trivial.

Por lo tanto, $E_1 = (\mathrm{Id}_{\mathcal{A}(S)} - T\tilde{\mathcal{B}})^{-1}(0)$, y como $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}(S)} - T\tilde{\mathcal{B}}$ es continua, tenemos que E_1 es cerrado en $\mathcal{A}(S)$. Dado que $\tilde{\mathcal{B}} \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}}$ y $T \circ \tilde{\mathcal{B}} = \mathrm{Id}_{E_1}$, deducimos que T y $\tilde{\mathcal{B}}$ establecen un isomorfismo entre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y E_1. Ahora bien, observemos que E_1 admite una norma continua: fijado $T \prec S$, podemos considerar

$$\|f\| = \sup_{z\in T} |f(z)| = p_{0,T}(f).$$

Mediante el isomorfismo existente entre E_1 y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, podemos construir una norma continua en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, digamos $\|\ \|^\star$. Por tanto, existen $k \in \mathbb{N}_0$ y $\lambda > 0$ para los que $\|\ \|^\star \leq \lambda t_k$. Sea $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, para el cual $t_k(\boldsymbol{\xi}) = 0$. Tendríamos entonces que $\|\boldsymbol{\xi}\|^\star \leq \lambda t_k(\boldsymbol{\xi}) = 0$, lo que es absurdo. □

A la vista de este resultado, la siguiente cuestión consiste en determinar subespacios Λ y $\mathcal{A}$, de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y $\mathcal{A}(S)$ respectivamente, dotados de topologías adecuadas, de forma que sea posible construir una aplicación $T : \Lambda \to \mathcal{A}$ lineal y continua tal que $\tilde{\mathcal{B}} \circ T = \mathrm{Id}_\Lambda$. Dichas aplicaciones, como se dijo anteriormente, se denominan habitualmente operadores de extensión.

La respuesta que damos a continuación a este problema es, esencialmente, la proporcionada por V. Thilliez en [77], con la salvedad de que, con vistas a nuestros propósitos posteriores, nos interesa considerar funciones a valores en un espacio de Banach complejo B.

Sea S un sector en la superficie de Riemann del logaritmo con vértice en 0. Denotamos por $\mathcal{H}(S,B)$ el espacio de las funciones holomorfas de S en B.

Definición 1.3.5. Sean $\mathbf{M}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos, y $A > 0$ una constante. Se define

$$\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B) := \mathcal{H}(S,B) \cap \mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(S,B).$$

Observación 1.3.6. Claramente se tiene que $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(S,B)$ con la norma $\|\cdot\|^B_{\mathbf{M},A,S}$ introducida en (1.8) y, por tanto, tiene estructura de espacio de Banach. Si B es un álgebra de Banach y $\mathbf{M}$ verifica (α_0), $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B)$ es también un álgebra de Banach. Al igual que para las clases de funciones indefinidamente derivables, adoptamos las siguientes notaciones y definiciones:

$$\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S,B) := \bigcup_{A>0} \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B), \quad \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S) := \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,\mathbb{C}), \quad \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S) := \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S,\mathbb{C}). \tag{1.22}$$

Ejemplo 1.3.7. El caso más relevante, que corresponde a la elección de $\mathbf{M}_\alpha = (p!^\alpha)_{p\in\mathbb{N}_0}$, con $\alpha \geq 0$, es el consistente en las funciones y desarrollos asintóticos denominados *de Gevrey* de orden $\alpha+1$, que aparecen en numerosos contextos dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en derivadas parciales y distribuciones.

Observación 1.3.8. La definición de desarrollo asintótico y sus propiedades fundamentales (en particular, la Proposición 1.3.2 y las afirmaciones relativas a la aplicación $\tilde{\mathcal{B}}$) no sufren alteraciones cuando se consideran funciones holomorfas a valores en un espacio de Banach complejo. De acuerdo con la Proposición 1.3.2, es claro que los elementos f de $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B)$ admiten desarrollo asintótico en el vértice de S, en cierto modo "uniforme", pues las estimaciones en (1.19) y los límites en la Proposición 1.3.2 se pueden escribir globalmente en S en lugar de en cada uno de sus subsectores propios y acotados; además, $\tilde{\mathcal{B}}(f) \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0, B)$ (ver la Definición 1.2.2). Más aún, la aplicación

$$\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S, B) \longrightarrow \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0, B)$$

es lineal y continua. El siguiente resultado de V. Thilliez [77, Teorema 3.2.1] establece la existencia de los operadores de extensión anunciados siempre que $\mathbf{M}$ sea fuertemente regular y que la amplitud del sector S sea suficientemente pequeña.

Notación: Dado $\gamma > 0$, consideremos el sector

$$S_\gamma = \Big\{z : |\arg z| < \frac{\gamma\pi}{2}\Big\}$$

en la superficie de Riemann del logaritmo, cuya bisectriz es la semirrecta $d = 0$ y cuya amplitud vale $\gamma\pi$. Resaltamos que el valor de d es irrelevante en lo que sigue.

Teorema 1.3.9. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular con índice de crecimiento $\gamma(\mathbf{M})$. Consideremos $\gamma \in \mathbb{R}$ con $0 < \gamma < \gamma(\mathbf{M})$. Entonces existe $d \geq 1$, que sólo depende de $\mathbf{M}$ y de γ, de forma que para cada $A > 0$ existe un operador lineal continuo

$$T_{\mathbf{M},A,\gamma} : \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0, B) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_\gamma, B)$$

cumpliendo que $\tilde{\mathcal{B}} \circ T_{\mathbf{M},A,\gamma}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$ para cada $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0, B)$.

En la demostración de este resultado juega un papel fundamental la construcción de ciertas funciones en $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_\gamma)$, cuyas propiedades listamos aquí para su referencia posterior.

Proposición 1.3.10 ([77], Teorema 2.3.1 y Lema 2.3.2)**.** Sea $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular y $\gamma \in \mathbb{R}$ con $0 < \gamma < \gamma(\mathbf{M})$. Existe una función $G \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_\gamma)$ de forma que, para cada $w \in S_\gamma$, se tiene que:

(i) $k_1 h_{\mathbf{M}}(k_2|w|) \leq |G(w)| \leq h_{\mathbf{M}}(k_3|w|)$, donde k_1, k_2 y k_3 son constantes positivas que dependen sólo de $\mathbf{M}$ y γ.

(ii) Para todo $p \in \mathbb{N}_0$, $|G^{(p)}(w)| \leq b_1^p p! M_p h_{\mathbf{M}}(b_2|w|)$, siendo b_1 y b_2 constantes positivas que dependen sólo de $\mathbf{M}$ y γ.

(iii) Para todo $p \in \mathbb{N}_0$, $\big|(1/G)^{(p)}(w)\big| \leq b_3 b_4^p p! M_p (h_{\mathbf{M}}(b_5|w|))^{-1}$, donde b_3, b_4 y b_5 son constantes positivas que dependen sólo de $\mathbf{M}$ y γ.

1.4. Desarrollo asintótico fuerte y clases ultraholomorfas en polisectores

En esta sección se considera el concepto de desarrollo asintótico fuerte para funciones de varias variables complejas definidas en polisectores, introducido por H. Majima [50, 51], y se mencionan sus propiedades fundamentales. Posteriormente, se comentan los resultados de tipo Borel-Ritt disponibles para las dos generalizaciones naturales de la aplicación de Borel en este contexto.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y pongamos $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea S un polisector en $\mathcal{R}^n$ con vértice en $\mathbf{0}$, donde $\mathcal{R}$ denota la superficie de Riemann del logaritmo, y sea B un espacio de Banach complejo. Con los convenios adoptados en la lista de Notaciones, podemos dar la siguiente

Definición 1.4.1. Se dice que una función holomorfa $f : S \to B$ admite *desarrollo asintótico fuerte* en S si existe una familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f_{\boldsymbol{\alpha}_J} : \emptyset \neq J \subset \mathcal{N},\ \boldsymbol{\alpha}_J \in \mathbb{N}_0^J \right\},$$

donde $f_{\boldsymbol{\alpha}_J}$ es una función holomorfa de $S_{J'}$ en B cuando $J \neq \mathcal{N}$, y $f_{\boldsymbol{\alpha}_J} \in B$ si $J = \mathcal{N}$, de modo que si se define para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ la función

$$\mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{F})(\boldsymbol{z}) := \sum_{\emptyset \neq J \subset \mathcal{N}} (-1)^{\#J+1} \sum_{\substack{\boldsymbol{\beta}_J \in \mathbb{N}_0^J \\ \boldsymbol{\beta}_J \leq \boldsymbol{\alpha}_J - \mathbf{1}_J}} \frac{f_{\boldsymbol{\beta}_J}(\boldsymbol{z}_{J'})}{\boldsymbol{\beta}_J!} \boldsymbol{z}_J^{\boldsymbol{\beta}_J}, \qquad \boldsymbol{z} \in S,$$

entonces para cada subpolisector propio y acotado T de S y cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$, existe $c = c(\boldsymbol{\alpha}, T) > 0$ tal que

$$\left\| f(\boldsymbol{z}) - \mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{F})(\boldsymbol{z}) \right\|_B \leq c|\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \boldsymbol{z} \in T. \tag{1.23}$$

En estas condiciones, $\mathcal{F}$ se denomina la *familia total* de desarrollo asintótico fuerte asociada a f. La función $\mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathcal{F})$, holomorfa de S en B, es el *aproximante* de orden $\boldsymbol{\alpha}$ correspondiente a $\mathcal{F}$. Denotaremos por $\mathcal{A}(S, B)$ el espacio vectorial de las funciones holomorfas de S en B que admiten desarrollo asintótico fuerte en S.

El resultado que sigue fue obtenido por J. A. Hernández [37] a partir de una versión de la fórmula de Taylor, válida en este contexto, que aparece en el trabajo de Y. Haraoka [36].

Teorema 1.4.2. Sea f una función holomorfa de S en B. Son equivalentes:

(i) f admite desarrollo asintótico fuerte en S.

(ii) Para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ y $T \prec S$, se tiene que

$$Q_{\boldsymbol{\alpha},T}(f) := \sup_{\boldsymbol{z} \in T} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{z})\|_B < \infty. \tag{1.24}$$

Si se cumplen (i) o (ii), para cada subconjunto no vacío J de $\mathcal{N}$ y cada $\boldsymbol{\alpha}_J \in \mathbb{N}_0^J$ se verifica que

$$f_{\boldsymbol{\alpha}_J}(\boldsymbol{z}_{J'}) = \lim_{\substack{\boldsymbol{z}_J \to \boldsymbol{0}_J \\ \boldsymbol{z}_J \in T_J}} D^{(\boldsymbol{\alpha}_J, \boldsymbol{0}_{J'})} f(\boldsymbol{z}), \quad \boldsymbol{z}_{J'} \in S_{J'}, \tag{1.25}$$

para cada $T_J \prec S_J$; el límite es uniforme sobre cada $T_{J'} \prec S_{J'}$ siempre que $J \neq \mathcal{N}$, lo que implica que $f_{\boldsymbol{\alpha}_J} \in \mathcal{A}(S_{J'}, B)$ (adoptando el convenio de que $\mathcal{A}(S_{\mathcal{N}'}, B) = B$).

Observación 1.4.3. De acuerdo con las expresiones en (1.25), la familia $\mathcal{F}$ en la Definición 1.4.1 es única, y se denotará por $\mathrm{TA}(f)$, mientras que los aproximantes serán de ahora en adelante $\mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$.

Con vistas a razonamientos posteriores y sin entrar en detalles, conviene especificar la relación entre las cotas en (1.23) y en (1.24). Dados polisectores T, T' con $T \prec T' \prec S$, y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$, si ponemos

$$P_{\boldsymbol{\alpha},T}(f) := \sup_{\boldsymbol{z} \in T} \frac{\|f(\boldsymbol{z}) - \mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{z})\|_B}{|\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}}},$$

entonces se tiene que:

(i) $P_{\boldsymbol{\alpha},T}(f) \leq \dfrac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} Q_{\boldsymbol{\alpha},T}(f)$.

(ii) Existe una constante $A > 0$, que depende de T y T', de modo que

$$Q_{\boldsymbol{\alpha},T}(f) \leq A^{|\boldsymbol{\alpha}|} \boldsymbol{\alpha}! P_{\boldsymbol{\alpha},T'}(f).$$

$\mathcal{A}(S, B)$ puede ser dotado de estructura de espacio de Fréchet con la topología generada por la familia de seminormas $\{Q_{\boldsymbol{\alpha},T}\}_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n, T \prec S}$. De acuerdo con el teorema anterior, este espacio es estable por derivación, lo que no ocurre para otros conceptos de desarrollo asintótico en varias variables (ver [32, 39]). Si B es un álgebra de Banach, $\mathcal{A}(S, B)$ es un álgebra diferencial. Además, dados un subconjunto no vacío J de $\mathcal{N}$ y $\boldsymbol{\alpha}_J \in \mathbb{N}_0^J$, la aplicación que envía $f \in \mathcal{A}(S, B)$ en $f_{\boldsymbol{\alpha}_J} \in \mathcal{A}(S_{J'}, B)$ es continua.

Observación 1.4.4. Cuando $n = 1$ todo lo anterior tiene sentido, resultando que el concepto de desarrollo asintótico fuerte coincide con el usual, de modo que si $f \in \mathcal{A}(S, B)$, entonces $\mathrm{TA}(f)$ queda reducida a la familia de coeficientes (salvo factoriales) de la serie de desarrollo asintótico de f:

$$\mathrm{TA}(f) = \{\, a_m \in B \colon \ m \in \mathbb{N}_0 \,\}, \qquad \text{siendo} \qquad f \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} z^m.$$

Proposición 1.4.5 (Condiciones de coherencia)**.** Sean $f \in \mathcal{A}(S, B)$ y

$$\mathrm{TA}(f) = \left\{ f_{\boldsymbol{\alpha}_J} : \emptyset \neq J \subset \mathcal{N},\ \boldsymbol{\alpha}_J \in \mathbb{N}_0^J \right\}$$

su familia total de desarrollo. Entonces para todo par de subconjuntos no vacíos y disjuntos J y L de $\mathcal{N}$, todos $\boldsymbol{\alpha}_J \in \mathbb{N}_0^J$ y $\boldsymbol{\alpha}_L \in \mathbb{N}_0^L$, y todo $T_L \prec S_L$, se tiene que

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{z}_L \to \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{z}_L \in T_L}} D^{(\boldsymbol{\alpha}_L, \boldsymbol{0}_{(J\cup L)'})} f_{\boldsymbol{\alpha}_J}(\boldsymbol{z}_{J'}) = f_{(\boldsymbol{\alpha}_J, \boldsymbol{\alpha}_L)}(\boldsymbol{z}_{(J\cup L)'}); \tag{1.26}$$

el límite es uniforme en cada $T_{(J\cup L)'} \prec S_{(J\cup L)'}$ siempre que $J \cup L \neq \mathcal{N}$.

De las relaciones (1.26) se deduce inmediatamente que para todo subconjunto no vacío J de $\mathcal{N}$ y todo $\boldsymbol{\alpha}_J \in \mathbb{N}_0^J$,

$$\mathrm{TA}(f_{\boldsymbol{\alpha}_J}) = \{ f_{(\boldsymbol{\alpha}_J, \boldsymbol{\beta}_L)} : \emptyset \neq L \subset J',\ \boldsymbol{\beta}_L \in \mathbb{N}_0^L \}.$$

Definición 1.4.6. Diremos que una familia

$$\mathcal{F} = \{ f_{\boldsymbol{\alpha}_J} \in \mathcal{A}(S_{J'}, B) : \emptyset \neq J \subset \mathcal{N},\ \boldsymbol{\alpha}_J \in \mathbb{N}_0^J \}$$

es *coherente* si cumple las condiciones (1.26).

Fijados un polisector S y un espacio de Banach complejo B, denominemos $\mathfrak{F}(S, B)$ al conjunto de las familias coherentes constituidas por funciones $f_{\boldsymbol{\alpha}_J} \in \mathcal{A}(S_{J'}, B)$, al que se le dota de estructura vectorial de forma natural. Se pueden considerar las aplicaciones

$$\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}(S, B) \longrightarrow B^{\mathbb{N}_0^n} \quad \text{y} \quad \mathrm{TA} : \mathcal{A}(S, B) \longrightarrow \mathfrak{F}(S, B),$$

siendo la primera de ellas la definida por

$$\tilde{\mathcal{B}}(f) := \big(D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{0})\big)_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n},$$

donde se ha puesto

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{0}) := \lim_{\substack{\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{z} \in T \prec S}} D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{z}) = f_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{TA}(f), \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n.$$

Sin entrar en detalles, mencionaremos que estas aplicaciones son lineales y se comportan bien frente a la derivación, y son de hecho homomorfismos de álgebras diferenciales si B es un álgebra de Banach y se definen en $B^{\mathbb{N}_0^n}$ y $\mathfrak{F}(S, B)$ operaciones producto adecuadas. Además, se han probado teoremas de tipo Borel–Ritt que garantizan que tanto $\tilde{\mathcal{B}}$ como TA son sobreyectivas para un polisector arbitrario. Se pueden consultar en este sentido los trabajos de H. Majima [50, 51], J. A. Hernández [37], F. Galindo y J. Sanz [30] y J. A. Hernández y J. Sanz [38]. Ahora bien, si se dota a $B^{\mathbb{N}_0^n}$ y $\mathfrak{F}(S,B)$ de las topologías producto usuales, de nuevo es imposible construir operadores de extensión en ambas situaciones, entendiendo por tales, aplicaciones lineales y continuas que sean inversas por la derecha de $\tilde{\mathcal{B}}$ y TA, respectivamente. La prueba de este hecho será omitida, pues sigue la misma línea de ideas que en el caso unidimensional (ver Teorema 1.3.4). Para concluir esta sección, introducimos los espacios de funciones necesarios para proporcionar, ya en el siguiente capítulo, las generalizaciones a varias variables del resultado de V. Thilliez expuesto al acabar la sección previa.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y S un polisector con vértice en $\mathbf{0}$ en $\mathcal{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{H}(S,B)$ el espacio de las funciones holomorfas de S en B. Dadas $\mathbf{M}$, una sucesión de números reales estrictamente positivos, y una constante $A > 0$, se define como en el caso unidimensional

$$\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B) := \mathcal{H}(S,B) \cap \mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(S,B).$$

La Observación 1.3.6 se puede repetir aquí palabra por palabra y, de acuerdo con el Teorema 1.4.2, los elementos f de $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B)$ admiten desarrollo asintótico fuerte en S, en cierto sentido "uniforme", pues los límites o estimaciones en (1.23), (1.25) y (1.26) se pueden escribir con validez en todo el polisector correspondiente. Además, $\tilde{\mathcal{B}}(f) \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$ y la aplicación

$$\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B) \longrightarrow \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$$

es lineal y continua. El Teorema 2.1.2 del siguiente capítulo establecerá la existencia de operadores de extensión en esta situación.

Para tratar el caso de la aplicación TA, será necesario reformular el problema para hacerlo más asequible. Dejamos esta disgresión para el segundo capítulo.

Capítulo 2

Resultados de extensión y casianaliticidad en clases ultraholomorfas

2.1. Generalizaciones del teorema de Borel-Ritt-Gevrey

Esta primera sección se va a dedicar a obtener dos generalizaciones del teorema de Borel-Ritt-Gevrey para funciones con desarrollo asintótico fuerte en polisectores. Se trabajará en clases ultraholomorfas determinadas en función de una sucesión fuertemente regular, y la propiedad de interpolación que se busca vendrá dada por la existencia de sendos operadores de extensión, inversos por la derecha de las aplicaciones $\tilde{\mathcal{B}}$ y TA definidas en la última sección del capítulo previo. La técnica radicará en ambos casos en la reducción del problema para funciones de varias variables a otro equivalente en términos de funciones de una variable a valores en un espacio de Banach adecuado. En esta dirección será fundamental el siguiente resultado, que puede ser probado sin dificultad (una demostración similar aparece desarrollada con detalle en [39, Teorema 4.5]).

Teorema 2.1.1. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos, y B un espacio de Banach complejo. Fijemos además $A > 0$ y consideremos (poli)sectores S y V de $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^m$, respectivamente. Entonces se tiene que:

(i) Si $\mathbf{M}$ cumple (μ) y $A_1 > 0$ es la constante que aparece en dicha propiedad, entonces la aplicación

$$\Psi_1 : \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S \times V, B) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S, \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(V, B))$$

que asocia a cada función $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S \times V, B)$ la función $f^\star = \Psi_1(f)$ definida por

$$\big(f^\star(\boldsymbol{z})\big)(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}), \qquad (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \in S \times V,$$

está bien definida, es lineal y continua. Dada $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S \times V, B)$, para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^m$ y $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \in S \times V$ se tiene que

$$D^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} f(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = D^{\boldsymbol{\beta}}\big(D^{\boldsymbol{\alpha}} f^{\star}(\boldsymbol{z})\big)(\boldsymbol{w}), \tag{2.1}$$

y por lo tanto

$$\|f^{\star}\|_{\mathbf{M},2AA_1,S}^{\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(V,B)} \leq \|f\|_{\mathbf{M},A,S\times V}^{B}. \tag{2.2}$$

(ii) Si $\mathbf{M}$ cumple (α_0), la aplicación

$$\Psi_2 : \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S, \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(V, B)) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S \times V, B)$$

dada por

$$\big(\Psi_2(f)\big)(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) = \big(f(\boldsymbol{z})\big)(\boldsymbol{w}), \quad f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S, \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(V, B)),\ (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) \in S \times V,$$

está bien definida, es lineal y continua. Dada $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S, \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(V, B))$, para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^m$ y $(z, w) \in S \times V$ se tiene que

$$D^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\big(\Psi_2(f)\big)(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = D^{\boldsymbol{\beta}}\big(D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{z})\big)(\boldsymbol{w}), \tag{2.3}$$

y en consecuencia

$$\|\Psi_2(f)\|_{\mathbf{M},A,S\times V}^{B} \leq \|f\|_{\mathbf{M},A,S}^{\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(V,B)}. \tag{2.4}$$

Estamos en condiciones de establecer el primero de los resultados fundamentales de esta sección.

Notación: Dado $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (0, \infty)^n$, $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ denota el polisector $\prod_{j=1}^{n} S_{\gamma_j}$.

Teorema 2.1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular y consideremos $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (0, \infty)^n$ verificando que $0 < \gamma_j < \gamma(\mathbf{M})$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces existe $d \geq 1$ de modo que para cada $A > 0$ es posible construir una aplicación lineal y continua

$$T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}} : \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B) \to \mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$$

tal que

$$\tilde{\mathcal{B}} \circ T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}} = \mathrm{Id}_{\Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n,B)}.$$

Demostración:
Vamos a razonar por inducción sobre la dimensión $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ el resultado es precisamente el Teorema 1.3.9. Supongamos el teorema cierto hasta $n-1$, $n \geq 2$. Consideremos $A \in (0, \infty)$ y $\boldsymbol{a} = (a_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$. Fijado $m \in \mathbb{N}_0$, consideremos la multisucesión $\boldsymbol{a}_m = (a_{(m,\boldsymbol{\beta})})_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{N}_0^{n-1}}$. Si $A_1 > 0$ es la constante que aparece

en la propiedad (μ) asociada a la sucesión $\mathbf{M}$, veamos que $\boldsymbol{a}_m \in \Lambda_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathbb{N}_0^{1'}, B)$. En efecto, teniendo en cuenta la definición de la norma en estos espacios y que $2^{q+p}q!p! \geq (q+p)!$ para todo $q,p \in \mathbb{N}_0$ se puede escribir

$$\begin{aligned}\|a_{(m,\boldsymbol{\beta})}\|_B &\leq |\boldsymbol{a}|_{\mathbf{M},A,B} A^{|\boldsymbol{\beta}|+m}(|\boldsymbol{\beta}|+m)!M_{|\boldsymbol{\beta}|+m}\\ &\leq |\boldsymbol{a}|_{\mathbf{M},A,B} A^{|\boldsymbol{\beta}|+m} 2^{|\boldsymbol{\beta}|+m}|\boldsymbol{\beta}|!m!A_1^{|\boldsymbol{\beta}|+m} M_{|\boldsymbol{\beta}|}M_m\\ &\leq |\boldsymbol{a}|_{\mathbf{M},A,B}(2AA_1)^m m!M_m (2AA_1)^{|\boldsymbol{\beta}|}|\boldsymbol{\beta}|!M_{|\boldsymbol{\beta}|},\end{aligned}$$

de donde se deduce que $\boldsymbol{a}_m \in \Lambda_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathbb{N}_0^{1'}, B)$ y que

$$|\boldsymbol{a}_m|_{\mathbf{M},2AA_1,B} \leq |a|_{\mathbf{M},A,B}(2AA_1)^m m!M_m. \tag{2.5}$$

Aplicando la hipótesis de inducción tenemos garantizada la existencia de constantes $d_{1'} \geq 1$ y $D_{1'} > 0$, y de un operador lineal y continuo

$$\overline{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\boldsymbol{\gamma}_{1'}} : \Lambda_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathbb{N}_0^{1'}, B) \to \mathcal{A}_{\mathbf{M},d_{1'}2AA_1}(S_{\gamma_{1'}}, B)$$

de modo que

$$\tilde{\mathcal{B}} \circ \overline{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\boldsymbol{\gamma}_{1'}}(\boldsymbol{a}_m) = \boldsymbol{a}_m \tag{2.6}$$

y

$$\|\overline{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\boldsymbol{\gamma}_{1'}}(\boldsymbol{a}_m)\|^B_{\mathbf{M},d_{1'}2AA_1,S_{\gamma_{1'}}} \leq D_{1'}|\boldsymbol{a}_m|_{\mathbf{M},2AA_1,B}, \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

De acuerdo con (2.5), obtenemos que

$$\|\overline{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\boldsymbol{\gamma}_{1'}}(\boldsymbol{a}_m)\|^B_{\mathbf{M},d_{1'}2AA_1,S_{\gamma_{1'}}} \leq D_{1'}|\boldsymbol{a}|_{\mathbf{M},A,B}(2AA_1)^m m!M_m, \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

con lo que

$$\boldsymbol{b} := \big(\overline{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\boldsymbol{\gamma}_{1'}}(\boldsymbol{a}_m)\big)_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathbb{N}_0, \mathcal{A}_{\mathbf{M},d_{1'}2AA_1}(S_{\boldsymbol{\gamma}_{1'}}, B)).$$

y

$$|\boldsymbol{b}|_{\mathbf{M},2AA_1,\mathcal{A}_{\mathbf{M},d_{1'}2AA_1}(S_{\gamma_{1'}},B)} \leq D_{1'}|\boldsymbol{a}|_{\mathbf{M},A,B}. \tag{2.7}$$

Además, según (2.6) se tiene también que para cada $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{N}_0^{1'}$,

$$\lim_{\boldsymbol{z}_{1'}\to\boldsymbol{0}_{1'},\boldsymbol{z}_{1'}\in S_{\gamma_{1'}}} D^{\beta}(\overline{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_{1'}}(\boldsymbol{a}_m))(\boldsymbol{z}_{1'}) = a_{(m,\boldsymbol{\beta})}. \tag{2.8}$$

Sea $B_1 = \mathcal{A}_{\mathbf{M},d_{1'}2AA_1}(S_{\gamma_{1'}}, B)$. El Teorema 1.3.9 asegura la existencia de constantes $d_1 \geq 1$ y $D_1 > 0$, que dependen sólo de $\boldsymbol{\gamma}$ y de $\mathbf{M}$, y la existencia de una aplicación lineal

$$\tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1} : \Lambda_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathbb{N}_0, B_1) \to \mathcal{A}_{\mathbf{M},d_1 2AA_1}(S_{\gamma_1}, B_1)$$

de modo que $\tilde{\mathcal{B}} \circ \tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$, es decir, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\lim_{z_1\to 0, z_1\in S_{\gamma_1}} D^m(\tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b}))(z_1) = \overline{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\boldsymbol{\gamma}_{1'}}(\boldsymbol{a}_m), \tag{2.9}$$

y además

$$\|\tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b})\|_{\mathbf{M},d_1 2AA_1,S_{\gamma_1},B_1} \leq D_1|\boldsymbol{b}|_{\mathbf{M},2AA_1,B_1}. \tag{2.10}$$

Pongamos $d = \max\{d_1, d_{1'}\}2A_1 \geq 1$. Es claro que $\mathcal{A}_{\mathbf{M},d_1 2AA_1}(S_{\gamma_1}, B_1)$ se inyecta de forma trivial con continuidad en $\mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\gamma_1}, \mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\boldsymbol{\gamma}_{1'}}, B))$, y

$$\|f\|^{\mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\gamma_{1'}},B)}_{\mathbf{M},dA,S_{\gamma_1}} \leq \|f\|^{B_1}_{\mathbf{M},d_1 2AA_1,S_{\gamma_1}}, \quad f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},d_1 2AA_1}(S_{\gamma_1}, B_1). \tag{2.11}$$

Sea Ψ_2 la aplicación lineal y continua de $\mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\gamma_1}, \mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\gamma_{1'}}, B))$ en $\mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\gamma}, B)$ que fue descrita en el Teorema 2.1.1. Definamos la aplicación

$$T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}} : \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B) \to \mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$$

por $T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a}) = \Psi_2 \circ \tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b})$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son como anteriormente. Claramente $T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}$ es una aplicación lineal. Además, para cada $\boldsymbol{a} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$, aplicando (2.4), (2.11), (2.10) y (2.7), se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T_{\mathbf{M},A,\gamma}(\boldsymbol{a})\|_{\mathbf{M},dA,S_\gamma,B} &= \|\Psi_2 \circ \tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b})\|^{B}_{\mathbf{M},dA,S_\gamma} \leq \|\tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b})\|^{\mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\gamma_{1'}},B)}_{\mathbf{M},dA,S_{\gamma_1}} \\
&\leq \|\tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b})\|^{B_1}_{\mathbf{M},d_1 2AA_1,S_{\gamma_1}} \leq D_1|\boldsymbol{b}|_{\mathbf{M},2AA_1,B_1} \\
&\leq D_1 D_{1'}|\boldsymbol{a}|_{\mathbf{M},A,B},
\end{aligned}$$

concluyendo la continuidad del operador $T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}$. Por último, basta comprobar que dicho operador es inverso por la derecha para el operador $\tilde{\mathcal{B}}$. En efecto, sea $a \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$. Puesto que la familia $\mathrm{TA}(T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a}))$ es coherente (ver la Proposición 1.4.5), teniendo en cuenta (2.9) y (2.8) se deduce que para cada $\boldsymbol{\alpha} = (m, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\gamma}}} D^{\boldsymbol{\alpha}}\big(T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a})\big)(\boldsymbol{z}) &= \lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}\in S_{\gamma}} D^{\boldsymbol{\alpha}}\big(\Psi_2 \circ \tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b})\big)(\boldsymbol{z}) \\
&= \lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\gamma}}} D^{\boldsymbol{\beta}}\Big(D^m\tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b})\big)(z_1)\Big)(\boldsymbol{z}_{1'}) \\
&= \lim_{\boldsymbol{z}_{1'}\to\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}_{1'}\in S_{\boldsymbol{\gamma}_{1'}}} \lim_{z_1\to 0, z_1\in S_{\gamma_1}} D^{\boldsymbol{\beta}}\Big(D^m(\tilde{T}_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\boldsymbol{b}))(z_1)\Big)(\boldsymbol{z}_{1'}) \\
&= \lim_{\boldsymbol{z}_{1'}\to\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}_{1'}\in S_{\boldsymbol{\gamma}_{1'}}} D^{\boldsymbol{\beta}}\overline{T}_{\mathbf{M},2A_1A,\gamma_1}(\boldsymbol{a}_m)(\boldsymbol{z}_{1'}) = a_{(m,\boldsymbol{\beta})} = a_{\boldsymbol{\alpha}},
\end{aligned}$$

con lo que se concluye la demostración. □

Sean n un número natural, con $n \geq 2$, B un espacio de Banach complejo y S un polisector de $\mathcal{R}^n$ con vértice en $\mathbf{0}$. Pongamos $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pasamos a considerar el segundo de los problemas que nos ocupa en esta sección, relativo a la existencia de inversas por la derecha para la aplicación TA que envía cada elemento $f \in \mathcal{A}(S, B)$ en su familia total de desarrollo asintótico fuerte, $\mathrm{TA}(f)$. Su resolución se basará en una reformulación del problema en términos de una subfamilia de $\mathrm{TA}(f)$, denominada de primer orden, que definimos a continuación.

Definición 2.1.3. Sea $f \in \mathcal{A}(S, B)$. Se define la *familia de primer orden* asociada a f como

$$\tilde{\mathcal{B}}_1(f) := \{\, f_{m_{\{j\}}} \in \mathcal{A}(S_{j'}, B) : j \in \mathcal{N},\ m \in \mathbb{N}_0 \,\} \subset \mathrm{TA}(f).$$

Observación 2.1.4. La familia de primer orden consiste en los elementos de la familia total que dependen de $n-1$ variables. Para una mayor simplicidad, las funciones $f_{m_{\{j\}}}$ se denotarán por f_{jm}, $j \in \mathcal{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$. A partir de las condiciones de coherencia que verifica la familia total (ver la Proposición 1.4.5), es inmediato deducir que $\tilde{\mathcal{B}}_1(f)$ verifica las que denominamos *condiciones de coherencia de primer orden*:

para cada $L \subset \mathcal{N}$ con al menos dos elementos, cada $\boldsymbol{\alpha}_L \in \mathbb{N}_0^L$, cada $j, \ell \in L$ y cada $T \prec S$, se tiene que

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{z}_{L\setminus\{j\}} \to \mathbf{0} \\ \boldsymbol{z}_{L\setminus\{j\}} \in S_{L\setminus\{j\}}}} D^{(\boldsymbol{\alpha}_{L\setminus\{j\}}, \mathbf{0}_{L'})} f_{j\alpha_j}(\boldsymbol{z}_{j'}) = \lim_{\substack{\boldsymbol{z}_{L\setminus\{\ell\}} \to \mathbf{0} \\ \boldsymbol{z}_{L\setminus\{\ell\}} \in S_{L\setminus\{\ell\}}}} D^{(\boldsymbol{\alpha}_{L\setminus\{\ell\}}, \mathbf{0}_{L'})} f_{\ell\alpha_\ell}(\boldsymbol{z}_{\ell'});$$

los límites son uniformes en $S_{L'}$ siempre que $L \neq \mathcal{N}$.

Como se puede ver en [30, Sección 4], el conocimiento de $\tilde{\mathcal{B}}_1(f)$ basta para determinar $\mathrm{TA}(f)$ sin ambigüedad. Recíprocamente, si partimos de una familia de primer orden coherente, es decir, una familia

$$\mathcal{F}_1 = \{\, f_{jm} \in \mathcal{A}(S_{j'}, B) : j \in \mathcal{N},\ m \in \mathbb{N}_0 \,\}$$

sujeta a las condiciones de coherencia de primer orden expresadas anteriormente, se puede construir de forma única una familia coherente

$$\mathcal{F} = \{\, f_{\boldsymbol{\alpha}_J} \in \mathcal{A}(S_{J'}, B) : J \subset \mathcal{N},\ J \neq \emptyset,\ \boldsymbol{\alpha}_J \in \mathbb{N}_0^J \,\},$$

de modo que para cada $j \in \mathcal{N}$ y cada $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $f_{m_{\{j\}}} = f_{jm}$.

Por lo tanto, podemos concluir que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las familias coherentes $\mathfrak{F}(S, B)$ y el de las familias de primer orden coherentes, pongamos $\mathfrak{F}^1(S, B)$, al que se dota de la topología de subespacio de $\mathfrak{F}(S, B)$. Esto permite enunciar el teorema de Borel-Ritt en el presente contexto del modo siguiente: la aplicación (lineal y continua) $\tilde{\mathcal{B}}_1$ que envía cada $f \in \mathcal{A}(S, B)$ en $\tilde{\mathcal{B}}_1(f) \in \mathfrak{F}^1(S, B)$ es sobreyectiva.

Nuestro próximo resultado establecerá la existencia de inversas por la derecha para esta aplicación en subespacios adecuados. Para ello, fijadas una sucesión $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ de números reales estrictamente positivos y una constante $A > 0$, analizamos en primer lugar cómo actúa $\tilde{\mathcal{B}}_1$ sobre $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B)$. La siguiente definición permitirá expresar cómodamente el resultado correspondiente.

Definición 2.1.5. Sea $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión que verifica la propiedad (μ) para una constante A_1, y sea $A > 0$. Se define $\mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S,B)$ como el conjunto de las familias coherentes de primer orden

$$\mathcal{G} = \{f_{jm} \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{j'},B) : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$$

de modo que para cada $j \in \mathcal{N}$ se tiene que

$$\mathcal{G}_j := (f_{jm})_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathbb{N}_0, \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{j'},B)).$$

Es inmediato comprobar que, si se pone

$$\nu_{\mathbf{M},A}(\mathcal{G}) := \sup_{j\in\mathcal{N}}\{|\mathcal{G}_j|_{\mathbf{M},2AA_1,\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{j'},B)}\}, \qquad \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S,B),$$

entonces $\big(\mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S,B), \nu_{\mathbf{M},A}\big)$ es un espacio de Banach.

Proposición 2.1.6. En la situación de la definición previa, la aplicación

$$\tilde{\mathcal{B}}_1 : \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B) \longrightarrow \mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S,B)$$

está bien definida y es lineal y continua.

Demostración:
Sea $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S,B)$ y fijemos $m \in \mathbb{N}_0$ y $j \in \mathcal{N}$. Comenzamos recordando que

$$f_{jm}(\boldsymbol{z}_{j'}) = \lim_{z_j\to 0, z_j\in S_j} D^{(0_{j'},m_{\{j\}})} f(\boldsymbol{z}_{j'}, z_j), \qquad \boldsymbol{z}_{j'} \in S_{j'}.$$

En virtud de la uniformidad en los límites que definen los elementos de $\mathrm{TA}(f)$ se deduce que para cada $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{j'}$ y para cada $\boldsymbol{\alpha}_{j'} \in \mathbb{N}_0^{j'}$, se tiene que

$$D^{\boldsymbol{\alpha}_{j'}} f_{jm}(\boldsymbol{z}_{j'}) = \lim_{z_j\to 0, z_j\in S_j} D^{(\boldsymbol{\alpha}_{j'},m_{\{j\}})} f(\boldsymbol{z}_{j'}, z_j),$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\|D^{\boldsymbol{\alpha}_{j'}} f_{jm}(\boldsymbol{z}_{j'})\|_B &\le \sup_{z_j\in S_j} \|D^{(\boldsymbol{\alpha}_{j'},m_{\{j\}})} f(\boldsymbol{z}_{j'}, z_j)\|_B \\
&\le \|f\|^B_{\mathbf{M},A,S} A^{|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|+m}(|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|+m)! M_{|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|+m} \\
&\le \|f\|^B_{\mathbf{M},A,S} A^{|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|+m} 2^{|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|+m} |\boldsymbol{\alpha}_{j'}|! m! A_1^{|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|+m} M_{|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|} M_m \\
&\le \big(\|f\|^B_{\mathbf{M},A,S}(2AA_1)^m m! M_m\big)(2AA_1)^{|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|}|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|! M_{|\boldsymbol{\alpha}_{j'}|}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que $f_{jm} \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{j'}, B)$ y que

$$\|f_{jm}\|^B_{\mathbf{M},2AA_1,S_{j'}} \leq \|f\|^B_{\mathbf{M},A,S}(2AA_1)^m m! M_m. \tag{2.12}$$

De esta desigualdad se obtiene ahora que, para cada $j \in \mathcal{N}$,

$$(f_{jm})_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{j'}, B)),$$

con lo que $\tilde{\mathcal{B}}_1(f) \in \mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S, B)$. Además, de acuerdo con (2.12),

$$|(f_{jm})_{m\in\mathbb{N}_0}|_{\mathbf{M},2AA_1,\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{j'},B)} \leq \|f\|^B_{\mathbf{M},A,S}\,, \qquad j \in \mathcal{N},$$

de modo que $\nu_{\mathbf{M},A}(\tilde{\mathcal{B}}_1(f)) \leq \|f\|^B_{\mathbf{M},A,S}$, con lo que se concluye. □

El siguiente lema suministra la información necesaria acerca del comportamiento asintótico de la función que proporciona el operador de extensión de V. Thilliez (ver el Teorema 1.3.9) cuando éste actúa sobre sucesiones cuyos elementos pertenecen a un espacio del tipo $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S)$. Su uso será fundamental para probar el resultado de extensión a partir de familias en $\mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S, B)$. La demostración de este lema es de marcado carácter técnico, y su longitud aconseja posponerla hasta el final de este capítulo para no interrumpir en este momento el discurrir de los razonamientos.

Notación: Para $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathcal{N}$, se denotará por $\boldsymbol{e}_j$ al multiíndice de $\mathbb{N}_0^n$ con ceros en todas las coordenadas salvo un uno en la coordenada j-ésima.

Lema 2.1.7. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular, $A > 0$, $S_{\boldsymbol{\theta}}$ un polisector de $\mathcal{R}^n$ con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in (0, \infty)^n$, y S_γ un sector de $\mathcal{R}$ con $0 < \gamma < \gamma(\mathbf{M})$. Sea $\boldsymbol{f} = (f_p)_{p\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0, \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}}))$ y supongamos que existe $j \in \mathcal{N}$ tal que para cada $m, p \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j} f_p(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{uniformemente en } S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}.$$

Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\big((T_{\mathbf{M},A,\gamma}\boldsymbol{f})(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0$$

uniformemente con respecto a $w \in S_\gamma$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$, siendo $T_{\mathbf{M},A,\gamma}$ la aplicación de extensión dada en el Teorema 1.3.9.

Enunciamos ya nuestro segundo resultado de extensión.

Teorema 2.1.8. Sea $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular, y fijemos $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in (0,\infty)^n$ tal que $0 < \theta_j < \gamma(\mathbf{M})$ para cada $j \in \mathcal{N}$. Entonces, existe una constante $c = c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\theta}) \geq 1$ tal que para cada $A > 0$ existe un operador lineal y continuo

$$U_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\theta}} : \mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{M},cA}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$$

de modo que para cada $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$ se tiene que $\tilde{\mathcal{B}}_1(U_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{G})) = \mathcal{G}$.

Demostración:
Sea $\mathcal{G} = \{f_{jm}\} \in \mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$. La construcción consiste en n pasos, de manera que en el paso k-ésimo se obtendrá una función cuya familia de primer orden asociada contiene las sucesiones $(f_{jm})_{m\in\mathbb{N}_0}$ con $j \leq k$. El lema previo garantizará que al dar cada paso no se pierde lo conseguido en los anteriores.

De acuerdo con la Definición 2.1.5, se tiene que

$$\mathcal{G}_1 := \{f_{1m}\}_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}}, B)).$$

Por el Teorema 1.3.9, existen $c_1 = c_1(\mathbf{M}, \theta_1) \geq 1$, $C_1 = C_1(\mathbf{M}, \theta_1) > 0$ y un operador lineal y continuo

$$T_{\mathbf{M},2AA_1,\theta_1} : \Lambda_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}}, B)) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_12AA_1}(S_{\theta_1}, \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}}, B))$$

de modo que, si ponemos $H_1^{[1]\star} := T_{\mathbf{M},2AA_1,\theta_1}(\mathcal{G}_1)$, entonces

$$H_1^{[1]\star} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{1m}}{m!} z_1^m \quad \text{y} \quad \|H_1^{[1]\star}\|^{\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}},B)}_{\mathbf{M},c_12AA_1,S_{\theta_1}} \leq C_1|\mathcal{G}_1|_{\mathbf{M},2AA_1,\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}},B)}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{A}_{\mathbf{M},c_12AA_1}(S_{\theta_1}, \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\theta_{1'}}, B)) \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_12AA_1}(S_{\theta_1}, \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_12AA_1}(S_{\theta_{1'}}, B))$$

(con la desigualdad obvia entre las correspondientes normas) y aplicando el segundo apartado del Teorema 2.1.1, podemos afirmar que la función $H^{[1]} : S_{\boldsymbol{\theta}} \to B$ dada por

$$H^{[1]}(\boldsymbol{z}) := H_1^{[1]\star}(z_1)(\boldsymbol{z}_{1'}), \qquad \boldsymbol{z} = (z_1, \boldsymbol{z}_{1'}) \in S_{\boldsymbol{\theta}},$$

pertenece a $\mathcal{A}_{\mathbf{M},c_12AA_1}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$ y, además,

$$\|H^{[1]}\|^B_{\mathbf{M},c_12AA_1,S_{\boldsymbol{\theta}}} \leq \|H_1^{[1]\star}\|^{\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}},B)}_{\mathbf{M},c_12AA_1,S_{\theta_1}}.$$

Sea $\tilde{\mathcal{B}}_1(H^{[1]}) = \{h^{[1]}_{jm} : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$. Para cada $\boldsymbol{z}_{1'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}}$ se tiene que

$$h^{[1]}_{1m}(\boldsymbol{z}_{1'}) = \lim_{z_1\to 0, z_1\in S_{\theta_1}} D^{m\boldsymbol{e}_1} H^{[1]}(\boldsymbol{z}) = \lim_{z_1\to 0, z_1\in S_{\theta_1}} (H_1^{[1]\star})^{(m)}(z_1)(\boldsymbol{z}_{1'}) = f_{1m}(\boldsymbol{z}_{1'}).$$

Con esto concluye el primer paso, y procedemos con la segunda etapa. Sea $H_2^{[1]\star}$ la función dada por

$$H_2^{[1]\star}(z_2)(\boldsymbol{z}_{2'}) := H^{[1]}(z_2, \boldsymbol{z}_{2'}), \qquad z_2 \in S_{\theta_2},\ \boldsymbol{z}_{2'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{2'}}.$$

Según (i) en el Teorema 2.1.1, se tiene que

$$H_2^{[1]\star} \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A}(S_{\theta_2}, \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A}(S_{\boldsymbol{\theta}_{2'}}, B)).$$

Pongamos

$$H_2^{[1]\star} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_{2m}^{[1]}}{m!} z_2^m, \quad \text{y} \quad B_2 := \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A}(S_{\boldsymbol{\theta}_{2'}}, B).$$

Puesto que $H^{[1]} \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_1 2A_1 A}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$, la Proposición 2.1.6 implica que

$$(h_{2m}^{[1]})_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A}(B_2),$$

mientras que la Definición 2.1.5 permite escribir que

$$\mathcal{G}_2 := (f_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},2A_1A}(\mathcal{A}_{\mathbf{M},2A_1A}(S_{\boldsymbol{\theta}_{2'}}, B)).$$

Por lo tanto, $(f_{2m} - h_{2m}^{[1]})_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A}(B_2)$. Aplicando nuevamente el Teorema 1.3.9, existen $c_2 = c_2(\mathbf{M}, \theta_2) \geq 1$, $C_2 = C_2(\mathbf{M}, \theta_2) > 0$ y un operador lineal y continuo

$$T_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A,\theta_2} : \Lambda_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A}(B_2) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^2A}(S_{\theta_2}, B_2)$$

de modo que, si definimos

$$H_2^{[2]\star} := T_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A,\theta_2}\big((f_{2m} - h_{2m}^{[1]})_{m\in\mathbb{N}_0}\big),$$

entonces

$$H_2^{[2]\star} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{2m} - h_{2m}^{[1]}}{m!} z_2^m \tag{2.13}$$

y

$$\|H_2^{[2]\star}\|_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^2A,S_{\theta_2}}^{B_2} \leq C_2 |(f_{2m} - h_{2m}^{[1]})_{m\in\mathbb{N}_0}|_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A,B_2}.$$

Como en el primer paso, es obvio que

$$\mathcal{A}_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^2A}(S_{\theta_2}, B_2) \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^2A}(S_{\theta_2}, \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^2A}(S_{\boldsymbol{\theta}_{2'}}, B)),$$

de modo que $H_2^{[2]\star}$ pertenece también al segundo de estos espacios. El apartado (ii) del Teorema 2.1.1 permite asegurar que la función $H^{[2]} : S_{\boldsymbol{\theta}} \to B$ dada por

$$H^{[2]}(\boldsymbol{z}) := H_2^{[2]\star}(z_2)(\boldsymbol{z}_{2'}), \qquad \boldsymbol{z} = (z_2, \boldsymbol{z}_{2'}) \in S_{\boldsymbol{\theta}},$$

pertenece a $\mathcal{A}_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^2A}(S_{\boldsymbol{\theta}},B)$ y

$$\|H^{[2]}\|^{B}_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^2A,S_{\boldsymbol{\theta}}} \leq \|H_2^{[2]\star}\|^{B_2}_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A,S_{\theta_2}}.$$

Pongamos $\tilde{\mathcal{B}}_1(H^{[2]}) = \{h^{[2]}_{jm} : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$, y determinemos los elementos de esta familia correspondientes a $j = 1$ y $j = 2$. Para no complicar la notación, cuando tengamos, por ejemplo, una función h de las variables $\boldsymbol{z}_{1'} = (z_2, z_3, \dots, z_n)$ y escribamos $D^{m\boldsymbol{e}_k}h$, $k \in \{2, 3, \dots, n\}$, se entenderá que se está derivando m veces respecto de la variable z_k (esto no concuerda exactamente con la definición de los multiíndices $\boldsymbol{e}_k$). En el caso $j = 1$, gracias a las condiciones de coherencia de las familias $\mathcal{G}$ y $\tilde{\mathcal{B}}_1(H^{[1]})$ tenemos que para cada $m, k \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{z_1\to 0, z_1\in S_{\theta_1}} D^{m\boldsymbol{e}_1}(f_{2k} - h^{[1]}_{2k})(\boldsymbol{z}_{2'}) = \lim_{z_2\to 0, z_2\in S_{\theta_2}} D^{k\boldsymbol{e}_2}(f_{1m} - h^{[1]}_{1m})(\boldsymbol{z}_{1'}) = 0,$$

uniformemente en $S_{\boldsymbol{\theta}_{\{1,2\}'}}$. Por lo tanto, podemos aplicar el Lema 2.1.7 para garantizar que para cada $m \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$\lim_{z_1\to 0, z_1\in S_{\theta_1}} \left(H_2^{[2]\star}\right)^{(m)}(z_1)(\boldsymbol{z}_{1'}) = 0 \qquad \text{uniformemente en } S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}},$$

con lo que, en virtud del Teorema 2.1.1, para cada $\boldsymbol{z}_{1'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}}$ se deduce que

$$h^{[2]}_{1m}(\boldsymbol{z}_{1'}) = \lim_{z_1\to 0, z_1\in S_{\theta_1}} D^{m\boldsymbol{e}_1}H^{[2]}(z_1, \boldsymbol{z}_{1'}) = \lim_{z_1\to 0, z_1\in S_{\theta_1}} \left(H_2^{[2]\star}\right)^{(m)}(z_1)(\boldsymbol{z}_{1'}) = 0.$$

Por otro lado, de acuerdo con (2.13), para cada $\boldsymbol{z}_{2'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{2'}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} h^{[2]}_{2m}(\boldsymbol{z}_{2'}) &= \lim_{z_2\to 0, z_2\in S_{\theta_2}} D^{m\boldsymbol{e}_2}H^{[2]}(z_2, \boldsymbol{z}_{2'}) \\ &= \lim_{z_2\to 0, z_2\in S_{\theta_2}} (H_2^{[2]\star})^{(m)}(z_2)(\boldsymbol{z}_{2'}) = (f_{2m} - h^{[1]}_{2m})(\boldsymbol{z}_{2'}). \end{aligned}$$

Definamos la función $F^{[2]} := H^{[1]} + H^{[2]} \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^2A}(S_{\boldsymbol{\theta}},B)$, y pongamos $\tilde{\mathcal{B}}_1(F^{[2]}) = \{f^{[2]}_{jm} : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$. De acuerdo con lo anterior, para todo $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} & f^{[2]}_{1m} = h^{[1]}_{1m} + h^{[2]}_{1m} = h^{[1]}_{1m} = f_{1m}, \\ \text{y} \quad & f^{[2]}_{2m} = h^{[1]}_{2m} + h^{[2]}_{2m} = h^{[1]}_{2m} + f_{2m} - h^{[1]}_{2m} = f_{2m}, \end{aligned}$$

con lo que terminamos el paso segundo. Si fuera $n = 2$, el razonamiento concluiría en este momento. Si $n \geq 3$, esbozaremos el siguiente paso para aclarar el razonamiento a seguir.

La función $F_3^{[2]\star}$, dada por

$$F_3^{[2]\star}(z_3)(\boldsymbol{z}_{3'}) := F^{[2]}(z_3, \boldsymbol{z}_{3'}), \quad z_3 \in S_{\theta_3},\ \boldsymbol{z}_{3'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{3'}},$$

es, según (i) en el Teorema 2.1.1, un elemento de $\mathcal{A}_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^3A}(S_{\theta_3}, B_3)$, y además

$$F_3^{[2]\star} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{3m}^{[2]}}{m!} z_3^m.$$

Adoptemos la notación

$$B_3 := \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^3A}(S_{\boldsymbol{\theta}_{3'}}, B).$$

La Proposición 2.1.6 garantiza que $(f_{3m}^{[2]})_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^3A}(B_3)$, y por la Definición 2.1.5 se tiene que

$$\mathcal{G}_3 := (f_{3m})_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},2A_1A}(\mathcal{A}_{\mathbf{M},2A_1A}(S_{\boldsymbol{\theta}_{3'}}, B)),$$

de modo que $(f_{3m} - f_{3m}^{[2]})_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^3A}(B_3)$. El Teorema 1.3.9 asegura que existen $c_3 = c_3(\mathbf{M}, \theta_3) \geq 1$, $C_3 = C_3(\mathbf{M}, \theta_3) > 0$ y un operador lineal y continuo

$$T_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^3A,\theta_3} : \Lambda_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^3A}(B_3) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_3c_2c_1(2A_1)^3A}(S_{\theta_3}, B_3)$$

de modo que, si tomamos

$$H_3^{[3]\star} := T_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^3A,\theta_3}\big((f_{3m} - f_{3m}^{[2]})_{m\in\mathbb{N}_0}\big),$$

entonces se tiene que

$$H_3^{[3]\star} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_{3m} - f_{3m}^{[2]}}{m!} z_3^m \tag{2.14}$$

y

$$\|H_3^{[3]\star}\|_{\mathbf{M},c_3c_2c_1(2A_1)^3A,S_{\theta_3}}^{B_3} \leq C_3 |(f_{3m} - f_{3m}^{[2]})_{m\in\mathbb{N}_0}|_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^3A,B_3}.$$

Como en el paso previo se deduce que la función $H^{[3]} : S_{\boldsymbol{\theta}} \to B$ dada por

$$H^{[3]}(\boldsymbol{z}) := H_3^{[3]\star}(z_3)(\boldsymbol{z}_{3'}), \qquad \boldsymbol{z} = (z_3, \boldsymbol{z}_{3'}) \in S_{\boldsymbol{\theta}},$$

pertenece a $\mathcal{A}_{\mathbf{M},c_3c_2c_1(2A_1)^3A}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$ y

$$\|H^{[3]}\|_{\mathbf{M},c_3c_2c_1(2A_1)^3A,S_{\boldsymbol{\theta}}}^{B} \leq \|H_3^{[3]\star}\|_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^3A,S_{\theta_3}}^{B_3}.$$

Si ponemos $\tilde{\mathcal{B}}_1(H^{[3]}) = \{h_{jm}^{[3]} : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$, con un razonamiento similar al del paso segundo se prueba que:

(1) Debido a la coherencia de las familias $\mathcal{G}$ y $\tilde{\mathcal{B}}_1(H^{[2]})$ y aplicando el Lema 2.1.7, se tiene que
$$h^{[3]}_{jm}(\boldsymbol{z}_{j'}) = 0, \qquad \boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}, \quad j = 1, 2.$$
(2) Según (2.13), para cada $\boldsymbol{z}_{3'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{3'}}$ se tiene que
$$h^{[3]}_{3m}(\boldsymbol{z}_{3'}) = (f_{3m} - f^{[2]}_{3m})(\boldsymbol{z}_{3'}), \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces, la función $F^{[3]} := F^{[2]} + H^{[3]} \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_3c_2c_1(2A_1)^3A}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$ verifica que, si ponemos $\tilde{\mathcal{B}}_1(F^{[3]}) = \{f^{[3]}_{jm} : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$, entonces para todo $m \in \mathbb{N}_0$ y para $j \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que $f^{[3]}_{jm} = f_{jm}$, como queríamos.

Tras n pasos obtendremos una función
$$F = F^{[n]} = H^{[1]} + \ldots + H^{[n]} =: U_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{G})$$
que resuelve el problema. De hecho, la construcción permite afirmar que el operador $U_{\mathbf{M},A,\theta}$ es lineal y envía el espacio $\mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$ en $\mathcal{A}_{\mathbf{M},cA}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$, tomando
$$c = c(\mathbf{M}, \boldsymbol{\theta}) := c_n c_{n-1} \ldots c_2 c_1 (2A_1)^n \geq 1.$$
Además, para cada $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}^1_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$ se tiene por construcción que $\tilde{\mathcal{B}}_1(U_{\mathbf{M},A,\theta}(\mathcal{G})) = \mathcal{G}$. Para demostrar la continuidad de esta aplicación, observemos que
$$\begin{aligned}\|H^{[1]}\|^B_{\mathbf{M},cA,S_\theta} &\leq \|H^{[1]}\|^B_{\mathbf{M},c_1 2A_1 A,S_{\boldsymbol{\theta}}} \leq \|H^{[1]\star}_1\|^{\mathcal{A}_{\mathbf{M},2BA}(S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}},B)}_{\mathbf{M},c_1 2A_1 A,S_{\theta_1}} \\ &\leq C_1 |\mathcal{G}_1|_{\mathbf{M},2A_1A,S_{\theta_1},\mathcal{A}_{\mathbf{M},c_1 2A_1 A}(S_{\boldsymbol{\theta}_{1'}},B)} \leq C_1 \nu_{\mathbf{M},A}(\mathcal{G});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|H^{[2]}\|^B_{\mathbf{M},cA,S_{\boldsymbol{\theta}}} &\leq \|H^{[2]}\|^B_{\mathbf{M},c_2c_1(2A_1)^2A,S_{\boldsymbol{\theta}}} \leq \|H^{[2]\star}_2\|^{B_2}_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A,S_{\theta_2}} \\ &\leq C_2 |(f_{2m} - h^{[1]}_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0}|_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A,B_2} \\ &\leq C_2 \big(|(f_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0}|_{\mathbf{M},(2A_1)^2A,B_2} + |(h^{[1]}_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0}|_{\mathbf{M},(2A_1)^2A,B_2}\big) \\ &\leq C_2 \big(|(f_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0}|_{\mathbf{M},2A_1A,B_2} + |\mathcal{J}(H^{[1]\star}_2)|_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A,B_2}\big) \\ &\leq C_2(\nu_{\mathbf{M},A}(\mathcal{G}) + \|H^{[1]}\|^B_{\mathbf{M},c_1 2A_1 A,S_{\boldsymbol{\theta}}}) \leq C_2(1 + C_1)\nu_{\mathbf{M},A}(\mathcal{G}).\end{aligned}$$
De forma recurrente se prueba que
$$\|H^{[j]}\|^B_{\mathbf{M},cA,S_{\boldsymbol{\theta}}} \leq C_j \prod_{k=1}^{j-1} (1 + C_k)\nu_{\mathbf{M},A}(\mathcal{G}).$$
Por tanto,
$$\begin{aligned}\|F^{[j]}\|^B_{\mathbf{M},cA,S_{\boldsymbol{\theta}}} &= \Big\|\sum_{k=1}^{j} H^{[k]}\Big\|^B_{\mathbf{M},cA,S_{\boldsymbol{\theta}}} \leq \sum_{k=1}^{j} \|H^{[k]}\|^B_{\mathbf{M},cA,S_{\boldsymbol{\theta}}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{j} C_k \prod_{\ell=1}^{k-1} (1 + C_\ell)\nu_{\mathbf{M},A}(\mathcal{G}) = \Big(\prod_{k=1}^{j} (1 + C_k) - 1\Big)\nu_{\mathbf{M},A}(\mathcal{G}).\end{aligned}$$

En particular,

$$\|U_{\mathbf{M},A,\theta}(\mathcal{G})\|^B_{\mathbf{M},cA,S_{\boldsymbol{\theta}}} = \|F^{[n]}\|^B_{\mathbf{M},cA,S_{\boldsymbol{\theta}}} \leq \underbrace{\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+C_k)-1\Big)}_{C=C(\mathbf{M},\boldsymbol{\theta})>0}\nu_{\mathbf{M},A}(\mathcal{G}),$$

con lo que concluimos la demostración. □

2.2. Casianaliticidad. Generalizaciones del lema de Watson

Bajo este epígrafe vamos a presentar algunos resultados nuevos acerca de la casianaliticidad de las clases ultraholomorfas que estamos considerando, tanto en una como en varias variables. En el segundo caso, se dará información acerca de la inyectividad de las aplicaciones $\tilde{\mathcal{B}}$ y $\tilde{\mathcal{B}}_1$, lo que justifica la introducción de dos conceptos diferentes de casianaliticidad.

Definición 2.2.1. Sean $n \in \mathbb{N}$, S un (poli)sector en $\mathcal{R}^n$ y $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos.

Diremos que $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S)$ es *(s) casianalítica* si las condiciones:

(i) $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S)$, y

(ii) todos los elementos de $\mathrm{TA}(f)$ son nulos (o, equivalentemente, todas las funciones de la familia $\tilde{\mathcal{B}}_1(f)$ son nulas),

implican conjuntamente que f es idénticamente nula en S (en otras palabras, la clase es (s) casianalítica si la aplicación $\tilde{\mathcal{B}}_1$ es inyectiva en ella).

Diremos que $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S)$ es *casianalítica* si las condiciones:

(i) $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S)$, y

(ii) $\tilde{\mathcal{B}}(f)$ es la (multi)sucesión con todos sus elementos nulos,

implican conjuntamente que f es idénticamente nula en S.

Observación 2.2.2. Cabe señalar que en el caso unidimensional ambas definiciones coinciden, puesto que las familias $\mathrm{TA}(f)$ y $\tilde{\mathcal{B}}(f)$ son la misma. En general, la condición de casianaliticidad implica la de (s) casianaliticidad, ya que $\tilde{\mathcal{B}}(f)$ es una subfamilia de $\mathrm{TA}(f)$ para cada $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S)$.

Observación 2.2.3. Si la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S)$ es casianalítica (respectivamente, (s) casianalítica), lo es también la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S,B)$ para cualquier espacio de Banach complejo B. Este hecho se deduce fácilmente de las siguientes afirmaciones:

(i) Una función $f : S \to B$ es idénticamente nula si, y sólo si, lo es $\varphi \circ f$ para todo funcional lineal y continuo $\varphi \in B'$.

(ii) Si $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S, B)$ y $\tilde{\mathcal{B}}(f) \equiv 0$ (resp., $\mathrm{TA}(f) \equiv 0$), entonces para todo funcional lineal y continuo $\varphi \in B'$ se tiene que $\varphi \circ f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S)$ y $\tilde{\mathcal{B}}(\varphi \circ f) \equiv 0$ (resp., $\mathrm{TA}(\varphi \circ f) \equiv 0$).

Por esta razón, en el estudio de la casianaliticidad (respectivamente, de la (s) casianaliticidad) nos limitaremos a considerar clases ultraholomorfas consistentes en funciones complejas.

Notación: Dada una sucesión $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ de números reales estrictamente positivos, se denotará por $\widetilde{\mathbf{M}}$ a la sucesión $(p!M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$. $T_{\mathbf{M}}$ o $T_{\widetilde{\mathbf{M}}}$ denotarán las funciones definidas de acuerdo con (1.5). Por otra parte, en numerosas ocasiones escribiremos que integrales del tipo

$$\int^{\infty} g(r)\, dr$$

son o no convergentes, significando con esto que el carácter de la integral se está considerando en intervalos de la forma (r_0, ∞), siendo irrelevante el valor de $r_0 > 0$ que se considere. Por último, dado un elemento $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in (0, \infty)^n$, se definen los valores

$$\underline{\gamma} = \mathrm{mín}\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}, \qquad \overline{\gamma} = \mathrm{máx}\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}.$$

El siguiente teorema, que caracteriza las clases casianalíticas en el caso unidimensional, se debe a B. I. Korenbljum [44, Teorema 3], que se basa en los resultados clásicos de S. Mandelbrojt [52]. La condición (iii) que sigue ha sido utilizada por V. Thilliez en [77].

Teorema 2.2.4. Sean $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos y $\gamma > 0$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) La clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_\gamma)$ es casianalítica.

(ii) $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\log T_{\widetilde{\mathbf{M}}}(r)}{r^{1+1/(\gamma+1)}}\, dr$ no converge.

Si $\mathbf{M}$ verifica (α_0), también es equivalente a los anteriores el enunciado:

(iii) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \Big(\frac{M_p}{(p+1)M_{p+1}}\Big)^{1/(\gamma+1)}$ no converge.

Gracias a este resultado, se pueden establecer condiciones sencillas equivalentes a la (s) casianaliticidad en varias variables.

Proposición 2.2.5. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos que satisface (α_0), y $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (0, \infty)^n$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) La clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ es (s) casianalítica.

(ii) Existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ de forma que $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$ es casianalítica.

(iii) $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\log T_{\widetilde{\mathbf{M}}}(r)}{r^{1+1/(\overline{\gamma}+1)}}\, dr$ no converge.

(iv) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \Big(\frac{M_p}{(p+1)M_{p+1}}\Big)^{1/(\overline{\gamma}+1)}$ no converge.

Demostración:
La equivalencia entre (iii) y (iv) es inmediata según el Teorema 2.2.4.

Para demostrar que (iii) implica (ii) basta observar que $\overline{\gamma} = \gamma_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, y aplicar el Teorema 2.2.4. En el sentido contrario, y por el mismo teorema, si para un j la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$ es casianalítica, entonces

$$\int^{\infty} \frac{\log T_{\widetilde{\mathbf{M}}}(r)}{r^{1+1/(\gamma_j+1)}}\, dr = \infty,$$

y lo mismo se deduce para la integral en (iii) al observar que el integrando, positivo para $r > 1$, crece al sustituir en su expresión el valor γ_j por otro mayor o igual, $\overline{\gamma}$.

Veamos ahora que (iii) implica (i). Para ello consideremos una función $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ tal que $\mathrm{TA}(f)$ tenga todos sus elementos nulos, y veamos que f es idénticamente nula. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ un índice para el que $\overline{\gamma} = \gamma_j$, de modo que el Teorema 2.2.4 garantiza que $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$ es casianalítica. Para cada $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\gamma}_{j'}}$ definimos la función $\tilde{f}_{\boldsymbol{z}_{j'}}$ en S_{γ_j} por $\tilde{f}_{\boldsymbol{z}_{j'}}(z_j) = f(z_j, \boldsymbol{z}_{j'})$. La holomorfía de f en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ y las cotas existentes para las derivadas de f en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ permiten deducir que $\tilde{f}_{\boldsymbol{z}_{j'}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$. Además, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ y cada $T_j \prec S_{\gamma_j}$ se tiene que

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in T_j} \tilde{f}^{(m)}_{\boldsymbol{z}_{j'}}(z_j) = \lim_{z_j\to 0, z_j\in T_j} D^{m\boldsymbol{e}_j} f(z_j, \boldsymbol{z}_{j'}) = f_{mj}(\boldsymbol{z}_{j'}) = 0.$$

Por lo tanto, $\tilde{\mathcal{B}}(f_{\boldsymbol{z}_{j'}})$ es la familia nula, y concluimos que $f_{\boldsymbol{z}_{j'}}$ es idénticamente nula. Haciendo variar $\boldsymbol{z}_{j'}$ en $S_{\gamma_{j'}}$ se concluye que f también es la función idénticamente nula.

Finalmente, si suponemos que no se cumple la condición (iii) vamos a encontrar una función $F \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ no nula y con $\tilde{\mathcal{B}}_1(F) \equiv 0$, de modo que $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ no es (s) casianalítica. En efecto, si

$$\int^{\infty} \frac{\log T_{\widetilde{\mathbf{M}}}(r)}{r^{1+1/(\overline{\gamma}+1)}}\, dr < \infty,$$

y puesto que el integrando se hace más pequeño (pero positivo mientras sea $r > 1$) al reemplazar $\overline{\gamma}$ por un valor menor o igual que él, es obvio que

$$\int^{\infty} \frac{\log T_{\widetilde{\mathbf{M}}}(r)}{r^{1+1/(\gamma_j+1)}}\, dr < \infty \qquad \text{para cada } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Aplicando el Teorema 2.2.4, para cada j podemos garantizar la existencia de una función $f_j \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$ no nula y tal que $\tilde{\mathcal{B}}(f_j)$ es nula. Sea la aplicación F definida en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ por

$$F(\boldsymbol{z}) = \prod_{j=1}^{n} f_j(z_j), \qquad \boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n).$$

Es claro que $F \in \mathcal{H}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ y no es la función nula. Además, $F \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$, pues para cada $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, y teniendo en cuenta la propiedad (α_0) de $\mathbf{M}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha} F(\boldsymbol{z})| &= |f_1^{(\alpha_1)}(z_1) \cdot \ldots \cdot f_n^{(\alpha_n)}(z_n)| \\
&\leq C_1 A_1^{\alpha_1} \alpha_1! M_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot C_n A_n^{\alpha_n} \alpha_n! M_{\alpha_n} \\
&\leq C A^{|\boldsymbol{\alpha}|} |\boldsymbol{\alpha}|! M_{|\boldsymbol{\alpha}|}, \quad \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}},
\end{aligned}$$

para ciertas constantes positivas $C, C_1, \ldots, C_n, A, A_1, \ldots, A_n$. Pongamos $\tilde{\mathcal{B}}_1(F) = \{F_{jm} : j \in \mathcal{N},\ m \in \mathbb{N}_0\}$. Para $m \in \mathbb{N}_0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\gamma}_{j'}}$, se tiene que

$$F_{jm}(\boldsymbol{z}_{j'}) = \lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\gamma_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j} F(\boldsymbol{z}) = \prod_{\ell=1,\, \ell \neq j}^{n} f_\ell(z_\ell) \lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\gamma_j}} f_j^{(m)}(z_j) = 0,$$

con lo que $\tilde{\mathcal{B}}_1(F) \equiv 0$, como queríamos. □

Como se puede observar, la hipótesis de que $\mathbf{M}$ cumpla (α_0) se utiliza en la equivalencia de (iii) y (iv), y en la implicación (i)⇒(iii).

El resultado auxiliar que sigue permitirá establecer una nueva condición suficiente para la (s) casianaliticidad.

Lema 2.2.6. En las condiciones de la Proposición 2.2.5, los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) Si f es una función definida y holomorfa en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ tal que

$$|f(\boldsymbol{z})| \leq \frac{M_{|\boldsymbol{\alpha}|}}{|\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}}}, \qquad \text{para todos } \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}} \text{ y } \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n, \tag{2.15}$$

entonces f es idénticamente nula en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$.

(ii) La integral
$$\int^{\infty} \frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\overline{\gamma}}}\, dr \tag{2.16}$$
no converge.

(iii) La serie $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \Big(\frac{M_p}{M_{p+1}}\Big)^{1/\overline{\gamma}}$ no converge.

Demostración:
La equivalencia de (ii) y (iii), siempre que $\mathbf{M}$ verifique (α_0), aparece en [52, Teorema 2.4.III].
(i)⇒(ii) Supondremos que la integral en (2.16) converge. En ese caso, para cada índice $j \in \{1,\dots,n\}$ se tiene que la integral que se obtiene al sustituir $\overline{\boldsymbol{\gamma}}$ por γ_j en (2.16) también será convergente. Aplicando de nuevo [52, Teorema 2.4.III], para cada j podemos garantizar la existencia de una función f_j no nula, holomorfa en $S_1 = \{z : |\arg(z)| < \pi/2\}$ y de modo que
$$|f_j(z)| \le M_p/|z|^{\gamma_j p} \qquad \text{para todos } p \in \mathbb{N}_0,\ z \in S_1.$$
Definimos la función F por
$$F(\boldsymbol{z}) = f_1(z_1^{1/\gamma_1}) \cdot \ldots \cdot f_n(z_n^{1/\gamma_n}), \qquad \boldsymbol{z} = (z_1,\dots,z_n) \in S_{\boldsymbol{\gamma}}.$$
Es claro que F está bien definida, es no nula y es holomorfa en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$. Además, teniendo en cuenta la propiedad (α_0), para cada $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ y $\boldsymbol{z} = (z_1,\dots,z_n) \in S_{\boldsymbol{\gamma}}$ se tiene que
$$|F(\boldsymbol{z})| \le \frac{M_{\alpha_1}}{|z_1|^{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{M_{\alpha_n}}{|z_n|^{\alpha_n}} \le \frac{M_{|\boldsymbol{\alpha}|}}{|\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}}},$$
negando así (i).
(ii)⇒(i) Consideremos una función f holomorfa en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ de forma que
$$|f(\boldsymbol{z})| \le M_{|\boldsymbol{\alpha}|}/|\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \text{para todos } \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}},\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n.$$
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\overline{\gamma} = \gamma_n$. Para cada $(z_1,\dots,z_{n-1}) \in S_{\boldsymbol{\gamma}_{n'}}$ fijo, sea g la función definida en S_1 por
$$g(z_n) = f(z_1,\dots,z_{n-1},z_n^{\gamma_n}),$$
que es una función holomorfa en S_1. Para todo $p \in \mathbb{N}_0$ podemos aplicar (2.15) con $\boldsymbol{\alpha} = (0,\dots,0,p)$, teniendo que
$$|g(z_n)| = |f(z_1,\dots,z_{n-1},z_n^{\gamma_n})| \le \frac{M_p}{|z_n|^{\gamma_n p}}.$$

Aplicando otra vez [52, Teorema 2.4.III], se deduce que g es idénticamente nula. Puesto que $(z_1,\ldots,z_{n-1}) \in S_{\gamma_{n'}}$ era arbitrario, se concluye que f es nula en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$, como se quería. □

Proposición 2.2.7. Sea $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales positivos, y $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in (0,\infty)^n$. Entonces, se tiene que:

(i) Si $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\overline{\gamma}}}\,dr$ no converge, $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ es (s) casianalítica.

(ii) Si $\mathbf{M}$ verifica (α_0) y $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ es (s) casianalítica, entonces para cada $\tilde{\gamma} > \overline{\gamma}$ se tiene que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\Big(\frac{M_p}{M_{p+1}}\Big)^{1/\tilde{\gamma}}$ y $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\tilde{\gamma}}}\,dr$ no convergen.

Demostración:
(i) Consideremos $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ con $\mathrm{TA}(f) \equiv 0$, de modo que todos sus aproximantes son nulos. Existen constantes $C, A > 0$ de forma que

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{z})| \le C A^{|\boldsymbol{\alpha}|} |\boldsymbol{\alpha}|! M_{|\boldsymbol{\alpha}|}, \qquad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n,\ \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Teniendo en cuenta la Observación 1.4.3, se deduce que

$$|f(\boldsymbol{z})| = |f(\boldsymbol{z}) - \mathrm{App}_{\boldsymbol{\alpha}}(f)(\boldsymbol{z})| \le C A^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{|\boldsymbol{\alpha}|!}{\boldsymbol{\alpha}!} M_{|\boldsymbol{\alpha}|} |\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}},\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n. \quad (2.17)$$

Llamando $\mathbf{N} = (N_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ a la sucesión dada por $N_p = C(nA)^p M_p$ para cada $p \in \mathbb{N}_0$, se deduce de (2.17) y de la desigualdad $|\boldsymbol{\alpha}|!/\boldsymbol{\alpha}! \le n^{|\boldsymbol{\alpha}|}$, válida para todo $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$, que

$$\Big| f\Big(\frac{1}{\boldsymbol{z}}\Big)\Big| = \Big| f\Big(\frac{1}{z_1},\ldots,\frac{1}{z_n}\Big)\Big| \le \frac{N_{|\boldsymbol{\alpha}|}}{|\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}}}.$$

Es sencillo comprobar que la integral en (2.16) y

$$\int^{\infty} \frac{\log T_{\mathbf{N}}(r)}{r^{1+1/\overline{\gamma}}}\,dr$$

tienen el mismo carácter, luego por hipótesis, la segunda no converge. Aplicando el Lema 2.2.6 se deduce que la función $f(1/\boldsymbol{z})$ es nula en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$, como queríamos.
(ii) Supongamos que existe $\tilde{\gamma} > \overline{\gamma}$ de forma que la integral $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\tilde{\gamma}}}\,dr$ es convergente. El Lema 2.2.6 permite deducir que existe una función f holomorfa en $S_{\tilde{\gamma}}$, no idénticamente nula y con

$$|f(z)| \le M_p/|z|^p \qquad \text{para todos } z \in S_{\tilde{\gamma}},\ p \in \mathbb{N}_0.$$

Ahora bien, si definimos la función F en $S_{(\tilde{\gamma},\dots,\tilde{\gamma})}$ por

$$F(\boldsymbol{z}) = f(1/z_1)\cdot \ldots \cdot f(1/z_n), \qquad \boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_n)\in S_{(\tilde{\gamma},\dots,\tilde{\gamma})},$$

se tiene, gracias a (α_0), que

$$|F(\boldsymbol{z})| \le M_{|\boldsymbol{\alpha}|}|\boldsymbol{z}|^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \boldsymbol{z}\in S_{(\tilde{\gamma},\dots,\tilde{\gamma})},\ \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n,$$

es decir, F admite desarrollo asintótico fuerte en $S_{(\tilde{\gamma},\dots,\tilde{\gamma})}$ y $\mathrm{TA}(F)$ tiene todos sus elementos nulos. De acuerdo con la Observación 1.4.3, y puesto que $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ es un subpolisector propio de $S_{(\tilde{\gamma},\dots,\tilde{\gamma})}$, se deduce que la función $G := F|_{S_{\boldsymbol{\gamma}}}$ pertenece a $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$, no es idénticamente nula y $\mathrm{TA}(G)$ es la familia nula, con lo que $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ no es (s) casianalítica. □

Todos los resultados anteriores vienen dados en términos de una sucesión $\mathbf{M}$ de números reales positivos sujeta, a lo sumo, a la condición (α_0). Los siguientes tratarán el caso en que la sucesión $\mathbf{M}$ sea fuertemente regular. En primer lugar, probaremos un resultado que, en el caso de una variable, ya fue obtenido por V. Thilliez [77]. Nuestra prueba es distinta y contempla el caso multidimensional.

Proposición 2.2.8. Sean $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{M}=(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular, y $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in(0,\infty)^n$ tal que $0<\overline{\gamma}<\gamma(\mathbf{M})$. Entonces, la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ no es (s) casianalítica.

Demostración:
Tomemos dos números reales $\widetilde{\gamma}$ y η tales que $\overline{\gamma}<\widetilde{\gamma}<\eta<\gamma(\mathbf{M})$. Se tiene entonces que se cumple la propiedad (P_η), por tanto, según la Definición 1.1.17, existen una sucesión $(m'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ y una constante $a\ge 1$ de forma que la sucesión $\big((p+1)^{-\eta}m'_p\big)_{p\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y $a^{-1}m_p\le m'_p\le am_p$ para cada $p\in\mathbb{N}$, siendo $\mathbf{m}=(m_p)_{m\in\mathbb{N}}$ la sucesión de cocientes asociada a $\mathbf{M}$.

Por tanto, la serie

$$\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{m_p}\Big)^{1/\widetilde{\gamma}} \tag{2.18}$$

tiene el mismo carácter que la serie

$$\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{m'_p}\Big)^{1/\widetilde{\gamma}} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(p+1)^{\eta/\widetilde{\gamma}}}\frac{1}{(m'_p(p+1)^{-\eta})^{1/\widetilde{\gamma}}} \le \frac{1}{(m'_1 2^{-\eta})^{1/\widetilde{\gamma}}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(p+1)^{\eta/\widetilde{\gamma}}}.$$

Puesto que $\widetilde{\gamma}<\eta$, esta última serie converge y también lo hará la serie en (2.18). Basta aplicar el segundo apartado del resultado previo para concluir. □

Mostraremos a continuación que, bajo cierta hipótesis adicional, la implicación de la Proposición anterior es de hecho una equivalencia. De este modo, como se comentará en el ejemplo subsiguiente, se extiende el lema clásico de Watson, válido para clases Gevrey.

Proposición 2.2.9 (Generalización del lema de Watson)**.** Sea $\mathbf{M}$ fuertemente regular y supongamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{M_n}{M_{n+1}}\Big)^{1/\gamma(\mathbf{M})}=\infty \tag{2.19}$$

(o, equivalentemente, $\displaystyle\int^{\infty}\frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\gamma(\mathbf{M})}}\,dr=\infty$). Sean $n\in\mathbb{N}$ y $\boldsymbol{\gamma}\in(0,\infty)^n$. Son equivalentes:

(i) $\overline{\gamma}\geq\gamma(\mathbf{M})$.

(ii) La clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ es (s) casianalítica.

Demostración:
Resta ver que (i) implica (ii). Si se cumple (2.19) y $\overline{\gamma}\geq\gamma(\mathbf{M})$, entonces

$$\int^{\infty}\frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\overline{\gamma}}}\,dr$$

no converge, y basta aplicar el apartado (i) de la Proposición 2.2.7. □

Ejemplo 2.2.10. Para $\alpha>0$ y $\beta\geq 0$ consideremos la sucesión $\mathbf{M}=(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ dada por

$$M_p=p!^{\alpha}\Big(\prod_{k=0}^{p}\log(e+k)\Big)^{\beta},\qquad p\in\mathbb{N}_0.$$

No es difícil comprobar que la sucesión $\mathbf{M}$ es fuertemente regular, $\gamma(\mathbf{M})=\alpha$ y, además, la condición (2.19) se cumple para $\mathbf{M}$ si, y sólo si, $\beta\leq\alpha$. Es importante observar que cuando $\beta=0$ aparecen las sucesiones de Gevrey, $\mathbf{M}_\alpha=(p!^{\alpha})_{p\in\mathbb{N}_0}$, y en consecuencia para cada $\alpha>0$ se tiene que $\mathbf{M}_\alpha$ cumple (2.19).

Pasamos al estudio de la casianaliticidad de la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$.

Proposición 2.2.11. Sean $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{M}=(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos, y $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in(0,\infty)^n$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) La clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ es casianalítica.

(ii) Para todo $j\in\{1,..,n\}$ la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$ es casianalítica.

(iii) $\displaystyle\int^{\infty}\frac{\log T_{\widetilde{\mathbf{M}}}(r)}{r^{1+1/(\underline{\gamma}+1)}}\,dr$ no converge.

Si $\mathbf{M}$ verifica (α_0), también es equivalente a los anteriores el enunciado:

(iv) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\Big(\frac{M_p}{(p+1)M_{p+1}}\Big)^{1/(\underline{\gamma}+1)}$ no converge.

Demostración:
La equivalencia de (iii) y (iv), cuando se cumple (α_0), ya ha sido comentada. Para garantizar la equivalencia de (ii) y (iii) basta aplicar el Teorema 2.2.4, teniendo en cuenta que $\underline{\gamma} \leq \gamma_j$ para todo $j \in \mathcal{N}$, que existe j para el que se da la igualdad, y que al sustituir el valor de $\underline{\gamma}$ en la integral por otro mayor, se hace mayor el integrando.

Veamos que (i) implica (ii). Para ello, supongamos que existe $j \in \mathcal{N}$ de modo que $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$ no es casianalítica. Consideremos entonces $f_j \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$ no idénticamente nula y tal que $\tilde{\mathcal{B}}(f_j)$ sea nula. La función f definida en $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ por $f(\boldsymbol{z}) = f_j(z_j)$, para $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, es claramente un elemento de $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$, no es idénticamente nula, y además $\tilde{\mathcal{B}}(f) = (0)_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n}$, ya que, si $\boldsymbol{\alpha}$ es tal que $\boldsymbol{\alpha}_{j'} = \mathbf{0}_{j'}$, entonces

$$\lim_{\boldsymbol{z} \to \mathbf{0}, \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}}} D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{z}) = \lim_{z_j \to 0, z \in S_{\gamma_j}} f_j^{(\alpha_j)}(z_j) = 0,$$

mientras que si $\boldsymbol{\alpha}_{j'} \neq \mathbf{0}_{j'}$, entonces

$$\lim_{\boldsymbol{z} \to \mathbf{0}, \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}}} D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{z}) = \lim_{\boldsymbol{z} \to \mathbf{0}, \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}}} 0 = 0.$$

Esto prueba la no casianaliticidad de $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$.

Finalmente, probemos que (ii)$\Rightarrow$(i). Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, y partamos de una función $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ con $\tilde{\mathcal{B}}(f) = (0)_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n}$. Para cada $\boldsymbol{\alpha}_{1'} \in \mathbb{N}_0^{1'}$, la función $f_{\boldsymbol{\alpha}_{1'}} \in \mathrm{TA}(f)$ es un elemento de $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_1})$ y además $\tilde{\mathcal{B}}(f_{\boldsymbol{\alpha}_{1'}}) = (0)_{m \in \mathbb{N}_0}$, puesto que para todo $m \in \mathbb{N}_0$, en virtud de las condiciones de coherencia en (1.26),

$$\lim_{z_1 \to 0, z_1 \in S_{\gamma_1}} f_{\boldsymbol{\alpha}_{1'}}^{(m)}(z_1) = \lim_{\boldsymbol{z} \to \mathbf{0}, z \in S_{\boldsymbol{\gamma}}} D^{m\boldsymbol{e}_1} f(\boldsymbol{z}) = 0.$$

En virtud de (ii), $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_1})$ es casianalítica, luego se deduce que $f_{\boldsymbol{\alpha}_{1'}}$ es idénticamente nula en S_{γ_1} para cada $\boldsymbol{\alpha}_{1'} \in \mathbb{N}_0^{1'}$. Fijemos ahora $z_1 \in S_{\gamma_1}$. Para cada $\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'} \in \mathbb{N}_0^{\{1,2\}'}$ se considera la función $f_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'}}(z_1, \cdot) : S_{\gamma_2} \to \mathbb{C}$. Puesto que $f_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}_{\{1,2\}}})$ (basta realizar un razonamiento similar al de la Proposición 2.1.6), es claro que $f_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'}}(z_1, \cdot) \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_2})$. Además, a partir de las condiciones de coherencia se tiene que

$$\lim_{z_2 \to 0, z_2 \in S_{\gamma_2}} D^{(0,m)} f_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'}}(z_1, z_2) = f_{(m_{\{2\}'}, \boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'})}(z_1) = 0, \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}_0.$$

Por lo tanto, $\tilde{\mathcal{B}}(f_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'}}(z_1, \cdot)) = (0)_{m \in \mathbb{N}_0}$, y como $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_2})$ es casianalítica, se deduce que $f_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'}}(z_1, \cdot)$ es la función nula en S_{γ_2}. Haciendo variar z_1 en S_{γ_1} se concluye que $f_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'}} \equiv 0$ en $S_{\gamma_{\{1,2\}'}}$ para todo $\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2\}'} \in \mathbb{N}_0^{\{1,2\}'}$.

En el siguiente paso, necesario sólo si $n > 2$, fijamos $\boldsymbol{z}_{\{1,2\}} \in S_{\boldsymbol{\gamma}_{\{1,2\}}}$ y para cada $\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2,3\}'} \in \mathbb{N}_0^{\{1,2,3\}'}$ se prueba, de forma análoga, que la función $f_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2,3\}'}}(\boldsymbol{z}_{\{1,2\}}, \cdot)$:

$S_{\gamma_3} \to \mathbb{C}$, que es un elemento de $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_3})$, es idénticamente nula. Así, tenemos que $f_{\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2,3\}'}} \equiv 0$ en $S_{\boldsymbol{\gamma}_{\{1,2,3\}}}$ para todo $\boldsymbol{\alpha}_{\{1,2,3\}'} \in \mathbb{N}_0^{\{1,2,3\}'}$. Tras n pasos, concluiríamos que $\mathrm{TA}(f)$ tiene todos sus elementos nulos. Ahora bien, la condición (ii) garantiza, por la Proposición 2.2.5, que $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ es (s) casianalítica, luego f será idénticamente nula, como se deseaba. □

Podemos ahora establecer una consecuencia de la Proposición 2.2.7.

Proposición 2.2.12. Sea $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales positivos, y $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (0, \infty)^n$. Si $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\underline{\gamma}}}\, dr$ no converge, $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ es casianalítica.

Demostración:
Basta observar que, como $\underline{\gamma} \le \gamma_j$ para cada $j \in \mathcal{N}$, tampoco serán convergentes las integrales

$$\int^{\infty} \frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\gamma_j}}\, dr,$$

con lo que las clases $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$, $j \in \mathcal{N}$, son casianalíticas, y el resultado anterior permite concluir. □

En el caso de que la sucesión $\mathbf{M}$ sea fuertemente regular, podemos extraer una consecuencia de la Proposición 2.2.8.

Proposición 2.2.13. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular, y $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (0, \infty)^n$ tal que $0 < \underline{\gamma} < \gamma(\mathbf{M})$. Entonces, la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ no es casianalítica.

Demostración:
Existe $j \in \mathcal{N}$ tal que $\gamma_j = \underline{\gamma} < \gamma(\mathbf{M})$. De acuerdo con la Proposición 2.2.8, $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$ no es casianalítica, luego tampoco lo es $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$, de acuerdo con la Proposición 2.2.11. □

Bajo la condición (2.19), se puede probar la siguiente equivalencia, que proporciona una nueva versión del lema de Watson.

Proposición 2.2.14 (Segunda generalización del lema de Watson)**.** Sea $\mathbf{M}$ fuertemente regular y que verifica la condición (2.19), y sean $n \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{\gamma} \in (0, \infty)^n$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) $\underline{\gamma} \ge \gamma(\mathbf{M})$.

(ii) La clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ es casianalítica.

Demostración:
Basta ver que (i) implica (ii). Si se verifica (i), para cada $j \in \mathcal{N}$ se tiene que $\gamma_j \geq \gamma(\mathbf{M})$, lo que según la Proposición 2.2.9 garantiza que $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\gamma_j})$ es casianalítica. Se concluye con la Proposición 2.2.11. $\square$

Nuestro próximo objetivo es obtener algunos resultados relativos a la necesidad de la condición $\overline{\gamma} < \gamma(\mathbf{M})$ para la existencia de los operadores de extensión construidos en la primera sección del capítulo. Sólo hemos podido razonar bajo la hipótesis (2.19), lo que limita las conclusiones a cierta familia de clases ultraholomorfas que, no obstante, y según lo expuesto en el Ejemplo 2.2.10, incluye entre otras a las clases de Gevrey. La prueba de la implicación (iv)⇒(i) en el resultado que sigue, en el caso de una variable, consiste en una adaptación de la realizada por J. Schmets y M. Valdivia para un resultado similar relativo a clases Gevrey [73, Teorema 5.11], que de este modo es generalizado.

Teorema 2.2.15. Sean $\mathbf{M}$ una sucesión fuertemente regular que satisface (2.19), $n \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{\gamma} \in (0,\infty)^n$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $\overline{\gamma} < \gamma(\mathbf{M})$.

(ii) Existe $d \geq 1$ tal que para todo $A > 0$ existe un operador lineal y continuo
$$T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}} : \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n) \to \mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$$
tal que $\tilde{\mathcal{B}} \circ T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}} = \mathrm{Id}_{\Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n)}$.

(iii) El operador de Borel $\tilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}}) \to \Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n)$ es sobreyectivo.

(iv) Existe una función $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ tal que para cada $j \in \mathcal{N}$ y cada $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $D^{m\boldsymbol{e}_j} f(\mathbf{0}) = \delta_{1,m}$ (donde $\delta_{1,m}$ denota la delta de Dirac).

Demostración:
(i)⇒(ii) Es precisamente el contenido del Teorema 2.1.2.
(ii)⇒(iii) Dado $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n)$, existe $A > 0$ de modo que $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n)$. Entonces, $T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\boldsymbol{\gamma}}) \subset \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$, y verifica que $\tilde{\mathcal{B}}\big(T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\lambda})\big) = \boldsymbol{\lambda}$, con lo que $\tilde{\mathcal{B}}$ es sobreyectiva.
(iii)⇒(iv) Consideremos la familia $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n}$ de complejos definida por
$$\lambda_{\boldsymbol{\alpha}} = 1 \quad \text{si } \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{e}_j \text{ para algún } j \in \mathcal{N}; \quad \lambda_{\boldsymbol{\alpha}} = 0 \quad \text{en otro caso.}$$
Es obvio que $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_{\mathbf{M}}(\mathbb{N}_0^n)$, por lo que, de acuerdo con (iii), existe $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$ tal que $\tilde{\mathcal{B}}(f) = \boldsymbol{\lambda}$, de donde se deduce que, en particular, para cada $j \in \mathcal{N}$ y cada $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $D^{m\boldsymbol{e}_j} f(\mathbf{0}) = \delta_{1,m}$.
(iv)⇒(i) Razonaremos primero en el caso $n = 1$, para el que $\boldsymbol{\gamma}$ se reduce a una constante $\gamma \in (0,\infty)$, y $\overline{\gamma} = \gamma$. Sea f la función del enunciado y sea $A > 0$ de modo

que $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_\gamma)$. Como f está acotada en S_γ, la función $\phi : S_\gamma \to \mathbb{C}$ dada por $\phi(z) := f(z) - z$ no se anula idénticamente en S_γ. Aplicando la fórmula de Taylor en 0 tenemos que existe $C > 0$ de modo que si $z \in S_\gamma$ con $|z| \le 1$, y para todo $p \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} |\phi(z)| &= \Big| \int_0^z \frac{w^p}{p!} \phi^{(p)}(w) dw \Big| \\ &\le |z|^p C A^p M_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función holomorfa $\Psi : \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ dada por $\Psi(u) = \phi(1/u^\gamma)$ no es idénticamente nula y

$$|\Psi(u)| = \Big|\phi(\frac{1}{u^\gamma})\Big| \le \frac{CA^p M_p}{|u|^{\gamma p}},$$

para todo $p \in \mathbb{N}_0, \mathrm{Re}(u) \ge 1$. Aplicamos el teorema 2.4.III de [52] y, teniendo en cuenta que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{M_{p+1}}{M_p} = \lim_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \infty,$$

se deduce que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Big(\frac{M_p}{M_{p+1}}\Big)^{1/\gamma} < \infty,$$

lo que, de acuerdo con (2.19), no sería posible si fuese $\gamma \ge \gamma(\mathbf{M})$.

En el caso $n > 1$, dada f como en el enunciado consideremos para cada $j \in \mathcal{N}$ el elemento $f_{\mathbf{0}_{j'}}$ de su familia total de desarrollo asintótico fuerte, definido por (ver (1.25))

$$f_{\mathbf{0}_{j'}}(z_j) = \lim_{\boldsymbol{z}_{j'} \to \mathbf{0}_{j'},\ \boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\gamma}_{j'}}} f(z_j, \boldsymbol{z}_{j'}), \qquad z_j \in S_{\gamma_j}.$$

En virtud de la uniformidad en los límites que definen los elementos de $\mathrm{TA}(f)$ se deduce que para cada $z_j \in S_{\gamma_j}$ y para cada $m \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$f^{(m)}_{\mathbf{0}_{j'}}(z_j) = \lim_{\boldsymbol{z}_{j'} \to \mathbf{0}_{j'},\ \boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\gamma}_{j'}}} D^{m\boldsymbol{e}_j} f(z_j, \boldsymbol{z}_{j'}),$$

con lo que para todo $z_j \in S_{\gamma_j}$,

$$|f^{(m)}_{\mathbf{0}_{j'}}(z_j)| \le \sup_{\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}}} |D^{m\boldsymbol{e}_j} f(z_j, \boldsymbol{z}_{j'})| \le \|f\|_{\mathbf{M},A,S_{\boldsymbol{\gamma}}} A^m m! M_m.$$

Así, $f_{\mathbf{0}_{j'}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\gamma_j})$, y para cada $m \in \mathbb{N}_0$ se verifica que

$$f^{(m)}_{\mathbf{0}_{j'}}(0) := \lim_{z_j \to 0,\ z_j \in S_{\gamma_j}} f^{(m)}_{\mathbf{0}_{j'}}(z_j) = \lim_{\boldsymbol{z} \to \mathbf{0}, \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\gamma}}} D^{m\boldsymbol{e}_j} f(\boldsymbol{z}) = \delta_{1,m}.$$

Aplicando la primera parte de este apartado a cada una de las funciones $f_{\mathbf{0}_{j'}}$, deducimos que $\gamma_j < \gamma(\mathbf{M})$ para cada j, es decir, $\overline{\gamma} < \gamma(\mathbf{M})$, como queríamos. □

Observación 2.2.16. En las condiciones del teorema anterior, y en el caso de una variable, la Proposición 2.2.14 proporciona otro enunciado equivalente a (i)-(iv): la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_\gamma)$ no es casianalítica.

También se puede hacer notar que el Teorema 2.2.15 es igualmente válido para funciones a valores en un espacio de Banach complejo B, modificando (iv) del siguiente modo:

(iv') Existe una función $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ tal que para cada $j \in \mathcal{N}$ y cada $m \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ se tiene que $D^{m\boldsymbol{e}_j} f(\mathbf{0}) = 0$, mientras que $D^{\boldsymbol{e}_j} f(\mathbf{0}) \neq 0$ para cada $j \in \mathcal{N}$.

La única novedad en la demostración aparece en la implicación (iv')⇒(i): en el caso $n = 1$, basta elegir, en virtud del teorema de Hahn-Banach, un funcional lineal y continuo $\varphi : B \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(f'(0)) = 1$, y observar que la función $\varphi \circ f$ es un elemento de $\mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_\gamma)$ en las condiciones de (iv), con lo que se obtiene (i). El caso general se resuelve de forma similar.

Para terminar esta sección presentamos una aplicación del resultado que acabamos de comentar.

Proposición 2.2.17. Sean $\mathbf{M}$ una sucesión fuertemente regular que satisface (2.19), $n \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{\gamma} \in (0, \infty)^n$. Supongamos que para una función $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M}}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$, con

$$\tilde{\mathcal{B}}_1(f) = \{f_{jm} : j \in \mathcal{N},\ m \in \mathbb{N}_0\},$$

se verifica que existe $j \in \mathcal{N}$ de modo que $f_{jm} \equiv 0$ si $m \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$, y $f_{j1} \not\equiv 0$. Entonces, se tiene que $\gamma_j < \gamma(\mathbf{M})$.

Demostración:
Sea $A > 0$ tal que $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}})$, y sea A_1 la constante que aparece en la propiedad (μ) para la sucesión $\mathbf{M}$. De acuerdo con el apartado (i) del Teorema 2.1.1, para el valor j del enunciado podemos considerar la función

$$f_j^* : S_{\gamma_j} \to \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\boldsymbol{\gamma}_{j'}})$$

dada por $(f_j^*(z_j))(\boldsymbol{z}_{j'}) = f(z_j, \boldsymbol{z}_{j'})$, $z_j \in S_{\gamma_j}$, $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\gamma}_{j'}}$. Por comodidad, denominemos B al espacio de Banach $\mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\boldsymbol{\gamma}_{j'}})$. Sabemos también que $f_j^* \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\gamma_j}, B)$, y que para cada $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $(f_j^*)^{(m)}(0) = f_{jm}$. De acuerdo con las hipótesis acerca de los f_{jm}, estamos en condiciones de aplicar la versión del Teorema 2.2.15 para clases de funciones vectoriales, comentada en la observación previa, para concluir lo pedido. □

2.3. Rigidez de los operadores de extensión

En esta sección se presentarán resultados de rigidez para los operadores de extensión construidos en la Sección 2.1. El planteamiento de estos problemas se inspira en el propuesto por V. Thilliez en [75].

Sean $n \in \mathbb{N}$, B un espacio de Banach complejo, $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular y $A > 0$. Comenzamos definiendo los espacios que intervendrán en el estudio del problema correspondiente a los operadores construidos en el Teorema 2.1.2. Nuestro objetivo consiste en determinar condiciones de anulación adecuadas que, impuestas sobre la función que resulta de extender, mediante el operador mencionado, una determinada multisucesión, garanticen que ésta última es nula.

Se define el conjunto $\Lambda^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$ como aquel formado por las multisucesiones $\boldsymbol{a} = (a_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n}$ de elementos de B de forma que

$$\lim_{|\boldsymbol{\alpha}|\to\infty} \frac{\|a_{\boldsymbol{\alpha}}\|_B}{A^{|\boldsymbol{\alpha}|}|\boldsymbol{\alpha}|!M_{|\boldsymbol{\alpha}|}} = 0.$$

Es claro que $\Lambda^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B) \subseteq \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$ y que $(\Lambda^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B), |\cdot|_{\mathbf{M},A,B})$ es un espacio de Banach, por ser un cerrado en el espacio de Banach $\Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$.

Consideremos $\boldsymbol{\gamma} \in (0,\infty)^n$ tal que $\overline{\gamma} < \gamma(\mathbf{M})$, y sea $d = d(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) \geq 1$ la constante que se obtuvo en el Teorema 2.1.2. Se define el conjunto $\mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ como aquel formado por las funciones $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ tales que $\tilde{\mathcal{B}}(f) \in \Lambda^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$. Es posible definir en $\mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ la norma

$$\|f\|^{\circ B}_{\mathbf{M},A,S_{\boldsymbol{\gamma}}} := \|f\|^{B}_{\mathbf{M},dA,S_{\boldsymbol{\gamma}}} + |\tilde{\mathcal{B}}(f)|_{\mathbf{M},A,B}.$$

El par $(\mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B), \|\cdot\|^{\circ B}_{\mathbf{M},A,S_{\boldsymbol{\gamma}}})$ es un espacio de Banach por ser $\mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ cerrado en $\mathcal{A}_{\mathbf{M},dA}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$.

Podemos considerar a continuación el subespacio $\mathcal{K}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ formado por las funciones $f \in \mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ que verifican que $\tilde{\mathcal{B}}(f) \equiv 0$. Por ser $\mathcal{K}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ cerrado en $\mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$, el espacio cociente

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B) := \mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)/\mathcal{K}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$$

es un espacio de Banach definido por la norma

$$\begin{aligned}\nu^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\dot{f}) &:= \inf_{g\in\mathcal{K}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}},B)} \|f+g\|^{\circ B}_{\mathbf{M},A,S_{\boldsymbol{\gamma}}} \\ &= \inf_{g\in\mathcal{K}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}},B)} \|f+g\|^{B}_{\mathbf{M},dA,S_{\boldsymbol{\gamma}}} + |\tilde{\mathcal{B}}(f)|_{\mathbf{M},A,B}, \quad f \in \mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B).\end{aligned}$$

Sea $\pi_{\mathbf{M},A} : \mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B) \to \mathcal{Q}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ la aplicación de paso al cociente. Es claro que $\tilde{\mathcal{B}}$ induce la aplicación

$$\dot{\mathcal{B}} : \mathcal{Q}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B) \to \Lambda^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B),$$

que es un isomorfismo de inversa $\pi_{\mathbf{M},A} \circ T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}$.

Para cada $\boldsymbol{a} \in \Lambda^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\nu^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\dot{\mathcal{B}}^{-1}(\boldsymbol{a})) &= \nu^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\pi_{\mathbf{M},A} \circ T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a})) \leq \|T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a})\|^{\circ B}_{\mathbf{M},A,S_{\boldsymbol{\gamma}}} \\ &= \|T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a})\|^{B}_{\mathbf{M},A,S_{\boldsymbol{\gamma}}} + |\tilde{\mathcal{B}}(T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a}))|_{\mathbf{M},A,B} \\ &\leq C|\boldsymbol{a}|_{\mathbf{M},A,B} + |\boldsymbol{a}|_{\mathbf{M},A,B} = (1+C)|\boldsymbol{a}|_{\mathbf{M},A,B},\end{aligned}$$

siendo C la norma del operador $T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}$. Por lo tanto,

$$\left\|\dot{\mathcal{B}}^{-1}\right\| \leq 1 + C. \tag{2.20}$$

Se define seguidamente la aplicación

$$P_A : \mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B) \to \mathcal{A}^{\circ}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$$

dada por $P_A = T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}} \circ \tilde{\mathcal{B}}$; P_A es lineal y continua.

Supongamos que para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ elegimos un punto del polisector $S_{\boldsymbol{\gamma}}$, $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\alpha}} = (z^{(1)}_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, z^{(n)}_{\boldsymbol{\alpha}})$. Consideremos la aplicación

$$\dot{\mathcal{D}} : \mathcal{Q}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B) \to B^{\mathbb{N}_0^n},$$

dada por

$$\dot{\mathcal{D}}(\dot{f}) = (D^{\boldsymbol{\alpha}}(P_A f)(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\alpha}}))_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n}, \qquad \dot{f} \in \mathcal{Q}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B).$$

La aplicación $\dot{\mathcal{D}}$ está bien definida, pues si $\dot{f}_1, \dot{f}_2 \in \mathcal{Q}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$ y $\dot{f}_1 = \dot{f}_2$, entonces $\tilde{\mathcal{B}}(f_1 - f_2) = \tilde{\mathcal{B}}(f_1) - \tilde{\mathcal{B}}(f_2) \equiv 0$, donde f_1 y f_2 son representantes de $\dot{f}_1$ y $\dot{f}_2$, respectivamente, con lo que $P_A(\dot{f}_1) = P_A(\dot{f}_2)$.

Bajo ciertas condiciones sobre los puntos $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$, probaremos que la aplicación $\dot{\mathcal{D}}$ es "suficientemente próxima" a $\dot{\mathcal{B}}$.

Lema 2.3.1. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular, $A > 0$, $\boldsymbol{\gamma} \in (0,\infty)^n$ tal que $\overline{\gamma} < \gamma(\mathbf{M})$, y una multisucesión $(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n}$ de elementos de $S_{\boldsymbol{\gamma}}$, $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\alpha}} = (z^{(1)}_{\boldsymbol{\alpha}}, \ldots, z^{(n)}_{\boldsymbol{\alpha}})$. Supongamos que existe una constante $k \in (0,1)$ de forma que

$$CAM_1(|\boldsymbol{\alpha}|+1)(dA_1)^{|\boldsymbol{\alpha}|+1}\sum_{j=1}^{n}|z^{(j)}_{\boldsymbol{\alpha}}| \leq \frac{k}{(1+C)}, \qquad \text{para todo } \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n, \tag{2.21}$$

donde $d \geq 1$ y $C > 0$ son las constantes antes mencionadas, y A_1 es la constante que aparece en la propiedad (μ) de $\mathbf{M}$. Entonces el rango de $\dot{\mathcal{D}}$ está contenido en $\Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$ y $\dot{\mathcal{D}}$ admite inversa continua.

Demostración:
Sea $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ y $\dot{f} \in \mathcal{Q}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$. La $\boldsymbol{\alpha}$-coordenada de $\dot{\mathcal{B}}(\dot{f})$ es $D^{(\boldsymbol{\alpha})}(P_A f)(\mathbf{0})$, así que

$$d_{\boldsymbol{\alpha}} := \left\|D^{(\boldsymbol{\alpha})}(P_A f)(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\alpha}}) - D^{\boldsymbol{\alpha}}(P_A f)(\mathbf{0})\right\|_B = \left\| \int_0^1 \sum_{j=1}^n D^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{e}_j}(P_A f)(t\boldsymbol{z}_\alpha) z_{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}\, dt \right\|_B$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \|P_A f\|_{\mathbf{M},dA,S_{\boldsymbol{\gamma}}}^B\, (dA)^{|\boldsymbol{\alpha}|+1}(|\boldsymbol{\alpha}|+1)! M_{|\boldsymbol{\alpha}|+1} |z_{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}|$$

$$\leq C|\tilde{\mathcal{B}} f|_{\mathbf{M},A,B}(dA)^{|\boldsymbol{\alpha}|+1}(|\boldsymbol{\alpha}|+1)! M_{|\boldsymbol{\alpha}|+1} \sum_{j=1}^n |z_{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}|$$

$$\leq C\nu_{\mathbf{M},A}^{\circ}(\dot{f})(dA)^{|\boldsymbol{\alpha}|+1}(|\boldsymbol{\alpha}|+1)|\boldsymbol{\alpha}|! A_1^{|\boldsymbol{\alpha}|+1} M_1 M_{|\boldsymbol{\alpha}|} \sum_{j=1}^n |z_{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}|.$$

De acuerdo con (2.21), la cantidad anterior se acota por

$$\frac{k}{1+C}\nu_{\mathbf{M},A}^{\circ}(\dot{f}) A^{|\boldsymbol{\alpha}|}|\boldsymbol{\alpha}|! M_{|\boldsymbol{\alpha}|},$$

con lo que

$$|(\dot{\mathcal{D}} - \dot{\mathcal{J}})\dot{f}|_{\mathbf{M},A,B} = \sup_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n} \frac{d_{\boldsymbol{\alpha}}}{A^{|\boldsymbol{\alpha}|}|\boldsymbol{\alpha}|! M_{|\boldsymbol{\alpha}|}} \leq \frac{k}{1+C}\nu_{\mathbf{M},A}^{\circ}(\dot{f}),$$

lo que implica que $\dot{\mathcal{D}}(\mathcal{Q}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)) \subseteq \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$ y

$$\dot{\mathcal{D}} : \mathcal{Q}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B) \to \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n, B)$$

es lineal y continua. Además,

$$\|\dot{\mathcal{D}} - \dot{\mathcal{B}}\| \leq \frac{k}{1+C} < \frac{1}{1+C} \leq \frac{1}{\|\dot{\mathcal{B}}^{-1}\|},$$

luego $\dot{\mathcal{D}}$ admite inversa continua. □

Estamos en condiciones de dar un resultado de rigidez para los operadores $T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}$.

Teorema 2.3.2. En las mismas condiciones del Lema 2.3.1, si $\boldsymbol{a} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}^{\circ}(\mathbb{N}_0^n, B)$ es tal que

$$D^{\boldsymbol{\alpha}}(T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a}))(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{\alpha}}) = 0 \quad \text{para cada } \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n,$$

entonces $\boldsymbol{a} \equiv 0$.

Demostración:
Las condiciones sobre $\boldsymbol{a}$ permiten afirmar que

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}}(\pi_{\mathbf{M},A}\circ T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a})) &= (D^{\boldsymbol{\alpha}}(P_A(T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}})(\boldsymbol{z_\alpha})))_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n}\\ &= (D^{\boldsymbol{\alpha}}(T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}\circ\tilde{\mathcal{B}}\circ T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}})(\boldsymbol{z_\alpha}))_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n}\\ &= (D^{\boldsymbol{\alpha}}T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{z_\alpha}))_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n}\equiv 0.\end{aligned}$$

Aplicando el lema anterior, $\dot{\mathcal{D}}$ admite inversa, luego ha de ser $\pi_{\mathbf{M},A}\circ T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a})=\dot{0}$, de donde

$$\boldsymbol{a}=\tilde{\mathcal{B}}\circ T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a})=\dot{\mathcal{B}}(\pi_{\mathbf{M},A}\circ T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{a}))=\dot{\mathcal{B}}(\dot{0})=0,$$

como queríamos probar. □

Combinando lo anterior con los resultados relativos a la casianaliticidad de la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}},B)$, podemos dar el siguiente

Corolario 2.3.3. Sean $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{M}$, $A>0$, $\boldsymbol{\gamma}\in(0,\infty)^n$ y $(\boldsymbol{z_\alpha})_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n}$ sujetos a todas las hipótesis del Lema 2.3.1. Sea $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_n)\in(0,\infty)^n$, pongamos $\underline{\theta}=\text{mín}\{\theta_j : j\in\mathcal{N}\}$, y supongamos que se verifica una de las siguientes condiciones:

(i) $\displaystyle\int^{\infty}\frac{\log T_{\widetilde{\mathbf{M}}}(r)}{r^{1+1/(\underline{\theta}+1)}}\,dr$ no converge.

(ii) $\displaystyle\int^{\infty}\frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\underline{\theta}}}\,dr$ no converge.

(iii) $\mathbf{M}$ verifica (2.19) y $\underline{\theta}\geq\gamma(\mathbf{M})$.

Sea $f\in\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}},B)$ una función de forma que

$$\tilde{\mathcal{B}}f\in\Lambda^{\circ}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^n,B)\quad\text{ y }\quad D^{\boldsymbol{\alpha}}(T_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{\mathcal{B}}f))(\boldsymbol{z_\alpha})=0\quad\text{ para cada }\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n.$$

Entonces, f es idénticamente nula en $S_{\boldsymbol{\theta}}$.

Demostración:
Es claro que $\boldsymbol{a}:=\tilde{\mathcal{B}}f$ verifica las hipótesis del teorema anterior, lo que permite asegurar que $\boldsymbol{a}\equiv 0$. Ahora bien, cuando se verifica alguna de las condiciones (i), (ii) o (iii), sabemos, en virtud de las Proposiciones 2.2.11, 2.2.12 y 2.2.14, respectivamente, que la clase $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}},B)$ es casianalítica, con lo que se concluye. □

Estudiamos a continuación la rigidez de los operadores $U_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}$ construidos en el Teorema 2.1.8, siendo $\mathbf{M}$, A y $\boldsymbol{\gamma}$ como anteriormente. Definamos $\mathfrak{F}^{\circ 1}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}},B)$ como el conjunto de las familias $\mathcal{G}=\{f_{jm}: j\in\mathcal{N}, m\in\mathbb{N}_0\}\in\mathfrak{F}^{1}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}},B)$ (ver la Definición 2.1.5) tales que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\|f_{jm}\|^{B}_{\mathbf{M},2AA_1,S_{\gamma_{j'}}}}{(2AA_1)^m m!M_m}=0,\qquad\text{para todo } j\in\mathcal{N}.$$

Equivalentemente, podemos decir que

$$\mathcal{G} = \{f_{jm} : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\} \in \mathfrak{F}^{\circ 1}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$$

si, y sólo si, $\mathcal{G}$ es una familia coherente de primer orden y para cada $j \in \mathcal{N}$ se tiene que

$$\mathcal{G}_j := (f_{jm})_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda^{\circ}_{\mathbf{M},2AA_1}(\mathbb{N}_0, \mathcal{A}_{\mathbf{M},2AA_1}(S_{\gamma_{j'}}, B)).$$

En el enunciado que sigue, las constantes c_j y C_j ($j \in \mathcal{N}$) que aparecen son las obtenidas en la demostración del Teorema 2.1.8.

Teorema 2.3.4. En las condiciones anteriores, sea $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}^{\circ 1}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$, y denotemos por $H^{[1]}, H^{[2]}, \ldots, H^{[n]}$ las funciones obtenidas tras cada paso en la construcción de $U_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\mathcal{G})$, de modo que $H^{[n]} = U_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\mathcal{G})$. Supongamos que existe una familia de números complejos $\{z_{jm} : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$ de modo que:

(i) Para cada $j \in \mathcal{N}$ y cada $m \in \mathbb{N}_0$, $z_{jm} \in S_{\boldsymbol{\gamma}_j}$.

(ii) Existe $k \in (0,1)$ tal que para todos $j \in \mathcal{N}$ y $m \in \mathbb{N}_0$,

$$C_j\Big(\prod_{\ell=1}^{j-1} c_\ell\Big)(2A_1)^j AM_1(m+1)(c_jA_1)^{m+1}|z_{jm}| \leq \frac{k}{1+C_j}, \tag{2.22}$$

donde A_1 es la constante asociada a la sucesión $\mathbf{M}$ según la propiedad (μ).

(iii) Para cada $j \in \mathcal{N}$ y $m \in \mathbb{N}_0$, $D^{m\mathbf{e}_j}(H^{[j]}(z_{jm}, \cdot))$ es idénticamente nula en $S_{\boldsymbol{\gamma}_{j'}}$.

Entonces $\mathcal{G}$ es la familia idénticamente nula.

Demostración:
Seguiremos a lo largo de la demostración la misma notación que en el Teorema 2.1.8. Si $H_1^{[1]\star} = T_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\mathcal{G}_1)$ y $H^{[1]}(\boldsymbol{z}) = H_1^{[1]\star}(z_1)(\boldsymbol{z}_{1'})$ para cada $\boldsymbol{z} = (z_1)(\boldsymbol{z}_{1'}) \in S_{\boldsymbol{\gamma}}$, teniendo en cuenta (2.1) y la condición (iii) se deduce que $(H_1^{[1]\star})^{(m)}(z_{1m}) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Las condiciones (i) y (ii) permiten aplicar el Teorema 2.3.2 a $\mathcal{G}_1$, concluyendo que $\mathcal{G}_1$ es la familia nula. Por la linealidad de $T_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}$ se tiene que $H_1^{[1]\star} = T_{\mathbf{M},2AA_1,\gamma_1}(\mathcal{G}_1) \equiv 0$, y por tanto $H^{[1]} \equiv 0$ y $H_2^{[1]\star} \equiv 0$, de modo que también se tiene que $h_{2m}^{[1]} \equiv 0$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Así,

$$\mathcal{G}_2 = (f_{2m} - h_{2m}^{[1]})_{m\in\mathbb{N}_0} = (f_{2m})_{m\in\mathbb{N}_0},$$

y $H_2^{[2]\star} = T_{\mathbf{M},c_1(2A_1)^2A,\gamma_2}(\mathcal{G}_2)$. Se repite el argumento para obtener que $\mathcal{G}_2$ es la familia nula y así sucesivamente hasta la conclusión. □

Finalizamos este apartado con una consecuencia de este resultado en la que se hace uso de las diferentes condiciones de (s) casianaliticidad obtenidas en la sección anterior. Su prueba es similar a la del Corolario 2.3.3, por lo que la omitimos.

Corolario 2.3.5. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}$, $A > 0$ y $\boldsymbol{\gamma} \in (0,\infty)^n$ como anteriormente. Sea $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in (0,\infty)^n$ tal que $\gamma_j \leq \theta_j$ para cada $j \in \mathcal{N}$, pongamos $\overline{\theta} = \max\{\theta_j : j \in \mathcal{N}\}$, y supongamos que se verifica una de las siguientes condiciones:

(i') $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\log T_{\widetilde{\mathbf{M}}}(r)}{r^{1+1/(\overline{\theta}+1)}}\,dr$ no converge.

(ii') $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\log T_{\mathbf{M}}(r)}{r^{1+1/\overline{\theta}}}\,dr$ no converge.

(iii') $\mathbf{M}$ verifica (2.19) y $\overline{\theta} \geq \gamma(\mathbf{M})$.

Sea $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}}, B)$ una función tal que:

(a) Su restricción a $S_{\boldsymbol{\gamma}}$, digamos $\tilde{f}$, es tal que $\tilde{\mathcal{B}}_1(\tilde{f}) \in \mathfrak{F}^{\circ 1}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\gamma}}, B)$.

(b) Existe una familia de números complejos $\{z_{jm} : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$ que verifica las condiciones (i), (ii) y (iii) del Teorema 2.3.4, siendo $H^{[1]}, H^{[2]}, \ldots, H^{[n]}$ las sucesivas funciones obtenidas en la construcción de $U_{\mathbf{M},A,\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{\mathcal{B}}_1(\tilde{f}))$ en el Teorema 2.1.8, y c_j, C_j las constantes que allí aparecen.

Entonces, f es idénticamente nula en $S_{\boldsymbol{\theta}}$.

2.4. Un teorema de Borel generalizado

El objetivo de esta sección es proporcionar una generalización del teorema clásico de Borel, aplicando técnicas similares a las empleadas en la primera sección de este capítulo. Observemos que, dado un intervalo abierto I de $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$, el espacio $\mathcal{C}^{\infty}(I)$ de las funciones complejas definidas e indefinidamente derivables en I es un espacio de Fréchet cuando se le dota de la topología de la convergencia uniforme en los compactos de I de la función y sus derivadas de cualquier orden. Por esta razón, consideramos en este contexto el espacio $\mathcal{C}^{\infty}(I, E)$ de las funciones indefinidamente derivables en I a valores en un espacio de Fréchet complejo E, lo que nos permitirá reducir el problema de interpolación en varias variables mediante la utilización del isomorfismo $\mathcal{C}^{\infty}(I \times J, E) \simeq \mathcal{C}^{\infty}(I, \mathcal{C}^{\infty}(J, E))$, donde I y J son sendos intervalos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

Sea E un espacio de Fréchet complejo cuya topología está definida por la familia creciente de seminormas $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Comenzamos presentando un resultado auxiliar.

Lema 2.4.1. Sea $(f_p)_{p=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}^{\infty}(I, E)$. Supongamos que para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ la sucesión $(D^{\boldsymbol{\alpha}} f_p)_{p=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de I, y pongamos

$$g_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) := \lim_{p\to\infty} D^{\boldsymbol{\alpha}} f_p(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in I, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n.$$

Entonces:

(i) $g_{\mathbf{0}} \in \mathcal{C}^\infty(I, E)$,

(ii) $D^{\boldsymbol{\alpha}} g_{\mathbf{0}} = g_{\boldsymbol{\alpha}}$ para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$.

Demostración:
Recordemos que una función $g_{\mathbf{0}}$ definida de I en E es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en I si, y sólo si, es débilmente de clase $\mathcal{C}^\infty$ en I, es decir, para cada φ en el dual topológico de E, E', se tiene que $\varphi \circ g_{\mathbf{0}} \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Entonces, el resultado (i) se deduce fácilmente a partir del enunciado análogo para funciones escalares (véase [79, Cap. 10, p. 85–89]), y para obtener (ii) se hace uso del teorema de Hahn-Banach. □

El siguiente resultado, cuya demostración omitimos, se puede encontrar parcialmente probado en [79, Teorema 40.1].

Lema 2.4.2. Sean X e Y subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente. La aplicación

$$\mathcal{C}^\infty(X \times Y, E) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(Y, \mathcal{C}^\infty(X, E))$$
$$\phi \mapsto \phi^\star,$$

donde $\phi^\star(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ para cada $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times Y$, está bien definida y es un isomorfismo de espacios de Fréchet. Además, para cada $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{N}_0^m \times \mathbb{N}_0^n$ se tiene que

$$D^{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = D^{\boldsymbol{\alpha}}(D^{\boldsymbol{\beta}}\phi^\star(\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}).$$

Pasamos a la obtención del teorema de Borel para funciones a valores en un espacio de Fréchet complejo. La demostración que presentamos es una adaptación de la que aparece en [84, p. 18–19].

Teorema 2.4.3 (Teorema de Borel)**.** Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de elementos del espacio de Fréchet E, existe una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ de modo que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $f^{(n)}(0) = a_n$.

Demostración:
Sea ϕ una función en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, de soporte compacto contenido en $(-2, 2)$ y de modo que $\phi(x) = 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Veamos que existe una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de números reales, de modo que si ponemos

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \phi(\lambda_n x), \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.23}$$

entonces para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y $m, n \in \mathbb{N}$, con $0 \le k \le n-1$ y $m \le n$, se tiene que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} p_m(f_n^{(k)}(x)) \le \frac{1}{2^n}. \tag{2.24}$$

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos

$$M_n := \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{y \in (-2,2)} |\phi^{(j)}(y)|,$$

y elegimos $\lambda_0 > 0$ arbitrario, y $\lambda_n := \text{máx}\{1, p_n(a_n) M_n 4^n n!\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $n \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n-1$. En virtud de la fórmula de Leibnitz se tiene que

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{a_n}{n!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} n(n-1)\cdots(n-p+1) x^{n-p} \lambda_n^{k-p} \phi^{(k-p)}(\lambda_n x).$$

Puesto que $\text{sop}(\phi) \subseteq (-2,2)$, si $|x| > 2/|\lambda_n|$ se tiene que $\phi^{(k-p)}(\lambda_n x) = 0$. Así, si $m \in \mathbb{N}$ y $m \leq n$,

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}} p_m(f_n^{(k)}(x)) &\leq \frac{p_m(a_n)}{n!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{n!}{(n-p)!} \left(\frac{2}{|\lambda_n|}\right)^{n-p} |\lambda_n|^{k-p} \sup_{y \in (-2,2)} |\phi^{(k-p)}(y)| \\
&\leq p_m(a_n) \frac{M_n}{|\lambda_n|^{n-k}} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{2^{n-p}}{(n-p)!} \\
&\leq p_n(a_n) \frac{M_n}{|\lambda_n|^{n-k}} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \frac{2^{n-p}}{(n-p)!}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\binom{k}{p} \leq k! \leq (n-1)!$, $2^{n-p}/(n-p)! \leq 2^n$, y $1/|\lambda_n|^{n-k} \leq 1/|\lambda_n|$, podemos asegurar que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} p_m(f_n^{(k)}(x)) \leq \frac{p_n(a_n) M_n 2^n n!}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Por lo tanto, fijado $k \in \mathbb{N}_0$ se puede asegurar que, para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=\text{máx}\{k,m\}+1}^{\infty} p_m(f_n^{(k)}(x)) \leq \sum_{n=\text{máx}\{k,m\}+1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

con lo que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)} \tag{2.25}$$

convergente uniformemente en (los subconjuntos compactos de) $\mathbb{R}$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}_0$ la función g_k dada por la suma de la serie en (2.25). El Lema 2.4.1

permite concluir que la función $f := g_0$ es un elemento de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ y que para cada $k \in \mathbb{N}$, $g_k = f^{(k)}$, es decir,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Veamos que f cumple las condiciones del enunciado. Si $x \in \mathbb{R}$, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$f^{(k)}(x) = \Big(a_0\phi(\lambda_0 x) + \ldots + \frac{a_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\phi(\lambda_{k-1}x)\Big)^{(k)} + \Big(\frac{a_k}{k!}x^k\phi(\lambda_k x)\Big)^{(k)} + R_k(x), \tag{2.26}$$

y se trata de comprobar que $f^{(k)}(0) = a_k$. Observemos en primer lugar que $R_k(0) = 0$ para todo k. Es claro entonces que $f(0) = a_0$. Si $k \geq 1$ todos los términos resultantes del primer sumando en (2.26) incorporan una derivada de ϕ o un monomio de exponente positivo, y en cualquier caso se anularán al evaluar en $x = 0$. Por idéntica razón, se tiene que

$$\Big(\frac{a_k x^k}{k!}\phi(\lambda_k x)\Big)^{(k)}\Big|_{x=0} = \frac{a_k}{k!}k!\phi(0) = a_k,$$

con lo que se concluye. □

Observación 2.4.4. No es difícil generalizar este resultado para funciones de varias variables reales (véase, por ejemplo, [58]):

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dada una multisucesión $(a_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}_0^n}$ de elementos del espacio de Fréchet E, existe una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ de modo que para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que $D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{0}) = a_{\boldsymbol{\alpha}}$.

En el caso multidimensional, tiene sentido plantear un nuevo problema de tipo Borel en base a las siguientes consideraciones. Consideremos un intervalo abierto de $\mathbb{R}^n$, $I = I_1 \times \ldots \times I_n$, donde para cada $j \in \mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ se tiene que I_j es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ con $0 \in I_j$. Dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(I, E)$, para cada $j \in \mathcal{N}$ y cada $m \in \mathbb{N}_0$ se puede definir la función f_{jm} mediante

$$f_{jm}(\boldsymbol{x}_{j'}) := D^{m\boldsymbol{e}_j} f(\boldsymbol{x}_{j'}, 0_{\{j\}}), \qquad \boldsymbol{x}_{j'} \in I_{j'} = \prod_{k\in\mathcal{N}, k\neq j} I_k. \tag{2.27}$$

Es inmediato comprobar que $f_{jm} \in \mathcal{C}^\infty(I_{j'}, E)$, y que la familia $\{f_{j,m} : j \in \mathcal{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$ verifica, en virtud del teorema de Schwarz, las siguientes *condiciones de coherencia*: dados $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$ y $j, \ell \in \mathcal{N}$, $j \neq \ell$, es válida la igualdad

$$D^{\nu\boldsymbol{e}_\ell} f_{j\mu}(\boldsymbol{x}_{\{j,\ell\}'}, 0_{\{\ell\}}) = D^{\mu\boldsymbol{e}_j} f_{\ell\nu}(\boldsymbol{x}_{\{j,\ell\}'}, 0_{\{j\}}), \quad \boldsymbol{x}_{\{j,\ell\}'} \in I_{\{j,\ell\}'}. \tag{2.28}$$

Debemos mencionar que, como ya se comentó en la demostración del Teorema 2.1.8, en la expresión anterior se está abusando de la notación: por ejemplo, $D^{\nu \boldsymbol{e}_\ell} f_{j\mu}$ representa derivación respecto de la variable x_ℓ en una función de $n-1$ variables, las n originales en f salvo la x_j (esto no concuerda con la definición de los multiíndices $\boldsymbol{e}_k$, pero permite evitar una notación más complicada).

Nuestro objetivo es probar que toda familia $\{f_{jm}\}_{j\in\mathcal{N},m\in\mathbb{N}_0}$ *coherente* (es decir, sujeta a las condiciones anteriores) proviene de una función f mediante este procedimiento. El siguiente lema proporciona la información necesaria acerca de la función interpoladora construida en el Teorema 2.4.3 cuando el espacio de Fréchet es del tipo $\mathcal{C}^\infty(I,E)$, con vistas a la aplicación de un proceso recurrente con respecto al número de variables.

Lema 2.4.5. Sean $n \in \mathbb{N}$ e I como en la observación previa, y sea J un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ con $0 \in J$. Sea $(h_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{C}^\infty(I,E)$, tal que para un $j \in \mathcal{N}$ y para cada $m, \mu \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$D^{m\boldsymbol{e}_j} h_\mu(\boldsymbol{x}_{j'}, 0_{\{j\}}) = 0, \qquad \boldsymbol{x}_{j'} \in I_{j'}.$$

Denotemos por $H^\star : J \to \mathcal{C}^\infty(I,E)$ la solución al problema de Borel asociada a la sucesión $(h_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}_0}$ en J mediante el Teorema 2.4.3, y sea $H : I \times J \to E$ la función dada por $H(\boldsymbol{x}, w) := H^\star(w)(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in I$, $w \in J$. Entonces, para ese $j \in \mathcal{N}$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$D^{(m\boldsymbol{e}_j,0)} H(\boldsymbol{x}_{j'}, 0_{\{j\}}, w) = 0, \quad (\boldsymbol{x}_{j'}, w) \in I_{j'} \times J. \tag{2.29}$$

Demostración:
Fijemos $(\boldsymbol{x}_{j'}, w) \in I_{j'} \times J$ y $m \in \mathbb{N}$. A partir del Lema 2.4.2 se tiene que

$$D^{(m\boldsymbol{e}_j,0)} H(\boldsymbol{x}_{j'}, 0_{\{j\}}, w) = D^{m\boldsymbol{e}_j}\big[(H^\star)(w)\big](\boldsymbol{x}_{j'}, 0_{\{j\}}).$$

Con la notación del Teorema 2.4.3, la expresión anterior se iguala a

$$D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{h_\mu}{\mu!} w^\mu \phi(\lambda_\mu w)\Big)(\boldsymbol{x}_{j'}, 0_{\{j\}});$$

razonamientos análogos a los realizados en la prueba del Teorema 2.4.3 permiten comprobar que la convergencia de esta serie y de sus derivadas término a término es uniforme en el producto cartesiano de J por un entorno compacto de $\mathbf{0}$ en I, de modo que es lícito obtener el valor de la última expresión como

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} D^{m\boldsymbol{e}_j}(h_\mu)(\boldsymbol{x}_{j'}, 0_{\{j\}}) w^\mu \phi(\lambda_\mu w) = 0,$$

como se quería. □

Estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.4.6. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y consideremos $I = I_1 \times \ldots \times I_n$, donde I_j es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ con $0 \in I_j$ para cada $j \in \mathcal{N}$. Sea E un espacio de Fréchet complejo, y supongamos dada una familia

$$\{f_{jm} \in \mathcal{C}^\infty(I_{j'}, E) : j \in \mathcal{N},\ m \in \mathbb{N}_0\}$$

sujeta a las condiciones de coherencia indicadas en (2.28). Entonces existe una función $f \in \mathcal{C}^\infty(I, E)$ de modo que

$$D^{m\boldsymbol{e}_j} f(\boldsymbol{x}_{j'}, 0_{\{j\}}) = f_{jm}(\boldsymbol{x}_{j'}) \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}_0,\ j \in \mathcal{N},\ \boldsymbol{x}_{j'} \in I_{j'}. \tag{2.30}$$

Demostración:
El razonamiento es similar al realizado en la prueba del Teorema 2.1.8: la construcción consiste en n pasos, de manera que tras el paso k-ésimo se obtendrá una función que verifica (2.30) para $j \leq k$. El Lema 2.4.5 garantizará que al dar cada paso no se pierde lo conseguido en los anteriores. Para no abundar en detalles ya conocidos, nos limitaremos a indicar los dos primeros pasos.

Dada la sucesión $(f_{1m})_{m=0}^\infty$ de elementos de $\mathcal{C}^\infty(I_{1'}, E)$, en virtud del Teorema 2.4.3 podemos encontrar una función $H_1^{[1]\star} \in \mathcal{C}^\infty(I_1, \mathcal{C}^\infty(I_{1'}, E))$ con

$$\big(H_1^{[1]\star}\big)^{(m)}(0) = f_{1m} \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.31}$$

De acuerdo con el Lema 2.4.2, la función $H^{[1]}$ dada por

$$H^{[1]}(\boldsymbol{x}) := H_1^{[1]\star}(x_1)(\boldsymbol{x}_{1'}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, \boldsymbol{x}_{1'}) \in I,$$

es un elemento de $\mathcal{C}^\infty(I, E)$, y se tiene que

$$D^{m\boldsymbol{e}_1} H^{[1]}(\boldsymbol{x}_{1'}, 0_{\{1\}}) = \Big(\big(H_1^{[1]\star}\big)^{(m)}(0)\Big)(\boldsymbol{x}_{1'}) = f_{1m}(\boldsymbol{x}_{1'}), \qquad \boldsymbol{x}_{1'} \in I_{1'}, \tag{2.32}$$

es decir, para esta función $H^{[1]}$ se cumple la condición en (2.30) para $j = 1$. El siguiente paso consistirá en añadirle una segunda función $H^{[2]}$ de modo que la suma cumpla la condición en (2.30) para $j = 1$ y $j = 2$.

Aplicando de nuevo el Lema 2.4.2, la función $H_2^{[1]\star}$ dada por

$$H_2^{[1]\star}(x_2)(\boldsymbol{x}_{2'}) := H^{[1]}(x_2, \boldsymbol{x}_{2'}), \qquad (x_2, \boldsymbol{x}_{2'}) \in I,$$

es un elemento de $\mathcal{C}^\infty(I_2, \mathcal{C}^\infty(I_{2'}, E))$. Definimos

$$h_{2,m}^{[1]} := \big(H_2^{[1]\star}\big)^{(m)}(0) \in \mathcal{C}^\infty(I_{2'}, E), \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

y consideramos la sucesión $(f_{2m} - h^{[1]}_{2,m})_{m=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{C}^{\infty}(I_{2'}, E)$. Para cada $k, m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} D^{k\boldsymbol{e}_1} h^{[1]}_{2m}(\boldsymbol{x}_{\{1,2\}'}, 0_{\{1\}}) &= D^{k\boldsymbol{e}_1}\big(\big(H_2^{[1]\star}\big)^{(m)}(0_{\{2\}})\big)(\boldsymbol{x}_{\{1,2\}'}, 0_{\{1\}}) \\ &= D^{k\boldsymbol{e}_1 + m\boldsymbol{e}_2} H^{[1]}(\boldsymbol{x}_{\{1,2\}'}, 0_{\{1,2\}}) \\ &= D^{m\boldsymbol{e}_2}\big(\big(H_1^{[1]\star}\big)^{(k)}(0_{\{1\}})\big)(\boldsymbol{x}_{\{1,2\}'}, 0_{\{2\}}) \\ &= D^{m\boldsymbol{e}_2} f_{1k}(\boldsymbol{x}_{\{1,2\}'}, 0_{\{2\}}) = D^{k\boldsymbol{e}_1} f_{2m}(\boldsymbol{x}_{\{1,2\}'}, 0_{\{1\}}), \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a la propia definición de $h^{[1]}_{2m}$, la segunda y tercera igualdades se deducen del Lema 2.4.2, en la cuarta se ha aplicado (2.31) y en la última se ha utilizado la coherencia de la familia dato. Por lo tanto,

$$D^{k\boldsymbol{e}_1}(f_{2m} - h^{[1]}_{2,m})(\boldsymbol{x}_{\{1,2\}'}, 0_{\{1\}}) = 0, \qquad k, m \in \mathbb{N}_0,\ \boldsymbol{x}_{\{1,2\}'} \in I_{\{1,2\}'}. \tag{2.33}$$

El Teorema 2.4.3 proporciona una función $H_2^{[2]\star} \in \mathcal{C}^{\infty}(I_2, \mathcal{C}^{\infty}(I_{2'}, E))$ tal que

$$\big(H_2^{[2]\star}\big)^{(m)}(0_{\{2\}}) = f_{2m} - h^{[1]}_{2,m}, \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.34}$$

Entonces, la aplicación $H^{[2]} : I \to \mathbb{C}$ dada por $H^{[2]}(x) = H_2^{[2]\star}(x_2)(x_{2'})$ es un elemento de $\mathcal{C}^{\infty}(I, E)$ tal que:

(i) De acuerdo con el Lema 2.4.2 y con (2.34), se tiene que

$$D^{m\boldsymbol{e}_2} H^{[2]}(\boldsymbol{x}_{2'}, 0_{\{2\}}) = \big(\big(H_2^{[2]\star}\big)^{(m)}(0_{\{2\}})\big)(\boldsymbol{x}_{2'}) = (f_{2m} - h^{[1]}_{2,m})(\boldsymbol{x}_{2'})$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$ y cada $\boldsymbol{x}_{2'} \in I_{2'}$.

(ii) De acuerdo con (2.33) y con el Lema 2.4.5,

$$D^{m\boldsymbol{e}_1} H^{[2]}(\boldsymbol{x}_{1'}, 0_{\{1\}}) = 0, \qquad m \in \mathbb{N}_0,\ \boldsymbol{x}_{1'} \in I_{1'}.$$

Es claro ahora que la función $F^{[2]} := H^{[1]} + H^{[2]} \in \mathcal{C}^{\infty}(I, E)$ verifica las condiciones (2.30) para $j = 1, 2$, con lo que damos por concluida la demostración. □

Observación 2.4.7. Como se indicó en el Corolario 1.2.14, es posible generalizar el teorema de Borel clásico al caso de clases ultradiferenciables de funciones a valores en un espacio de Banach B, clases definidas en términos de una sucesión fuertemente regular $\mathbf{M}$; la generalización viene dada mediante la construcción de operadores lineales y continuos, inversos por la derecha de la aplicación de Borel. Si se trabaja con las clases $\mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(I, B)$ introducidas tras la Definición 1.2.1, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}^n$ y $A > 0$, es posible extender dichas construcciones, con las mismas técnicas utilizadas en esta sección y en la Sección 2.1, para obtener inversas por la derecha de la aplicación que envía cada función perteneciente a una de esas clases en su familia asociada, de acuerdo con la Observación 2.4.4. No obstante, no entraremos en detalles para evitar repeticiones innecesarias.

2.5. Prueba del Lema 2.1.7

Esta sección está exclusivamente dedicada a la prueba del Lema 2.1.7, que fue crucial en el razonamiento inductivo que se utilizó para la demostración del resultado principal del capítulo, el Teorema 2.1.8. Recordamos su enunciado.

Lema 2.1.7. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular, $A > 0$, $S_{\boldsymbol{\theta}}$ un polisector de $\mathcal{R}^n$ con $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in (0,\infty)^n$, y S_γ un sector de $\mathcal{R}$ con $0 < \gamma < \gamma(\mathbf{M})$. Sea $\boldsymbol{f} = (f_p)_{p\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0, \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}}))$ y supongamos que existe $j \in \mathcal{N}$ tal que para cada $m, p \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j} f_p(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{uniformemente en } S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}. \tag{2.35}$$

Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\big((T_{\mathbf{M},A,\gamma}\boldsymbol{f})(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0 \tag{2.36}$$

uniformemente con respecto a $w \in S_\gamma$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$, siendo $T_{\mathbf{M},A,\gamma}$ la aplicación de extensión dada en el Teorema 1.3.9.

Notación: Por una mayor brevedad en la escritura, pondremos B en el lugar de $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{\boldsymbol{\theta}})$ y $F^\star_{\boldsymbol{f}}$ en el lugar de $T_{\mathbf{M},A,\gamma}\boldsymbol{f}$. Por otra parte, cuando se identifique el plano complejo con $\mathbb{R}^2$ y el punto complejo $w = x + iy$ con el par (x, y), resultará cómodo introducir los multiíndices $\tilde{\boldsymbol{e}}_1 := (1,0)$ y $\tilde{\boldsymbol{e}}_2 := (0,1)$, de modo que el operador $D^{\tilde{\boldsymbol{e}}_1}$ será la derivada parcial respecto de x y $D^{\tilde{\boldsymbol{e}}_2}$ la derivada parcial respecto de y.

Comenzamos indicando que, como se justifica en el trabajo de V. Thilliez [77], mediante una ramificación adecuada es posible reducir la construcción del operador $T_{\mathbf{M},A,\gamma}$ al caso en que $\gamma < 2$. Un análisis del razonamiento allí empleado muestra que también en nuestro caso podemos limitarnos a estudiar esa situación. La prueba del resultado se desglosará en distintas etapas, siguiendo los pasos dados por V. Thilliez en su construcción. Asimismo, se requerirá el establecimiento de estimaciones precisas en un estudio exhaustivo de la construcción de los operadores $E_{A,B}$ y $F_{A,\Omega,B}$ obtenidos por J. Chaumat y A.-M. Chollet y a los que hicimos referencia en el Corolario 1.2.14. Antes de entrar en detalles, resumimos los pasos que vamos a dar y la información ya disponible en [77], lo que hará más asequible el seguimiento del extenso razonamiento:

(i) En primer lugar (etapa 1), dada $\boldsymbol{f} = (f_p)_{p\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0, B)$ se le asocia una familia $\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^2, B)$ mediante la igualdad (2.40), y se construye $g^\star_{\boldsymbol{f}} := E_{A,B}(\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})$, con soporte en un disco $D = B(0, R_1)$, que pertenece a $\mathcal{C}_{\mathbf{M},c_1A}(\mathbb{R}^2, B)$ (para un c_1 adecuado) y para la que

$$D^{(p,0)} g^\star_{\boldsymbol{f}}(0,0) = f_p, \qquad p \in \mathbb{N}_0. \tag{2.37}$$

Probaremos que para todo $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{uniformemente para } w \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}.$$

(ii) En la etapa 2 se probará que para todo $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{uniformemente para } w \in \mathbb{C}, \boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}},$$

donde el operador $\overline{\partial}_w$ viene dado por $\overline{\partial}_w = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$.

(iii) Fijados $\tau > 0$ y γ adecuados, con $0 < \gamma < \gamma(\mathbf{M})$, se define $\psi(w) = G(\tau w)$, $w \in S_\gamma$, donde G es la función determinada en la Proposición 1.3.10. Se tiene entonces que $\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{M},c_2A}(S_\gamma, B)$ (con c_2 adecuado). Demostraremos en la etapa 3 que

$$\lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\frac{1}{\psi(w)}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\Big)(\boldsymbol{z}) = 0,$$

uniformemente en $w \in S_\gamma$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$.

(iv) Para $\Omega = D \cap S_\gamma$ se define la función

$$v^\star_{\boldsymbol{f}} = F_{c_3A,\Omega,B}(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}),$$

con c_3 adecuado y donde $F_{c_3A,\Omega,B}$ es el operador de extensión dado en el Corolario 1.2.14, de modo que $v^\star_{\boldsymbol{f}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{M},c_4A}(\mathbb{C}, B)$ para cierto c_4, coincide con $\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}$ en Ω y tiene soporte contenido en un disco abierto D' centrado en 0 y tal que $\overline{D} \subseteq D'$. En la etapa 4 veremos que

$$\lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(v^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0$$

uniformemente para $w \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$.

(v) Consideremos una función $\chi \in \mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{C})$ con soporte en D' e idénticamente igual a 1 en D. Se tiene que

$$\chi v^\star_{\boldsymbol{f}} = \frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}} \quad \text{en } S_\gamma. \tag{2.38}$$

Sea $\mathcal{K}(w) = -1/(\pi w)$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; se define $u^\star_{\boldsymbol{f}} = \mathcal{K} * (\chi v^\star_{\boldsymbol{f}})$ (donde $*$ denota convolución), que verifica que

$$\overline{\partial}_w u^\star_{\boldsymbol{f}} = \chi v^\star_{\boldsymbol{f}} \quad \text{en } \mathbb{C}. \tag{2.39}$$

Nuestro objetivo en la etapa 5 es probar que

$$\lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(u^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\Big)(\boldsymbol{z}) = 0,$$

uniformemente para $w \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$.

(vi) Para un c_5 conveniente se tiene que $\psi u^\star_{\boldsymbol{f}}$ pertenece a $\mathcal{C}_{\mathbf{M},c_5A}(S_\gamma, B)$ y, además, es plana en el origen por serlo ψ. Se define $T_{\mathbf{M},A,\gamma}\boldsymbol{f} := g^\star_{\boldsymbol{f}} - \psi u^\star_{\boldsymbol{f}}$. De acuerdo con (2.37), sus derivadas en el origen son las deseadas, y es holomorfa en S_γ en virtud de (2.38) y (2.39). En la etapa 6 se deducirá (2.36).

Queremos hacer notar que las constantes $c_1, \ldots, c_5$ no son necesariamente las que, con ese nombre, aparecen de ahora en adelante en esta sección.

2.5.1. Etapa 1

Dada $\boldsymbol{f} = (f_p)_{p\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0, B)$, definimos $\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}} = (f^{\mathbb{C}}_{(\ell,k)})_{(\ell,k)\in\mathbb{N}_0^2} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0^2, B)$ como la familia determinada por la igualdad

$$\sum_{(\ell,k)\in\mathbb{N}_0^2} f^{\mathbb{C}}_{(\ell,k)} \frac{x^\ell y^k}{\ell!k!} = \sum_{p\in\mathbb{N}_0} f_p \frac{(x+iy)^p}{p!}. \tag{2.40}$$

Es inmediato comprobar que $f^{\mathbb{C}}_{(\ell,k)} = i^k f_{\ell+k}$ para cada $(\ell,k)\in\mathbb{N}_0^2$.

Escojamos $R_1 > 0$ y el disco abierto $D := B(0, R_1)$. Supondremos que el operador $E_{A,B}$ mencionado en el Corolario 1.2.14 proporciona funciones con soporte contenido en D.

La función $g^\star_{\boldsymbol{f}} := E_{A,B}(\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})$ pertenece a $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R}^2, B)$ y, por construcción, se tiene que $D^{(p,0)}g^\star_{\boldsymbol{f}}(0,0) = f_p$ para cada $p\in\mathbb{N}_0$. Vamos a probar que para el $j\in\mathcal{N}$ del enunciado y para todo $m\in\mathbb{N}_0$,

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0 \text{ uniformemente para } w\in\mathbb{C},\ \boldsymbol{z}_{j'}\in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}. \tag{2.41}$$

Antes de comenzar enunciamos un resultado auxiliar.

Lema 2.5.1. En las condiciones del Lema 2.1.7, dados $\varepsilon > 0$, $S > 0$ y $T\in\mathbb{N}_0$, supongamos que $\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}} = (f^{\mathbb{C}}_{(\ell,k)})_{(\ell,k)\in\mathbb{N}_0^2}$ verifica que existe $\delta > 0$ de forma que

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j} f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{z})| \le \varepsilon$$

para todo $\boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| < \delta$ y para todo $\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^2$ con $|\boldsymbol{J}|\le T$. Entonces, se tiene que

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\boldsymbol{J}}(T_0^q\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\big)(\boldsymbol{z})| \le \varepsilon e^{2S}$$

para todo $\boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| < \delta$, para todo $w\in\mathbb{C}$ con $|w|\le S$, y para todos $\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^2$ con $|\boldsymbol{J}|\le T$ y $q\in\mathbb{N}_0$ con $q\le T$.

Demostración:
Si $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2)$, $\boldsymbol{K} = (K_1, K_2)$ y $w = (w_1, w_2)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\boldsymbol{J}}(T_0^q \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\big)(\boldsymbol{z})| &= \big|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\boldsymbol{J}}\big(\sum_{\boldsymbol{K}:|\boldsymbol{K}|\le q} \frac{1}{\boldsymbol{K}!} w^{\boldsymbol{K}} f_{\boldsymbol{K}}^{\mathbb{C}}\big)\big)(\boldsymbol{z})\big| \\
&= \big|\sum_{\boldsymbol{K}:|\boldsymbol{K}|\le q, \boldsymbol{J}\le \boldsymbol{K}} \frac{1}{(K_1-J_1)!}\frac{1}{(K_2-J_2)!} w^{\boldsymbol{K}-\boldsymbol{J}} D^{m\boldsymbol{e}_j} f_{\boldsymbol{K}}^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{z})\big| \\
&\le \sum_{\boldsymbol{K}:|\boldsymbol{K}|\le q, \boldsymbol{J}\le \boldsymbol{K}} \frac{1}{(K_1-J_1)!}\frac{1}{(K_2-J_2)!} |w^{\boldsymbol{K}-\boldsymbol{J}} D^{m\boldsymbol{e}_j} f_{\boldsymbol{K}}^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{z})| \\
&\le \sum_{\boldsymbol{K}:|\boldsymbol{K}|\le q, \boldsymbol{J}\le \boldsymbol{K}} \frac{1}{(K_1-J_1)!}\frac{1}{(K_2-J_2)!} |w_1^{K_1-J_1} w_2^{K_2-J_2}|\varepsilon \\
&\le \varepsilon \prod_{p=1,2} \big(\sum_{J_p\le K_p} \frac{1}{(K_p-J_p)!} |w_p|^{K_p-J_p}\big) \\
&= \varepsilon e^{|w_1|+|w_2|} \le \varepsilon e^{2|w|} \le \varepsilon e^{2S},
\end{aligned}
$$

para todo $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| < \delta$, para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \le S$ y para todos $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^2$ con $|\boldsymbol{J}| \le T$ y $q \in \mathbb{N}_0$ con $q \le T$. □

Pasamos a la comprobación de (2.41). Sea $\varepsilon_1 > 0$ y fijemos $m \in \mathbb{N}_0$. Teniendo en cuenta las propiedades descritas en la Proposición 1.1.16 podemos garantizar la existencia de $\delta_1 > 0$ de modo que

$$h_{\mathbf{M}}(Lb\delta_1) < \frac{\varepsilon_1}{C_1 Lb4A^m m! M_m}, \tag{2.42}$$

donde L y C_1 son las constantes que aparecen fijadas en (1.18), D_2 es la constante que aparece en (1.13) y que sólo depende de la sucesión $\mathbf{M}$, y b es la constante en (1.15). Fijemos

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \min\{\frac{R_1}{2}, \delta_1, \frac{\varepsilon_1}{C_1 L D_2 M_1 4A^m m! M_m}\}. \tag{2.43}$$

Razonaremos a continuación distinguiendo tres casos en función del módulo de w:

(i) Si $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \ge R_1$ entonces $D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(g_{\boldsymbol{f}}^{\star}(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0$ para todo $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$, pues el soporte de $g_{\boldsymbol{f}}^{\star}$ está contenido en $D = B(0, R_1)$.

(ii) Estudiamos el caso en que $w \in \mathbb{C}$ con $\tilde{\varepsilon}_1 \le |w| \le R_1$. Recordamos que el operador de extensión que estamos aplicando a la sucesión $\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}$ viene dado por (1.16). Esta serie se reduce a una serie finita para cada w fuera del compacto donde vienen dados los datos a extender (en este caso el compacto es el origen de coordenadas). En cada uno de los términos de dicha serie interviene la función $\phi_{\ell,\eta}$, que tiene soporte en $B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$ (ver las Proposiciones 1.2.12 y 1.2.13).

En virtud de (1.15), para cada índice $\ell \in \mathbb{N}$ con $w \in B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$ se tiene que $|\boldsymbol{x}_\ell| \geq a|w| \geq a\tilde{\varepsilon}_1$. Teniendo en cuenta las propiedades de la función N (ver la Proposición 1.1.16), existe $T \in \mathbb{N}_0$ de modo que $2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|) \leq T$ para todos los índices ℓ considerados. En el caso en que $\ell \in \mathbb{N}$ sea tal que $w \notin B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$, entonces $\phi_{\ell,\eta}(w) = 0$.
Para $\varepsilon_1 > 0$ fijado, a partir de (2.35) podemos asegurar la existencia de $\tilde{\delta}_1 \in (0, \delta_1)$ de forma que

$$\max_{\boldsymbol{J}\in\mathbb{N}_0^2, |\boldsymbol{J}|\leq T} |D^{m\boldsymbol{e}_j} f_{\boldsymbol{J}}^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{z})| \leq \frac{\varepsilon_1}{2e^{2R_1}}, \tag{2.44}$$

para todo $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| \leq \tilde{\delta}_1$. Estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.5.1 tomando $S = R_1$ y $\varepsilon = \varepsilon_1/2e^{2R_1}$: Para cada $w \in \mathbb{C}$ con $\tilde{\varepsilon}_1 \leq |w| \leq R_1$ y cada $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| \leq \tilde{\delta}_1$, se tendrá que

$$\begin{aligned} |D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(g_{\boldsymbol{f}}^\star(w)\big)(\boldsymbol{z})| &= \Big|D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w) T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)\Big)(\boldsymbol{z})\Big| \\ &\leq \sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w) |D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)\big)(\boldsymbol{z})| \\ &\leq \varepsilon_1 \sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w) = \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{2.45}$$

(iii) Por último, para cada $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq \tilde{\varepsilon}_1$ y cada $\ell \in \mathbb{N}$ con $w \in B(x_\ell, kr_\ell)$, se tiene que

$$\begin{aligned} &\big\|T_0^{2N(L|x_\ell|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w) - f_{(0,0)}^{\mathbb{C}}\big\|_B \\ &\leq \big\|T_0^{2N(L|x_\ell|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w) - T_0^{2N(L|w|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)\big\|_B + \big\|T_0^{2N(L|w|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w) - f_{(0,0)}^{\mathbb{C}}\big\|_B. \end{aligned} \tag{2.46}$$

El primero de los sumandos en esta expresión se acota, poniendo $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ en (1.18) y teniendo en cuenta (2.42) y (2.43), por

$$\begin{aligned} \big\|T_0^{2N(L|x_\ell|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w) - T_0^{2N(L|w|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)\big\|_B &\leq C_1 Lb h_{\mathbf{M}}(Lb|w|) \\ &\leq C_1 Lb h_{\mathbf{M}}(Lb\delta_1) \leq \frac{\varepsilon_1}{4A^m m! M_m}. \end{aligned}$$

El segundo de los sumandos en (2.46) se acota, tomando $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ en (1.13) y de nuevo teniendo en cuenta (2.43), por

$$\begin{aligned} \big\|T_0^{2N(L|w|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w) - f_{(0,0)}^{\mathbb{C}}\big\|_B &\leq C_1 L D_2 M_1 |w| \\ &\leq C_1 L D_2 M_1 \tilde{\varepsilon}_1 \leq \frac{\varepsilon_1}{4A^m m! M_m}. \end{aligned}$$

De estas dos expresiones podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\left\|T_0^{2N(L|x_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w) - f^{\mathbb{C}}_{(0,0)}\right\|_B &= \sup_{\boldsymbol{K}\in\mathbb{N}^n,\boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\theta}}} \frac{\left|D^{\boldsymbol{K}}\big(T_0^{2N(L|x_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w) - f^{\mathbb{C}}_{(0,0)}\big)(\boldsymbol{z})\right|}{A^{|\boldsymbol{K}|}|\boldsymbol{K}|!M_{|\boldsymbol{K}|}} \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2A^m m! M_m}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

En particular, poniendo $\boldsymbol{K} = m\boldsymbol{e}_j$ se concluye que

$$\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(T_0^{2N(L|x_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w) - f^{\mathbb{C}}_{(0,0)}\Big)(\boldsymbol{z})\right| \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \tag{2.48}$$

para todo $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$.
Por otra parte, haciendo $\boldsymbol{J} = (0,0)$ en (2.44) se puede deducir que si $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| \leq \tilde{\delta}_1$, entonces

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j} f^{\mathbb{C}}_{(0,0)}(\boldsymbol{z})| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}. \tag{2.49}$$

Teniendo en cuenta (2.48) y (2.49) podemos garantizar que si $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq \tilde{\varepsilon}_1$ y $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| \leq \tilde{\delta}_1$, entonces

$$\begin{aligned} &|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(g^{\star}_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z})| \\ &= \left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\sum_{\ell}\phi_{\ell,\eta}(w)T_0^{2N(L|x_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)\Big)(\boldsymbol{z})\right| \\ &\leq \sum_{\ell}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big[|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(T_0^{2N(L|x_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w) - f^{\mathbb{C}}_{(0,0)}\big)(\boldsymbol{z})| + |D^{m\boldsymbol{e}_j} f^{\mathbb{C}}_{(0,0)}(\boldsymbol{z})|\Big] \\ &\leq \sum_{\ell}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big(\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_1}{2}\Big) = \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{2.50}$$

A la vista de (i), (2.45) y (2.50), concluimos que dado $\varepsilon_1 > 0$ existe $\tilde{\delta}_1 > 0$ de forma que si $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| < \tilde{\delta}_1$, entonces

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(g^{\star}_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z})| \leq \varepsilon_1, \qquad w \in \mathbb{C},$$

con lo que se deduce (2.41).

2.5.2. Etapa 2

Veremos en este apartado que para todo $m \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(\overline{\partial}_w g^{\star}_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0 \quad \text{uniformemente para } w \in \mathbb{C}, \boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}, \tag{2.51}$$

donde el operador $\overline{\partial}_w$ viene dado por

$$\overline{\partial}_w = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Necesitaremos utilizar la desigualdad (37) en el trabajo de V. Thilliez [77]: para cada $\boldsymbol{K} \in \mathbb{N}_0^2$ (con $|\boldsymbol{K}| = k$) y para cada $w \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\big\|D^{\boldsymbol{K}}\big(\overline{\partial}_w g_{\boldsymbol{f}}^{\star}\big)(w)\big\|_B \leq c_1 \|E_{A,B}\| \, |\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}|_{\mathbf{M},A,B} (c_2A)^k k! M_k h_{\mathbf{M}}(c_2A|w|), \tag{2.52}$$

para ciertas constantes $c_1, c_2 > 0$. Su demostración se basa en el hecho de que $\overline{\partial}_w g_{\boldsymbol{f}}^{\star}$ es una función con derivadas nulas en el origen y en la aplicación de la fórmula de Taylor.

Sea $\varepsilon_2 > 0$ y fijemos $m \in \mathbb{N}_0$. Elijamos $\tilde{\varepsilon}_2 > 0$ de forma que $\tilde{\varepsilon}_2 \leq R_1$ y

$$h_{\mathbf{M}}(c_2 A\tilde{\varepsilon}_2) \leq \frac{\varepsilon_2}{c_1 \|E_{A,B}\| \, |\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}|_{\mathbf{M},A,B} A^m m! M_m}.$$

De nuevo distinguiremos tres casos:

(i) Si $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \geq R_1$ se tiene que $g_{\boldsymbol{f}}^{\star}(w) \equiv 0$ en $S_{\boldsymbol{\theta}}$, así que

$$D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(\overline{\partial}_w g_{\boldsymbol{f}}^{\star}(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0, \qquad \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.53}$$

(ii) Sea $w \in \mathbb{C}$ con $\tilde{\varepsilon}_2 \leq |w| \leq R_1$. Para cada $\ell \in \mathbb{N}_0$ con $w \in B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$ se tiene que $|\boldsymbol{x}_\ell| \geq a|w| \geq a\tilde{\varepsilon}_2$ por lo que podemos garantizar la existencia de $q \in \mathbb{N}_0$ de manera que $2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|) \leq q$. En el caso de que $w \notin B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$ se deduce que $\phi_{\ell,\eta} \equiv (\partial/\partial x)\phi_{\ell,\eta} \equiv (\partial/\partial y)\phi_{\ell,\eta} \equiv 0$. Así, si $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$,

$$\begin{aligned}
&\Big(\overline{\partial}_w\big(g_{\boldsymbol{f}}^{\star}(w)\big)\Big)(\boldsymbol{z}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\sum_{\ell} \phi_{\ell,\eta}(w) T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)} \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)\Big)(\boldsymbol{z}) \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big) T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}(w)(\boldsymbol{z}) + \phi_{\ell,\eta}(w)\Big[\frac{\partial}{\partial x} T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}(w)\Big](\boldsymbol{z})\Big] \\
&+ i\sum_{\ell}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial y}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big) T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}(w)(\boldsymbol{z}) + \phi_{\ell,\eta}(w)\Big[\frac{\partial}{\partial y} T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}(w)\Big](\boldsymbol{z})\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

luego

$$
\begin{aligned}
&D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\overline{\partial}_w g^{\star}_{\boldsymbol{f}}(w)\Big)(\boldsymbol{z})\\
&=\frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\Big[\big[\frac{\partial}{\partial x}\phi_{\ell,\eta}(w)\big]\big[D^{m\boldsymbol{e}_j}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}(w))(\boldsymbol{z})\big]\\
&+\phi_{\ell,\eta}(w)\big[D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\tilde{e}_1}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)})(w)\big)(\boldsymbol{z})\big]\Big]\\
&+i\sum_{\ell}\Big[\big[\frac{\partial}{\partial y}\phi_{\ell,\eta}(w)\big]\big[D^{m\boldsymbol{e}_j}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}(w))(\boldsymbol{z})\big]\\
&+\phi_{\ell,\eta}(w)\big[D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\tilde{e}_2}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)})(w)\big)(\boldsymbol{z})\big]\Big]\Big\}\\
&=\frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\Big[\big[\frac{\partial}{\partial x}\phi_{\ell,\eta}(w)\big]\big[D^{m\boldsymbol{e}_j}(\sum_{\boldsymbol{J}:|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{\boldsymbol{J}!}w^{\boldsymbol{J}}f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}})(\boldsymbol{z})\big]\\
&+\phi_{\ell,\eta}(w)\big[D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\tilde{e}_1}(\sum_{\boldsymbol{J}:|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{\boldsymbol{J}!}w^{\boldsymbol{J}}f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}})\big)(\boldsymbol{z})\big]\Big]\\
&+i\sum_{\ell}\Big[\big[\frac{\partial}{\partial y}\phi_{\ell,\eta}(w)\big]\big[D^{m\boldsymbol{e}_j}(\sum_{\boldsymbol{J}:|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{\boldsymbol{J}!}w^{\boldsymbol{J}}f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}})(\boldsymbol{z})\big]\\
&+\phi_{\ell,\eta}(w)\big[D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\tilde{e}_2}(\sum_{\boldsymbol{J}:|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{\boldsymbol{J}!}w^{\boldsymbol{J}}f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}})\big)(\boldsymbol{z})\big]\Big]\Big\}\\
&=\frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\Big[\big[\frac{\partial}{\partial x}\phi_{\ell,\eta}(w)\big]\big[\sum_{\boldsymbol{J}:|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{\boldsymbol{J}!}w^{\boldsymbol{J}}D^{m\boldsymbol{e}_j}f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{z})\big]\\
&+\phi_{\ell,\eta}(w)\big[\sum_{\boldsymbol{J}=(j_1,j_2):j_1\geq 1,|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{(j_1-1)!j_2!}w^{\boldsymbol{J}-\tilde{e}_1}D^{m\boldsymbol{e}_j}f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{z})\big]\Big]\\
&+i\sum_{\ell}\Big[\big[\frac{\partial}{\partial y}\phi_{\ell,\eta}(w)\big]\big[\sum_{\boldsymbol{J}:|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{\boldsymbol{J}!}w^{\boldsymbol{J}}D^{m\boldsymbol{e}_j}f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{z})\big]\\
&+\phi_{\ell,\eta}(w)\big[\sum_{\boldsymbol{J}=(j_1,j_2):j_2\geq 1,|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{j_1!(j_2-1)!}w^{\boldsymbol{J}-\tilde{e}_2}D^{m\boldsymbol{e}_j}f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{z})\big]\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Haciendo de nuevo uso de la hipótesis (2.35) del lema, para $\tilde{\varepsilon}_2 > 0$ fijado, existe $\tilde{\delta}_2 > 0$ de modo que

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j}f^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{z})| \leq \frac{\varepsilon_2}{Se^{2R_1}} \qquad \text{para todo } \boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\theta}}, |z_j|\leq\tilde{\delta}_2, |\boldsymbol{J}|\leq q,$$

siendo

$$S := n_0 2\eta M_1\frac{1}{h_{\mathbf{M}}(B_1\eta\tilde{\varepsilon}_2)} + 2,$$

donde B_1 y n_0 son las constantes indicadas en las Proposiciones 1.2.12 y 1.2.13. Teniendo en cuenta esto último tenemos que si $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| \leq \tilde{\delta}_2$ entonces

$$\begin{aligned}
&\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(\overline{\partial}_w g_{\boldsymbol{f}}^{\star}(w)\big)(\boldsymbol{z})\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\Big[\big|\frac{\partial}{\partial x}\phi_{\ell,\eta}(w)\big|\Big[\sum_{\boldsymbol{J}:|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{\boldsymbol{J}!}|w^{\boldsymbol{J}}|\frac{\varepsilon_2}{Se^{2R_1}}\Big] \\
&+\phi_{\ell,\eta}(w)\sum_{\boldsymbol{J}=(j_1,j_2):j_1\geq 1,|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{(j_1-1)!j_2!}|w^{\boldsymbol{J}-\tilde{e}_1}|\frac{\varepsilon_2}{Se^{2R_1}}\Big] \\
&+\sum_{\ell}\Big[\big|\frac{\partial}{\partial y}\phi_{\ell,\eta}(w)\big|\Big[\sum_{\boldsymbol{J}:|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{\boldsymbol{J}!}|w^{\boldsymbol{J}}|\frac{\varepsilon_2}{Se^{2R_1}}\Big] \\
&+\phi_{\ell,\eta}(w)\sum_{\boldsymbol{J}=(j_1,j_2):j_2\geq 1,|\boldsymbol{J}|\leq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\frac{1}{j_1!(j_2-1)!}|w^{\boldsymbol{J}-\tilde{e}_2}|\frac{\varepsilon_2}{Se^{2R_1}}\Big]\Big\}.
\end{aligned}$$

Haciendo intervenir unas cotas similares a las del Lema 2.5.1, la expresión anterior se acota por

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\Big[\big|\frac{\partial}{\partial x}\phi_{\ell,\eta}(w)\big|\frac{\varepsilon_2}{S}+\phi_{\ell,\eta}(w)\frac{\varepsilon_2}{S}\Big]+\sum_{\ell}\Big[\big|\frac{\partial}{\partial y}\phi_{\ell,\eta}(w)\big|\frac{\varepsilon_2}{S}+\phi_{\ell,\eta}(w)\frac{\varepsilon_2}{S}\Big]\Big\} \\
&=\frac{\varepsilon_2}{2S}\Big\{\sum_{\ell}\Big(\big|\frac{\partial}{\partial x}\phi_{\ell,\eta}(w)\big|+\big|\frac{\partial}{\partial y}\phi_{\ell,\eta}(w)\big|\Big)+2\Big\}.
\end{aligned}$$

Para concluir, aplicamos la propiedad (iv) para las funciones de la familia $(\phi_{\ell,\eta})_{\ell\in\mathbb{N}}$ (ver la Proposición 1.2.13) poniendo $\boldsymbol{J}=\tilde{e}_1$ y $\boldsymbol{J}=\tilde{e}_2$, obteniendo que

$$\begin{aligned}
\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(\overline{\partial}_w g_{\boldsymbol{f}}^{\star}(w)\big)(\boldsymbol{z})\right| &\leq \Big\{\sum_{1\leq\ell\leq n_0}2\eta M_1\frac{1}{h_{\mathbf{M}}(B_1\eta|w|)}+2\Big\}\frac{\varepsilon_2}{S} \\
&\leq \frac{\varepsilon_2}{S}\Big(n_0 2\eta M_1\frac{1}{h_{\mathbf{M}}(B_1\eta\tilde{\varepsilon}_2)}+2\Big)=\varepsilon_2.
\end{aligned}$$

En definitiva, hemos probado que dado $\varepsilon_2>0$ existe $\tilde{\delta}_2>0$ de modo que para $w\in\mathbb{C}$ con $\tilde{\varepsilon}_2\leq|w|\leq R_1$ y $\boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j|\leq\tilde{\delta}_2$ se tiene que

$$\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(\overline{\partial}_w g_{\boldsymbol{f}}^{\star}(w)\big)(\boldsymbol{z})\right|\leq\varepsilon_2. \tag{2.54}$$

(iii) Por último, si $w\in\mathbb{C}$ con $|w|\leq\tilde{\varepsilon}_2$, aplicando la expresión (2.52) para $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{0}$, y teniendo en cuenta la elección de $\tilde{\varepsilon}_2$, se puede deducir que

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{\partial}_w g_{\boldsymbol{f}}^{\star}(w)\right\|_B &\leq c_1\left\|E_{A,B}\right\||\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}|_{\mathbf{M},A,B}h_{\mathbf{M}}(c_2A|w|) \\
&\leq c_1\left\|E_{A,B}\right\||\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}|_{\mathbf{M},A,B}h_{\mathbf{M}}(c_2A\tilde{\varepsilon}_2) \\
&\leq \frac{\varepsilon_2}{A^m m!M_m}.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\sup_{\boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\theta}},\boldsymbol{K}\in\mathbb{N}_0^n} \frac{\left|D^{\boldsymbol{K}}\big(\overline{\partial}_w g^{\star}_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z})\right|}{A^{|\boldsymbol{K}|}|\boldsymbol{K}|!M_{|\boldsymbol{K}|}} \leq \frac{\varepsilon_2}{A^m m! M_m}.$$

Particularizando al caso $\boldsymbol{K} = m\boldsymbol{e}_j$, para cada $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq \tilde{\varepsilon}_2$ y cada $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ se tiene que

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(\overline{\partial}_w g^{\star}_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z})| \leq \varepsilon_2. \tag{2.55}$$

A partir de (2.53), (2.54) y (2.55) se concluye (2.51).

Finalizada esta etapa, establecemos un lema auxiliar que amplía la información acerca de $\overline{\partial}_w g^{\star}_{\boldsymbol{f}}$.

Lema 2.5.2. Bajo las hipótesis del Lema 2.1.7, dados $T \in \mathbb{N}_0$ y $0 < R_0 \leq R_1$, se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}_0$ y cada $\boldsymbol{K} \in \mathbb{N}_0^2$ con $|\boldsymbol{K}| \leq T$,

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(D^{\boldsymbol{K}}(\overline{\partial}_w g^{\star}_{\boldsymbol{f}})(w)\Big)(\boldsymbol{z}) = 0, \tag{2.56}$$

uniformemente para $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$ y para todo $w \in \mathbb{C}$ con $R_0 < |w|$.

Demostración:
Puesto que el soporte de la función $g^{\star}_{\boldsymbol{f}}$ está contenido en el disco $D = B(0, R_1)$, bastará razonar para w con $R_0 < |w| < R_1$.

A partir de las propiedades de $h_{\mathbf{M}}$ descritas en la Proposición 1.1.16 podemos garantizar que

$$\frac{1}{h_{\mathbf{M}}(B_1\eta|w|)} \leq \frac{1}{h_{\mathbf{M}}(B_1\eta R_0)} =: L_{R_0} \tag{2.57}$$

para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \geq R_0$. Además, para cada $\ell \in \mathbb{N}$ con $w \in \operatorname{sop}(\phi_{\ell,\eta})$ se tiene que $|\boldsymbol{x}_\ell| \geq a|w| \geq aR_0$, según la Proposición 1.2.12. Por tanto, existe $\tilde{T} \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{T} \geq 2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)$ para los índices ℓ anteriores.

Sea $\boldsymbol{K} \in \mathbb{N}_0^2$ con $|\boldsymbol{K}| \leq T$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $w \in \mathbb{C}$ con $R_0 \leq |w| \leq R_1$ y $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\big(D^{\boldsymbol{K}}(\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}})(w)\big)(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2} D^{\boldsymbol{K}}\Big(D^{\tilde{e}_1} g^\star_{\boldsymbol{f}}(w) + i D^{\tilde{e}_2} g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\Big)(\boldsymbol{z}) \\
&= D^{\boldsymbol{K}}\Big[\frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\Big[\Big(D^{\tilde{e}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big) T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)(\boldsymbol{z}) + \phi_{\ell,\eta}(w)\big[D^{\tilde{e}_1} T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)\big](\boldsymbol{z})\Big] \\
&+ i\sum_{\ell}\Big[\Big(D^{\tilde{e}_2}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big) T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)(\boldsymbol{z}) + \phi_{\ell,\eta}(w)\big[D^{\tilde{e}_2} T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}(w)\big](\boldsymbol{z})\Big]\Big\}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\sum_{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}} \frac{\boldsymbol{K}!}{\boldsymbol{K}_1!\boldsymbol{K}_2!}\Big[\Big(D^{\boldsymbol{K}_1+\tilde{e}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big)\Big(D^{\boldsymbol{K}_2}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\Big)(\boldsymbol{z}) \\
&+ \Big(D^{\boldsymbol{K}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big)\Big(D^{\boldsymbol{K}_2+\tilde{e}_1}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\Big)(\boldsymbol{z})\Big] \\
&+ i\sum_{\ell}\sum_{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}} \frac{\boldsymbol{K}!}{\boldsymbol{K}_1!\boldsymbol{K}_2!}\Big[\Big(D^{\boldsymbol{K}_1+\tilde{e}_2}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big)\Big(D^{\boldsymbol{K}_2}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\Big)(\boldsymbol{z}) \\
&+ \Big(D^{\boldsymbol{K}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big)\Big(D^{\boldsymbol{K}_2+\tilde{e}_2}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\Big)(\boldsymbol{z})\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

De acuerdo con esta expresión, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ podemos escribir

$$
\begin{aligned}
&D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(D^{\boldsymbol{K}}(\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}})(w)\Big)(\boldsymbol{z}) \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\sum_{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}} \frac{\boldsymbol{K}!}{\boldsymbol{K}_1!\boldsymbol{K}_2!}\Big[\Big(D^{\boldsymbol{K}_1+\tilde{e}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big) D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(D^{\boldsymbol{K}_2}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\Big)(\boldsymbol{z}) \\
&+ \Big(D^{\boldsymbol{K}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big) D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(D^{\boldsymbol{K}_2+\tilde{e}_1}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\Big)(\boldsymbol{z})\Big] \\
&+ i\sum_{\ell}\sum_{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}} \frac{\boldsymbol{K}!}{\boldsymbol{K}_1!\boldsymbol{K}_2!}\Big[\Big(D^{\boldsymbol{K}_1+\tilde{e}_2}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big) D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(D^{\boldsymbol{K}_2}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\Big)(\boldsymbol{z}) \\
&+ \Big(D^{\boldsymbol{K}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)\Big) D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(D^{\boldsymbol{K}_2+\tilde{e}_2}(T_0^{2N(L|\boldsymbol{x}_\ell|)}\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\Big)(\boldsymbol{z})\Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

Fijando

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2e^{2R_1} n_0 (\text{máx}\{1,\eta\})^{T+1}(T+1)!\,\text{máx}\{M_T, M_{T+1}\} L_{R_0} 2^T},$$

podemos aplicar el Lema 2.5.1, con las constantes $\tilde{\varepsilon} > 0$, $R_1 > 0$ y $\text{máx}\{\tilde{T}, T+1\} \in \mathbb{N}_0$, y garantizar la existencia de $\delta > 0$ de forma que

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\boldsymbol{K}}(T_0^q \boldsymbol{f}^{\mathbb{C}})(w)\big)(\boldsymbol{z})| \le \tilde{\varepsilon} e^{2R_1}$$

para todo $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| < \delta$, para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \le R_1$, para todo $\boldsymbol{K} \in \mathbb{N}_0^2$ con $|\boldsymbol{K}| \le T+1$ y para todo $q \in \mathbb{N}_0$ con $q \le \tilde{T}$. Tomando módulos en (2.58) tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para todo $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| < \delta$, para todo $w \in \mathbb{C}$ con $R_0 < |w| < R_1$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$ y para todo $\boldsymbol{K} \in \mathbb{N}_0^2$ con $|\boldsymbol{K}| \leq T$ se verifica que

$$\begin{aligned}
&|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\boldsymbol{K}}(\overline{\partial}_w g^{\star}_{\boldsymbol{f}})(w)\big)(\boldsymbol{z})| \\
&\leq \frac{1}{2}\Big\{\sum_{\ell}\sum_{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}} \frac{\boldsymbol{K}!}{\boldsymbol{K}_1!\boldsymbol{K}_2!}\Big[|D^{\boldsymbol{K}_1+\tilde{e}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)|\tilde{\varepsilon}e^{2R_1} + |D^{\boldsymbol{K}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)|\tilde{\varepsilon}e^{2R_1}\Big] \\
&+\sum_{\ell}\sum_{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}} \frac{\boldsymbol{K}!}{\boldsymbol{K}_1!\boldsymbol{K}_2!}\Big[|D^{\boldsymbol{K}_1+\tilde{e}_2}\phi_{\ell,\eta}(w)|\tilde{\varepsilon}e^{2R_1} + |D^{\boldsymbol{K}_1}\phi_{\ell,\eta}(w)|\tilde{\varepsilon}e^{2R_1}\Big\}.
\end{aligned}$$

A partir de las cotas en (iv) de la Proposición 1.2.13 y el hecho de que la serie en ℓ se reduce a n_0 sumandos a lo sumo, la expresión anterior queda mayorada por

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varepsilon}e^{2R_1}n_0 \sum_{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}} \frac{\boldsymbol{K}!}{\boldsymbol{K}_1!\boldsymbol{K}_2!}\Big[\eta^{|\boldsymbol{K}_1|+1}(|\boldsymbol{K}_1|+1)!M_{|\boldsymbol{K}_1|+1}\frac{1}{h_{\mathbf{M}}(B_1\eta|w|)} \\
&+\eta^{|\boldsymbol{K}_1|}|\boldsymbol{K}_1|!M_{|\boldsymbol{K}_1|}\frac{1}{h_{\mathbf{M}}(B_1\eta|w|)}\Big].
\end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (2.57) esta expresión se acota por

$$\begin{aligned}
&2\tilde{\varepsilon}e^{2R_1}n_0(\text{máx}\{1,\eta\})^{|\boldsymbol{K}|+1}(|\boldsymbol{K}|+1)!\,\text{máx}\{M_{|\boldsymbol{K}|}, M_{|\boldsymbol{K}|+1}\}L_{R_0}2^{|\boldsymbol{K}|} \\
&\leq 2\tilde{\varepsilon}e^{2R_1}n_0(\text{máx}\{1,\eta\})^{T+1}(T+1)!\,\text{máx}\{M_T, M_{T+1}\}L_{R_0}2^{T}.
\end{aligned}$$

La elección de $\tilde{\varepsilon}$ nos permite deducir que para $\boldsymbol{z}$, w, m y K como antes se tiene que

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\boldsymbol{K}}(\overline{\partial}_w g^{\star}_{\boldsymbol{f}})(w)\big)(\boldsymbol{z})| \leq \varepsilon,$$

con lo que se concluye. □

2.5.3. Etapa 3

En la siguiente etapa en la construcción del operador de extensión de Thilliez se fija el valor de ciertas constantes $\tau > 0$ y γ, con $0 < \gamma < \gamma(\mathbf{M})$ (ver la Definición 1.1.19) y se define la aplicación $\psi : S_\gamma \to \mathbb{C}$ por

$$\psi(w) = G(\tau w), \qquad w \in S_\gamma, \tag{2.59}$$

donde G es la función determinada en la Proposición 1.3.10. Nuestro objetivo será demostrar que

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\frac{1}{\psi(w)}\overline{\partial}_w g^{\star}_{\boldsymbol{f}}(w)\Big)(\boldsymbol{z}) = 0, \tag{2.60}$$

uniformemente en $w \in S_\gamma$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$. Para ello, utilizaremos la estimación (39) en [77], que se puede formular para funciones a valores en un espacio de Banach del siguiente modo:

Existen constantes $c_3, L(A) > 0$ de forma que para cada $\boldsymbol{J} \in \mathbb{N}_0^2$ y cada $w \in S_\gamma$ se tiene que

$$\left\|D^{\boldsymbol{J}}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(w)\right\|_B \leq L(A)|\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}|_{\mathbf{M},A,B}(c_3A)^{|\boldsymbol{J}|}|\boldsymbol{J}|!M_{|\boldsymbol{J}|}h_{\mathbf{M}}(c_3A|w|). \tag{2.61}$$

Sean $m \in \mathbb{N}_0$ y $\varepsilon_3 > 0$. Por las propiedades de $h_{\mathbf{M}}$ descritas en la Proposición 1.1.16, existe $\tilde{\varepsilon}_3 > 0$ con $\tilde{\varepsilon}_3 < R_1$ y de modo que

$$h_{\mathbf{M}}(c_3A\tilde{\varepsilon}_3) \leq \frac{\varepsilon_3}{L(A)|\boldsymbol{f}^{\mathbb{C}}|_{\mathbf{M},A,B}A^m m! M_m}. \tag{2.62}$$

Distinguimos tres casos:

(i) Si $w \in S_\gamma$ con $|w| \geq R_1$ entonces $\frac{1}{\psi(w)}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)$ es la función idénticamente nula en $\mathbb{C}$.

(ii) Si $w \in S_\gamma$ con $|w| \leq \tilde{\varepsilon}_3$ y $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$, basta tener en cuenta (2.61) para $\boldsymbol{J} = (0,0)$ y (2.62) para poder razonar como en el apartado (ii) de la etapa 2, concluyendo que

$$\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\frac{1}{\psi(w)}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\Big)(\boldsymbol{z})\right| \leq \varepsilon_3, \tag{2.63}$$

para todo $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$.

(iii) Por último, si $w \in S_\gamma$ con $\tilde{\varepsilon}_3 \leq |w| \leq R_1$, aplicamos el apartado (iii) de la Proposición 1.3.10 para $p = 0$, pudiendo garantizar así la existencia de constantes positivas b_3 y b_5 (con la notación allí establecida) de manera que

$$\left|\frac{1}{\psi(w)}\right| = \frac{1}{|G(\tau w)|} \leq \frac{1}{b_3 h_{\mathbf{M}}(b_5\tau|w|)} \leq \frac{1}{b_3 h_{\mathbf{M}}(b_5\tau\tilde{\varepsilon}_3)}.$$

Por lo tanto,

$$\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\frac{1}{\psi(w)}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\Big)(\boldsymbol{z})\right| \leq \frac{1}{b_3 h_{\mathbf{M}}(b_5\tau\tilde{\varepsilon}_3)}\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z})\right|$$

para todo $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$. Junto con (2.51), podemos deducir que

$$\lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\frac{1}{\psi(w)}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\Big)(\boldsymbol{z}) = 0 \tag{2.64}$$

uniformemente en $w \in S_\gamma$ tal que $\tilde{\varepsilon}_3 \leq |w| \leq R_1$ y en $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$.

A la vista de (i), (2.63) y (2.64) se concluye lo pedido.

2.5.4. Etapa 4

Se considera el abierto $\Omega = D \cap S_\gamma = B(0, R_1) \cap S_\gamma$, y se elige un disco abierto D' en $\mathbb{C}$, centrado en 0 y tal que $\overline{D} \subseteq D'$. Definamos la función

$$v^\star_{\boldsymbol{f}} = F_{c_3 A,\Omega,B}(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}),$$

donde c_3 es la constante fijada en (2.61) y $F_{c_3 A,\Omega,B}$ es el operador de extensión dado en el apartado (ii) del Corolario 1.2.14, de modo que $v^\star_{\boldsymbol{f}}$ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ definida en $\mathbb{C}$ y que coincide con $\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}$ en Ω. Aunque en la construcción original del operador $T_{\mathbf{M},A,\gamma}$ no es necesario, supondremos también que el operador $F_{c_3 A,\Omega,B}$ proporciona funciones con soporte en D', lo que es lícito de acuerdo con el Corolario 1.2.14. En esta etapa vamos a probar que

$$\lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(v^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0 \tag{2.65}$$

uniformemente para $w \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$.

Comenzamos recordando el clásico teorema de valor medio para funciones a valores en un espacio de Banach.

Teorema 2.5.3 ([23], Teorema (8.5.4))**.** Sean E, F dos espacios de Banach, f una aplicación de E en F, continua en un entorno de un segmento S que une dos puntos x_0 y $x_0 + t$ de E. Si f es diferenciable en cada punto de S, entonces

$$\|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \leq \|t\| \sup_{0\leq\xi\leq1} \|f'(x_0 + \xi t)\|.$$

Sea $\varepsilon_4 > 0$. Es claro que basta demostrar (2.65) para $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, puesto que la extensión coincide con la función de partida en Ω y para esta ya se ha probado (2.60). A partir de (2.61) se tiene que $(1/\psi)\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}} \in \mathcal{C}_{\mathbf{M},c_3 A}(S_\gamma, B)$ para una cierta constante $c_3 \geq 1$. La expresión en (1.12) permite deducir que para cada $\ell \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$T^{2N(L\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}_\ell,\overline{\Omega}))}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{M},d_1 A}(S_\gamma, B)$$

para una constante $d_1 \geq c_3 \geq 1$.
Dado $m \in \mathbb{N}_0$, fijaremos en esta etapa

$$\tilde{\varepsilon} = \mathrm{mín}\{\frac{R_1}{2}, \frac{a}{6kCL^2M_1(1 + b^2 + D_2^2)A^m m!M_m}, \frac{\varepsilon_4}{3CLD_2M_1b(d_1A)^m m!M_m}\},$$

donde C, L y D_2 son las constantes asociadas a la familia de derivadas de $\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}$ en $\overline{\Omega}$ (que forman un jet de Whitney) que aparecen en (1.13), mientras que k, a y b

son las constantes asociadas al recubrimiento por discos de $\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}$ que se establecen en la Proposición 1.2.12. Por brevedad, para cada w escribiremos $N(L,w)$ en lugar de $N(L\mathrm{dist}(w,\overline{\Omega}))$.

Distinguimos dos casos dependiendo del valor de $\mathrm{dist}(w,\overline{\Omega})$:

(i) Si $w\in\mathbb{C}\setminus\Omega$ y $\mathrm{dist}(w,\overline{\Omega})\leq\tilde{\varepsilon}_4$ entonces para cada $\ell\in\mathbb{N}$ de forma que $w\in B(\boldsymbol{x}_\ell,kr_\ell)$, y para cada $\boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\theta}}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(w)\Big)(\boldsymbol{z})\right|\\
&\leq\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(w)\Big)(\boldsymbol{z})-D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(\boldsymbol{x}_\ell)\Big)(\boldsymbol{z})\right| &(2.66)\\
&+\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(\boldsymbol{x}_\ell)\Big)(\boldsymbol{z})-D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(\hat{\boldsymbol{x}}_\ell)\Big)(\boldsymbol{z})\right| &(2.67)\\
&+\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(\hat{\boldsymbol{x}}_\ell)\Big)(\boldsymbol{z})\right|. &(2.68)
\end{aligned}$$

Estudiaremos cada uno de estos tres sumandos por separado:

(i.1) Para estimar el término en (2.66) aplicamos el Teorema 2.5.3 sobre el segmento $[\boldsymbol{x}_\ell,w]\subseteq B(\boldsymbol{x}_\ell,kr_\ell)$, obteniendo que

$$\begin{aligned}
&\left\|T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(w)-T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(\boldsymbol{x}_\ell)\right\|^B_{\mathbf{M},d_1A}\\
&\leq|w-\boldsymbol{x}_\ell|\sup_{0\leq\xi\leq1}\sup_{\tilde{h}^2+\tilde{k}^2\leq1}\Big\|\tilde{h}D^{\tilde{e}_1}\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)\Big)(\boldsymbol{x}_\ell+\xi(w-\boldsymbol{x}_\ell))\\
&\qquad\qquad+\tilde{k}D^{\tilde{e}_2}\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)\Big)(\boldsymbol{x}_\ell+\xi(w-\boldsymbol{x}_\ell))\Big\|^B_{\mathbf{M},d_1A}\\
&\leq kr_\ell\sup_{0\leq\xi\leq1}\Big\|D^{\tilde{e}_1}\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)\Big)(\boldsymbol{x}_\ell+\xi(w-\boldsymbol{x}_\ell))\Big\|^B_{\mathbf{M},d_1A}\\
&\qquad\qquad+\Big\|D^{\tilde{e}_2}\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)\Big)(\boldsymbol{x}_\ell+\xi(w-\boldsymbol{x}_\ell))\Big\|^B_{\mathbf{M},d_1A}.
\end{aligned}$$

Para cada $0\leq\xi\leq1$, llamemos $\boldsymbol{t}_\xi$ a $\boldsymbol{x}_\ell+\xi(w-\boldsymbol{x}_\ell)$. La expresión anterior se acota por

$$\frac{k}{a}\operatorname{dist}(w,\overline{\Omega})\sup_{0\le\xi\le1}\sum_{\nu=1,2}\Big[\Big\|D^{\tilde{e}_\nu}\big[\big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)\big)(\boldsymbol{t}_\xi)$$
$$-T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{t}}_\xi}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(\boldsymbol{t}_\xi)\big]\Big\|^B_{\mathbf{M},d_1A}$$
$$+\Big\|D^{\tilde{e}_\nu}\Big[\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{t}}_\xi}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)\Big)(\boldsymbol{t}_\xi)-T^{2N(L,\boldsymbol{t}_\xi)}_{\hat{\boldsymbol{t}}_\xi}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(\boldsymbol{t}_\xi)\Big]\Big\|^B_{\mathbf{M},d_1A}$$
$$+\Big\|D^{\tilde{e}_\nu}\Big[\Big(T^{2N(L,\boldsymbol{t}_\xi)}_{\hat{\boldsymbol{t}}_\xi}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)\Big)(\boldsymbol{t}_\xi)\Big]\Big\|^B_{\mathbf{M},d_1A}\Big].$$

Aplicando las desigualdades (1.17), (1.18) y (1.12), acotamos esto último por

$$\frac{2k}{a}\operatorname{dist}(w,\overline{\Omega})\sup_{0\le\xi\le1}\Big[CL^2M_1h_{\mathbf{M}}(L\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_\ell+\xi(w-\boldsymbol{x}_\ell),\overline{\Omega}))$$
$$+M_1C(Lb)^2h_{\mathbf{M}}(L\operatorname{dist}(\boldsymbol{t}_\xi,\overline{\Omega}))+C(LD_2)^2M_1\Big]$$
$$\le\frac{2k}{a}\tilde{\varepsilon}_4CL^2M_1(1+b^2+D_2^2).$$

Por lo tanto, siguiendo un razonamiento similar al de etapas anteriores se concluye que

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j}(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(w)-T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(\boldsymbol{x}_\ell))|$$
$$\le\frac{2k}{a}\tilde{\varepsilon}_4CL^2M_1(1+b^2+D_2^2)A^m m!M_m\le\frac{\varepsilon_4}{3}. \tag{2.69}$$

(i.2) Para acotar (2.67), basta acudir a la expresión (1.13) y aplicar la definición de la norma $\|\cdot\|^B_{\mathbf{M},d_1A}$, obteniendo la cota

$$CLD_2M_1\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_\ell,\overline{\Omega})(d_1A)^m m!M_m\le CLD_2M_1b\operatorname{dist}(w,\overline{\Omega})(d_1A)^m m!M_m$$
$$\le CLD_2M_1b\,\tilde{\varepsilon}(d_1A)^m m!M_m\le\frac{\varepsilon_4}{3}. \tag{2.70}$$

(i.3) Por último, para acotar (2.68) tenemos en cuenta (2.35) con $w=\hat{\boldsymbol{x}}_\ell$ para garantizar la existencia de $\tilde{\delta}_4>0$ tal que si $\boldsymbol{z}\in S_{\boldsymbol{\theta}}$ y $|z_j|\le\tilde{\delta}_4$, entonces se tiene que

$$\big|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big((\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}})(\hat{\boldsymbol{x}}_\ell)\big)(\boldsymbol{z})\big|\le\frac{\varepsilon_4}{3}. \tag{2.71}$$

De acuerdo con (2.69), (2.70) y (2.71), se concluye que si $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ es tal que $\operatorname{dist}(w, \overline{\Omega}) \leq \tilde{\varepsilon}_4$, entonces para cada $\ell \in \mathbb{N}$ de forma que $w \in B(\boldsymbol{x}_\ell, kr_\ell)$ y para cada $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| \leq \tilde{\delta}_4$ se verifica que

$$\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(w)\big)(\boldsymbol{z})\right| \leq \varepsilon_4,$$

con lo que

$$|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(v^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z})| \leq \sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w)\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(w)\big)(\boldsymbol{z})\right| \leq \varepsilon_4. \tag{2.72}$$

(ii) Supongamos que $\operatorname{dist}(w, \overline{\Omega}) > \tilde{\varepsilon}_4$. Puesto que $v^\star_{\boldsymbol{f}}$ tiene su soporte contenido en D', bastará razonar para $w \in D'$. En este caso, para cada $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $w \in B(\boldsymbol{x}_\ell, k_\ell r_\ell)$ se tiene que $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_\ell, \overline{\Omega}) \geq a \operatorname{dist}(w, \overline{\Omega}) \geq a\,\tilde{\varepsilon}_4$, luego existe $T \in \mathbb{N}_0$ de modo que $2N(L, \boldsymbol{x}_\ell) \leq T$ para todos los $\ell \in \mathbb{N}$ mencionados. Además, es claro también que existe una constante $\tilde{M} > 0$ de forma que $|w - \hat{\boldsymbol{x}}_\ell| \leq \tilde{M}$ para cada $w \in D'$ y $\boldsymbol{x}_\ell$ como antes. Entonces, si $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(v^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z})\right| \\
&\leq \sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w)\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(T^{2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_\ell}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(w)\big)(\boldsymbol{z})\right| \\
&\leq \sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w) \sum_{\boldsymbol{K}:|\boldsymbol{K}|\leq 2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)} \frac{1}{\boldsymbol{K}!}|(w-\hat{\boldsymbol{x}}_\ell)^{\boldsymbol{K}}|\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\boldsymbol{K}}\big(\frac{1}{\psi}\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}}\big)(w)\big)(\boldsymbol{z})\right| \\
&\leq \sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w) \sum_{\boldsymbol{K}:|\boldsymbol{K}|\leq 2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)} \frac{1}{\boldsymbol{K}!}|(w-\hat{\boldsymbol{x}}_\ell)^{\boldsymbol{K}}| \\
&\times \Big[\sum_{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}} \frac{\boldsymbol{K}!}{\boldsymbol{K}_1!\boldsymbol{K}_2!}|D^{\boldsymbol{K}_1}\big(\frac{1}{\psi}\big)(w)|\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\boldsymbol{K}_2}(\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}})(w)\big)(\boldsymbol{z})\right|\Big].
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Teniendo en cuenta el apartado (iii) de la Proposición 1.3.10, para cada $\boldsymbol{K}_1 \in \mathbb{N}_0^2$ con $|\boldsymbol{K}_1| \leq |\boldsymbol{K}| \leq 2N(L, \boldsymbol{x}_\ell) \leq T$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|D^{\boldsymbol{K}_1}\Big(\frac{1}{\psi}\Big)(w)\right| &\leq \tau^{|\boldsymbol{K}_1|}\left|D^{|\boldsymbol{K}_1|}\Big(\frac{1}{G}\Big)(\tau w)\right| \\
&\leq \tau^{|\boldsymbol{K}_1|} b_3 b_4^{|\boldsymbol{K}_1|}|\boldsymbol{K}_1|!M_{|\boldsymbol{K}_1|}(h_{\mathbf{M}}(b_5\tau|w|))^{-1} \\
&\leq \max\{1, \tau b_4\}^T b_3 T! M_T (h_{\mathbf{M}}(b_5\tau\tilde{\varepsilon}_4))^{-1} =: \tilde{L}.
\end{aligned}$$

Estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.5.2 para garantizar que, dado $\varepsilon_4 > 0$, existe $\overline{\delta}_4 > 0$ de modo que

$$\left|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(D^{\boldsymbol{K}}(\overline{\partial}_w g^\star_{\boldsymbol{f}})(w)\big)(\boldsymbol{z})\right| \leq \frac{\varepsilon_4}{e^{4\tilde{M}}\tilde{L}}$$

para todo $\boldsymbol{K} \in \mathbb{N}_0^2$ con $|\boldsymbol{K}| \le T$, todo $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| \le \overline{\delta}_4$ y todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > \tilde{\varepsilon}_4$. Por lo tanto, bajo estas condiciones,

$$\begin{aligned} &|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(v_{\boldsymbol{f}}^\star(w)\big)(\boldsymbol{z})| \\ &\le \sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w) \sum_{\boldsymbol{K}:|\boldsymbol{K}|\le 2N(L,\boldsymbol{x}_\ell)} \frac{1}{\boldsymbol{K}!}|(w-\hat{\boldsymbol{x}}_\ell)^{\boldsymbol{K}}|\Big[\sum_{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{K}} \frac{\boldsymbol{K}!}{\boldsymbol{K}_1!\boldsymbol{K}_2!}\tilde{L}\frac{\varepsilon_4}{e^{4\tilde{M}}\tilde{L}}\Big] \\ &= \sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w) \sum_{\boldsymbol{K}:|\boldsymbol{K}|\le T} \frac{1}{\boldsymbol{K}!}|(w-\hat{\boldsymbol{x}}_\ell)^{\boldsymbol{K}}|2^{\boldsymbol{K}}\tilde{L}\frac{\varepsilon_4}{e^{4\tilde{M}}\tilde{L}} \\ &= \Big(\sum_\ell \phi_{\ell,\eta}(w)\Big)e^{4\tilde{M}}\tilde{L}\frac{\varepsilon_4}{e^{4\tilde{M}}\tilde{L}} = \varepsilon_4. \end{aligned} \tag{2.74}$$

De (2.72) y (2.74) se deduce (2.65), con lo que concluimos.

2.5.5. Etapa 5

Sea $\mathcal{K}$ el núcleo de Cauchy,

$$\mathcal{K}(w) = -(\pi w)^{-1}, \qquad w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \tag{2.75}$$

y consideremos una función χ en $\mathcal{C}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{C})$, con soporte en D' e idénticamente igual a 1 en $D = B(0,R_1)$, cuya existencia se obtiene en [5, 13, 18]. Se define $u_{\boldsymbol{f}}^\star = \mathcal{K}*(\chi v_{\boldsymbol{f}}^\star)$, que resuelve la ecuación $\overline{\partial}u_f^\star = \chi v_f^\star$ en $\mathbb{C}$ y cuyas derivadas están sujetas a cotas en términos de $\mathbf{M}$. Nuestro objetivo es probar que

$$\lim_{z_j\to 0, z_j\in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\Big(u_{\boldsymbol{f}}^\star(w)\Big)(\boldsymbol{z}) = 0, \tag{2.76}$$

uniformemente para $w \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$. Para ello necesitaremos el siguiente

Lema 2.5.4. En las condiciones anteriores, para cada $w \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ se tiene que

$$u_{\boldsymbol{f}}^\star(w)(\boldsymbol{z}) = \mathcal{K}(w) * (\chi(w)v_{\boldsymbol{f}}^\star(w))(\boldsymbol{z}) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\chi(\xi)v_{\boldsymbol{f}}^\star(\xi)(\boldsymbol{z})}{\xi - w}d\tau d\eta, \tag{2.77}$$

siendo $\xi = \tau + i\eta$. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(u_{\boldsymbol{f}}^\star(w)\big)(\boldsymbol{z}) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\chi(\xi)D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(v_{\boldsymbol{f}}^\star(\xi)\big)(\boldsymbol{z})}{\xi - w}d\tau d\eta.$$

Demostración:
La primera igualdad es clara si se interpreta la integral como límite de sumas de Riemann. En cuanto a la segunda, basta realizar un razonamiento inductivo, y nos

limitaremos a presentar la prueba de la igualdad para $m = 1$ y $j \in \mathcal{N}$ arbitrario. Sea $w \in \mathbb{C}$ y consideremos la aplicación $F : \mathbb{C} \times S_{\boldsymbol{\theta}} \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(\xi, \boldsymbol{z}) = \frac{\chi(\xi) v^{\star}_{\boldsymbol{f}}(\xi)(\boldsymbol{z})}{\xi - w}.$$

Se tiene que para cada $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ la función $F_{(w,\boldsymbol{z})}$ dada por

$$F_{(w,\boldsymbol{z})}(\xi) = \frac{\chi(\xi) v^{\star}_{\boldsymbol{f}}(\xi)(\boldsymbol{z})}{\xi - w}, \qquad \xi \in \mathbb{C},$$

es integrable en $\mathbb{C}$, pues $\xi \mapsto \chi(\xi) v^{\star}_{\boldsymbol{f}}(\xi)(\boldsymbol{z})$ tiene soporte compacto y la aplicación $\xi \mapsto 1/(\xi - w)$ es integrable en un disco centrado en w. Además, para cada $\xi \in \mathbb{C}$, la función

$$F_{\xi}(\boldsymbol{z}) = \frac{\chi(\xi) v^{\star}_{\boldsymbol{f}}(\xi)(\boldsymbol{z})}{\xi - w}, \qquad \boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}},$$

admite derivada parcial continua respecto de z_j, ya que la aplicación $v_{\boldsymbol{f}}$, dada por $v_{\boldsymbol{f}}(\xi, \boldsymbol{z}) = v^{\star}_{\boldsymbol{f}}(\xi)(\boldsymbol{z})$, pertenece a $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{C} \times S_{\boldsymbol{\theta}})$.

Por último, fijemos $\boldsymbol{z}_0 \in S_{\boldsymbol{\theta}}$. Las cantidades

$$K = \max_{\xi \in \overline{D'}} |\chi(\xi)| \qquad \text{y} \qquad L_j = \max_{\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}} |D^{\boldsymbol{e}_j}\big(v^{\star}_{\boldsymbol{f}}(\xi)\big)(\boldsymbol{z})|$$

son finitas (obsérvese que $v^{\star}_{\boldsymbol{f}}(\xi) \in B$), de modo que

$$|D^{(0,\boldsymbol{e}_j)} F(\xi, \boldsymbol{z})| \leq g_j(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \notin \overline{D'}, \\ \frac{K L_j}{\xi - w} & \text{si } \xi \in \overline{D'}, \end{cases}$$

para todo $\boldsymbol{z}$ en un entorno de $\boldsymbol{z}_0$. Si vemos que

$$\iint_{\overline{D'}} \frac{1}{|\xi - w|} d\tau d\eta < \infty,$$

basta aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral para deducir el resultado. Ahora bien, dado $\delta > 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\iint_{\overline{D'}} \frac{1}{|\xi - w|} d\tau d\eta \\
&= \iint_{\{\xi \in \overline{D'} : |\xi - w| < \delta\}} \frac{1}{|\xi - w|} d\tau d\eta + \iint_{\{\xi \in \overline{D'} : |\xi - w| \geq \delta\}} \frac{1}{|\xi - w|} d\tau d\eta \\
&\leq \iint_{|\tilde{\xi}| < \delta} \frac{1}{|\tilde{\xi}|} d\tilde{\tau} d\tilde{\eta} + \frac{1}{\delta} m(\overline{D'}) \leq 2\pi\delta + \frac{1}{\delta} m(\overline{D'}) < \infty.
\end{aligned}$$

□

Pasamos a la prueba de (2.76). A partir de (2.65) se tiene que dado $\varepsilon_5 > 0$ existe $\tilde{\delta}_5 > 0$ de modo que
$$|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(v^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z})| \le \varepsilon_5$$
para todo $w \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{z} \in S_{\boldsymbol{\theta}}$ con $|z_j| \le \tilde{\delta}_5$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(u^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z})| &= |\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\chi(\xi)D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(v^\star_{\boldsymbol{f}}(\xi)\big)(\boldsymbol{z})}{\xi - w} d\tau d\eta| \\
&\le \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{|\chi(\xi)||D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(v^\star_{\boldsymbol{f}}(\xi)\big)(\boldsymbol{z})|}{|\xi - w|} d\tau d\eta \\
&\le K\,\varepsilon_5\,\frac{1}{\pi}\iint_{\overline{D'}} \frac{1}{|\xi - w|} d\tau d\eta \le \frac{K}{\pi}\big(2\pi\delta + \frac{1}{\delta}m(\overline{D'})\big)\varepsilon_5.
\end{aligned}$$

2.5.6. Etapa 6

Se tiene que el operador de extensión es el dado por

$$T_{\mathbf{M},A,\gamma}\boldsymbol{f} = F^\star_{\boldsymbol{f}} := g^\star_{\boldsymbol{f}} - \psi u^\star_{\boldsymbol{f}}.$$

A partir de (2.41), (2.76) y teniendo en cuenta que la función ψ es acotada en S_γ, se deduce inmediatamente que

$$\lim_{z_j \to 0, z_j \in S_{\theta_j}} D^{m\boldsymbol{e}_j}\big(F^\star_{\boldsymbol{f}}(w)\big)(\boldsymbol{z}) = 0$$

uniformemente para $w \in S_\gamma$ y $\boldsymbol{z}_{j'} \in S_{\boldsymbol{\theta}_{j'}}$, con lo que concluye la demostración del Lema 2.1.7.

Capítulo 3

Problema de momentos de Stieltjes en los espacios de Gelfand-Shilov

3.1. Espacios de Gelfand-Shilov. Momentos

Comenzamos este capítulo definiendo los espacios de funciones complejas indefinidamente derivables y de decrecimiento rápido con los que trabajaremos, y presentando algunos resultados relativos al denominado problema de momentos de Stieltjes en estos espacios.

Definición 3.1.1. Se denotará por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ al espacio de las funciones complejas de decrecimiento rápido, es decir, al espacio vectorial de las funciones complejas, definidas y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y tales que para cada $\beta,\ \gamma \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\beta D^\gamma f(x)| < \infty.$$

La topología natural del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ será la definida por la familia $(q_{\beta,\gamma})_{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0}$ de seminormas dada por

$$q_{\beta,\gamma}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\beta D^\gamma f(x)|, \qquad \beta,\gamma \in \mathbb{N}_0,\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{3.1}$$

que lo dota de estructura de espacio de Fréchet.

Si para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y para cada $\beta,\ \gamma \in \mathbb{N}_0$ escribimos

$$Q_{\beta,\gamma}(f) = \int_{\mathbb{R}} |x^\beta D^\gamma f(x)| dx, \qquad P_{\beta,\gamma}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^\beta |D^\gamma f(x)|,$$

se verifica el siguiente resultado (ver [41, p. 3–6]).

Proposición 3.1.2. (i) Dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, los enunciados siguientes son equivalentes:

(i.1) $q_{\beta,\gamma}(f) < \infty$ para todos $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$.

(i.2) $Q_{\beta,\gamma}(f) < \infty$ para todos $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$.

(i.3) $P_{\beta,\gamma}(f) < \infty$ para todos $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Las familias de seminormas $(Q_{\beta,\gamma})_{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0}$ y $(P_{\beta,\gamma})_{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0}$ generan la topología natural en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Observación 3.1.3. El conjunto

$$\mathcal{S}(0,\infty) := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ para todo } x \leq 0\}$$

es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, pues basta observar que la convergencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de una sucesión de funciones implica la convergencia puntual. Por lo tanto, $\mathcal{S}(0,\infty)$ será de Fréchet con la topología de subespacio.

Definición 3.1.4. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se define el *momento n-ésimo* de f como

$$\mu_n(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^n dx.$$

Observación 3.1.5. Obviamente, estas integrales son convergentes, como se deduce sin más que escribir

$$f(x)\cdot x^n = \frac{f(x)\cdot x^{n+2}}{x^2}, \qquad x \neq 0,$$

y observar que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\cdot x^{n+2}| < \infty \text{ para cada } n \in \mathbb{N}_0.$$

La sucesión $(\mu_n(f))_{n\in\mathbb{N}_0}$ recibe el nombre de *sucesión* (o *familia*) *de momentos* de la función f, y se puede definir la aplicación $\mathcal{M}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ que a cada función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ le asocia su sucesión de momentos. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$|\mu_n(f)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \right| \leq Q_{n,0}(f),$$

de donde resulta que si en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ se considera la topología producto, la aplicación $\mathcal{M}$ (que obviamente es lineal) es continua.

De forma natural surge la siguiente cuestión: dada una sucesión arbitraria $\boldsymbol{\mu} = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, ¿existe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{M}(f) = \boldsymbol{\mu}$? La respuesta es afirmativa y fue obtenida por A.J. Durán [24], que de hecho demostró el siguiente resultado:

Teorema 3.1.6. Para cada sucesión $\boldsymbol{\mu} = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ existe $\phi \in \mathcal{S}(0,\infty)$ de forma que $\mathcal{M}(\phi) = \boldsymbol{\mu}$.

Sin embargo, al igual que ocurrió en el caso asintótico (ver Teorema 1.3.4), no es posible dar la solución en términos de la existencia de un operador lineal y continuo.

Teorema 3.1.7. No existe una aplicación $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \to \mathcal{S}(0,\infty)$ lineal y continua tal que

$$\mathcal{M} \circ T = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}}.$$

Demostración:
La prueba es similar a la del Teorema 1.3.4. Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existe una aplicación T en las condiciones del enunciado. Si $E_1 := T(\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0})$, entonces se tiene que

$$E_1 = \{\phi \in \mathcal{S}(0,\infty) : \ \phi = T\mathcal{M}\phi\}.$$

En efecto, sea $\phi \in E_1$, existe $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ para el cual $T(a) = \phi$, con lo que

$$a = \mathcal{M}(T(a)) = \mathcal{M}(\phi), \qquad \text{luego} \qquad \phi = T(a) = T\mathcal{M}\phi,$$

y por consiguiente $E_1 \subseteq \{\phi \in \mathcal{S}(0,\infty) : \ \phi = T\mathcal{M}\phi\}$. La otra contención es inmediata.

Por lo tanto, $E_1 = (\mathrm{Id}_{\mathcal{S}(0,\infty)} - T\mathcal{M})^{-1}(0)$, y como $\mathrm{Id}_{\mathcal{S}(0,\infty)} - T\mathcal{M}$ es continua, tenemos que E_1 es cerrado en $\mathcal{S}(0,\infty)$. Dado que $\mathcal{M}T = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}}$ y $T\mathcal{M} = \mathrm{Id}_{E_1}$, deducimos que T y $\mathcal{M}$ establecen un isomorfismo entre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y E_1. Pero esto no es posible, ya que E_1 admite una norma continua, digamos

$$||\phi|| = \sup_{t\in(0,\infty)} |\phi(t)| = q_{0,0}(\phi), \qquad \phi \in E_1,$$

mientras que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ no la admite. $\square$

A la vista del resultado anterior, interesa determinar subespacios de $\mathcal{S}(0,\infty)$ y de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$, digamos Σ y Γ, respectivamente, de modo que, dotados de topologías adecuadas, permitan la construcción de operadores $T : \Gamma \to \Sigma$ lineales y continuos y tales que $\mathcal{M} \circ T = \mathrm{Id}_\Gamma$. Como veremos, se obtendrán resultados satisfactorios en el marco de los espacios denominados de Gelfand-Shilov, que pasamos a introducir.

Definición 3.1.8. Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Se denota por $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que existe $A = A(f) > 0$ y para cada $\gamma \in \mathbb{N}_0$, existe $C_\gamma = C_\gamma(f) > 0$ de forma que para cada $\beta \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\beta D^\gamma f(x)| \leq C_\gamma A^\beta \beta! M_\beta.$$

El conjunto $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Para cada número real $A > 0$ se define

$$\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) = \Big\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \text{para cada } \gamma \in \mathbb{N}_0, \sup_{x\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\beta \beta! M_\beta} < \infty \Big\}.$$

Observación 3.1.9. Es inmediato que $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R}) = \bigcup_{A>0} \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$. Además, si $0 < A \leq B$ se tiene que $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathbf{M},B}(\mathbb{R})$.

Por otra parte, el espacio $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ no es trivial (no se reduce a la función nula) siempre que la sucesión $\mathbf{M}$ cumpla que

$$\operatorname*{ínf}_{\beta\in\mathbb{N}_0} \beta! M_b > 0,$$

condición que satisfarán todas las sucesiones que consideremos. Es obvio que, bajo esta hipótesis, toda función f indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$ y con soporte contenido en $[-A, A]$ pertenece a $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$.

Definición 3.1.10. Para cada $\gamma \in \mathbb{N}_0$ se define la seminorma p_γ en $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ por

$$p_\gamma(f) = \sup_{x\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\beta \beta! M_\beta}. \tag{3.2}$$

La topología natural del espacio $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ será la generada por la familia $(p_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{N}_0}$ de seminormas.

Proposición 3.1.11. $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ con su topología natural es un espacio de Fréchet.

Demostración:
El espacio $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ es Hausdorff, pues si $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ no es la función idénticamente nula, se tiene que

$$p_0(f) = \sup_{x\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\beta f(x)|}{A^\beta \beta! M_\beta} \geq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{M_0} > 0.$$

Así que el espacio $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ es metrizable por ser semimetrizable y Hausdorff. Veamos que $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ es secuencialmente completo. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ y veamos que es convergente en $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$.

Para cada $\gamma \in \mathbb{N}_0$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\gamma, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces

$$p_\gamma(f_n - f_m) = \sup_{x\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\beta(D^\gamma f_n(x) - D^\gamma f_m(x))|}{A^\beta \beta! M_\beta} \leq \varepsilon.$$

En particular, si γ y $\beta \in \mathbb{N}_0$ y $n, m \geq n_0$ resulta

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\beta(D^\gamma f_n(x) - D^\gamma f_m(x))| \leq A^\beta \beta! M_\beta \varepsilon.$$

Se sigue que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Como el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es de Fréchet, existe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
En particular, para cada $\gamma \in \mathbb{N}_0$ la sucesión de las derivadas $(D^\gamma f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia $D^\gamma f$ en $\mathbb{R}$. De aquí se sigue que para cada $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{|x^\beta(D^\gamma(f_n(x) - f(x))|}{A^\beta \beta! M_\beta} = \lim_{m\to\infty} \frac{|x^\beta(D^\gamma f_n(x) - D^\gamma f_m(x))|}{A^\beta \beta! M_\beta} \leq \varepsilon.$$

Sea $\gamma \in \mathbb{N}_0$. Existe $n_1 = n_1(\gamma)$ tal que

$$p_\gamma(f_n - f_m) \leq 1, \qquad \text{para } n, m \geq n_1.$$

Por consiguiente, para todo $\beta \in \mathbb{N}_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $m \geq n_1$

$$\frac{|x^\beta(D^\gamma(f_n(x) - f_{n_1})(x))|}{A^\beta \beta! M_\beta} \leq \varepsilon,$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\beta \beta! M_\beta} &\leq \frac{|x^\beta D^\gamma f(x) - x^\beta D^\gamma f_{n_1}(x)|}{A^\beta \beta! M_b} + \frac{|x^\beta D^\gamma f_{n_1}(x)|}{A^\beta \beta! M_b} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|x^\beta D^\gamma(f_n(x) - f_{n_1}(x))|}{A^\beta \beta! M_b} + \frac{|x^\beta D^\gamma f_{n_1}(x)|}{A^\beta \beta! M_b} \leq \varepsilon + p_\gamma(f_{n_1}).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{N}} \frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\beta \beta! M_b} < \infty.$$

Esto prueba que $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$. Además, si $n \geq n_0(\gamma, \varepsilon)$,

$$p_\gamma(f - f_n) = \sup_{x\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\beta D^\gamma(f(x) - f_n(x))|}{A^\beta \beta! M_b} \leq \varepsilon,$$

con lo que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia f en $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$. $\square$

A continuación se definen los espacios $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$.

Definición 3.1.12. Sea $\mathbf{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Se denota por $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tales que existe $A = A(f) > 0$ y para cada $\beta \in \mathbb{N}_0$, existe $C_\beta = C_\beta(f) > 0$ de forma que para cada $\gamma \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\beta D^\gamma f(x)| \leq C_\beta A^\gamma \gamma! M_\gamma.$$

El conjunto $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Para cada $A > 0$ se define

$$\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) = \Big\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \text{para cada } \beta \in \mathbb{N}_0, \sup_{x\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\gamma \gamma! M_\gamma} < \infty \Big\}.$$

Observación 3.1.13. $\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R}) = \bigcup_{A>0} \mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$. Si $0 < A \leq B$ se tiene que $\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}^{\mathbf{M},B}(\mathbb{R})$.

En cuanto a la no trivialidad de $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$, se deducirá bajo ciertas condiciones naturales sobre la sucesión $\mathbf{M}$ en resultados subsiguientes, bien mediante la transformada de Fourier (ver las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.5), bien como consecuencia de un enunciado de Denjoy-Carleman-Mandelbrojt (ver el Lema 3.3.2 y la observación que le sigue).

Definición 3.1.14. Para cada $\beta \in \mathbb{N}_0$ se define la seminorma p^β en $\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ mediante

$$p^\beta(f) = \sup_{x\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\beta D^\gamma f(x)|}{A^\gamma \gamma! M_\gamma}.$$

La topología natural del espacio $\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ será la generada por la familia $(p^\beta)_{\beta\in\mathbb{N}_0}$ de seminormas.

$\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ con su topología natural es un espacio de Fréchet (la demostración es similar a la de la Proposición 3.1.11).

Observación 3.1.15. Todos estos espacios $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ se denominan de Gelfand-Shilov generales, y fueron introducidos y estudiados por dichos autores en [31]. Cuando $\mathbf{M}$ es la sucesión Gevrey de un cierto orden $\alpha - 1 > 0$ aparecen los espacios de Gelfand- Shilov clásicos, habitualmente denotados por $\mathcal{S}_\alpha(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{\alpha,A}(\mathbb{R})$, etc.

Consideraremos también los subespacios cerrados

$$\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(0,\infty) = \{ f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ para cada } x \in (-\infty, 0] \},$$
$$\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(0,\infty) = \big\{ f \in \mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ para cada } x \in (-\infty, 0] \big\},$$

que con la correspondiente topología de subespacio son de Fréchet.

3.2. Transformada de Fourier en los espacios de Gelfand-Shilov

Los enunciados de esta sección determinan la forma en que opera la transformada de Fourier sobre los distintos espacios de Gelfand-Shilov generales que acabamos de introducir. También se caracterizan las transformadas de los elementos de $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty)$.

Se define la transformada de Fourier de una función integrable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ como

$$\hat{f}(w)=\mathcal{F}(f)(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt, \quad w\in\mathbb{R}.$$

Para funciones de decrecimiento rápido, la antitransformada de Fourier está dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(w)e^{iwx}dw, \tag{3.3}$$

de modo que $\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F}=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

En los siguientes resultados $\mathbf{M}=(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ será una sucesión casi-creciente (véase la Observación 1.1.6), de manera que

$$C_0:=\sup_{(p,q)\in\mathbb{N}_0^2:0\le q\le p}\frac{M_q}{M_p}<\infty. \tag{3.4}$$

Proposición 3.2.1. Sea $\mathbf{M}=(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión casi-creciente y $A>0$. Para toda $f\in\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ se tiene que $\hat{f}\in\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$, y la aplicación

$$\begin{aligned}\mathcal{F}:\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})&\longrightarrow\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})\\ f&\longrightarrow\hat{f}\end{aligned}$$

es lineal y continua.

Demostración:
Sea $\phi\in\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$, y veamos que $\hat{\phi}\in\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$. Para cada $w\in\mathbb{R},\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0$ se tiene que, en virtud del teorema de derivación bajo el signo integral,

$$\left|w^\beta\hat{\phi}^{(\gamma)}(w)\right|=\left|w^\beta(-i)^\gamma\int_{-\infty}^{\infty}t^\gamma\phi(t)e^{-iwt}dt\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(-iw)^\beta e^{-iwt}t^\gamma\phi(t)dt\right|. \tag{3.5}$$

Por ser ϕ una función de decrecimiento rápido, es claro que

$$\lim_{t\to\pm\infty}t^mD^h\phi(t)=0$$

para todos m, $h \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, aplicando partes β veces en la última expresión de (3.5) tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|w^\beta \hat{\phi}^{(\gamma)}(w)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} (t^\gamma \phi(t))^{(\beta)} e^{-iwt} dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} (t^\gamma)^{(k)} \phi^{(\beta-k)}(t) e^{-iwt} dt\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{\text{mín}\,\{\beta,\gamma\}} \binom{\beta}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma! t^{\gamma-k}}{(\gamma-k)!} \phi^{(\beta-k)}(t) e^{-iwt} dt\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\text{mín}\,\{\beta,\gamma\}} \binom{\beta}{k} \frac{\gamma!}{(\gamma-k)!} \left[\int_{-1}^{1} |t^{\gamma-k} \phi^{(\beta-k)}(t)| dt\right. \\
&\qquad \left. + \int_1^\infty |t^{\gamma+2-k} \phi^{(\beta-k)}(t)| \frac{dt}{t^2} + \int_{-\infty}^{-1} |t^{\gamma+2-k} \phi^{(\beta-k)}(t)| \frac{dt}{t^2}\right]. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Dado que $\phi \in \mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$, y en virtud de la definición de las seminormas $(p^\beta)_{\beta \in \mathbb{N}_0}$, es inmediato que para todo $t \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$|t^m \phi^{(\beta-k)}(t)| \leq p^m(\phi) A^{\beta-k} (\beta-k)! M_{\beta-k},$$

con lo que la última expresión en (3.6) se acota por

$$\sum_{k=0}^{\text{mín}\,\{\beta,\gamma\}} \binom{\beta}{k} \frac{\gamma! A^{\beta-k} (\beta-k)! M_{\beta-k}}{(\gamma-k)!} \left[\int_{-1}^{1} p^{\gamma-k}(\phi) dt + 2 \int_1^\infty p^{\gamma+2-k}(\phi) t^{-2} dt\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\text{mín}\,\{\beta,\gamma\}} \binom{\beta}{k} \frac{\gamma! A^{\beta-k} (\beta-k)! M_{\beta-k}}{(\gamma-k)!} 2(p^{\gamma-k}(\phi) + p^{\gamma+2-k}(\phi)).$$

Así se deduce que

$$\begin{aligned}
&\sup_{w \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{N}_0} \frac{|w^\beta \hat{\phi}^{(\gamma)}(w)|}{A^\beta \beta! M\beta} \\
&\leq \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{A^\beta \beta! M_\beta} \sum_{k=0}^{\text{mín}\,\{\beta,\gamma\}} \frac{\beta!}{k!(\beta-k)!} \frac{\gamma! A^{\beta-k} (\beta-k)! M_{\beta-k}}{(\gamma-k)!} 2(p^{\gamma-k}(\phi) + p^{\gamma+2-k}(\phi)) \\
&= \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{\text{mín}\,\{\beta,\gamma\}} \gamma! \frac{M_{\beta-k}}{M_\beta} \frac{2}{A^k k! (\gamma-k)!} (p^{\gamma-k}(\phi) + p^{\gamma+2-k}(\phi)) \\
&\leq C_0 \sum_{k=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{k} \frac{2}{A^k} (p^{\gamma-k}(\phi) + p^{\gamma+2-k}(\phi)), \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

donde C_0 es la constante definida en (3.4). Deducimos que para cada $\gamma \in \mathbb{N}_0$, $p_\gamma(\hat{\phi}) < \infty$, así que $\hat{\phi} \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$, y la aplicación $\mathcal{F}$ es continua, pues para cada $\gamma \in \mathbb{N}_0$,

$$p_\gamma(\hat{\phi}) \leq C_0 \sum_{k=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{k} \frac{2}{A^k}(p^{\gamma-k}(\phi) + p^{\gamma+2-k}(\phi)).$$

□

Observación 3.2.2. Como

$$\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R}) = \bigcup_{A>0} \mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R}) = \bigcup_{A>0} \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}),$$

concluimos del lema que $\mathcal{F}(\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$.

Proposición 3.2.3. Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión casi-creciente y de crecimiento moderado (Definición 1.1.11). Entonces existe $c > 1$ (que depende de $\mathbf{M}$) de forma que para cada $A > 0$ y para toda $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ se tiene que $\hat{f} \in \mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R})$, y para ese c, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R}) \\ f &\longrightarrow \hat{f} \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Demostración:
Sea $\phi \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$. Veamos que $\hat{\phi} \in \mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R})$ para todo $c > A_1 \geq 1$, siendo A_1 la constante que aparece en la condición (μ) de crecimiento moderado de $\mathbf{M}$. Razonando como en la demostración del Lema 3.2.1, para cada $w \in \mathbb{R}, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left|w^\beta \hat{\phi}^{(\gamma)}(w)\right| \leq &\sum_{k=0}^{\text{mín}\,\{\beta,\gamma\}} \binom{\beta}{k} \frac{\gamma!}{(\gamma-k)!} \left[\int_{-1}^{1} |t^{\gamma-k}\phi^{(\beta-k)}(t)|dt\right. \\ &\left. + \int_1^\infty |t^{\gamma-k+2}\phi^{(\beta-k)}(t)|\frac{dt}{t^2} + \int_{-\infty}^{-1} |t^{\gamma-k+2}\phi^{(\beta-k)}(t)|\frac{dt}{t^2}\right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Puesto que $\phi \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$, la propia definición de las seminormas $(p_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}_0}$ permite escribir, para todo $t \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}_0$, que

$$|t^m \phi^{(\beta-k)}(t)| \leq p_{\beta-k}(\phi) A^m m! M_m,$$

y la expresión en (3.8) se puede acotar por

$$\sum_{k=0}^{\text{mín}\{\beta,\gamma\}} \binom{\beta}{k} \frac{2p_{\beta-k}(\phi)\gamma!}{(\gamma-k)!} \left[A^{\gamma-k}(\gamma-k)!M_{\gamma-k} + A^{\gamma-k+2}(\gamma-k+2)!M_{\gamma-k+2}\right].$$

Fijada una constante $c > A_1$, tenemos que

$$\sup_{w\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0} \frac{|w^\beta \hat{\phi}^{(\gamma)}(w)|}{(cA)^\gamma \gamma! M_\gamma}$$

$$\leq \sup_{\gamma\in\mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{\text{mín}\{\beta,\gamma\}} 2\binom{\beta}{k} p_{\beta-k}(\phi)\Big[\underbrace{\frac{A^{\gamma-k}M_{\gamma-k}}{(cA)^\gamma M_\gamma}}_{(1)} + \underbrace{\frac{A^{\gamma-k+2}(\gamma-k+2)!M_{\gamma-k+2}}{(cA)^\gamma(\gamma-k)!M_\gamma}}_{(2)}\Big].$$

Estudiamos (1) y (2) por separado:

(i) Como, en virtud de (3.4),

$$\frac{M_{\gamma-k}}{M_\gamma} \leq C_0, \qquad k \leq \gamma,$$

y para cada $k \leq \gamma$ se tiene que $\dfrac{1}{c^\gamma} \leq \dfrac{1}{c^k}$, concluimos que $(1) \leq \dfrac{C_0}{(cA)^k}$.

(ii) Llamemos $\mu_{k,\gamma}$ al valor en (2), es decir, para $k, \gamma \in \mathbb{N}_0$ con $k \leq \gamma$,

$$\mu_{k,\gamma} = \frac{(\gamma-k+2)!M_{\gamma-k+2}}{c^\gamma A^{k-2} M_\gamma (\gamma-k)!}.$$

Veamos que

$$\sup\Big\{\mu_{k,\gamma} : \ \gamma \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq \text{mín}\{\beta,\gamma\}\Big\} < \infty. \tag{3.9}$$

(ii.1) Si $k = 0$, para $\gamma \in \mathbb{N}_0$ se tiene, en virtud de la propiedad (μ) y de la elección de c, que

$$\mu_{0,\gamma} = \frac{(\gamma+2)!M_{\gamma+2}A^2}{c^\gamma M_\gamma \gamma!} \leq \frac{(\gamma+2)(\gamma+1)M_2 A_1^{\gamma+2} A^2}{c^\gamma} \underset{\gamma\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por tanto, existe $H_0 > 0$ tal que $\mu_{0,\gamma} \leq H_0$, para cada $\gamma \in \mathbb{N}_0$. Con este caso concluimos la prueba de (3.9) si $\beta = 0$.

(ii.2) Si $k = 1$, y $\gamma \in \mathbb{N}_0$, $\gamma \geq 1$, de nuevo por la propiedad (μ) y por la elección de c,

$$\mu_{1,\gamma} = \frac{(\gamma+1)!M_{\gamma+1}A}{c^\gamma M_\gamma(\gamma-1)!} \leq \frac{(\gamma+1)\gamma M_1 A_1^{\gamma+1} A}{c^\gamma} \underset{\gamma\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto, podemos encontrar una constante $H_1 > 0$ tal que $\mu_{1,\gamma} \leq H_1$ para cualquier $\gamma \in \mathbb{N}_0$ con $\gamma \geq 1$.

Con (ii.1) y (ii.2) hemos concluido la prueba de (3.9) si $\beta = 1$.

(ii.3) Si $k \geq 2$ y $\gamma \geq k$,

$$\begin{aligned}\mu_{k,\gamma} = \frac{(\gamma-k+2)!M_{\gamma-k+2}}{c^\gamma A^{k-2} M_\gamma(\gamma-k)!} &= \frac{(\gamma-k+2)(\gamma-k+1)}{c^\gamma A^{k-2}} \frac{M_{\gamma-k+2}}{M_\gamma} \\ &\leq C_0 \frac{(\gamma-k+2)(\gamma-k+1)}{c^\gamma A^{k-2}} \underset{\gamma\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

por ser $c > 1$, luego para cada $k \in \{2, 3, \ldots, \beta\}$ existe una constante $H_k > 0$ para la cual $\mu_{k,\gamma} \leq H_k$ para cualquier $\gamma \in \mathbb{N}_0$, $\gamma \geq k$.

Considerando $H = \max\{H_0, H_1, \ldots, H_\beta\}$ podemos concluir que el superior en (3.9) es a lo sumo igual a H.

En consecuencia,

$$\sup_{w\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0} \frac{|w^\beta \hat{\phi}^{(\gamma)}(w)|}{(cA)^\gamma \gamma! M_\gamma} \leq \sum_{k=0}^{\beta} 2\binom{\beta}{k} p_{\beta-k}(\phi)\left[\frac{C_0}{(cA)^k} + H\right]. \tag{3.10}$$

Deducimos que para cada $\beta \in \mathbb{N}_0$, $p^\beta(\hat{\phi}) < \infty$, así que $\hat{\phi} \in \mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R})$, y la aplicación $\mathcal{F}$ es continua, pues $p^\beta(\hat{\phi}) \leq \sum_{k=0}^{\beta} 2\binom{\beta}{k} p_{\beta-k}(\phi)\left[\frac{C_0}{(cA)^k} + H\right]$, $\beta \in \mathbb{N}_0$. □

Observación 3.2.4. Como

$$\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R}) = \bigcup_{A>0} \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R}) = \bigcup_{A>0} \mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}),$$

concluimos del lema que $\mathcal{F}(\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$.

Proposición 3.2.5.

(i) La aplicación $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dada por $(Hf)(x) = f(-x)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, es biyectiva y bicontinua de $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$) en $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$). Además, se tiene que $H = H^{-1}$.

(ii) $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} H \circ \mathcal{F}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(iii) Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión casi-creciente y de crecimiento moderado. Se tiene que:

(iii.1) Para cada $A > 0$, $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$, y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}^{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) \\ \hat{f} &\longrightarrow f \end{aligned}$$

es lineal y continua.

(iii.2) Existe una constante $c > 1$ (que depende sólo de $\mathbf{M}$) tal que para cada $A > 0$ se tiene que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R})$, y la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R}) \\ \hat{f} &\longrightarrow f \end{aligned}$$

es lineal y continua.

(iv) Se tiene que

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R}).$$

Demostración:

(i) Es inmediato.

(ii) A la vista de (3.3) es inmediato que ambas expresiones coinciden.

(iii) Aplicamos el apartado anterior junto con la Proposición 3.2.3 (resp. la Proposición 3.2.1) para obtener (iii.1) (resp. (iii.2)).

(iv) En primer lugar, a partir de (iii.2) es claro que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$, por lo tanto, $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R}) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R}))$. Teniendo en cuenta la Observación 3.2.4, se concluye que $\mathcal{F}(\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$.
Análogamente, de (iii.1) se puede deducir que $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$, con lo que se verifica que $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R}) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R}))$. Junto con la Observación 3.2.2 se obtiene que $\mathcal{F}(\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$.

□

La siguiente proposición caracteriza las transformadas de Fourier de los elementos de $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty)$.

Proposición 3.2.6. Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión casi-creciente y de crecimiento moderado. Consideremos una función compleja ψ definida en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:

(i) La función ψ es la transformada de Fourier de una función $\phi \in \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty)$.

(ii) Se dan las siguientes tres condiciones simultáneamente:

(ii.1) $\psi \in \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$.

(ii.2) ψ puede extenderse a una función Ψ continua en $\overline{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \leq 0\}$ y analítica en $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z < 0\}$.

(ii.3) Ψ se anula cuando $z \to \infty$ en $\overline{U}$.

Demostración:
Veamos que (i) implica (ii):
(ii.1) es claro puesto que, aplicando la Proposición 3.2.5, se tiene que $\mathcal{F}(\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$. Para demostrar (ii.2) y (ii.3), consideramos la función $f : \mathbb{R} \times \overline{U} \to \mathbb{C}$ que viene dada para cada $(t,z) \in \mathbb{R} \times \overline{U}$ por

$$f(t,z) = \phi(t)e^{-izt}.$$

Se verifican las condiciones siguientes:

a) Para cada $t \in \mathbb{R}$, la sección $f^t : U \to \mathbb{C}$ dada por $f^t(z) = f(t,z)$, $z \in U$, es continua en $\overline{U}$ y holomorfa en U.

b) Para cada $z \in U$, la sección $f_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $f_z(t) = f(t,z)$, $t \in \mathbb{R}$ es medible Lebesgue por ser continua.

c) Para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $z \in \overline{U}$, $|f(t,z)| \leq \phi(t)$, verificándose que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$.

Por los teoremas de continuidad y holomorfía bajo el signo integral, podemos definir la función

$$\begin{aligned} \Psi : \overline{U} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-izt}dt, \end{aligned}$$

que será una función holomorfa en U y continua en $\overline{U}$. Es claro que Ψ extiende a ψ.

Queda solamente probar (ii.3), lo que haremos distinguiendo varios casos:

1. Sea $z = x \in \mathbb{R}$. Entonces $\Psi(x) = \psi(x) = \hat{\phi}(x)$, y el teorema de Riemann-Lebesgue garantiza que $\lim_{x\to\pm\infty} \Psi(x) = 0$.

2. Sea $\varepsilon \in (0,\pi/2)$. Si $z \in S = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (-\pi+\varepsilon, -\varepsilon)\}$, tenemos que $\mathrm{Im} z < -|z| \operatorname{sen}\varepsilon$, luego $|e^{-izt}| = e^{\mathrm{Im}(z)t} < e^{-|z|t \operatorname{sen}\varepsilon}$, y

$$\Big| \int_0^{\infty} \phi(t)e^{-izt}dt \Big| \leq \max_{t\geq 0} \phi(t) \int_0^{\infty} e^{-|z|t\operatorname{sen}\varepsilon}dt = \max_{t\geq 0}\phi(t)\frac{1}{|z|\operatorname{sen}\varepsilon} \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Sea $\varepsilon \in (0, \pi/2)$. Si $z \in T = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [-\varepsilon, 0)\}$, $z = x + iy$, es claro que

$$\Psi(x+iy) = \int_0^\infty \phi(t)e^{-izt}dt = \int_0^\infty \phi(t)e^{yt}e^{-ixt}dt = \mathcal{F}(\phi(t)e^{yt})(x). \tag{3.11}$$

Llamando $\phi_y(t) = \phi(t)e^{yt}$, tenemos que $\Psi(x+iy) = \mathcal{F}(\phi_y)(x)$.
Teniendo en cuenta que $\phi_y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y que $\phi'_y, \phi_y \in L^1(\mathbb{R})$, una propiedad estándar de la transformada de Fourier garantiza que

$$ix\mathcal{F}(\phi_y)(x) = \mathcal{F}(\phi'_y)(x). \tag{3.12}$$

Es claro que

$$|\mathcal{F}(\phi'_y)(x)| = \Big|\int_0^\infty \phi'_y(t)e^{-itx}dt\Big| \leq \int_0^\infty |\phi'_y(t)|dt = \left\|\phi'_y\right\|_1. \tag{3.13}$$

Ahora bien, $\phi'_y(t) = \phi'(t)e^{yt} + \phi(t)ye^{yt}$, luego

$$\left\|\phi'_y\right\|_1 \leq \left\|\phi'(t)e^{yt}\right\|_1 + \left\|y\phi(t)e^{yt}\right\|_1 \leq \left\|\phi'\right\|_1 + \left\|\phi\right\|_\infty \cdot \int_0^\infty |y|e^{yt}dt = \left\|\phi'\right\|_1 + \left\|\phi\right\|_\infty. \tag{3.14}$$

Por otro lado, como $z \in T$, tenemos que $x = |z|\cos(\arg z) \geq |z|\cos(\varepsilon) > 0$, luego, utilizando (3.11)–(3.14), deducimos que

$$|\Psi(z)| = |\mathcal{F}(\phi_y)(x)| = \frac{1}{x}|\mathcal{F}(\phi'_y)(x)| \leq \frac{1}{|z|\cos\varepsilon}(\left\|\phi'\right\|_1 + \left\|\phi\right\|_\infty) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En el sector $\tilde{T} = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\pi - \varepsilon, \pi)\}$, $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, podemos razonar análogamente, llegando a la misma conclusión.
Por tanto, hemos probado que

$$\lim_{z \in \overline{U}, z\to\infty} \Psi(z) = 0,$$

y tenemos (ii.3).

Probamos a continuación la implicación contraria:
Basta ver que $\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \psi(t)e^{itx}dt$ está en $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty)$, pues en ese caso, por la fórmula de inversión sabemos que $\psi = \hat{\phi}$, como queríamos. Según (iv) de la Proposición 3.2.5, tenemos que $\phi \in \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})$. Resta ver que $\phi(x) = 0$ para cada $x < 0$. Por (ii.2), existe Ψ que extiende a ψ en $\overline{U}$.
Sea $x < 0$. Para cada $R > 0$ consideramos el camino $\Gamma_R = \Gamma_{R,1} + \Gamma_{R,2}$ dado por

$$\begin{aligned} \Gamma_{R,1} : [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longrightarrow Re^{-i\theta} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Gamma_{R,2} : [-R, R] &\longrightarrow \mathbb{C}\\ t &\longrightarrow t.\end{aligned}$$

Dado $\delta > 0$, sea $\Gamma_{\delta,R}$ la curva de clase $\mathcal{C}^\infty$ a trozos, frontera del dominio

$$\Omega_{\delta,R} = \{z \in U : |z| < R, \mathrm{Im} z < -\delta\},$$

recorrida en sentido horario. De acuerdo con (ii.2), y aplicando el teorema de Cauchy, se tiene que

$$\int_{\Gamma_{\delta,R}} \Psi(z)e^{ixz}dz = 0.$$

Un sencillo paso al límite cuando $\delta \to 0$ permite deducir que

$$0 = \int_{\Gamma_R} \Psi(z)e^{ixz}dz = \int_{\Gamma_{R,1}} \Psi(z)e^{ixz}dz + \int_{\Gamma_{R,2}} \Psi(z)e^{ixz}dz, \tag{3.15}$$

para cada $R > 0$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_{R,1}} \Psi(z)e^{ixz}dz\right| &= \left|\int_0^\pi \Psi(Re^{-i\theta})e^{ixRe^{-i\theta}}(-i)Re^{-i\theta}d\theta\right|\\ &\leq \max_{|z|=R, z\in\overline{U}} |\Psi(z)| \int_0^\pi Re^{xR\operatorname{sen}\theta}d\theta \qquad (3.16)\\ &= 2\max_{|z|=R, z\in\overline{U}} |\Psi(z)| \int_0^{\pi/2} Re^{xR\operatorname{sen}\theta}d\theta. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}\theta \geq 2\theta/\pi$ para cada $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deducimos que

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Gamma_{R,1}} \Psi(z)e^{ixz}dz\Big| &\leq 2\max_{|z|=R, z\in\overline{U}} |\Psi(z)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{\frac{xR2\theta}{\pi}}d\theta\\ &\leq 2\max_{|z|=R, z\in\overline{U}} |\Psi(z)| \int_0^{\infty} Re^{\frac{xR2\theta}{\pi}}d\theta\\ &= \max_{|z|=R, z\in\overline{U}} |\Psi(z)|\frac{-\pi}{x} \to 0 \text{ cuando } R \to \infty.\end{aligned}$$

Para cada R fijado,

$$\int_{\Gamma_R} \Psi(z)e^{ixz}dz = 0.$$

Por lo tanto, pasando al límite cuando $R \to \infty$ en (3.15) se concluye que

$$0 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} \Psi(z)e^{ixz}dz = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{\Gamma_{R,1}} \Psi(z)e^{ixz}dz + \int_{\Gamma_{R,2}} \Psi(z)e^{ixz}dz\Big)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{R,1}} \Psi(z)e^{ixz}dz + \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{R,2}} \Psi(z)e^{ixz}dz = 0 + \phi(x) = \phi(x),$$

como queríamos. □

Teniendo en cuenta las Proposiciones 3.2.1, 3.2.3 y 3.2.6, se deduce la siguiente

Proposición 3.2.7. Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión casi-creciente y de crecimiento moderado. Sea ψ una función compleja definida en $\mathbb{R}$ y $A > 0$. Son equivalentes:

(i) La función ψ es la transformada de Fourier de una función $\phi \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},c_1 A}(0,\infty)$ (para cierto $c_1 \geq 1$).

(ii) Se dan las siguientes tres condiciones simultáneamente:

(ii.1) $\psi \in \mathcal{S}^{\mathbf{M},c_2 A}(\mathbb{R})$ para cierto $c_2 \geq 1$.

(ii.2) ψ puede extenderse a una función Ψ continua en el semiplano inferior $\overline{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \leq 0\}$ y analítica en $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z < 0\}$.

(ii.3) Ψ se anula cuando $z \to \infty$ en $\overline{U}$.

3.3. Problema de momentos de Stieltjes en $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(0,\infty)$

Nos disponemos a generalizar el siguiente resultado de J. Chung, S-Y. Chung y D. Kim [19].

Teorema 3.3.1. Sea $\alpha > 1$ y $\mathbf{M} = (n!^{\alpha-1})_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión Gevrey de orden $\alpha - 1$. Para cada sucesión de números complejos $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, existe una función $f \in \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(0,\infty)$ de forma que $\mathcal{M}(f) = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

La generalización se lleva a cabo en dos aspectos: los exponentes de x en las integrales que definen los momentos pueden conformar una sucesión más general que simplemente la dada por $(n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, y la función f podrá ser tomada en el espacio $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(0,\infty)$, para una sucesión $\mathbf{M}$ sujeta a ciertas condiciones poco restrictivas. En nuestra opinión, no es posible obtener el resultado que sigue con las técnicas empleadas en [19].

Se hará uso del siguiente resultado de Denjoy-Carleman-Mandelbrojt, cuya demostración puede encontrarse en el Teorema 4.2 en [42].

Lema 3.3.2. Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión que satisface la propiedad (γ) de no casianaliticidad, y tal que la sucesión $(n!M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ satisface la condición (α_0). Entonces existe una función de clase $\mathcal{C}^\infty$, no idénticamente nula, $\varphi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ de forma que $\mathrm{sop}(\phi) \subseteq [0,1]$, y tal que existe $A \geq 1$ con

$$\sup_{x\in[0,1],\, n\in\mathbb{N}_0} \frac{\left|\varphi^{(n)}(x)\right|}{A^n n! M_n} < \infty.$$

Observación 3.3.3. Teniendo en cuenta la definición de los espacios de Gelfand-Shilov generales, es claro que la función φ en el lema anterior pertenece a $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(0,\infty)$. Además, cabe destacar que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(0,\infty)$, la integral

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)dx$$

converge, pues para cada $\nu \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\nu} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^\nu f(x) = 0.$$

Nos disponemos a enunciar nuestro resultado, cuya prueba está basada en una idea de A. Yu. Popov [62].

Teorema 3.3.4. Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión como en el Lema 3.3.2. Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales tal que $\alpha_m \neq \alpha_n$ si $n \neq m$, y $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$. Entonces, para cada sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de números complejos existe una función $f \in \mathcal{S}^{\mathbf{M}}(0,\infty)$ de modo que

$$\int_0^\infty x^{\alpha_n} f(x)dx = \mu_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración:
Fijemos la función φ y la cantidad $A \geq 1$ dadas en el lema 3.3.2, y pongamos

$$\varphi_n := \int_0^1 x^{\alpha_n}\varphi(x)dx > 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Elijamos un número real $r > 1$. Entonces se tiene que $r^{\alpha_n} \neq r^{\alpha_m}$ cuando $n, m \in \mathbb{N}_0$ y $m \neq n$, y además,

$$\lim_{n\to\infty} r^{\alpha_n} = \infty.$$

Una consecuencia estándar del teorema de Mittag-Leffler (ver [67, p. 134]), permite deducir que existe una función entera $g(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$, que cumple que

$$g(r^{\alpha_n}) = \frac{\mu_n}{\varphi_n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Establecemos, al menos formalmente,

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k r^{-k}\varphi(r^{-k}x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Dados $m, n \in \mathbb{N}_0$, por un lado sabemos que existe una constante $C = C(\varphi) > 0$ tal que

$$|x^m \varphi^{(n)}(x)| \leq CA^n n! M_n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, como g es una función entera, $c_m := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^{mk} < \infty$. Así, podemos estimar el producto de x^m por la n-ésima derivada formal de la serie en (3.18):

$$\begin{aligned} \Big| x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{-k} (r^{-k})^n \varphi^{(n)}(r^{-k}x) \Big| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^{(m-n-1)k} \big| (r^{-k}x)^m \varphi^{(n)}(r^{-k}x) \big| \\ &\leq CA^n n! M_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^{mk} = Cc_m A^n n! M_n. \end{aligned}$$

Esta acotación nos permite deducir que f está de hecho bien definida y que es un elemento del espacio $\mathcal{S}^{\mathbf{M}}(0,\infty)$; además, podemos aplicar el teorema de la convergencia de Lebesgue para obtener que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\alpha_n} f(x)\, dt &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{-k} \int_0^{\infty} x^{\alpha_n} \varphi(r^{-k}x)\, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{\alpha_n k} \int_0^{\infty} t^{\alpha_n} \varphi(t)\, dt = g(r^{\alpha_n}) \varphi_n = \mu_n, \end{aligned}$$

concluyendo la demostración. □

3.4. Problema de momentos de Stieltjes en $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(0,\infty)$

Sean $\mathbf{M}$ una sucesión fuertemente regular (ver la Definición 1.1.12) y $A > 0$. En esta última sección resolveremos el problema de momentos en $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(0,\infty)$ mediante la construcción de operadores lineales y continuos, inversos por la derecha de la aplicación $\mathcal{M}$. Comenzamos estudiando cómo se comporta esta aplicación sobre los espacios $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(\mathbb{R})$. Por brevedad, denotaremos por $\Lambda_{\mathbf{M},A}$ el espacio de sucesiones $\Lambda_{\mathbf{M},A}(\mathbb{N}_0,\mathbb{C})$ introducido en la Definición 1.2.2, y designaremos por $|\cdot|_{\mathbf{M},A}$ a la norma en él considerada (ver (1.9)).

Proposición 3.4.1. Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de crecimiento moderado. Entonces existe $c > 1$ (que depende sólo de $\mathbf{M}$) de forma que si $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(0,\infty)$ para algún $A > 0$, entonces se tiene que $\mathcal{M}(f) \in \Lambda_{\mathbf{M},cA}$. Además, para dicho $c > 1$, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(0,\infty) &\longrightarrow \Lambda_{\mathbf{M},cA} \\ f &\longrightarrow \mathcal{M}(f) = (\mu_n(f))_{n\in\mathbb{N}_0} \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Demostración:
Sea $A_1 \geq 1$ la constante que aparece en la condición (μ) de crecimiento moderado asociada a $\mathbf{M}$. Fijemos $c > A_1$ y consideremos una constante $C > 0$ que cumpla que

$$A_1^n(n+2)(n+1) \leq Cc^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.19}$$

Si $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(0,\infty)$, de acuerdo con la definición de las seminormas p_γ que generan la topología de $\mathcal{S}_{\mathbf{M},A}(0,\infty)$, se tiene que

$$|x^\beta f(x)| \leq A^\beta \beta! M_\beta p_0(f), \qquad x > 0,\ \beta \in \mathbb{N}_0.$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\mu_n(f)| &\leq \int_0^\infty |f(x)x^n|dx = \int_0^1 |f(x)x^n|dx + \int_1^\infty \frac{|x^{n+2}f(x)|}{x^2}dx \\ &\leq A^n n! M_n p_0(f) + A^{n+2}(n+2)! M_{n+2} p_0(f). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Teniendo en cuenta (μ) y (3.19), podemos acotar la cantidad anterior por

$$\begin{aligned} &A^n n! M_n p_0(f) + A^{n+2}(n+2)! A_1^{n+2} M_n M_2 p_0(f) \\ &\leq A^n n! M_n p_0(f)\big[1 + A^2(n+2)(n+1)A_1^{n+2}M_2\big] \\ &\leq A^n n! M_n p_0(f)\big[1 + A^2 A_1^2 M_2 C c^n\big] \\ &\leq 2\max\{1, A^2A_1^2M_2C\} p_0(f)(cA)^n n! M_n, \end{aligned}$$

con lo que

$$|\mathcal{M}(f)|_{\mathbf{M},cA} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|\mu_n(f)|}{(cA)^n n! M_n} \leq 2\max\{1, A^2A_1^2M_2C\} p_0(f),$$

de donde se deduce la continuidad de $\mathcal{M}$. □

Nuestro objetivo es obtener el siguiente resultado, en cierto sentido recíproco de esta última proposición.

Teorema 3.4.2. Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular verificando que $\gamma(\mathbf{M}) > 1$. Entonces para cada $A > 0$ existen una constante $c > 1$ (que depende de $\mathbf{M}$ y A) y un operador lineal y continuo

$$T_{\mathbf{M},A} : \Lambda_{\mathbf{M},A} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{M},cA}(0,\infty)$$

tal que $\mathcal{M} \circ T_{\mathbf{M},A} = \mathrm{Id}_{\Lambda_{\mathbf{M},A}}$.

Este enunciado fue inicialmente obtenido en el caso clásico, es decir, cuando $\mathbf{M}$ es la sucesión Gevrey de orden $\alpha - 1$, para $\alpha > 2$ (ver [47]).

Observación 3.4.3. Como se verá en los resultados que siguen, concretamente en la Proposición 3.4.6, el Lema 3.4.7 y la Proposición 3.4.10, en los que se analizan diferentes pasos en la construcción de nuestra solución, las condiciones que se imponen sobre c (veánse (3.26), (3.28) y (3.35), respectivamente) incluyen desigualdades del tipo $c > h/A$, para $h > 0$ adecuado. Por lo tanto, en el teorema anterior no parece posible encontrar una constante c que haga válidos nuestros razonamientos para todo $A > 0$. Sin embargo, sí se podría dar un enunciado del siguiente tipo:

Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión fuertemente regular con $\gamma(\mathbf{M}) > 1$, y fijemos $A_0 > 0$. Entonces existe una constante $c > 1$ (que depende sólo de $\mathbf{M}$) tal que para cada $A \geq A_0$ existe un operador lineal y continuo

$$T_{\mathbf{M},A} : \Lambda_{\mathbf{M},A} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{M},cA}(0,\infty)$$

tal que $\mathcal{M} \circ T_{\mathbf{M},A} = \mathrm{Id}_{\Lambda_{\mathbf{M},A}}$.

De igual manera se pueden modificar los resultados intermedios antes mencionados.

Observación 3.4.4. Vamos a analizar someramente la idea de la demostración para clarificar los próximos pasos. Dada $\boldsymbol{\mu} = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}$, buscamos una función $T_{\mathbf{M},A}(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},cA}(0,\infty)$ (para cierto $c > 1$) de forma que

$$\int_0^\infty t^n \cdot T_{\mathbf{M},A}(\boldsymbol{\mu})(t)\, dt = \mu_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Por lo tanto, si ponemos $\psi = \mathcal{F}\big(T_{\mathbf{M},A}(\boldsymbol{\mu})\big)$, podemos deducir fácilmente que

$$\psi^{(n)}(0) = (-i)^n \int_0^\infty t^n \cdot T_{\mathbf{M},A}(\boldsymbol{\mu})(t)dt = (-i)^n \mu_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.21}$$

Construiremos una función que verifique (3.21), a la vez que aseguraremos que su transformada de Fourier inversa pertenece a $\mathcal{S}_{\mathbf{M},cA}(0,\infty)$.

De hecho, ψ será la restricción al eje real del producto de otras dos funciones, ambas holomorfas en sectores apropiados que contienen $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La primera es una función auxiliar a la que nos referiremos como G, que tiende hacia 0 cuando $|z|$ tiende a infinito, y la segunda es una función F, en una clase ultraholomorfa de funciones $\mathcal{A}_{\mathbf{M},\tilde{c}A}(S_{-\pi/2,\theta})$ (donde $\tilde{c} > 1$ y $\theta > 1$), cuyas derivadas en 0 vienen determinadas de acuerdo a la fórmula de Leibnitz, para satisfacer la igualdad del primer y último término en (3.21): de hecho, si $(1/G)^{(n)}(0) = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, es necesario que se cumpla

$$F^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-i)^k \mu_k a_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.22}$$

Como la última sucesión $\{F^{(n)}(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ pertenece a $\Lambda_{\mathbf{M},c_1A}$ para $c_1 > 1$ adecuado (ver la Proposición 3.4.6), dicha función F se obtendrá gracias a los operadores $T_{\mathbf{M},A,\theta}$ que aparecen en el Teorema 1.3.9.

Describimos a continuación la función auxiliar que será usada más adelante. Esta función fue introducida por S-Y. Chung, D. Kim, Y. Yeom en [20] para construir la solución al problema de momentos que estamos tratando.

Sea $\tau > 1$, y consideremos el conjunto $H = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \geq 1\}$. Se define la función

$$h_\tau(z) = e^{\pi i(1+\frac{1}{2\tau})}(z-i)^{1/\tau}, \qquad z \in H,$$

donde la determinación del logaritmo es la especificada por $\arg(z-i) \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Es claro que h_τ es holomorfa en H.

Se define ahora la función $G_\tau : H \to \mathbb{C}$ dada por

$$G_\tau(z) = \exp(h_\tau(z)), \ z \in H. \tag{3.23}$$

G_τ es holomorfa y no se anula en H, luego $1/G_\tau$ es también analítica en H (y en particular, en $B(0,1)$).
El siguiente lema recoge la información relativa a G_τ que necesitaremos más adelante.

Lema 3.4.5. Sea ε un número real tal que $0 < \varepsilon < \text{mín}\left\{\dfrac{\pi}{2}(\tau-1), \dfrac{\pi}{2}\right\}$. Entonces $G_\tau(z)$ tiende a 0 cuando z tiende a ∞ en el sector

$$V_\varepsilon = \{z \in H : \arg(z-i) \in (-\pi-\varepsilon, \varepsilon)\}. \tag{3.24}$$

Demostración:
Si $z \in V_\varepsilon$ se tiene que

$$\begin{aligned}\arg h_\tau(z) = \pi + \frac{\pi}{2\tau} + \frac{1}{\tau}\arg(z-i) &\in \left(\pi + \frac{\pi}{2\tau} - \frac{\pi+\varepsilon}{\tau}, \pi + \frac{\pi}{2\tau} + \frac{\varepsilon}{\tau}\right) \\ &= \left(\pi - \frac{\pi+2\varepsilon}{2\tau}, \pi + \frac{\pi+2\varepsilon}{2\tau}\right).\end{aligned}$$

Por hipótesis, $\dfrac{\pi+2\varepsilon}{2\tau} < \dfrac{\pi}{2}$, con lo que la imagen por h_τ de V_ε está contenida en $\{w \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(w) < 0\}$; más aún, si llamamos $k_{\tau,\varepsilon}$ a la constante $\cos\left(\dfrac{\pi+2\varepsilon}{2\tau}\right) > 0$, es inmediato que, para cada $z \in V_\varepsilon$,

$$\mathrm{Re}(h_\tau(z)) = |h_\tau(z)|\cos(\arg h_\tau(z)) \leq -k_{\tau,\varepsilon}|z-i|^{\frac{1}{\tau}}.$$

Por tanto,

$$|G_\tau(z)| \leq \exp(-k_{\tau,\varepsilon}|z-i|^{\frac{1}{\tau}}), \ z \in V_\varepsilon;$$

puesto que $\lim\limits_{z\to\infty} |z-i|^{\frac{1}{\tau}} = \infty$, es inmediato concluir lo pedido. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es establecer la continuidad de diversas transformaciones definidas entre espacios, bien de sucesiones, bien clases ultraholomorfas, bien espacios de Gelfand-Shilov generales, definidos todos ellos mediante acotaciones asociadas a la sucesión $\mathbf{M}$. El primero de ellos se ocupa de la transformación entre espacios de sucesiones sugerida por la igualdad en (3.22).

Proposición 3.4.6. Sean $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión casi-creciente, $A > 0$, y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de derivadas en 0 de una función g, holomorfa en dicho punto. Entonces existe $c > 1$ (que depende de $\mathbf{M}$ y de A) tal que para cada $\boldsymbol{\mu} = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}$, la sucesión $T_1(\boldsymbol{\mu}) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-i)^k \binom{n}{k} \mu_k a_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.25}$$

es un elemento de $\Lambda_{\mathbf{M},cA}$. Además, la aplicación

$$\begin{aligned} T_1 : \Lambda_{\mathbf{M},A} &\longrightarrow \Lambda_{\mathbf{M},cA} \\ \boldsymbol{\mu} = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0} &\longrightarrow b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Demostración:
Sea ρ el radio de convergencia, finito o no, de la serie de Taylor de g en 0, y elijamos un número real c tal que

$$c > \text{máx}\{1, \frac{1}{\rho A}\}. \tag{3.26}$$

(si ρ es infinito, basta tomar $c > 1$). Recordemos que

$$|\boldsymbol{\mu}|_{\mathbf{M},A} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{|\mu_k|}{A^k k! M_k}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{|b_n|}{(cA)^n n! M_n} &= \frac{|\sum_{k=0}^{n} (-i)^k \binom{n}{k} \mu_k a_{n-k}|}{(cA)^n n! M_n} \le \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{|\boldsymbol{\mu}|_{\mathbf{M},A} A^k k! M_k |a_{n-k}|}{c^{n-k} A^n n! M_n} \\ &\le C_0 |\boldsymbol{\mu}|_{\mathbf{M},A} \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{(n-k)!(cA)^{n-k}} \le C_0 |\boldsymbol{\mu}|_{\mathbf{M},A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{k!(cA)^k} < \infty, \end{aligned}$$

siendo C_0 la constante en (3.4). Por lo tanto,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|b_n|}{(cA)^n n! M_n} < \infty,$$

y con esto se tiene que $b \in \Lambda_{\mathbf{M},cA}$.

Si llamamos $C = C_0 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \frac{1}{k!(cA)^k}$, podemos afirmar además que

$$|b|_{\mathbf{M},cA} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|b_n|}{(cA)^n n! M_n} \leq C|\boldsymbol{\mu}|_{\mathbf{M},A},$$

de donde se sigue la continuidad de T_1. $\square$

A continuación, comprobaremos que, fijados $A > 0$ y $\theta > 1$, el producto por una función holomorfa y "acotada cuando $|z| \to \infty$" transforma el espacio $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$ en $\mathcal{A}_{\mathbf{M},cA}(S_{-\pi/2,\theta})$, donde c es una constante adecuada.

Lema 3.4.7. Sean $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión casi-creciente, $A > 0$ y $\theta > 1$, y sea $\varepsilon > 0$ tal que el sector V_ε, definido en (3.24), verifica que

$$S_{-\pi/2,\theta} = \Big\{z \in \mathbb{C} : |\arg z + \frac{\pi}{2}| < \theta\pi/2\Big\} \subseteq V_\varepsilon.$$

Supongamos que G es una función holomorfa en V_ε y tal que existen números reales $M, R > 0$ de modo que

$$|G(z)| \leq M \qquad \text{para todo } z \in V_\varepsilon \text{ con } |z| \geq R. \tag{3.27}$$

Entonces existe $c > 1$ (que depende sólo de A) tal que para toda $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$ se tiene que $fG \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},cA}(S_{-\pi/2,\theta})$.

Demostración:
Como $S_{-\pi/2,\theta} \subseteq V_\varepsilon$, para cada $z \in S_{-\pi/2,\theta}$ se tiene que $B(z, 1/3) \subseteq V_\varepsilon$. Elegimos un número real c tal que

$$c > \max\{1, \frac{3}{A}\}. \tag{3.28}$$

Sea $f \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$. Para cada $z \in S_{-\pi/2,\theta}$ se tiene que

$$|f^{(n)}(z)| \leq \|f\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}} A^n n! M_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.29}$$

Puesto que

$$|(fG)^{(n)}(z)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |f^{(k)}(z)|\ |G^{(n-k)}(z)|, \qquad z \in S_{-\pi/2,\theta},$$

tenemos que, en virtud de (3.29),

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0, z\in S_{-\pi/2,\theta}} \frac{|(fG)^{(n)}(z)|}{(cA)^n n! M_n} \leq \|f\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}} \sup_{n\in\mathbb{N}_0, z\in S_{-\pi/2,\theta}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k! M_k A^k |G^{(n-k)}(z)|}{(cA)^n n! M_n}.$$

Llamemos

$$H_2 = \bigcup_{z \in S_{-\pi/2,\theta}} B(z, 1/3),$$

y sea $K = \overline{H_2} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\} \subseteq V_\varepsilon$. K es claramente compacto, y G es holomorfa en V_ε, luego existirá $M_1 > 0$ tal que $|G(z)| \leq M_1$ para todo $z \in K$. Teniendo en cuenta (3.27) y tomando $M_2 = \max\{M_1, M\}$, deducimos que $|G(z)| \leq M_2$ para cada $z \in \overline{H_2}$.

Sea $z \in S_{-\pi/2,\theta}$. Aplicando el teorema de Cauchy para las derivadas, tenemos que

$$\begin{aligned}
|G^{(n-k)}(z)| &= \Big| \frac{(n-k)!}{2\pi i} \int_{|w-z|=1/3} \frac{G(w)}{(w-z)^{n-k+1}} dw \Big| \\
&\leq \frac{(n-k)! 2\pi \frac{1}{3}}{2\pi \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}} M_2 = \frac{(n-k)!}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}} M_2,
\end{aligned}$$

y por lo tanto, teniendo en cuenta (3.4),

$$\begin{aligned}
\sup_{n \in \mathbb{N}_0, z \in S_{-\pi/2,\theta}} \frac{|(fG)^{(n)}(z)|}{(cA)^n n! M_n} &\leq \|f\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}} M_2 \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{M_k}{M_n} \frac{A^k}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} (cA)^n} \\
&\leq C_0 \|f\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}} M_2 \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(cA\frac{1}{3})^{n-k}} \frac{1}{c^k} \\
&\leq C_0 \|f\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}} M_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(cA\frac{1}{3})^k} < \infty,
\end{aligned}$$

como se quería. $\square$

Observación 3.4.8. De hecho, se ha probado que

$$\|fG\|_{\mathbf{M},cA,S_{-\pi/2,\theta}} \leq C(G,\theta,A) \|f\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}},$$

con lo que la aplicación

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta}) &\longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{M},cA}(S_{-\pi/2,\theta}) \\
f &\longrightarrow fG.
\end{aligned}$$

es continua.

Observación 3.4.9. Sea $\theta > 1$. Es inmediato que $\mathbb{R}\setminus\{0\} \subseteq S_{-\pi/2,\theta}$. Por lo tanto, dada una función $\Psi \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$, podemos considerar $\psi = \Psi|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Dicha función ψ puede extenderse de forma $\mathcal{C}^\infty$ a toda la recta real. Para verlo, basta aplicar el siguiente resultado, que es una aplicación directa del teorema de los incrementos finitos:

Dados un intervalo abierto (a,b) de la recta real, y $c \in (a,b)$, sea $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ una función continua de forma que exista $f':(a,c)\cup(c,b)\to\mathbb{C}$ y tal que existan los límites laterales de f' en c y coincidan. Entonces, existe $f'(c)$ y su valor es el de dichos límites laterales. En particular, si f' es continua en $(a,c)\cup(c,b)$, se deduce que $f\in\mathcal{C}^1(a,b)$.

En nuestro caso, partimos de una función ψ definida en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y de clase $\mathcal{C}^\infty$ en dicho conjunto (por ser Ψ analítica en $S_{-\pi/2,\theta}$). Supongamos que $\Psi \cong \sum_{n=0}^\infty f_n z^n$ en $S_{-\pi/2,\theta}$. Podemos extender Ψ de forma continua a $\mathbb{R}$ tomando como valor en 0 el primer coeficiente del desarrollo asintótico de Ψ, f_0. Como $\lim_{x\to 0}\psi'(x) = \lim_{x\to 0}\Psi'(x) = f_1$, aplicando el resultado anterior, podemos decir que la función ψ es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada continua, siendo $\psi'(0) = f_1$. Basta realizar un razonamiento de inducción para concluir que la extensión, que seguiremos denotanto por ψ, a toda la recta es de clase $\mathcal{C}^\infty$, verificándose que $\psi^{(n)}(0) = n!f_n$, $n\in\mathbb{N}_0$.

En adelante, se entenderá que una función de este tipo, obtenida por restricción, ha sido ya extendida, considerándola como un elemento de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Consideremos, para θ y ε adecuados de modo que $S_{-\pi/2,\theta}\subseteq V_\varepsilon$, la función G_τ introducida en (3.23). De acuerdo con el Lema 3.4.7, el producto de un elemento de $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$ por G_τ es una función de un cierto espacio $\mathcal{A}_{\mathbf{M},c_0A}(S_{-\pi/2,\theta})$. Siguiendo la observación 3.4.9, la restricción de esta última a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ se puede ver como una función de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Nuestro próximo resultado prueba que, de hecho, este proceso lleva del espacio $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$ al espacio $\mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R})$, de forma lineal y continua para cierto $c>1$.

Proposición 3.4.10. Sean $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión casi-creciente, $A>0$, $\tau>1$ y $\theta>1$. Sea $\varepsilon>0$ tal que

$$S_{-\pi/2,\theta}\subseteq V_\varepsilon = \{z\in H : \arg(z-i)\in(-\pi-\varepsilon,\varepsilon)\}$$

y sea $G_\tau : V_\varepsilon\to\mathbb{C}$ la función definida en (3.23). Entonces, existe $c>1$ (que depende de A y de θ) de forma que se verifican:

(i) Para toda $F\in\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$ se tiene que $FG_\tau|_{\mathbb{R}}\in\mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R})$, y

(ii) La aplicación

$$\begin{aligned} T_2 : \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta}) &\longrightarrow \mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R}) \\ F &\longrightarrow T_2F = (FG_\tau)|_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Demostración:
Sea $F \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$, de modo que

$$\sup_{z\in S_{-\pi/2,\theta},\gamma\in\mathbb{N}_0} \frac{\left|F^{(\gamma)}(z)\right|}{A^\gamma\gamma!M_\gamma} = \|F\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}} < \infty. \tag{3.30}$$

Veremos que $T_2F \in \mathcal{S}^{\alpha,cA}(\mathbb{R})$ para cierto $c > 1$ que determinaremos más adelante. Fijado $\beta \in \mathbb{N}_0$, se trata de acotar adecuadamente la cantidad

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\beta(T_2F)^{(\gamma)}(x)|}{(cA)^\gamma\gamma!M_\gamma} &= \sup_{x\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^\beta(FG_\tau)^{(\gamma)}(x)|}{(cA)^\gamma\gamma!M_\gamma}\\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0} \frac{|x|^\beta\sum_{k=0}^{\gamma}\binom{\gamma}{k}|F^{(\gamma-k)}(x)G_\tau^{(k)}(x)|}{(cA)^\gamma\gamma!M_\gamma} \end{aligned}\tag{3.31}$$

Es posible tomar δ con $0 < \delta < 1/2$ y de forma que si $x \in \mathbb{R}$ y $|x| \geq 3/2$ entonces $B(x,\delta) \subseteq S_{-\pi/2,\theta}$. Sea $x \in \mathbb{R}$, con $|x| \geq 3/2$. Se cumple que para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

$$|x^\beta G_\tau^{(k)}(x)| = \left|\frac{k!x^\beta}{2\pi i}\int_{|w-x|=\delta}\frac{G_\tau(w)}{(w-x)^{k+1}}dw\right| \leq \frac{k!|x|^\beta 2\pi\delta}{2\pi\delta^{k+1}}\sup_{|w-x|=\delta}|G_\tau(w)|.$$

Para cada $w \in \mathbb{C}$ con $|w-x| = \delta$, tenemos que $w = x+\delta e^{i\theta}$, $\theta \in (0,2\pi)$, luego $|x+\delta e^{i\theta}-i| \geq |x|-\delta-1$. Ahora bien, dado que $|x| \geq 3/2$, se tiene que

$$\left(\frac{|x|-\delta-1}{|x|}\right)^{1/\tau} = \left(1-\frac{\delta+1}{|x|}\right)^{1/\tau} \geq \left(1-\frac{\delta+1}{3/2}\right)^{1/\tau},$$

luego, si $k_{\tau,\varepsilon}$ es la constante positiva introducida en la Proposición 3.4.5,

$$-(|x|-\delta-1)^{1/\tau}k_{\tau,\varepsilon} \leq -|x|^{1/\tau}\left(1-\frac{\delta+1}{3/2}\right)^{1/\tau}k_{\tau,\varepsilon}.$$

Llamemos $L = \left(1-\frac{\delta+1}{3/2}\right)^{1/\tau}$. Hemos probado que

$$\begin{aligned}|G_\tau(w)| &= \exp(\mathrm{Re}(e^{i\pi(1+\frac{1}{2\tau})}(w-i)^{1/\tau})) \leq \exp(-k_{\tau,\varepsilon}|w-i|^{1/\tau}) \leq e^{-k_{\tau,\varepsilon}(|x|-\delta-1)^{1/\tau}}\\ &\leq \exp(-L|x|^{1/\tau}k_{\tau,\varepsilon}).\end{aligned}$$

Así, si llamamos

$$C_2 = C_2(\beta,\tau) = \text{máx}\left\{1, \max_{|x|\geq\frac{3}{2}}\left\{|x|^\beta e^{-k_{\tau,\varepsilon}|x|^{1/\tau}}\right\}\right\} < \infty,$$

podemos decir que

$$|x^\beta G_\tau^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{\delta^k}|x|^\beta e^{-k_{\tau,\varepsilon}|x|^{1/\tau}} \leq \frac{k!C_2}{\delta^k}, \quad |x| \geq 3/2. \tag{3.32}$$

En el caso en que $|x| \leq 3/2$ podremos acotar de forma más sencilla aplicando el teorema de Cauchy para las derivadas : sean $K \subseteq S_{-\pi/2,\theta}$ compacto y $\eta \in (0,1]$ de forma que para cada x con $|x| \leq 3/2$, $B(x,\eta) \subseteq K \subseteq V_\varepsilon$. Llamemos

$$M = M(\tau) = \text{máx}\Big\{1, \max_{z\in K}|G_\tau(z)|\Big\},$$

que es finito pues G_τ es holomorfa en un abierto que contiene a K. Así que, si $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 3/2$,

$$\begin{aligned}|x^\beta G_\tau^{(k)}(x)| &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^\beta \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{|w-x|=\eta}\frac{G_\tau(w)}{(w-x)^{k+1}}dw\right| \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^\beta \frac{k!2\pi\eta}{2\pi\eta^{k+1}}\max_{z\in K}|G_\tau(z)| = \left(\frac{3}{2}\right)^\beta \frac{k!}{\eta^k}M. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Observemos que los valores δ y η sólo dependen de θ, es decir, del sector $S_{-\pi/2,\theta}$ que tomemos.
De acuerdo con (3.32) y (3.33), se tiene que

$$|x^\beta G_\tau^{(k)}(x)| \leq \frac{(3/2)^\beta M(\tau)k!C_2(\beta,\tau)}{(\text{mín}\{\eta,\delta\})^k} \quad , \ x \in \mathbb{R}. \tag{3.34}$$

Fijamos un número real c tal que

$$c > \text{máx}\{1, \frac{1}{A\,\text{mín}\{\eta,\delta\}}\}. \tag{3.35}$$

Podemos concluir de (3.30), (3.31) y (3.34) que

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0}\frac{|x^\beta(T_2F)^{(\gamma)}(x)|}{(cA)^\gamma\gamma!M_\gamma} \leq \sup_{x\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{(cA)^\gamma\gamma!M_\gamma}\sum_{k=0}^{\gamma}\binom{\gamma}{k}C(\tau,\beta,k)|F^{(\gamma-k)}(x)|$$

$$\leq \sup_{\gamma\in\mathbb{N}_0}\sum_{k=0}^{\gamma}\frac{(3/2)^\beta M(\tau)k!C_2(\beta,\tau)}{(\text{mín}\{\eta,\delta\})^k(cA)^\gamma\gamma!M_\gamma}\binom{\gamma}{k}A^{\gamma-k}(\gamma-k)!M_{\gamma-k}\|F\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}}.$$

Llamando

$$C_1(\tau,\beta) = (3/2)^\beta M(\tau)C_2(\beta,\tau)$$

y aplicando (3.4) tenemos que la expresión anterior es igual a

$$C_1(\tau,\beta)\sup_{\gamma\in\mathbb{N}_0}\sum_{k=0}^{\gamma}\frac{M_{\gamma-k}A^{\gamma-k}\,\|F\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}}}{M_\gamma\left(\text{mín}\{\eta,\delta\}\right)^k(cA)^\gamma}$$
$$\le C_0C_1(\tau,\beta)\sup_{\gamma\in\mathbb{N}_0}\sum_{k=0}^{\gamma}\frac{\|F\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}}}{\left(\text{mín}\{\eta,\delta\}\,cA\right)^k c^{\gamma-k}}$$
$$\le C_0C_1(\tau,\beta)\sup_{\gamma\in\mathbb{N}_0}\sum_{k=0}^{\gamma}\frac{\|F\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}}}{\left(\text{mín}\{\eta,\delta\}\,cA\right)^k}=C_0C_1(\tau,\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|F\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}}}{\left(\text{mín}\{\eta,\delta\}\,cA\right)^k}.$$

La serie anterior es convergente por la elección de c. Llamando

$$C_\beta=C(\tau,\beta,\theta,A):=C_0C_1(\tau,\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\text{mín}\{\eta,\delta\}\,cA\right)^k},$$

podemos concluir que

$$\sup_{x\in\mathbb{R},\gamma\in\mathbb{N}_0}\frac{|x^\beta(T_2F)^{(\gamma)}(x)|}{(cA)^\gamma\gamma!M_\gamma}\le C_\beta\,\|F\|_{\mathbf{M},A,S_{-\pi/2,\theta}},$$

de donde se deduce que $T_2F\in\mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R})$ y que $T_2:\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})\longrightarrow\mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R})$ es continuo. □

Observación 3.4.11. Se ha probado que, para cada $F\in\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$, $T_2F=(FG_\tau)|_{\mathbb{R}}\in\mathcal{S}^{\mathbf{M},cA}(\mathbb{R})$. Ahora bien, si $U=\{z\in\mathbb{C}:\text{Im}z<0\}$, y dado que $\overline{U}\setminus\{0\}\subseteq S_\theta$, podemos considerar (tras la extensión trivial) la función $(FG_\tau)|_{\overline{U}}$, que es continua en $\overline{U}$ y analítica en U. Claramente, dicha función extiende a T_2F, y verifica que

$$\lim_{z\to\infty,z\in\overline{U}}(FG_\tau)|_{\overline{U}}(z)=0,$$

pues F está acotada en S_θ, por definición de $\mathcal{A}_{\mathbf{M},A}(S_{-\pi/2,\theta})$, y

$$\lim_{z\to\infty,z\in\overline{U}}G_\tau(z)=0$$

(ver Lema 3.4.5). De acuerdo con la Proposición 3.2.7, T_2F es la transformada de Fourier de una función en $\mathcal{S}_{\mathbf{M},cA}(0,\infty)$, con c adecuado.

Finalmente, terminamos con la demostración de nuestro resultado principal.

Demostración del Teorema 3.4.2: Sea $\tau>1$, y consideremos $a_n:=(1/G_\tau)^{(n)}(0)$, $n\in\mathbb{N}_0$. La Proposición 3.4.6 nos permite asegurar la existencia de una constante $c_1>1$ y del operador lineal y continuo T_1 definido en términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Elijamos $\theta \in (1, \gamma(\mathbf{M}))$. De acuerdo con el Teorema 1.3.9, existe una constante $c_2 > 1$ y un operador lineal y continuo $T_{\mathbf{M},c_1A,\theta}$ de modo que $\mathcal{B} \circ T_{\mathbf{M},c_1A,\theta} = \mathrm{Id}_{\Lambda_{\mathbf{M},c_1A}}$. La Proposición 3.4.10 permite garantizar de nuevo la existencia de una constante $c_3 > 1$ y un operador lineal y continuo

$$T_2 : \mathcal{A}_{\mathbf{M},c_2c_1A}(S_{-\pi/2,\theta}) \longrightarrow \mathcal{S}^{\mathbf{M},c_3c_2c_1A}(\mathbb{R}).$$

Teniendo en cuenta la Proposición 3.2.1 sabemos que $\mathcal{F}^{-1}$ transforma $\mathcal{S}^{\mathbf{M},c_3c_2c_1A}$ en $\mathcal{S}_{\mathbf{M},c_3c_2c_1A}$ de forma continua. Estableciendo $c = c_3c_2c_1 > 1$, es sencillo comprobar (ver las observaciones 3.4.4 y 3.4.11) que

$$T_{\mathbf{M},A} := \mathcal{F}^{-1} \circ T_2 \circ T_{\mathbf{M},\theta,c_1A} \circ T_1 : \Lambda_{\mathbf{M},A} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{M},cA}(0,\infty)$$

resuelve el problema. □

Fijamos ahora nuestra atención en la necesidad de las condiciones pedidas en el planteamiento del Teorema 3.4.2.

Teorema 3.4.12. Sean $\mathbf{M}$ una sucesión fuertemente regular que satisface (2.19). Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $\gamma(\mathbf{M}) > 1$.

(ii) Para cada $A > 0$ existen $c > 1$ (que depende de $\mathbf{M}$ y A) y un operador lineal y continuo

$$T_{\mathbf{M},A} : \Lambda_{\mathbf{M},A} \to \mathcal{S}_{\mathbf{M},cA}(0,\infty)$$

de forma que $\mathcal{M} \circ T_{\mathbf{M},A} = \mathrm{Id}_{\Lambda_{\mathbf{M},A}}$.

(iii) La aplicación $\mathcal{M} : \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty) \to \Lambda_{\mathbf{M}}$ es sobreyectiva.

(iv) Existe una función $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty)$ tal que $\mu_n(f) = (-1)^n\delta_{1,n}$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ (donde $\delta_{1,n}$ denota la delta de Dirac).

Demostración:
(i)⇒(ii) Es precisamente el contenido del Teorema 3.4.2.
(ii)⇒(iii) Dado $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda_{\mathbf{M}}$, existe $A > 0$ de modo que $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda_{\mathbf{M},A}$. Entonces, $T_{\mathbf{M},A}(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{S}_{\mathbf{M},cA}(0,\infty) \subset \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty)$, y verifica que $\mathcal{M}\big(T_{\mathbf{M},A}(\boldsymbol{\mu})\big) = \boldsymbol{\mu}$, con lo que $\mathcal{M}$ es sobreyectiva.
(iii)⇒(iv) Consideremos la sucesión $\boldsymbol{\mu} = (\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Es obvio que $\boldsymbol{\mu} \in \Lambda_{\mathbf{M}}$, por lo que, de acuerdo con (iii), existe $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0,\infty)$ tal que $\mathcal{M}(f) = \boldsymbol{\mu}$.
(iv)⇒(i) Consideremos la transformada de Laplace de la función f,

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt.$$

La función g está claramente definida para $\Re(z) \geq 0$, donde es además continua, y es holomorfa en $H = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. Más aún, como para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$|t^n f(t)| \leq p_0(f) A^n n! M_n, \qquad t \in (0, \infty),$$

para todo z con $\Re(z) \geq 0$ se deduce que

$$\begin{aligned}
|g^{(n)}(z)| &\leq \int_0^\infty \left|(-1)^n e^{-zt} t^n f(t)\right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left|t^n f(t)\right| dt + \int_1^\infty \left|t^{n+2} f(t)\right| \frac{dt}{t^2} \\
&\leq p_0(f) A^n n! M_n + p_0(f) A^{n+2} (n+2)! M_{n+2}.
\end{aligned}$$

Como en la demostración de la Proposición 3.4.1, podemos ver que existe una constante $c > 1$ tal que $g \in \mathcal{A}_{\mathbf{M},cA}(S_{0,1})$. Pero también

$$g^{(n)}(0) = \int_0^\infty (-1)^n t^n f(t)\, dt = (-1)^n \mu_n(f) = \delta_{1,n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Entonces, el Teorema 2.2.15 permite asegurar que $\gamma(\mathbf{M}) > 1$. $\square$

Observación 3.4.13. Los resultados anteriores dan respuesta completa para la solución al problema de momentos de Stieltjes en los espacios de Gelfand-Shilov generales $\mathcal{S}_{\mathbf{M}}(0, \infty)$ bajo la condición (2.19). Estos incluyen el caso de los espacios clásicos cuando $\mathbf{M}$ es una sucesión Gevrey de cierto orden $\alpha > 1$.

Finalmente, obtenemos un resultado sobre la necesidad de la condición (γ_1).

Proposición 3.4.14. Sea $\mathbf{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos que satisface (γ) y tal que la sucesión $(n!M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ cumpla la condición (α_0). Si existen constantes $A > 0$ y $c > 1$ y un operador lineal y continuo $T : \Lambda_{\mathbf{M},A} \to \mathcal{S}_{\mathbf{M},cA}(0, \infty)$ tal que $\mathcal{M} \circ T = \mathrm{Id}_{\Lambda_{\mathbf{M},A}}$, entonces la sucesión $\mathbf{M}$ verifica la condición (γ_1).

Demostración:
La aplicación $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \to (\mu_n/(-i)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es un isomorfismo, al que nos referiremos por ρ, en $\Lambda_{\mathbf{M},A}$. Si $r \in \mathbb{N}$, podemos considerar el espacio $\mathcal{E}_{\mathbf{M},r}[-1, 1]$ formado por las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty[-1, 1]$ para las cuales se tiene que $|f|_{[-1,1],r} < \infty$, siendo

$$|f|_{[-1,1],r} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0, x\in[-1,1]} \frac{|f^{(n)}(x)|}{r^n n! M_n}.$$

$(\mathcal{E}_{M,r}[-1,1], |\cdot|_{[-1,1],r})$ es un espacio de Banach, y el operador de restricción $j : \mathcal{S}^{\mathbf{M},r} \to \mathcal{E}_{\mathbf{M},r}[-1,1]$ está bien definido, y es lineal y continuo, ya que

$$|f|_{[-1,1],r} = \sup_{x\in[-1,1],n\in\mathbb{N}_0} \frac{|f^{(n)}(x)|}{r^n n! M_n} \leq p^0(f), \qquad f \in \mathcal{S}^{\mathbf{M},r}.$$

Ahora, aplicando la Proposición 3.2.3, es inmediato comprobar que existe una constante $c_1 \geq 1$ tal que la aplicación $T_1 := j \circ \mathcal{F} \circ T \circ \rho$ es lineal y continua del espacio $\Lambda_{\mathbf{M},A}$ en el espacio $\mathcal{E}_{M,c_1A}[-1,1]$ y satisface $\mathcal{B} \circ T_1 = \mathrm{Id}_{\Lambda_{\mathbf{M},A}}$ (donde $\mathcal{B}$ es la aplicación de Borel en 0). Basta tener en cuenta el Teorema 3.6 en el artículo de H.-J. Petzsche [61] para concluir. $\square$

Bibliografía

[1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem*, Hafner, Nueva York, 1965.

[2] W. Balser, *From divergent power series to analytic functions. Theory and application of multisummable power series*, Lect. Notes Math. **1582**, Springer-Verlag, Berlín, 1994.

[3] W. Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer, Berlín, 2000.

[4] J. Bonet, *El impacto del análisis funcional en algunos problemas del análisis*, Discurso de ingreso como Académico de Número en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2008.

[5] J. Bonet, R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions, Studia Math. **99** (2) (1991), 155–184.

[6] J. Bonet, R. Meise, B. A. Taylor, Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Roumieu type, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **89** (1989), no. 1, 53-66.

[7] J. Bonet, R. Meise, B. A. Taylor, On the range of the Borel map for classes of non quasianalytic functions, Progress in Funct. Anal., North-Holland Math. Studies **179** (1992), 97–111.

[8] É. Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. (3) **12** (1895), 9–55.

[9] É. Borel, Sur la généralisation du prolongement analytique, C. R. Acad. Sci. Paris **130** (1900), 1115–1118.

[10] É. Borel, Sur les séries de polynômes et de fractions rationnelles, Acta Math. **24** (1901), 309–387.

[11] B. L. J. Braaksma, Multisummability of formal power series solutions of nonlinear meromorphic differential equations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), 517–540.

[12] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis, Results Math. **17** (1990), 206–237.

[13] J. Bruna, An extension theorem of Whitney type for non quasi-analytic classes of functions, J. London Math. Soc. (2), **22** (1980), 495–505.

[14] T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthiers Villars, París, 1926.

[15] H. Cartan, S. Mandelbrojt, Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables, Acta Math. **72** (1940), 31–49.

[16] J. Chaumat, A.-M. Chollet, Classes de Gevrey non isotropes et application à l'interpolation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15** (1988), 615–676.

[17] J. Chaumat, A.-M. Chollet, Théorème de Whitney dans des classes ultradifférentiables, C. R. Acad. Sci. Paris **315** (1992), 901–906.

[18] J. Chaumat, A.-M. Chollet, Surjectivité de l'application restriction à un compact dans des classes de fonctions ultradifférentiables, Math. Ann. **298** (1994), 7–40.

[19] J. Chung, S-Y. Chung, D. Kim, Every Stieltjes moment problem has a solution in Gel'fand-Shilov spaces, J. Math. Soc. Japan **55**, n. 4 (2003), 909–913.

[20] S-Y. Chung, D. Kim, Y. Yeom, Stieltjes moment problem for Gel'fand-Leontiev spaces, Fract. Calc. Appl. Anal. **2**, n. 5 (1999), 623–629.

[21] R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lect. Notes Math. **242**, Springer, Berlín-Heidelberg-Nueva York, 1972.

[22] A. Denjoy, Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, C. R. Acad. Sci. Paris **123** (1921), 1320–1322.

[23] J. Dieudonné, *Fundamentos de análisis moderno*, Reverté, Barcelona-Buenos Aires, 1966.

[24] A. J. Durán, The Stieltjes moments problem for rapidly decreasing functions, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), 731–741.

[25] A. L. Durán and R. Estrada, Strong moment problems for rapidly decreasing smooth functions, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 529–534.

[26] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes I, II*, Publ. Math. Orsay, Univ. Paris XI, Orsay, 1981; *III*, Publ. Math. Orsay, Univ. Paris XI, Orsay, 1985.

[27] J. Ecalle, *Introduction à l'Accélération et à ses Applications*, Travaux en Cours, Hermann, París, 1993.

[28] R. Estrada, R. P. Kanwal, *A distributional approach to asymptotics. Theory and applications*, segunda edición, Birkhäuser Advanced Texts, Boston, MA, 2002.

[29] F. Galindo, F. López, J. Sanz, A generalized moment problem for rapidly decreasing smooth vector functions of several variables, J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), 655–665.

[30] F. Galindo, J. Sanz, On strongly asymptotically developable functions and the Borel-Ritt theorem, Studia Math. **133**, n. 3 (1999), 231–248.

[31] I. M. Gelfand, G. E. Shilov, *Generalized functions, Vol. 2, Space of fundamental and generalized functions*, Academic Press, Nueva York, 1965.

[32] R. Gérard, Y. Sibuya, Étude de certains systèmes de Pfaff avec singularités, Lect. Notes Math. **172**, 131–288, Springer, Berlín, 1979.

[33] M. Gevrey, Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. (3) **35** (1918), 129–190.

[34] W. A. Groening, Quasi-analyticity for functions of several variables, Duke Math. J. **38** (1971), 109–115.

[35] J. Hadamard, Sur la généralisation de la notion de fonction analytique, Bull. Soc. Math. France **40** (1912), supplément spécial: vie de la société, séance du 28 février 1912, 28–29.

[36] Y. Haraoka, Theorems of Sibuya-Malgrange type for Gevrey functions of several variables, Funkcial. Ekvac. **32** (1989), 365–388.

[37] J. A. Hernández, *Desarrollos asintóticos en polisectores. Problemas de existencia y unicidad*, Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid, España, 1994.

[38] J. A. Hernández, J. Sanz, Constructive Borel-Ritt interpolation results for functions of several variables, Asymptotic Analysis, **24** (2000), 167–182.

[39] J. A. Hernández, J. Sanz, Gérard-Sibuya's versus Majima's concept of asymptotic expansion in several variables, J. Austral. Math. Soc., Series A **71** (2001), 21–35.

[40] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I, Distribution theory and Fourier analysis*, Springer, Berlín-Heidelberg-Nueva York, 1983.

[41] V.-K. Khoan, *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles*, Tomo II, Vuibert, París, 1972.

[42] H. Komatsu, Ultradistributions, I: Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **20** (1973), 25–105.

[43] H. Komatsu, The implicit function theorem for ultradifferentiable mappings, Proc. Japan Acad. ser. A **55** (1979), 69–72.

[44] B. I. Korenbljum, Conditions of nontriviality of certain classes of functions analytic in a sector, and problems of quasianalyticity, Soviet Math. Dokl. **7** (1966), 232–236.

[45] H. J. Landau (ed.), *Moments in mathematics*, Proc. Sympos. Appl. Math., v. 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[46] M. Langenbruch, Extension of ultradifferentiable functions of Roumieu type, Arch. Math. (Basel) **51** (1988), no. 4, 353–362.

[47] A. Lastra, J. Sanz, Linear continuous operators for the Stieltjes moment problem in Gelfand-Shilov spaces, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), 968–981.

[48] P. Lelong, Extension d'un théorème de Carleman, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **12** (1962), 627–641.

[49] E. Maillet, Sur les séries divergentes et les équations différentielles, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **20** (1903), 487–518.

[50] H. Majima, Analogues of Cartan's decomposition theorem in asymptotic analysis, Funkcial. Ekvac. **26** (1983), 131–154.

[51] H. Majima, *Asymptotic analysis for integrable connections with irregular singular points*, Lect. Notes Math. **1075**, Springer, Berlín, 1984.

[52] S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, París, 1952.

[53] J. Martinet, J.-P. Ramis, Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, Publ. I.H.E.S. **55** (1982), 63–164.

[54] W. Matsumoto, Characterization of the separativity of ultradifferentiable classes, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), n. 4, 667–678.

[55] R. Meise, B. A. Taylor, Opérateurs linéaires continues d'extension pour les fonctions ultradifferentiables sur des intervals compacts, C. R. Acad. Sci. Paris **302** (1986), 219–222.

[56] R. Meise, B. A. Taylor, Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type, Ark. Math. **26** (1988), 265–287.

[57] R. Meise, B. A. Taylor, Linear extension operators for ultradifferentiable functions of Beurling type on compact sets, Amer. J. Math. **111** (1989), 309–337.

[58] H. Mirkil, Differentiable functions, formal power series, and moments, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 650–652.

[59] B. S. Mityagin, Approximate dimension and bases in nuclear spaces, Russ. Math. Surv. **16**, n. 4 (1961), 59–127.

[60] A. Ostrowski, Über quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwickelungen, Acta Math. **53** (1929), n. 1, 181–266.

[61] H.-J. Petzsche, On E. Borel's theorem, Math. Ann. **282** (1988), 299–313.

[62] A. Yu. Popov, The moments problem for rapidly decreasing functions, Math. Notes **60**, no. 1 (1996), 49–55.

[63] J.-P. Ramis, Dévissage Gevrey, Asterisque **59–60** (1978), 173–204.

[64] J.-P. Ramis, A propos du théorème de Borel-Ritt a plusieurs variables, Lect. Notes in Math. **172**, 289–292, Springer, Berlín, 1979.

[65] J.-P. Ramis, *Les séries k-sommables et leurs applications*, Lect. Notes Phys. **126**, Springer-Verlag, Berlín, 1980.

[66] J.-P. Ramis, Y. Sibuya, A new proof of multisummability of formal solutions of non linear meromorphic differential equations, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), 811–848.

[67] R. Remmert, *Classical topics in complex function theory*, Springer-Verlag, Nueva York, 1998.

[68] J. F. Ritt, On the derivatives of a function at a point, Ann. of Math. (2) **18** (1916), no. 1, 18–23.

[69] C. Roumieu, Ultradistributions définies sur $\mathbb{R}^n$ et sur certaines classes de variétés différentiables, J. Analyse Math. **10** (1962-1963), 153–192.

[70] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, MacGraw-Hill, Nueva York, 1987.

[71] J. Sanz, Summability in a direction of formal power series in several variables, Asymptotic Anal. **29** (2002), 115–141.

[72] J. Sanz, Linear continuous extension operators for Gevrey classes on polysectors, Glasgow Math. J. **45** (2003), 199–216.

[73] J. Schmets, M. Valdivia, Extension maps in ultradifferentiable and ultraholomorphic function spaces, Studia Math. **143** (3) (2000), 221–250.

[74] T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Sci. Toulousse (1) **8** (1894) J 76–122, (1) **A** 5–47.

[75] V. Thilliez, Extension Gevrey et rigidité dans un secteur, Studia Math. **117** (1995), 29–41.

[76] V. Thilliez, Quelques propriétés de quasi-analyticité, Gazette Math. **70** (1996), 49–68.

[77] V. Thilliez, Division by flat ultradifferentiable functions and sectorial extensions, Result. Math. **44** (2003), 169–188.

[78] V. Thilliez, On quasianalytic local rings, Expo. Math. **26** (2008), no. 1, 1–23.

[79] F. Tréves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, Nueva York, 1967.

[80] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Wiley, Nueva York, 1965.

[81] G. N. Watson, A theory of asymptotic series, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, **211** (1912), 279–313.

[82] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.

[83] H. Whitney, Differentiable functions defined in closed sets I, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 369–387.

[84] C. Zuily, *Problèmes de distributions avec solutions détaillées*, Hermann, París, 1978.