Universidad de Valladolid

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y TRABAJO SOCIAL
MASTER EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MASTER

"UTILIZACIÓN DE MATERIALES MANIPULATIVOS EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS DEL CURRÍCULO DE SECUNDARIA"

AUTOR: DAVID RODRÍGUEZ VICENTE
TUTOR: ALFONSO JESÚS POBLACIÓN SÁEZ

JUNIO DE 2014

ÍNDICE

1. Presentación. **8**

2. Introducción. ***"Historias para no olvidar"*** **9**

2.1. *"La historia de la historia que olvidó su comienzo"* *9*

2.2. *"La historia del idioma que olvido su función"* *11*

3. Los materiales manipulativos en la enseñanza de matemáticas. **14**

3.1. Definición de material manipulativo en educación. *14*

3.2. Ventajas e inconvenientes de la utilización de estos materiales en el aula. *15*

3.3. Uso de materiales manipulativos en las matemáticas. Visión histórica. *17*

3.3.1. La visualización como recurso. *17*

3.3.2. Las bases del aprendizaje mediante manipulación. *19*

3.3.3. El siglo XX y la evolución del pasatiempo para adultos. *20*

4. Proyecto. ***"Manual de apoyo para profesores. 3º ESO".*** **24**

4.1. Presentación *24*

4.2. Objetivos. *25*

4.3. Contenidos para 3º ESO según BoCyL. Decreto 52/2007. *26*

4.4. Distribución de los contenidos en unidades didácticas. *30*

4.5. Tipos de actividades planteadas. *30*

4.6. Fichas de las actividades. *32*

4.6.1. Índice de fichas por Unidades didácticas. *32*

4.6.2. Índice de fichas por objetivos. *33*

1. Escoba fraccionada. *35*
2. Más por menos. *36*
3. Escalada. *37*
4. Sube y baja. *38*
5. ¡¡Acércate!! *39*
6. El tronco. *40*
7. Uno y un poco más. *41*
8. 8 números. *42*
9. El valor de un solo folio. *43*

10. ¿Cuánto vale mí…? 44
11. El bar de Moe. 45
12. NIM simplificado. 46
13. El valor de N. 47
14. Factores a raya. 48
15. Carreras algebraicas. 49
16. Geoplano y sistemas de ecuaciones lineales. 50
17. Estrellas mágicas. 51
18. Sol y sombra. 52
19. Torres de Hanói. 53
20. Drago 54
21. Raya la cucaracha. 56
22. Trivial Function. 57
23. ¿Quién es Quién? 59
24. Cada oveja con su función. 60
25. ¿Y quién demonios es pi? 61
26. Buscágono. 62
27. Juego del triángulo. 63
28. En posición de Thales. 64
29. Tangram pitagórico. 65
30. Un disfraz rectangular. 65
31. Artistas por un día. 67
32. Geometría centrifugada. 68
33. Pictionary 3D. 69
34. Batallas espaciales. 70
35. La luz de Apolonio. 71
36. Polydron 72
37. Una relación especial. 73
38. Carera de dados. 74
39. El dado ganador. 75
40. El feriante ventajista. 76
41. Cruzar el rio. 77
42. Pares o nones. 78

5. Conclusiones. 79

6. Futuras líneas de mejora del proyecto. 79

7. Bibliografía. 81

1. Presentación.

"Quien quiere hacer algo encuentra un medio; quien no quiere hacer nada encuentra una excusa."

Proverbio árabe

"Aquellos que se toman el juego como un simple juego y el trabajo con excesiva seriedad, no han comprendido mucho ni de uno ni de otro."

H. Heine (Siglo XIX)

"La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces."

Puig Adam (1958)

"Es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivador, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante. De hecho (…) han sido numerosos los intentos de presentar sistemáticamente los principios matemáticos que rigen muchos de los juegos de todas las épocas, a fin de poner más en claro las conexiones entre juego y matemáticas. Desafortunadamente para el desarrollo científico en nuestro país, la aportación española en este campo ha sido casi nula. Nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus enseñantes."

M. de Guzmán (1984)

2. Introducción. "*Historias para no olvidar*"

A todos nos gustan las historias, nos hacen reír, llorar, ocupan nuestro tiempo, nos trasladan a mundos que sólo existen en la imaginación, nos hacen reflexionar sobre cosas que momentos antes ni siquiera conocíamos… Las historias consiguen escalar muros infranqueables, como la clásica *(¿o no tan clásica?)* división entre los amantes de las ciencias y los defensores de las letras. Quizás no llegasen a un acuerdo sobre la temática ideal para una historia, pero ambos caerían rendidos, ávidos de conocer el final, dentro de la intangible maraña que rodea las grandes historias.

Nos gusta hablar y debatir sobre el final de las historias, si eran esperados, si nos resultaron sorprendentes, si son merecidos… pero no nos detenemos a pensar en los principios. Son silenciosos y escurridizos, rápidamente quedan ocultos en medio del desenlace. Pero *¿no son los principios los que dan sentido a los finales? ¿Cómo entender una historia sin haber comprendido su comienzo?*

2.1. *"La historia de la historia que olvidó su comienzo".*

Quizá el lector haya oído hablar de las matemáticas, *Matemáticas* es un término que proviene del latín, *mathēmathicalis*, *mathēmaticus,* que a su vez provienen de las voces griegas *mathēmatikos*[1] "inclinado al aprendizaje" *mathēma*[2] "lo que se aprende" y del verbo *manthanein*[3] "aprender". Se atribuye a Pitágoras la acuñación del término, en el siglo VI a. C. Claro que para él, las matemáticas eran una ciencia mucho más amplia de lo que entendemos hoy, incluía toda la ciencia relacionada con la naturaleza, toda la ciencia que *se podía* aprender.

El comienzo de la historia de las matemáticas es verdaderamente prometedor, la historia de lo que se puede aprender. No es éste el lugar ni el momento para contarla con detalle, para adentrarnos en una maraña que nos atraparía durante días, y tampoco es ese el fin de estas líneas, por lo que haremos un breve resumen de la historia[4]:

> *"Durante siglos esa ciencia, que se cobijaba sobre un sólo nombre, que representaba todo aquello que sabíamos sobre la naturaleza, creció. Creció tanto, se hizo tan poderosa, que el nombre "matemática" no fue capaz de contenerla bajo su manto. Entonces la "matemática" creo ramas, se subdividió para contener una cantidad de conocimiento que crecía cada vez más rápido. Y creció hasta alcanzar un punto (que situaremos entre los siglos XIX y XX) en el que la*

[1] *μαθηματικός*
[2] *μάθημα*
[3] *μανθάνω*
[4] *Las historias que aparecen a continuación están basados en fragmentos reales de la historia de las matemáticas que han sido adaptados.*

> *cantidad de conocimiento que albergaba fue tanto y tan diverso que no tuvo más remedio que dejar marchar a algunos de esos grupos que había organizado, los más poderosos, los que habían acumulado el conocimiento suficiente para independizarse (ilustremos algunos ejemplos; la óptica, la estática, la mecánica, la acústica, la hidrodinámica…)…"*

Llegados a este punto de la historia… ¿qué fue de la matemática? ¿Cómo consiguió solventar esa ruptura?

> *"Cuentan las leyendas, que se generó un gran cisma, desde cada uno de los grupos se alzó la voz para redefinir la matemática. Ya no valía con decir que era el compendio de la ciencia natural, pues había otras ciencias que se habían escindido de ella y también reclamaban su lugar. ¡Será la ciencia de la cantidad! – Clamó una voz - ¡Y de la forma! – Se apresuraron a indicar desde un grupo de túnicas oscuras que se hacían llamar "Topología" - ¡No, es la que nos permite decidir sobre la veracidad o falsedad de una proposición! – decía una débil voz escondida detrás de una pancarta en la que se leía "Lógica"… Algunos dicen que el cisma nunca se resolvió, que aún hoy se pueden escuchar las voces que intentan definirla.*

¿Somos los docentes (y futuros docentes) conscientes de qué es eso que enseñamos? ¿Qué matemáticas enseñamos? ¿Son las matemáticas actuales las mismas que hace dos siglos? La matemática sigue actualizándose, en contra de la idea de "*verdades inmutables*"[5] que la rodea, es una ciencia viva que afronta nuevos problemas ¿Por qué seguimos enseñando con métodos de hace siglos?

Hemos convertido una ciencia que nació bajo el auspicio del significado "aprender" en la asignatura que los alumnos menos "aprenden". Los alumnos perciben que se trata de una asignatura elitista, un conocimiento inaccesible, que sólo un pequeño porcentaje de alumnos llegará a comprender con precisión. Para el resto de los alumnos se reduce a una serie de normas sin ninguna aplicabilidad en su entorno, ¿Enseñamos matemáticas para todos? ¿O sólo para unos pocos? ¿Son las matemáticas que enseñamos en la secundaria *"algo para aprender"*? ¿O algo para memorizar y utilizar después, en la Universidad? ¿Y para los que no llegan a ese punto? ¿Hemos olvidado el origen de aquello que enseñamos?

> *"La historia se difumina, parece perderse entre los ecos de aquellos, voces autorizadas en cada una de las ramas, que siguen luchando por definir la madre de las ciencias. Ante el caos reinante, dicen que ya hace tiempo, entre ellos se alzó una voz - ¡No nos olvidemos de transmitir el origen de la matemática!* [6]

---

[5] *PÉREZ SANZ, A. "Historia de la enseñanza de las matemáticas." 2005.*

[6] *PUIG ADAM, Pedro. "Decálogo de la enseñanza de las matemáticas". Punto nº 2: "No olvidar el origen de las matemáticas, ni los procesos históricos de su evolución". 1955.*

2.2. *La historia del idioma que olvidó su función.*

A veces, crecen historias dentro de historias. Algunas son importantes, fuertes, tienen carácter. Se las reconoce como pequeños destellos dentro de la gran historia, el argumento principal continúa pero de pronto te sorprendes a ti mismo preguntándote *¿Qué pasaría con…? ¿Qué fue de aquello que…?* Ahí está, es su comienzo, sólo espera el momento justo para atraparte.

"Nadie sabe muy bien como empieza esta historia, pero todo indica que su comienzo se encuentra en ese cisma sin final que trata de definir la matemática. Escondido en uno de esos valles que se producen en todas las grandes discusiones, ese momento de tensa calma que aprovechan los buenos oradores para coger aire.

¡Un lenguaje poderoso, conciso y sin ambigüedades! [7]*, se oyó decir entre el ruido. Muchos bajaban sus mentones y apretaban los labios, hubo un momento de silencio. Era una tregua.*

Un pequeño grupo se había distanciado del centro del debate, no daba crédito a lo que acababan de escuchar. Se palmeaban los hombros y abrían los ojos con gran sorpresa. ¡Claro! Esa era la razón por la que la matemática era la madre de las demás ciencias, por eso estaba presente en todas las ramas que pretendían dar una explicación de la naturaleza. ¡Era el lenguaje común a todas ellas!

Dicen que después de los sonoros abrazos y los golpes de pecho abandonaron el cisma con un solo anhelo recorriéndoles el cuerpo, debían enseñar ese lenguaje a las futuras generaciones, debían enseñarles ese idioma a todos aquellos interesados en la naturaleza, sólo así serían capaces de apreciarla en toda su perfección.

Pasaron los años, y aquellos que en un principio fueron acogidos entre vítores y grandes bocanadas de aire, empezaron a ser mirados con recelo. Mucha de la gente que un día se agolpaba a las puertas de sus escuelas, dejaron de asistir a las clases que con tanta vehemencia seguían impartiendo aquel grupo que había llegado plagado de promesas sobre la percepción de un mundo extraordinario. Afirmaban, ligeramente avergonzados, que habían aprendido bastantes cosas, realizaban grandes cálculos, hablaban de coordenadas, de números imaginarios, palabras nuevas que asombraban a sus convecinos… pero seguían mirando caer el sol al atardecer sin ver cumplidas sus ansias de conocer y desentrañar los secretos de aquello que los rodeaba.

¿De qué vale aprender un idioma con el que no soy capaz de comunicarme?

[7] *Informe Cockcroft. "Las matemáticas si cuentan". MEC, Madrid. 1985.*

¿Cómo es una clase de matemáticas normal en uno de nuestros centros educativos? Profesores empeñados en que sus alumnos aprendan un temario bajo la promesa de que el dominio de esos conocimientos es útil y necesario para el desarrollo pleno de su vida. Pero ¿cómo enseñamos esos conocimientos, ese idioma que les permitirá ver el mundo con otros ojos?

La enseñanza de las matemáticas ha sido sustentada en dos pilares, *la contemplación y la repetición*[8]. Los alumnos observan al profesor realizar en la pizarra una serie de procedimientos *(clase teórica)* que posteriormente ellos repiten en situaciones acotadas y alejadas de su vida cotidiana *(ejercicios)*. ¿Nos hemos planteado que pasaría si tratásemos de aprender un idioma con ese método? Aprendiendo sólo vocabulario y repitiendo frases y fragmentos de conversaciones alejadas de las que discurren en la realidad. ¿Seríamos capaces de viajar a ese país y entendernos con ese idioma? ¿De qué habría valido nuestro estudio?

Por supuesto que es necesario tener unos conocimientos mínimos pero sobre todo es necesario crear situaciones para comunicarse y razonar en ese nuevo idioma, además de la voluntad intrínseca de hacerlo. En las aulas faltan situaciones generadas para que los alumnos razonen con ese nuevo lenguaje que les ofrecemos. Situaciones que se asemejen a su vida cotidiana, con lo cual no pueden ser las mismas para todos los alumnos, no todas las "vidas cotidianas" son iguales. Y además tienen que ser situaciones motivantes, que animen a los alumnos a enfrentarse a nuevos retos.

En palabras de Miguel de Guzmán *"en los problemas sólo se piensa cuando se está interesado en ellos"*. Los problemas necesitan tiempo, no pueden ser situaciones que se resuelvan de forma inmediata. En el razonamiento y en el esfuerzo se encuentran la motivación y el aprendizaje.

Alerta también *de Guzmán*, de una de las situaciones que más se repiten en las aulas y que más afectan a la motivación de los alumnos, "impartir clases para el nivel que deberían tener los alumnos, y no para el nivel que realmente tienen". Si además de promover un aprendizaje basado en la observación y la repetición, lo hacemos desde un nivel que no es el real de los alumnos, los conocimientos, además de incompletos, quedan desestructurados e inconexos. Ante una docencia así sólo existen dos actitudes por parte del alumno, realizar un grandísimo esfuerzo para solventar todas esas dificultades, *o sentarse a mirar la puesta de sol, completamente desmotivado, sin ser capaz de comprender ese fantástico mundo que le rodea.*

¿Y si muchos de los complejos y bloqueos que sufren los alumnos con las matemáticas, estuviesen provocados por la forma en que aprenden matemáticas?

[8] *DE GUZMÁN, Miguel. "Matemáticas, creatividad y rigor". Cuadernos de pedagogía, nº 291, pg. 44-49. Mayo. 2000.*

Con estas dos pequeñas historias, sólo he querido ilustrar la motivación y las razones que me han llevado a realizar este trabajo.

En primer lugar la creencia de que existe un problema de base en la forma en que se enseña matemáticas en los centros de enseñanza media. Considero que, aunque sean ciertas en una gran parte las quejas de los profesores por la pérdida progresiva de trabajo y disciplina por parte de los alumnos, no pueden ser las únicas culpables de los malos resultados y la mala imagen con la que perciben los alumnos la asignatura. Desde mi propia experiencia personal en los últimos años he podido observar cómo una gran mayoría de los alumnos con los que he tenido contacto memorizan algoritmos y conocimientos aislados, listos para reproducir en ejercicios tipo en días concretos y olvidar casi de manera inmediata, sin ser capaces de hacer una conexión entre esos conocimientos, ni de concebir que tienen otra utilidad, aunque los estén usando de forma inconsciente.

Y por otra parte la esperanza de saber que existe otra manera de enseñar, otra manera de transmitir ese conocimiento matemático. Esperanza surgida principalmente de dos experiencias vividas durante la realización del máster.

La primera de ellas la lectura de un artículo de la revista *Suma*[9] en el que *Fernando Corbalán* y *Miguel de Guzmán*, dialogan sobre algunos de los problemas que presenta la enseñanza de las matemáticas.

> *"Uno de los grandes problemas de la Secundaria es la falta de atención a la motivación y a la heterogeneidad. Hemos extendido la enseñanza hasta los 16 años, que me parece muy bien, pero no hemos hecho casi ningún esfuerzo para adaptarnos a lo que eso implica: que hay muchos alumnos que no les interesan las matemáticas que les damos, ya que no reciben las facetas de las mismas que le pueden interesar como ciudadanos normales, no para ir a estudiar a la universidad, algo que muchos no van a hacer…"*

¿Cómo transmitir a un alumno que de antemano no quiere escuchar lo que le estás diciendo, porque tiene la convicción de que no lo va a utilizar? **MOTIVACIÓN**.

La segunda experiencia se produjo durante la fase práctica del master, donde tuve la oportunidad de coincidir con una profesora de matemáticas *(en módulo bilingüe*) que ante la falta (o desacuerdo) con el material que la oferta editorial ofrecía para la docencia de matemáticas en sección bilingüe, optó por crear su propio material. Ante el inmovilismo y la inercia que ofrece el sistema educativo *(también mencionado por de Guzmán en el artículo)* apostó por otra forma de transmitir dentro de su entorno de influencia, elaborando su propio material y tratando de generar otro tipo de experiencias, más motivadoras, en clase.

> ***"Quien quiere hacer algo encuentra un medio; quien no quiere hacer nada encuentra una excusa."***

[9] *de GUZMÁN, M. "Matemáticas, creatividad y rigor". Cuadernos de pedagogía, nº 291, pg. 44-49. Mayo. 2000.*

3. Los materiales manipulativos en la educación.

3.1. Definición de *"material manipulativo"* en la enseñanza de las matemáticas.

Para definir el concepto de *"material manipulativo"* se realiza un breve recorrido por aquellos autores que, con anterioridad, ya han trabajado con esta idea.

- ***Alsina, Burgués y Fortuny (1988)*** dicen de esos materiales que usamos en el aula de matemáticas que *"son todos los objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos matemáticos".*
- ***Cascallana (1988)*** clasifica estos materiales usados en el aula según la especificidad de su diseño. *"Materiales estructurados son aquellos diseñados especialmente para la enseñanza de las matemáticas. No son figurativos y suponen una mayor capacidad de abstracción, pero son previos al uso exclusivo de los signos numéricos. Los materiales no estructurados son todos los que el niño puede manipular, sin ser necesariamente creado con fines matemáticos, como por ejemplo un juguete".* Es importante la aportación de la palabra *"manipulativo"* como la primera fase para la adquisición de conceptos matemáticos, donde el alumno observa, manipula y opera con objetos, comprobando por sí mismo el resultado de sus acciones.
- ***Carretero, Coriat y Nieto (1995)*** realizan una distinción entre recursos y materiales didácticos en el aula, aunque se observa que son conceptos íntimamente ligados. "*Los recursos son todos aquellos materiales no diseñados específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, como la tiza, el pizarrón, papel, diapositivas, entre otros; en cambio, el material didáctico es diseñado con un fin educativo, aunque un buen material didáctico trasciende la intención original y se le puede dar otros usos".*

- Ya en la actualidad, ***Zoltan P. Dienes****,* afirma en sus trabajos sobre el aprendizaje, que los niños son de natural constructivista más que analítico. Construyen la imagen de la realidad a partir de las interacciones que realizan con el mundo físico. Esta imagen generada depende por tanto de una exploración activa como ponen de manifiesto los trabajos de ***Piaget***. Y muchas de las relaciones matemáticas no son evidentes en el entorno, por tanto Dienes propone la creación de *"materiales de enseñanza que materialicen estas estructuras, y las acerquen al campo de la experiencia concreta".*

No es el objeto ni la intención de este trabajo realizar una distinción profunda de las diferentes acepciones y tipos de materiales que podemos encontrar en el aula. *(Trabajo ya realizado por algunos de los autores mencionados, que proponen distinciones basadas en la funcionalidad, la versatilidad, el formato, el momento de su uso o el tipo de aprendizaje que desarrolla. Véanse [**Cascallana 1988, Corbalán 1998**, **Carretero, Coriat y Nieto 1995** o **González Marí 2010**]).*

Por el contrario, el objetivo de este trabajo profundiza en las posibilidades que aporta cada uno de esos materiales, siendo la variedad de los mismos una oportunidad, una virtud. Apoyándonos en las definiciones anteriormente descriptas, y conjugándolas con la intención propia de este trabajo, tomaremos como definición de ***"material manipulativo"***:

> *"Todo objeto físico tangible, diseñado con un fin didáctico o que pueda ser usado con un fin didáctico por su capacidad de representar conceptos matemáticos, que o bien el alumno pueda tocar directamente con sus manos e intervenir sobre él haciendo modificaciones, o bien sea capaz de transmitir ideas y estructuras matemáticas intangibles mediante la experiencia dirigida."*

3.2. Ventajas e inconvenientes de la utilización de *"materiales manipulativos"*.

El uso de *materiales manipulativos* en el aula ofrece las siguientes ventajas y oportunidades:

- ***Sánchez y Casas (1998)*** señalan como principales las siguientes:
  - Mejora de la actitud de los alumnos hacia las matemáticas. *(Se eliminan los bloqueos iniciales de los alumnos hacia la asignatura.)*
  - Desarrolla la creatividad de los alumnos. *(Se enfrentan a problemas sin solución de antemano aplicando un algoritmo.)*
  - Desarrolla estrategias para resolver problemas. *(El alumno necesita relacionar sus conocimientos matemáticos, no sólo reproducirlos.)*
  - Aprovechar el error como fuente de aprendizaje. *(El error en un entorno donde no sea origen de penalizaciones.)*
- El profesor ***González Marí (2010)*** señala su gran interés en los siguientes puntos:
  - Permiten modelizar conceptos e ideas matemáticos. *(Por tanto se pueden analizar sus propiedades y facilitar el paso a la abstracción).*
  - Permiten crear actividades matemáticas estimulantes. *(También para aquellos alumnos que encuentran las clases tradicionales áridas y sin interés debido a una capacidad alta).*

  - Favorecen la autonomía. *(Permiten que los alumnos experimenten y desarrollen sus capacidades de trabajo autónomo).*
  - Permiten también el trabajo en grupo. *(Se fomenta el diálogo, el debate y la colaboración entre alumnos y entre alumnos y profesor).*
  - Son buenos instrumentos para diagnosticar y evaluar la comprensión de los conocimientos. *(Y los alumnos no lo perciben de forma punitiva ni estresante, a diferencia de los exámenes).*

El uso de *materiales manipulativos* en el aula también presenta dificultades y limitaciones:

- ***Sánchez y Casas (1998)*** señalan como principales las siguientes:
  - Problemas organizativos. *(Espacio, ruido, creación de grupos…)*
  - Los profesores no se encuentran cómodos ni seguros. *(Incomprensión por parte de los padres y del centro, presión de los programas, dificultades de evaluación a corto plazo, necesidad de trabajo extra a realizar…)*
  - Escasa cantidad de materiales *(Reducción de la experiencia a un número pequeño de alumnos o imposibilidad de llevarla a cabo)*
- ***Coriat, Cañizares y Alsina (Castro, 2007)*** añaden algunos errores que pueden resultar del uso de materiales manipulativos en el aula, sobre todo en el campo de la geometría.
  - Sofisticación del material *(Complejidad del material)*
  - Utilización del material por el profesor y no por el alumno *(Interacción nula por parte del alumno)*
  - Creer que la presencia del material ya asegura la adquisición del concepto *(Falta de acompañamiento teórico en la actividad)*
  - La no adecuación del concepto presentado con el material *(Mala selección de materiales)*
- Por último, el profesor ***González Marí (2010)***, además de algunas de las anteriores señala:
  - Motivos económicos. *(material caro de comprar, o demasiado tiempo gastado en el aula para su construcción)*

Conociendo las principales ventajas y limitaciones que ofrece el uso de *materiales manipulativos*, es objeto del presente trabajo buscar una propuesta capaz de aprovechar las primeras y minimizar el impacto de las segundas.

3.3. Uso de materiales manipulativos en las matemáticas. Visión histórica.

A pesar de la situación actual en la enseñanza de las matemáticas, basada en la observación y la repetición *(a la que se ha visto empujada por algunas de las limitaciones expuestas en el punto anterior)*, el uso de los materiales manipulativos posee una fuerte tradición en el mundo de las matemáticas.

Sin olvidar la referencia a la bucólica imagen de Platón dando sus primeras lecciones de geometría dibujando en la arena, existen multitud de referencias que tratan de utilizar objetos e imágenes para transmitir ideas y conceptos abstractos en las matemáticas. A continuación se presenta un pequeño recorrido cronológico a través de aquellos que compartieron la idea de que era posible transmitir las matemáticas de otra manera.

3.3.1. La visualización como recurso.

"No hay que describir los objetos, sino mostrarlos. Es preciso presentar todas las cosas, en la medida en que sea factible, a los sentidos correspondientes; que el alumno aprenda a conocer las cosas visibles por la vista, los sonidos por el oído, los olores por el olfato..." [10]

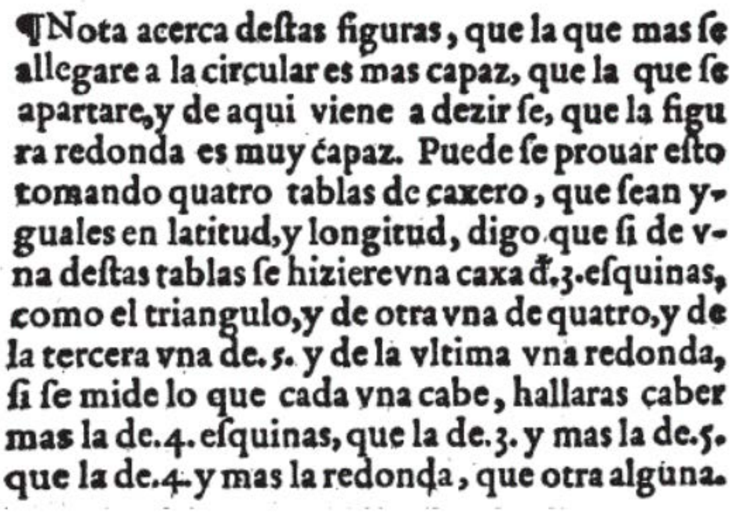
Son palabras publicadas por el pedagogo checo ***Jan Amos Komenský (1592-1670)*** refiriéndose a cómo debía ser la enseñanza en la escuela. Fue durante la tradición filosófica empirista de los siglos XVII y XVIII donde se sitúa el origen de material didáctico como recurso de enseñanza, pero con anterioridad a sus primeras formalizaciones, podemos encontrar referencias a la "visualización" de conceptos en textos matemáticos. No sólo de visualizar conceptos geométricos, sino de utilizar la geometría para visualizar conceptos algebraicos o aritméticos.

- ***Siglo XII.*** *Bhaskara II (1114-1185),* en su libro sobre aritmética *"Lilavati" ("la que posee diversión"),* ofrece una deducción geométrica (visual) que permite calcular la suma de "n" términos consecutivos de una progresión geométrica de razón 4, aunque el procedimiento es fácilmente generalizable a cualquier valor. [11] [12]
- ***1562.*** *Juan Pérez de Moya (1513-1597)* en su obra *"Arithmetica practica, y specvlatiua",* anima al lector a realizar una construcción por sí mismo (a crear su propio material manipulativo) para verificar la desigualdad isoperimétrica, cuya demostración analítica es sumamente compleja a pesar de resultar sencilla de enunciar.

[10] *GONZÁLEZ MARÍ, J. L. "Recursos, material didáctico y juegos y pasatiempos: Consideraciones generales." 2010.*

[11] *MEAVILLA SEGUÍ, V. y OLLER MARCÉN, A.M. "Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos". Revista de didáctica de las matemáticas "Números". Vol. 82. Pg. 89-100. 2013.*

[12] *de GUZMÁN, M. "Mirar y ver. Demostraciones Visuales.". Editorial Nivola. 2004.*

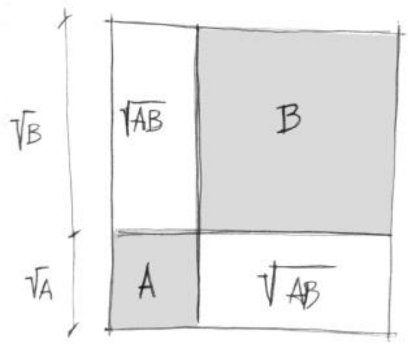


¶Nota acerca deſtas figuras, que la que mas ſe
allegare a la circular es mas capaz, que la que ſe
apartare, y de aqui viene a dezir ſe, que la figu
ra redonda es muy capaz. Puede ſe prouar eſto
tomando quatro tablas de caxero, que ſean y-
guales en latitud, y longitud, digo que ſi de v-
na deſtas tablas ſe hiziere vna caxa đ.3.eſquinas,
como el triangulo, y de otra vna de quatro, y de
la tercera vna de.5. y de la vltima vna redonda,
ſi ſe mide lo que cada vna cabe, hallaras caber
mas la de.4. eſquinas, que la de.3. y mas la de.5.
que la de.4. y mas la redonda, que otra alguna.

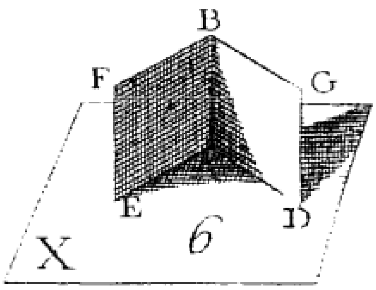
Texto original de *"Arithmetica practica, y specvlatiua"* [13]

- ***1567.*** *Pedro Núñez (1502-1578)* en su obra *"Libro de Algebra en Arithmetica y Geometría",* realiza una demostración gráfica, acompañada de una explicación detallada de la creación del gráfico, de la expresión:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{A+B+2\sqrt{AB}}$$



- ***1741.*** Como último ejemplo, y ya cercano a la formalización que encabezará Rousseau, *Alexis Claude Clairaut* en su obra *"Élémens de géométrie"* hace ya uso de un sencillo material didáctico para ilustrar las condiciones que debe cumplir una recta para ser perpendicular a un plano.



"Con alguna materia lisa y fácil de plegar, como cartón, se construye un rectángulo FGDE dividido en dos partes iguales por la recta AB perpendicular a los lados ED y FG.

A continuación, se pliega este rectángulo a lo largo de la línea AB, y se coloca el rectángulo doblado sobre el plano X."

Transcripción original del texto [12]

[13] *MEAVILLA SEGUÍ, V. y OLLER MARCÉN, A.M. "Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos". Revista de didáctica de las matemáticas "Números". Vol. 82. Pg. 89-100. 2013.*

3.3.2. Las bases del aprendizaje mediante manipulación.

La madurez en la tradición filosófica empirista en el siglo XVIII sienta las bases de la utilización de materiales didácticos en la enseñanza de las matemáticas. *Rousseau* fue el primero en formalizar estas ideas.

- ***1762.*** *Jean-Jacques Rousseau (1712-1778)* publica *"Émile, ou de L'Éducation"* donde, en su propuesta de sistema educativo, habla del "aprendizaje por experimentación" y la "educación sensorial".

  > *"Que el niño conozca todas las experiencias, que haga todas aquellas que están a su alcance, y que descubra las demás por inducción. Pero, en caso de que sea preciso decírselas, prefiero mil veces que las ignore."*
  >
  > *"Antes de la edad de la razón, el niño no percibe ideas, sino imágenes. Siendo sus sensaciones los primeros materiales de su conocimiento, ofrecérselas en un orden conveniente es preparar su memoria... aprende a sentir mirando, palpando, escuchando, y sobre todo comparando la vista con el tacto..."*
  >
  > *(Transcripción, Emilio, Libro 1)* [14]

- ***1830 aprox.*** *Jean Marc Gaspard Itard (1774-1838)* y *Eduardo Séguin (1812-1880)* son los primeros en aplicar directamente los principios empiristas. Médico y pedagogo, Itard, convence a su exalumno y también médico Séguin para dedicarse a la educación de niños mentalmente discapacitados, llegando a crear la primera escuela dedicada a este tipo de educación. Antes de eso, ambos trabajando juntos en el hospicio de *Bicetre*, donde desarrollan un método basado en el trabajo con materiales didácticos para la educación de niños discapacitados (principalmente sordos), a través de la educación de los sentidos.

  > *"A fin de desarrollar el tacto en un niño idiota, basta a menudo con proporcionarle cuerpos para palpar, sin que pueda él distinguidos de otro modo que no sea por el tacto".* [12]

- ***1840 aprox.*** *Friedrich Fröbel (1782-1850)* pedagogo alemán creador del concepto de *"jardín de infancia"*, desarrolla un método educativo basado en la experimentación directa con materiales, los cuales iban complejizándose en los distintos niveles. Se conocen como *"dones"* o *"regalos"* y son 13 conjuntos de "juguetes". Empiezan con una esfera de lana y van avanzando, con el uso de cilindros, cubos o incluso descomposiciones de los mismos. En los últimos "dones", juegos de hilos y pequeños objetos permiten al niño elaborar sus propias formas.

[14] *GONZÁLEZ MARÍ, J. L. "Recursos, material didáctico y juegos y pasatiempos: Consideraciones generales." 2010.*

- ***1912 aprox.*** *María Montesori (1870-1952)* educadora-pedagoga-medico-filosofa italiana recoge los trabajos de *Seguin e Itard*. Aunque comienza trabajando con niños discapacitados, generaliza los métodos para su uso a cualquier niño de jardín de infancia. Muchos de los materiales educativos y juguetes para niños que actualmente fabrica la industria se deben a sus trabajos. En su momento, sus ideas tuvieron un gran impacto, a pesar de que hoy en día se consideran evidentes. Entre su legado en forma de material didáctico destacan:
  - ***Regletas.*** Para el trabajo de aritmética elemental.
  - ***Material para trabajar sistemas de numeración.*** Formado por grupos apilables de perlas y bastones. Este material es posteriormente desarrollado por el matemático inglés Dienes, y actualmente conocido como *"bloques multi-base"*.
  - ***Material para geometría,*** entre el que destacan sus rompecabezas geométricos para probar el teorema de Pitágoras. Su material sobre geometría será recogido posteriormente por ***Emma Castelnuovo***, matemática italiana que continua desarrollando material didáctico para la enseñanza de conceptos de geometría, como los *geoplanos*, los *geoespacios* o las *varillas móviles*, para trabajar en dos y tres dimensiones.

3.3.3. El siglo XX y la evolución del pasatiempo para adultos.[15]

El siglo XX es el siglo donde definitivamente se desarrolla la idea de que se pueden transmitir conceptos matemáticos complejos en las aulas, a través de materiales e imágenes.

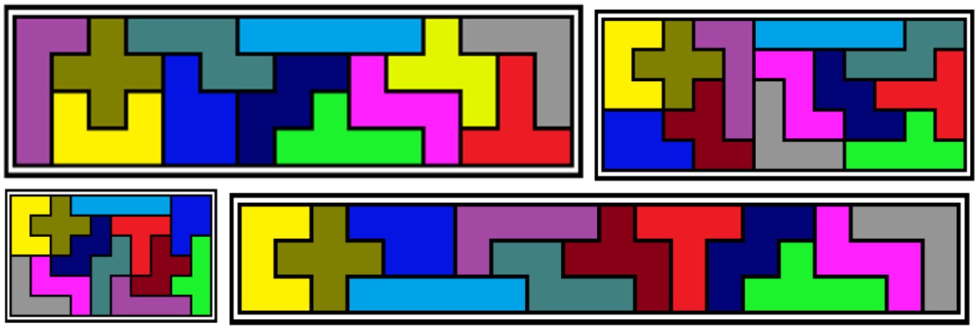
- ***1900-1950.*** De forma paralela a los trabajos de ***Montesori***, el siglo comienza con páginas de periódicos y revistas donde personajes como ***Hogben, Loyd, Malba, Dudeney o Martin Gardner***, presentaban una nueva idea de lo que las matemáticas eran capaces, ser recreativas. Enigmas y problemas aparecían a modo de pasatiempo, pero esta vez para adultos.

  ¿Cuántas piezas formadas por cuatro cuadraditos unidos por al menos un lado común se pueden hacer? ¿Y con cinco cuadraditos? ¿Podemos coger todas esas piezas y formar un rectángulo?

  Preguntas tan sencillas como ésta, planteada por ***Dudeney*** en ***1909***, dan lugar a razonamientos combinatorios y llegan incluso a convertirse en juegos de madera populares como el ***"Pentominó",*** con el que un niño

[15] *GIMENEZ, J. "La importancia de lo tangible para el aula de las matemáticas". Revista de didáctica de las matemáticas "Números". Vol. 43-44. Pg. 47-52. 2000.*

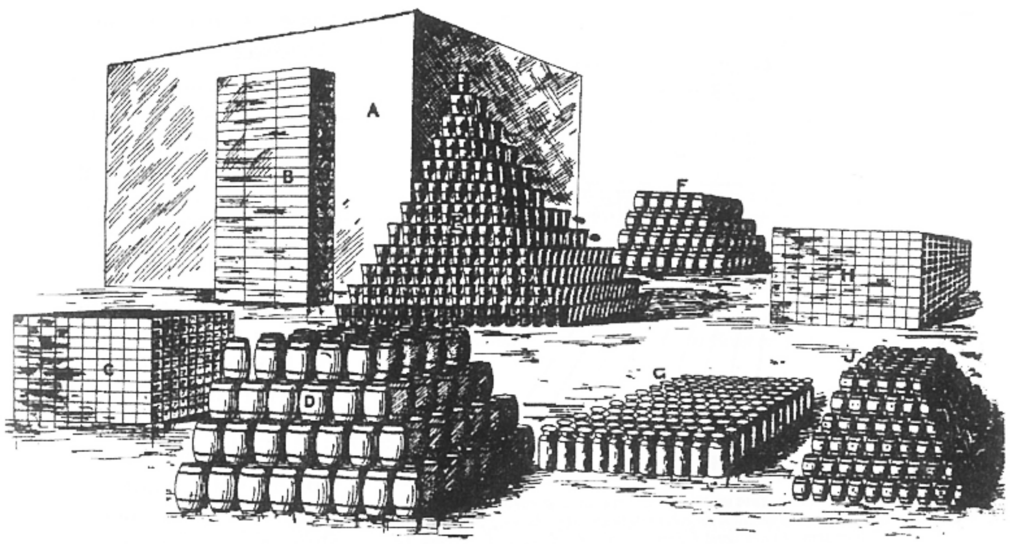
puede resolver estas preguntas. Incluso serán recogidos posteriormente a finales de siglo con la llegaba de los videojuegos, dando lugar al famoso videojuego ***"Tetris"***



Algunas de las posibles combinaciones que ofrece el "Pentominó"

Mientras florece la matemática recreativa en los diarios, y se desarrollan los métodos de ***Fröebel*** y ***Montesori*** para niños, los libros de enseñanza escolar experimentan un avance más lento. Se propone el uso de algunos materiales manipulativos sencillos, sobre todo para el trabajo de geometría o para sencillas demostraciones como la del teorema de Pitágoras. En lo que sí se produce un avance es en el campo visual, la utilización de imágenes para estimular el aprendizaje.

Uno de los ejemplos es el libro ***"Aritmética inventiva de Appleton"*** escrita por ***E. Nelson*** en ***1906***.



PROVISIONES DE UN TRANSATLÁNTICO

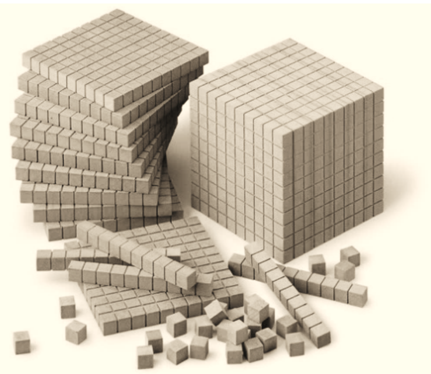
A, Depósito de agua potable. B, Cajas de huevos. C, Panes de hielo. D, Barriles de patatas. E, Canastas de legumbres y frutas. F, Barriles de harina. G, Tarros de leche. H, Cajones de vino embotellado. J, Barriles de cerveza.

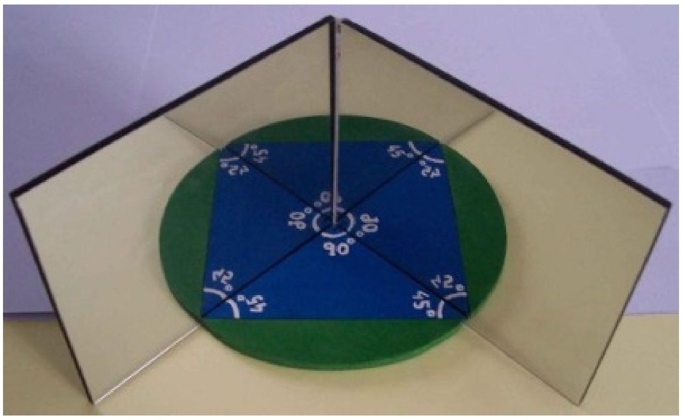
Ilustración original de Aritmética inventiva de Appleton, de E. Neson, 1906, pg. 135

- ***1950 -1970.*** El empujón definitivo se produce con la divulgación por parte del ***CIEAEM*** *(Comisión internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las matemáticas)* de recursos y materiales para la enseñanza de las matemáticas, considerándolo como una forma de promover y expandir el método científico.

  El uso de material manipulativo en las aulas se populariza. Crece el número de investigadores que abogan por el uso de este tipo de materiales didácticos por su capacidad para ilustrar fenómenos, identificar contenidos, representar relaciones… Algunos de los más destacados son:

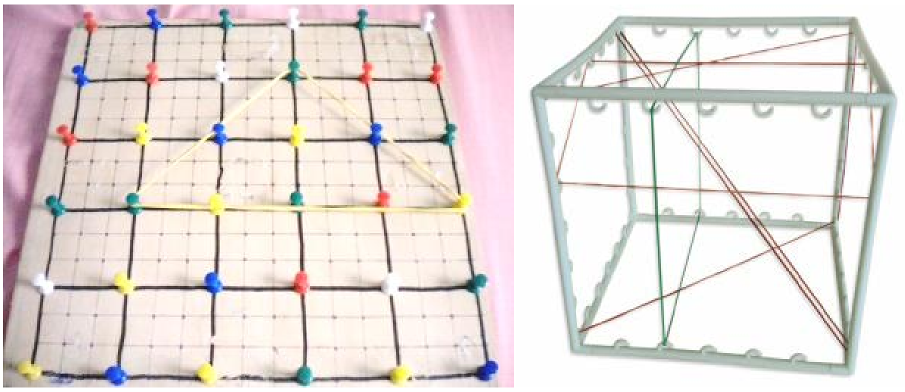
  - ***Puig Adam.*** Una de sus aportaciones más originales, la actividad conocida como: *¿Cómo trazar con los ojos cerrados la mediatriz de un segmento?*
  - ***Zoltan Dienes.*** Dedica toda su vida a la creación de materiales para la enseñanza de las matemáticas. Algunos de los más relevantes, los ***bloques multi-base*** para la comprensión del sistema de numeración decimal y las operaciones fundamentales, los ***bloque lógicos*** para la comprensión temprana de formas y tamaños o el ***libro-espejo*** que permite la visualización de imágenes.





De izq. a der.: Bloques multi-base, bloques lógicos y libro espejo.

- ***Emma Castelnuovo,*** y su trabajo, ya mencionado, sobre geometría a través de las construcciones de *Geoplanos* y *Geoespacios*.



Geoplano y geoespacio de construcción sencilla en el aula con un tablero, barras y chinchetas.

- ***1970-Actualidad.*** La aparición del ordenador y de programas como ***CABRI o GEOGEBRA*** aportan nuevos tipos de manipulación, que ofrecen mecanismos y provocan estrategias diferentes en el alumno. Toda vez que los materiales manipulativos habían conseguido ganar la batalla por establecerse como impulsores de aprendizaje en el aula, actualmente el debate se ha trasladado a la confrontación entre actividades manipulativas clásicas o actividades manipulativas digitales.

  En los últimos años es especialmente destacable el amplio y riguroso trabajo realizado por diferentes grupos de profesores en nuestro país que se dedican a la construcción, análisis y difusión de diferentes actividades de este tipo, como el Grupo Cero (Valencia), Grupo Alquerque (Sevilla) y Grupo Azarquiel (Madrid), entre otros.

4. Proyecto. *"Glosario de actividades. 3º ESO."*

4.1. Presentación del proyecto.

El presente proyecto nace con la intención de dotar al profesorado de Secundaria de Matemáticas de material didáctico que le permita alcanzar los objetivos que se estipulan en la ley de educación *(se utilizan los objetivos desarrollados en el BoCyL en este caso, por presentarse este proyecto dentro de la jurisdicción de la Junta de Castilla y León)* de una forma diferente, motivadora y atractiva para los alumnos y para el propio profesor.

Como se ha presentado en el capítulo anterior, el uso de materiales didácticos que permitan a los alumnos experimentar y percibir las matemáticas de una forma manipulativa, no es algo estrictamente novedoso. Durante los últimos años, ilustres pedagogos y matemáticos se han volcado en la tarea de producir este tipo de materiales. ***Puig Adam***, ***Corbalán*** o ***de Guzmán*** a nivel nacional o desde ***Froëbel*** hasta ***Z. Dienes*** pasando por ***Montesori*** o ***Castelnuovo*** a nivel internacional entre otros, nos han provisto de una gran cantidad de materiales, experiencias y actividades para fomentar un aprendizaje diferente en las aulas.

Estos materiales, han sido diseñados en su mayoría para enfrentar retos específicos: *exposición de teoremas de forma visual, comprensión de un concepto concreto…* Se trata de diseños aislados entre sí, que no han sido concebidos con una visión integradora de utilización conjunta. Se corresponden con áreas de las matemáticas, no con áreas de un proyecto educativo.

Dentro de las clasificaciones de estos materiales existentes, ***Corbalán***[16] publica una compilación de este tipo de actividades para su uso en ESO y Bachillerato. Una de las divisiones que propone reparte las actividades en función del área matemática a la que corresponden (Geometría, Algebra, Probabilidad, Aritmética…). Las actividades aparecen abiertas en cuanto a su nivel y se ofrece una orientación de uso que varía en 2-5 cursos de media. Este hecho, aunque ofrece otras posibilidades, dificulta su implantación directa, al ser necesario un trabajo previo de adecuación a los objetivos perseguidos en ese curso concreto.

Con este trabajo se pretende realizar en primer lugar una recopilación de materiales *(modificación o creación propia en algunos casos)* y en segundo lugar, y más importante, una equivalencia con los objetivos que deben perseguirse en un curso completo. De este modo se pretende realizar un compendio de actividades de fácil implantación directa en el aula.

El curso escogido es 3º ESO (se escoge sólo un curso por motivos de tiempo y recursos disponibles).

[16] CORBALÁN, Fernando. "Juegos Matemáticos para secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998.

4.2. Objetivos del proyecto.

Los objetivos que se persiguen con el desarrollo de este proyecto son:

O1. Crear un compendio de actividades, juegos, experiencias y materiales didácticos para su uso directo en un aula de ***3º E.S.O.*** en el desarrollo del aprendizaje de matemáticas.

O2. Ofrecer actividades, experiencias y materiales manipulativos, que puedan ser usados en el aula, con independencia de las condiciones generales del centro o el libro de texto elegido desde el departamento de Matemáticas.

O3. Desarrollar la totalidad de los contenidos expuestos en el ***BoCyL***[17] para el curso de ***3º de la E.S.O.*** en la asignatura de ***Matemáticas***, utilizando actividades, experiencias y materiales, no convencionales, de modo que se pueda recurrir a ellas en cualquier momento del curso.

O4. Ofrecer actividades, experiencias y materiales manipulativos, que puedan ser usados en el aula en convivencia con otras técnicas de enseñanza, seleccionando actividades que puedan desarrollarse de modo *pre-instruccional*, *post-instruccional* o de forma *independiente*.

O5. Ofrecer actividades, experiencias y materiales manipulativos que modelicen conceptos matemáticos, para facilitar su comprensión a los alumnos.

O6. Ofrecer actividades, experiencias y materiales manipulativos que mejoren la actitud de los alumnos en el aula de matemáticas.

O7. Ofrecer actividades, experiencias y materiales manipulativos que traten de vencer los bloqueos y fobias iniciales que los alumnos presentan en relación a la asignatura de matemáticas.

O8. Ofrecer actividades, experiencias y materiales manipulativos que permitan evaluar la adquisición de conceptos matemáticos de forma no punitiva.

O9. Ofrecer actividades, experiencias y materiales manipulativos que puedan llevarse a cabo en el aula sin la necesidad de realizar una fuerte inversión económica por parte del centro, ni presentar complejidad de uso.

O10. Ofrecer actividades, experiencias y materiales manipulativos que puedan ser realizados, experimentados o manipulados de forma conjunta o simultánea por alumnos y profesor.

[17] *DECRETO 52/2007, de 17 de mayo; por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León*

4.3. Contenidos del currículo de 3º de la E.S.O. según el BoCyL. *(Decreto 52/2007)*

Se han seleccionado los objetivos para la asignatura de ***Matemáticas*** en el curso de ***3º de la E.S.O.*** y se han etiquetado para una posterior referencia a ellos de manera cómoda.

1. CONTENIDOS COMUNES.

1.1. *Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas, tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada.*

1.2. *Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales y de procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa.*

1.3. *Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o simbólico o sobre elementos o relaciones espaciales.*

1.4. *Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.*

1.5. *Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.*

1.6. *Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.*

2. NÚMEROS.

2.1. *Números racionales. Comparación, ordenación y representación sobre la recta real.*

2.2. *Decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Decimales exactos y decimales periódicos. Fracción generatriz.*

2.3. *Operaciones con fracciones y decimales. Jerarquía de las operaciones y uso del paréntesis.*

2.4. *Potencias de base racional y exponente entero. Significado y propiedades. Su aplicación para la expresión de números muy grandes y muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. Uso de la calculadora.*

2.5. *Aproximaciones y errores. Cifras significativas. Error absoluto y error relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada.*

2.6. *Resolución de problemas en los que interviene la proporcionalidad directa o inversa. Repartos proporcionales.*

2.7. *Interés simple. Porcentajes encadenados.*

3. ÁLGEBRA.

3.1. *Sucesiones de números enteros y fraccionarios. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.*

3.2. *Estudio de las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.*

3.3. *Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.*

3.4. *Polinomios. Valor numérico. Operaciones elementales con polinomios. Identidades notables. Ceros de un polinomio.*

3.5. *Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.*

3.6. *Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado. Soluciones exactas y aproximaciones decimales. Propiedades de las raíces.*

3.7. *Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación crítica de las soluciones.*

4. GEOMETRÍA.

4.1. *Revisión de la geometría del plano.*

4.2. *Lugar geométrico. Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades.*

4.3. *Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales.*

4.4. *Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.*

4.5. *Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.*

4.6. *Revisión de la geometría del espacio.*

4.7. *Planos de simetría en los poliedros.*

4.8. *Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas. El cilindro y el cono.*

4.9. *Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.*

4.10. *La esfera. Intersecciones de planos y esferas. El globo terráqueo. Coordenadas terrestres y husos horarios. Longitud y latitud de un lugar. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados.*

4.11. *Estudio de formas, configuraciones y relaciones geométricas.*

4.12. *Cálculo de áreas y volúmenes.*

5. FUNCIONES Y GRÁFICAS.

5.1. *Relaciones funcionales. Distintas formas de expresar una función.*

5.2. *Construcción de tablas de valores a partir de enunciados, expresiones algebraicas o gráficas sencillas.*

5.3. *Elaboración de gráficas continuas o discontinuas a partir de un enunciado, una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla.*

5.4. *Estudio gráfico de una función: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, simetrías, continuidad y periodicidad. Análisis y descripción de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano. Uso de las tecnologías de la información para el análisis y reconocimiento de propiedades de funciones.*

5.5. *Formulación de conjeturas sobre el fenómeno representado por una gráfica y sobre su expresión algebraica.*

5.6. *Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes, lineales y afines. Distintas formas de representar la ecuación de una recta.*

5.7. *Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.*

6. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD.

6.1. *Estadística descriptiva unidimensional. Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales. Variables discretas y continuas.*

6.2. *Interpretación de tablas de frecuencias y gráficos estadísticos.*

6.3. *Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias.*

6.4. *Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.*

6.5. *Descripción de datos cuantitativos. Parámetros de centralización: media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones.*

6.6. *Descripción de datos cuantitativos. Parámetros de dispersión: rango y desviación típica.*

6.7. *Utilización conjunta de la media y la desviación típica.*

6.8. *Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Análisis y crítica de la información de índole estadístico y de su presentación.*

6.9. *Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.*

6.10. *Experimentos aleatorios. Sucesos y espacio muestral. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.*

6.11. *Frecuencia y probabilidad de un suceso. Cálculo de probabilidades mediante la Ley de Laplace.*

6.12. *Cálculo de la probabilidad mediante simulación o experimentación.*

6.13. *Formulación y verificación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.*

6.14. *Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentada en diferentes contextos. Reconocimiento y valoración de las Matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.*

Lo objetivos 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, no son trabajados con materiales manipulativos durante este trabajo, por la dificultad encontrada para ello y por considerar que son conceptos que pueden trabajarse mejor con elementos visuales.

4.4. Distribución de los contenidos durante un curso en Unidades didácticas.

Los contenidos, expuestos en el punto anterior, se distribuyen en unidades didácticas, siguiendo como modelo los libros de texto actuales, donde la gran mayoría de ellos coinciden tanto en el número de unidades didácticas como en los contenidos de cada una de ellas. De esta forma, las actividades planteadas, son referenciadas a temas concretos y objetivos definidos, facilitando así su ubicación en el curso

1. *Fracciones y números racionales*
2. *Polinomios*
3. *Ecuaciones (1º y 2º grado)*
4. *Sistemas de ecuaciones*
5. *Sucesiones*
6. *Gráficas y funciones*
7. *Análisis de funciones.*
8. *Geometría plana y áreas*
9. *Traslaciones, giros y simetría*
10. *Elementos del espacio*
11. *Áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos*
12. *Estadística*
13. *Probabilidad*

4.5. Tipos de actividades planteadas.

Como ha sido expuesto con anterioridad, no es objeto de este trabajo realizar una profunda y extensa taxonomía sobre materiales didácticos en el aula. Detrás de este trabajo se encuentra un esfuerzo por introducir otra manera de transmitir las matemáticas, la creencia de que en cualquier día de clase, independientemente del tópico matemático que se esté tratando, puede producirse un ambiente lúdico dónde la tensión propia del descubrimiento, haga de vía transmisora de ese conocimiento.

Para favorecer la introducción de estas actividades en el aula por parte del docente, se categorizan en 4 tipos que responden a momentos y objetivos precisos dentro del aula.

- **Tipo 1. *Experiencias pre-instruccionales para introducir conceptos.***

  Aquí *experiencia* se refiere a una situación generada en el aula, en la que el alumno, a través de una experimentación directa *(no relatada por el profesor)*, es capaz de formarse un esquema pre-formal de un concepto matemático abstracto o complejo que posteriormente será desarrollado.

  Estas experiencias pueden incluir trabajo sensorial o social-cognitivo, es decir, pueden requerir que el alumno obtenga información a través de la experimentación directa con objetos, o a través de la experimentación de situaciones sociales junto con el resto de sus compañeros. Su propio descubrimiento de nuevos patrones o información relevante, sirve de base y motivación para la formalización posterior.

- **Tipo 2. *Juegos de conocimientos*[18] *pre-instruccionales para introducir conceptos.***

  La categoría *juegos de conocimientos* hace referencia a juegos que tienen un objetivo muy marcado dentro de un área de conocimientos definido, geometría, probabilidad, álgebra… Se incluyen en esta categoría, las actividades lúdicas que, apoyándose en la motivación generada por la competencia entre alumnos, permiten a los mismos extraer de primera mano una visión de conceptos matemáticos.

  Son juegos donde no sólo importa ganar, sino también cómo se gana, el objetivo del juego es la reflexión del alumno. En la búsqueda de una estrategia ganadora se encuentran esos conocimientos que se quieren introducir.

- **Tipo 3. *Juegos post-instruccionales para afianzar conceptos.***

  En este caso se trata de actividades lúdicas, que de una manera activa y motivadora ayudan al alumno a consolidar conocimientos que ya han sido formalizados en clase. En las instrucciones o reglas de juego, está indicado que tipo de conocimiento *(y en algunos casos incluso de qué modo)* debe ser aplicado. El objetivo no es que el alumno *descubra*, sino que practique.

- **Tipo 4. *Juegos de estrategia para reflexionar e incentivar la curiosidad matemática. Pueden ser pre, post o co-instruccionales.***

  Aquí se sitúan las actividades más completas para los alumnos, pero también las más difíciles de llevar a cabo de manera satisfactoria. Son actividades que no tienen ninguna indicación directa u obvia, del tipo de

[18] *CORBALÁN, Fernando. "Juegos Matemáticos para secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998.*

conocimiento que deben aplicar, ni del procedimiento adecuado. Favorecen el entrenamiento en resolución de problemas y desarrollan el pensamiento matemático. No tienen una ubicación fija dentro del proceso de enseñanza, y pueden llevarse a cabo antes, después o de forma simultánea a la formalización de los conocimientos.

Su aplicación en el aula requiere de una planificación pormenorizada. Los alumnos suelen recibirlos con entusiasmo pero la aplicación directa *(¿Para qué estamos haciendo esto?)* suele ser confusa tanto para alumnos como para padres. Para evitar esa sensación de pérdida de tiempo, es importante dejar claro a los alumnos en algún momento de la actividad, los objetivos que estamos persiguiendo con ella.

4.6. Fichas descriptivas de las actividades.

4.6.1. Índice de fichas por Unidades didácticas.

Unidad didáctica	**Nº de Ficha**
1. Fracciones y núm. racionales	*01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11*
2. Polinomios	*12, 13, 14*
3. Ecuaciones (1º y 2º grado)	*15, 16, 17*
4. Sistemas de ecuaciones	*15, 16, 17*
5. Sucesiones	*18, 19, 20*
6. Gráficas y funciones	*20, 21, 22, 23*
7. Análisis de funciones.	*22, 23, 24*
8. Geometría plana y áreas	*25, 26, 27, 28, 29, 30, 36*
9. Traslaciones, giros y simetría	*31, 32, 36*
10. Elementos del espacio	*32, 33, 34, 35, 36*
11. Áreas y volúmenes.	*36, 37*
12. Estadística	*38, 39, 40, 41, 42*
13. Probabilidad	*38, 39, 40, 41, 42*

4.6.2. Índice de fichas por Objetivos.

Objetivo	Nº de Fichas
1.1	*01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 1 2, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23 30, 33, 38*
1.2	*01, 03, 04, 08, 09, 10, 11, 12, 16, 18, 19, 20, 21, 25, 26, 28, 29, 35, 36, 37*
1.3	*01, 03, 04, 08, 10, 12, 13, 15, 16, 20, 26, 23, 24, 30, 33*
1.4	*01, 02, 03, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38,*
1.5	*01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 23, 25, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38*
1.6	*05, 06, 07, 09*
2.1	*01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 12*
2.2	*01, 03, 04, 07, 10*
2.3	*01, 03, 04, 05, 06, 07, 10*
2.4	*07, 09*
2.5	*07, 09*
2.6	*11*
2.7	*10*
3.1	*12, 18, 19, 20*
3.2	*12, 14, 18, 19, 20*
3.3	*12, 18, 19, 20*
3.4	*12, 13, 14*
3.5	*15, 16, 17*
3.6	*15, 17*
3.7	*16, 17*
4.1	*25, 26, 27, 28, 29, 30, 33,*
4.2	*25, 26, 27, 33,*
4.3	*28, 33*

4.4	*28, 29*
4.5	*29, 30, 31, 33, 35*
4.6	*32, 33, 34, 36, 37*
4.7	*34, 36*
4.8	*32, 33, 35*
4.9	*31*
4.10	*33, 34*
4.11	*25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37*
4.12	*29, 30, 36, 37*
5.1	*20, 21, 22, 23, 24*
5.2	*20, 21, 23*
5.3	*20, 21, 23*
5.4	*22, 24*
5.5	*20*
5.6	*22, 23*
5.7	*24*
6.1	*38, 39, 40, 41, 42*
6.2	*38, 39, 40, 41, 42*
6.3	*38, 39, 40, 41, 42*
6.4	*38, 39, 40, 41, 42*
6.5	*38, 39, 40, 41, 42*
6.10	*38, 39, 40, 41, 42*
6.11	*38, 39, 40, 41, 42*
6.12	*38, 39, 40, 41, 42*
6.13	*38, 39, 40, 41, 42*
6.14	*38, 39, 40, 41, 42*

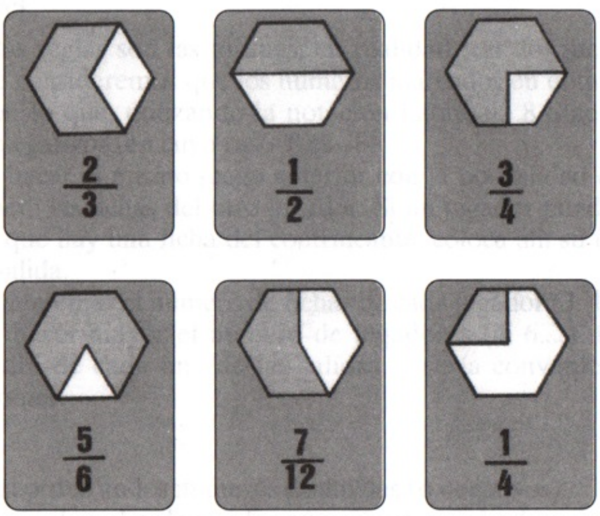
Ficha: *01*	**Título**: *"Escoba fraccionada"*	**Tema:** 1 *"Fracciones"* / **Tipo:** *3*
Jugadores: 3 a 5	**Objetivos:** *1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 – 2.1, 2.2, 2.3*	

Referencia: *ANTOLÍN, J.; CORBALÁN, F. y GAIRIN J. M. Materiales matemáticos. MAT-MAT (Universidad Autónoma de Barcelona). 1987*

Material necesario: *Baraja de Cartas. 48 cartas. 9 cartas de 1/12, 6 cartas de 1/6, 1/4, 1/3 y 3 cartas de 5/12, 1/2, 7/12, 2/3, 3/4, 5/6, 11/12*

Reglas del juego: *Cada jugador recibe dos cartas, colocándose cuatro más sobre la mesa. Por turnos, el objetivo es, utilizando una de las cartas y el número que se desee de las que están encima de la mesa, conseguir sumar 1. En caso de lograr esa combinación, se recogen las cartas de la mesa que junto a la propia sumen 1. Cada jugador coloca todas ellas en su montón. En caso de no poderse o no encontrar ninguna combinación que sume 1, el jugador deja una de sus cartas sobre la mesa. Cuando los jugadores se queden sin cartas, se reparten dos más para cada jugador hasta terminar todas las cartas.*
El juego finaliza cuando no queden cartas que repartir y los jugadores no tengan cartas en la mano. Las cartas que queden encima de la mesa, no son para ningún jugador. Gana el jugador que más cartas tenga en su motón.

Cartas utilizadas



Variantes: *Modificación del valor de las puntuaciones. Se pueden dar puntos extra por tener ciertas cartas más difíciles de unir. También se pueden dar puntos extra si se consigue dejar la mesa "limpia", llevándose todas las cartas sobre la mesa en ese momento. Además se puede aumentar el número de cartas que recibe cada jugador, o el número de cartas que se dejan sobre la mesa.*

Desarrollo en el aula: *Para utilizar esta actividad los alumnos deben tener un control aceptable de la suma de fracciones de modo que el juego se desarrolle de manera ágil y adecuada. Se trata por tanto de una actividad post-instruccional, para consolidar los conocimientos de los alumnos.*
El hecho de que además de tener la fracción, las cartas tengan la representación gráfica de la fracción, puede ayudar a los alumnos a crear representaciones mentales gráficas del concepto de fracción, ayudando a su comprensión.
Es muy importante haber hecho hincapié en la equivalencia de fracciones, para que los alumnos puedan realizar las sumas de manera eficaz, teniendo claro cuál es el objetivo.

Problemas que pueden surgir en el aula:
Falta de nivel de los alumnos en el manejo de fracciones. El juego puede volverse lento y tedioso. El profesor debe asegurarse que los alumnos tienen cierta agilidad y control en el uso de fracciones antes de proponerlo.

Ficha: *02*	**Título**: *"Más por menos"*	**Tema:** 1 *"Fracciones"* **Tipo:** *3 y 4*
Jugadores: *4 aprox.*	**Objetivos:** *1.1, 1.4, 1.5 – 2.1* *(varios en función del juego)*	

Referencia: *ANTOLÍN, J.; CORBALÁN, F. y GAIRIN J. M. Materiales matemáticos. MAT-MAT (Universidad Autónoma de Barcelona). 1987*

Material necesario: *Baraja formada por 45 cartas. Esas cartas tienen valores comprendidos entre 0 y 14. Hay tres cartas de cada valor. Las cartas pueden estar hechas por los propios alumnos con folios.*

Reglas del juego: *Se reparten 7 cartas a cada jugador (pueden jugar hasta 6 alumnos pero 4 es el número más apropiado). Una vez hecho el reparto, cada jugador debe poner sus cartas en dos grupos, un grupo de 3 cartas y un grupo de 4 cartas. Cuando todos los jugadores han creado sus dos montones, cada jugador da la vuelta a sus cartas. En los grupos de 3 cartas se multiplica el valor de las 3 cifras, y en los de 4 se suman los valores. El jugador que consiga tener la cifra más alta con el grupo de 3 cartas multiplicadas recibe 3 puntos y el jugador que consiga la cifra más alta con el montón de 4 cartas sumadas recibe 4 puntos.*
Se vuelven a repartir las cartas y se juega de nuevo. El juego termina cuando uno de los jugadores alcanza un valor de puntos acordado de antemano o después de un número de rondas prefijadas.

Ejemplo de las cartas usadas.

Variantes: *Modificar el número de cartas de cada grupo, el número de cartas que se reparten en total, las operaciones que se realizan o los valores que aparecen en las cartas.*
Un ejemplo de variación es: Se reparten 9 cartas, se dividen en grupos de 2, 3 y 4 cartas. En uno de los grupos se debe conseguir la media aritmética más alta, en otro la media geométrica más alta y en el último el mayor producto. Los puntos a repartir son 2, 3 y 4 respectivamente.

Desarrollo en el aula: *Se trata de un juego aparentemente sencillo, pero que implica la realización de multitud de operaciones mentales en muy poco tiempo. Si el juego se realiza correctamente llega a ser adictivo y entretenido, pero si se ejecuta mal se corre el riesgo de hacerlo pasar por una actividad vana y simple para el alumno, limitándose a separar las cartas aleatoriamente.*
Para presentar la actividad de forma motivadora se deja jugar a los alumnos libremente después de una breve explicación de las normas básicas. Posteriormente se realiza una pequeña puesta en común donde se comentan posibles estrategias a seguir que hayan llevado a cabo los alumnos, presentando el profesor, aquellas que considere oportunas y los alumnos no hayan nombrado. El objetivo es conseguir que los alumnos entiendan que no se trata de un juego aleatorio.
Otro objetivo sería la práctica del cálculo mental de las operaciones elementales, así como el manejo de cantidades y el orden de magnitudes. No obstante, se puede adaptar al manejo de otros conceptos, como los mencionados en el apartado "Variantes".

Ficha: *03* — Título: *"Escalada"*

Tema: 1 *"Fracciones"*

Tipo: *3 y 4*

Jugadores: *4 aprox.*

Objetivos: *1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 – 2.1, 2.2, 2.3*

Referencia: *ANTOLÍN, J.; CORBALÁN, F. y GAIRIN J. M. Materiales matemáticos. MAT-MAT (Universidad Autónoma de Barcelona). 1987*

Material necesario: *Baraja formada por 64 cartas:*
20 cartas con los valores del 0 al 9, dos cartas por cada valor.
8 cartas con la operación suma y 8 con la operación resta.
6 cartas con la operación multiplicación y 6 con la de división.
4 cartas de potencia o exponente.
12 cartas de paréntesis.

Reglas del juego: *Se separan las cartas en función del tipo de símbolo que contengan, por un lado las de números, por otro las de operaciones y por otro las de paréntesis.*
Un jugador reparte las cartas (el jugador que reparte va rotando), dando tres cartas con números y dos cartas con operaciones a cada jugador. Cada jugador, con sus cinco cartas, debe conseguir formar la cifra más alta posible, utilizando las cartas de paréntesis para ello.
Se otorga un número de puntos al vencedor y gana el que más puntos tenga después de un número prefijado de partidas o bien el primero que gane un número concreto de partidas.

Variantes: *Utilizando la misma baraja de cartas se pueden introducir distintas variantes.*

Variante (1) "La cima":

Igual que el original pero, antes de que cada jugador vea sus cartas, el jugador que reparte fija un valor, la cima (el valor debe poder ser alcanzable con las cartas de la baraja). Gana el jugador que se acerque más a esa cima. Puede ser tanto por exceso como por defecto, o sólo por defecto.

Variante (2) "La cima 2":

Igual que el anterior pero la cima es fijada antes de repartir las cartas. Los jugadores piden las cartas de una en una, y pueden plantarse cuando quieran. Las cartas, a excepción de una, se dejan bocarriba, de modo que el siguiente jugador pueda ver parcialmente la jugada. Gana el jugador que más se acerque a la cima por defecto.

Variante (3) "Escalada 2":

Igual que el original pero introduciendo una ronda intermedia en la que cada jugador puede pedir el cambio de una de sus cartas por otra de cualquier montón. Pueden cambiarse un máximo de 3 cartas. Las cartas de número pueden colocarse una al lado de la otra y formar números de 2 o 3 cifras. Gana el jugador que obtenga el valor más alto.

Desarrollo en el aula: *Se trata de un juego muy sencillo, pero que bien utilizado puede ser muy útil para que los alumnos sean conscientes del uso correcto de las operaciones así como para agilizar el cálculo mental.*
En las variaciones de "La cima", se recomienda que las primeras cimas sean fijadas por el profesor, para evitar que el orden de magnitud de la cima no esté relacionado con los valores de las cartas (se recomienda empezar con valores cercanos al 100). Es también adecuado fijar bien las normas al principio, por ejemplo si las cifras pueden ser colocadas por parejas o sólo se pueden usar de forma individual. En función del tipo de normas, el valor de la cima puede ser mayor o menor, o incluso negativo.
Se propone incentivar el juego favoreciendo la competitividad entre los alumnos, proponiendo torneos o premios a aquellos alumnos que logren desarrollar estrategias ganadoras.

Ficha: *04*	**Título**: *"Sube y baja"*	**Tema:** 1 *"Fracciones"* / **Tipo:** *3*
Jugadores: *2*	**Objetivos:** *1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 – 2.1, 2.2, 2.3*	

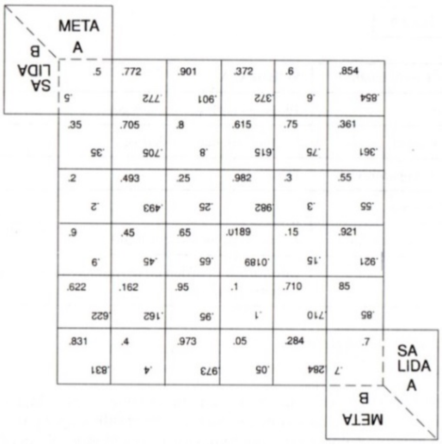
Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998.*

Material necesario: *Un tablero con números decimales, como el propuesto, o negativos. El tablero puede dibujarse sobre un folio, hacerse en el momento de jugar, o llevarlo preparado con antelación. Las cifras que componen el tablero pueden escribirse aleatoriamente, la única regla necesaria es colocar en las casillas adyacentes a las de salida un número mayor y otro menor que el de la salida, para que se pueda comenzar el juego.*

Cuatro fichas, dos de cada color, que serán para los dos jugadores.

Un dado con tres caras con la inscripción G (grande) y otras tres con P (pequeño). Se puede construir en clase con cartulina o partir de un dado normal, pegando gomets con las letras G y P.

Tablero de juego



Reglas del juego: *Cada jugador (A y B) coloca sus fichas en la casilla de salida. Los jugadores tiran el dado por turnos. Si sale G, el jugador puede mover su ficha hacia una casilla con un valor más grande que el original; si sale una P, el jugador puede mover a una casilla con un valor más pequeño del original.*
Los movimientos pueden ser en horizontal o en vertical (según se encuentra orientado en esta ficha), no en diagonal.
En cada jugada sólo puede moverse una ficha, el dado sólo se tira una vez. En caso de que el jugador no pueda mover ninguna de sus fichas, pierde el turno.
Una casilla puede estar ocupada por más de una ficha, si son del mismo jugador, pero un jugador no puede colocar su ficha en una casilla que contenga fichas del otro jugador.
El objetivo del juego es poner las dos fichas en la casilla de meta, es decir, atravesar el tablero con las dos fichas.

Variantes:

- *Considerar que los números en lugar de ser decimales, sean negativos.*
- *Considerar que se puedan comer las fichas entre los jugadores, es decir, si un jugador cae en una casilla ocupada por una ficha contraria, la hace retroceder hasta la casilla de salida.*
- *Aumentar el número de fichas por jugador, a 3 o a 4.*
- *Aumentar el número de jugadores a 4, cada uno empezando por una esquina.*

Desarrollo en el aula: *El orden de los números decimales y negativos, resulta bastante complicado para un número apreciable de alumnos, debido a que puede resultar contrario a la primera intuición. Este juego permite reflexionar y rebatir esa impresión, poniendo de manifiesto posibles fallos en la comprensión de los conceptos. Se recomienda variar los valores de las casillas cuando los alumnos hayan jugado un número alto de veces.*

Ficha: *05*	**Título**: *“¡¡Acércate!!!”*	**Tema:** 1 *“Fracciones”* **Tipo:** *3*
Jugadores: 4 aprox.	**Objetivos:** *1.1, 1.4, 1.5, 1.6 – 2.1, 2.3*	

Referencia: *CORBALÁN, F. y GAIRIN J. M. “Juegos en clase de matemáticas”. Barcelona. Cuadernos de pedagogía. Nº 160, junio 1988.*

Material necesario: *Una calculadora para cada uno de los jugadores. Será suficiente con que permita realizar las cuatro operaciones básicas. Útiles básicos de escritura, papel y lápiz.*

Reglas del juego: *El primer jugador (que cambia de forma rotatoria) elige un número de 2 cifras, y los demás jugadores escogen un número de 1 cifra. El juego consiste en aproximarse tanto como sea posible al número de 2 cifras, utilizando los de 1 cifra. Los alumnos pueden utilizar las 4 operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división, no tienen por qué usar las cuatro, y pueden emplear cada una el número de veces que quieran, pero empleando cada número propuesto al menos una vez.*

Cada alumno realiza sus operaciones aparte y pasado un tiempo estipulado, cada jugador expone su resultado al resto de jugadores. Las puntuaciones a repartir son las siguientes: 10 puntos si se alcanza el número correcto, 6 puntos si se alcanza una cifra que difiera en menos de 5 puntos, 3 puntos si se alcanza una cifra que difiera entre 6 y 10 puntos y 0 en el resto de casos.

El juego finaliza cuando uno de los jugadores alcanza una puntuación prefijada.

Variantes: *Después de que los alumnos adquieran un cierto nivel de destreza se puede incrementar la dificultad del siguiente modo: aumentar el número elegido por el primer alumno en 3 o 4 cifras, y el del resto en 2 cifras. Adicionalmente, se puede permitir la repetición de algún valor, por ejemplo, el mayor o el menor.*

Desarrollo en el aula: *El objetivo del juego es la utilización consciente de la calculadora. Se debe pedir a los alumnos, sobre todo en las primeras partidas, que anoten las operaciones que realizan, para que se pueda comprobar el resultado.*

<table>
<tr><td rowspan="2">Ficha: 06</td><td rowspan="2">Título: “El tronco”</td><td>Tema: 1
“Fracciones”</td></tr>
<tr><td>Tipo: 3</td></tr>
<tr><td>Jugadores: variable</td><td colspan="2">Objetivos: 1.1, 1.4, 1.5, 1.6 – 2.1, 2.3</td></tr>
</table>

Referencia: *CORBALÁN, F. y GAIRIN J. M. “Juegos en clase de matemáticas”. Barcelona. Cuadernos de pedagogía. Nº 160, junio 1988.*

Material necesario: *Una calculadora para cada uno de los jugadores. Será suficiente con que permita realizar las cuatro operaciones básicas. Útiles básicos de escritura, papel y lápiz.*

Reglas del juego: *Se sortea qué jugador comienza portando “el tronco”. El jugador que porta “el tronco” escribe operaciones en las que elimina alguna de las “partes”. Puede eliminar alguna cifra, números completos, o algún símbolo matemático. Se debe diferenciar cuando ha eliminado una cifra numérica de cuando ha eliminado un símbolo matemático.*

El resto de los jugadores, con ayuda de la calculadora, lápiz y papel, deben averiguar las partes eliminadas. Se estipula un tiempo límite para averiguar todos los espacios. El primer jugador que resuelva todos los espacios se convierte en el portador de “el tronco”. Si pasado el tiempo fijado ningún jugador ha resuelto la operación propuesta el portador de “el tronco” propone una nueva operación.

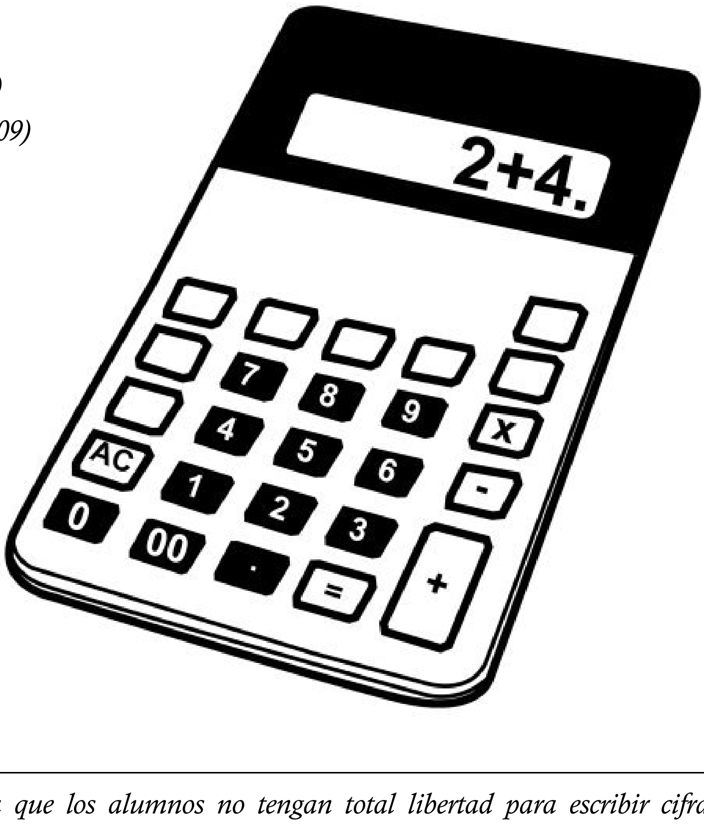
Gana el jugador que más veces haya portado el tronco después de un número de rondas estipulado o al sobrepasar un tiempo límite de juego fijado al comienzo de la partida.

Algunos ejemplos:

12 x 1_ = 1_6 *(Sol. 12 x 13 = 156)*

93 x 8_ = 8_ _1 *(Sol. 93 x 87 = 809)*

13 @ 5 @ 5 = 90 *(Sol. +, x)*



Desarrollo en el aula: *Se aconseja que los alumnos no tengan total libertad para escribir cifras o quitarlas desde el principio.*
Se recomienda comenzar con alguna operación sencilla como por ejemplo una multiplicación de números de 3 o 4 cifras en la que se permita quitar alguna de las cifras; a continuación, permitir sólo quitar los símbolos matemáticos de las operaciones y finalmente dar libertad para combinar ambas posibilidades.
El objetivo del juego es el uso consciente de la calculadora, y trabajar el cálculo mental.

Ficha: *07*	**Título**: *"Uno y un poco más"*	**Tema:** 1 *"Fracciones"* **Tipo:** *3*
Jugadores: *2*	**Objetivos:** *1.1, 1.4, 1.5, 1.6 – 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5*	

Referencia: *ALONSO, P. y SALAR, A. "Actividades con calculadora". Curso "Las matemáticas en la etapa 12-16", Zaragoza, comunicación interna. 1993.*

Material necesario: *Una calculadora para cada uno de los jugadores. Será suficiente con que permita realizar las cuatro operaciones básicas. Útiles básicos de escritura, papel y lápiz.*

Reglas del juego: *El objetivo del juego es poner en la pantalla el número 1,0XXXXXX (dónde cada una de las X es un número que se ha prefijado por los dos jugadores al comienzo de la partida).*
Una vez fijado el número que se debe alcanzar, se sortea el orden de juego. El primer jugador pulsa en la calculadora el número que desee, el siguiente jugador multiplica ese número por cualquier otro de su elección. Ambos jugadores se van turnando en el uso de la calculadora y realizan una multiplicación en cada turno.
El juego termina cuando uno de los dos jugadores logra que aparezca en la calculadora el número que se había marcado como objetivo.
Para que el juego no resulte aburrido, en las primeras partidas se fija un número máximo de tiradas, ganando el jugador que más cerca haya estado del objetivo al alcanzar ese número de tiradas.

Variantes: *Cuando los alumnos hayan alcanzado un nivel de destreza adecuado se pueden ir introduciendo progresivamente distintas variaciones:*

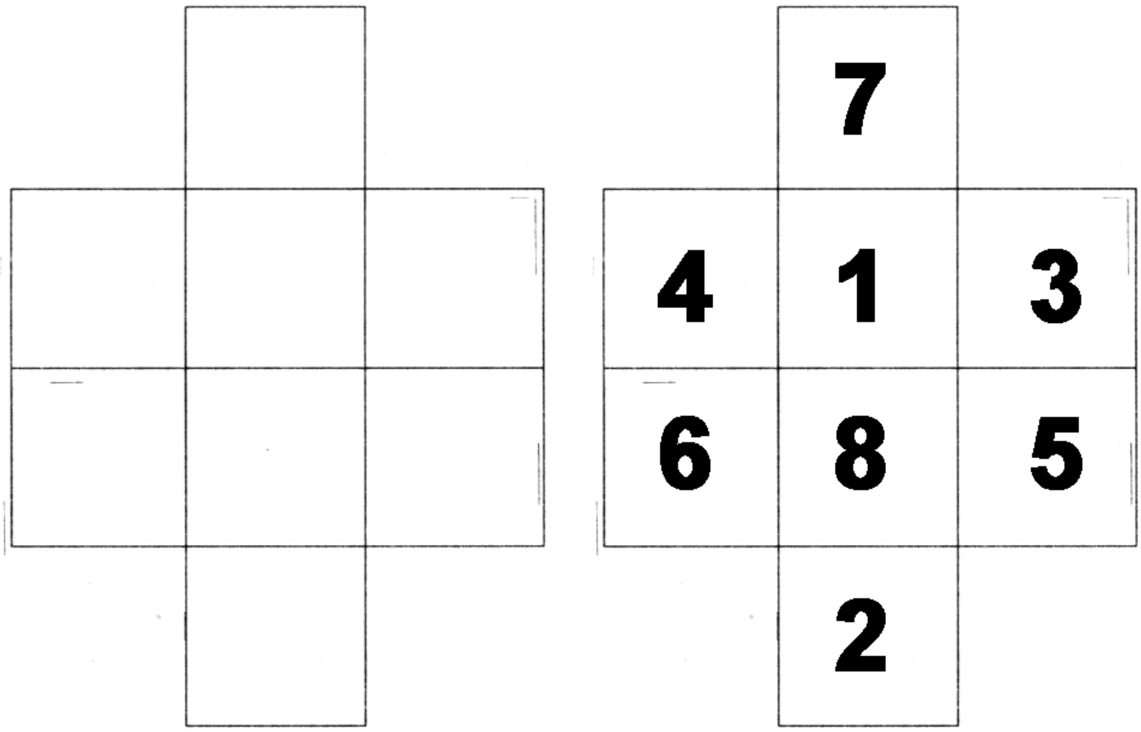
- *Aumentar el número de ceros a la izquierda del 1 (1.000XXXX).*
- *Marcar objetivos por debajo del 1 (0.99XXXXXX).*
- *Obligatoriedad de realizar las operaciones tecleando los números en forma de potencias o notación científica.*

Desarrollo en el aula: *Se trata de un juego de mecánica muy sencilla, cuyas normas los alumnos entienden rápido y pueden comenzar a jugar de un modo inmediato.*
El profesor tiene que explicar a los alumnos que no se trata de un juego de azar, dejando claro que el objetivo del juego es el uso consciente de la calculadora y trabajar el cálculo mental. El alumno tiene que ser capaz de prever el número que va a obtener al realizar su multiplicación.
Durante el desarrollo del juego se explican los conceptos de aproximación, cifra significativa, error absoluto y error relativo.

Ficha: *08*	**Título**: *"8 números"*	**Tema:** *1 "Fracciones"* **Tipo:** *4*
Jugadores: *1*	**Objetivos:** *1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 – 2.1*	

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "Juegos Matemáticos para Secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998.*

Material necesario: *Lápiz y papel (se recomienda también una goma de borrar). Antes de comenzar se dibuja un tablero de 8 casillas como el de la figura inferior.*



Reglas del juego: E*l objetivo es colocar 8 números consecutivos (por ejemplo de 1 al 8) en las casillas del tablero. La única condición es que no puede haber dos números consecutivos en casillas contiguas, ya sea en horizontal, en vertical o en diagonal.*

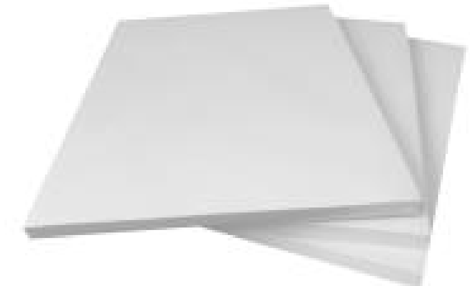
Variantes: *Utilizar números negativos o decimales en lugar de naturales.*

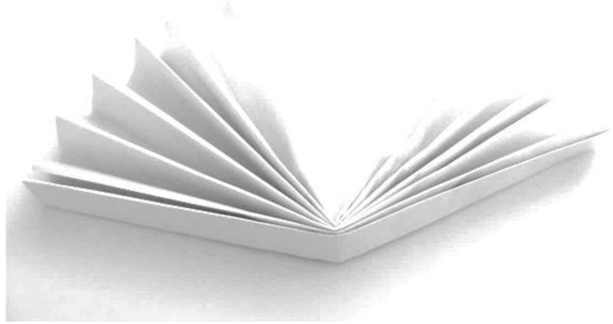
Desarrollo en el aula: *Se trata de un juego de estrategia, por lo tanto el profesor tiene que especificar que el objetivo es encontrar la estrategia que permite colocar los números correctamente. En ningún caso permitir que los alumnos coloquen números al azar hasta encontrar la combinación correcta.*
Se pide a los alumnos que traten de encontrar todas las combinaciones posibles de colocar los números cumpliendo las normas.
Los alumnos suelen pensar que la igualdad entre dos elementos es algo evidente que no vale la pena definir. Sin embargo, cuando se tienen que encontrar todas las formas de llenado, como en este caso, se ve que no hay coincidencia entre sus apreciaciones (en unos casos vale con rotar los números, en otros casos con simetrías, en otros no…). Esto nos permite tratar en el aula la importancia de definir el concepto de igualdad de forma rigurosa antes de ser explicado.

Ficha: *09*	**Título**: *"El valor de un folio"*	**Tema:** *1* *"Fracciones"* **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6 – 2.1, 2.4, 2.5*	

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "La matemática aplicada a la vida cotidiana" Editorial GRAÓ. Biblioteca de aula 115. 1995 (y ampliación propia).*

Material necesario: *Un paquete de folios de 500 hojas.*





Desarrollo en el aula: *Se trata de una experiencia para introducir a los alumnos los conceptos de número muy pequeño y de número muy grande, a partir de los cuales se empezará a trabajar con el uso de potencias y notación científica.*

Se plantea a los alumnos la siguiente cuestión: ***¿Cuál es el grosor de un folio?***

El profesor hace ver que ninguno de los aparatos de medida que podemos encontrar en clase servirá para medir el grosor de un folio. Se trata por tanto de un valor que se encuentra por debajo de la precisión de que disponemos. Se realiza entonces una nueva cuestión. ¿Podemos medir el grosor de un paquete de folios?
Ante la respuesta evidente, el profesor debe remarcar que no se trata de una medición tan sencilla como aparenta. La envoltura del paquete debe retirarse, y las mediciones no serán exactas, por lo tanto es conveniente realizar varias y hallar la media aritmética. Se aplican conceptos básicos de proporcionalidad (dividiendo entre el número de folios) y se obtiene un valor bastante aproximado del grosor de un folio (alrededor de 0.1 mm).

Una vez se obtenido este valor el profesor lanza una nueva pregunta: ***¿qué altura podremos conseguir doblando un folio, por ejemplo 10 veces?***

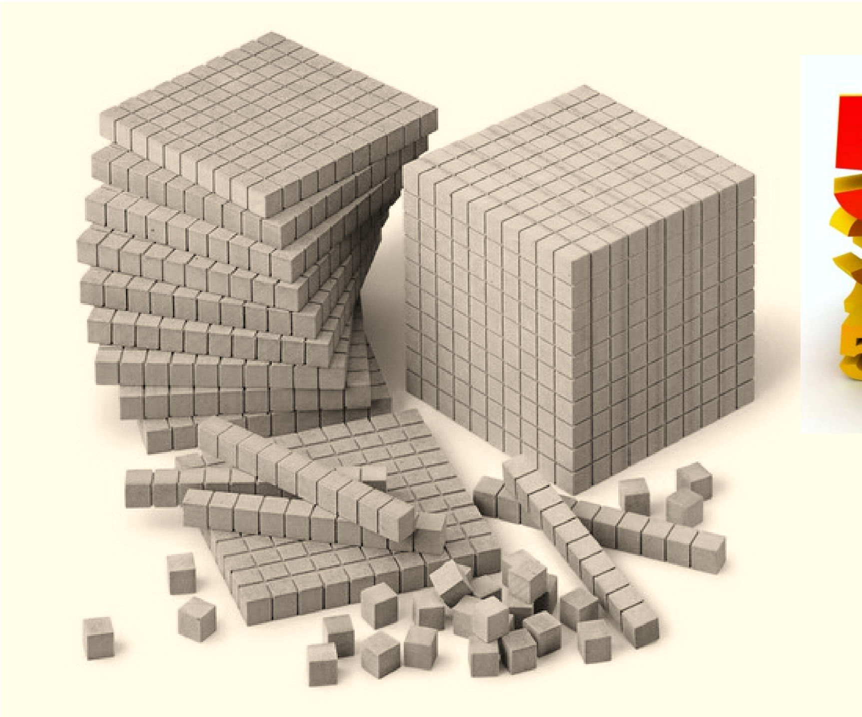
Para encontrar la respuesta, en primer lugar el profesor hace ver que en ningún caso será el grosor de 10 folios, pues cuando doblamos el folio introducimos el doble de grosores, no uno más. Aclarado este primer error, se realiza una pequeña demostración en clase doblando el folio 4 veces, y se hace evidente que obtenemos 16 grosores de folio, es decir 1.6 mm. Para los alumnos no es un gran avance, es poco más de 1 mm, pero el profesor ha ido escribiendo en la pizarra la recurrencia (2x2x2x2). En este punto el profesor hace evidente que no es necesario seguir doblando el folio, pues se ha encontrado el patrón que sigue el grosor del folio doblado. Se trata de una potencia de base 2 y exponente el número de dobleces. De forma inmediata en la pizarra se obtiene el grosor de un folio doblado 10 veces, $2^{10}=1024$ *grosores, es decir algo más de 10 cm de altura. Se plantea una nueva pregunta:* ***¿Y si doblamos 14 veces el folio?*** *Para los alumnos resulta sorpréndete ver que con tan sólo doblar el folio 14 veces obtendríamos una pila de papel de* ***1.6384 m****, la altura de muchos de ellos. ¿Y si pudiéramos doblarlo una vez más?… Quizá el montón de papel no entraría apilado en el aula.*

La explicación debe ir acompañada en todo momento de las oportunas anotaciones y transcripciones en la pizarra. Se consigue hacer tangible el valor de números muy grandes y muy pequeños, además de entender que la notación científica es la manera más útil y cómoda de expresarlos.

Ficha: *10*	**Título**: *"¿Cuánto vale mi…?"*	**Tema:** *1* *"Fracciones"* / **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 – 2.2, 2.3, 2.7*	

Referencia: *Creación propia.*

Material necesario: *Bloques multi-base o un mínimo de 110 piezas diferenciadas: botones, piedras, etc.*



Desarrollo en el aula: *Se trata de una actividad para que los alumnos aprendan a trabajar con porcentajes encadenados. Es imprescindible para su desarrollo que los alumnos conozcan los porcentajes simples.*

En función del material disponible se divide a los alumnos en grupos, siendo aconsejable que no haya más de 5 alumnos por grupo. Se propone a los grupos la siguiente situación: Tienen un objeto que vale 100€ (Pueden elegir cual). Primero se le sube el precio un 10% y luego se le baja el 10%. ¿Cuánto vale al final?

Se utilizan los bloques multi-base y la equivalencia entre porcentajes y fracciones. El 10% es una décima parte, por lo que se añade al montón de fichas, una décima parte más de éstas. Posteriormente se sustrae la décima parte de las piezas. El profesor comprueba que todos los grupos tienen 99 piezas en el montón. Con esta experiencia, se hace ver a los alumnos que los porcentajes encadenados no se pueden sumar o restar.

A continuación se propone cambiar el orden de los porcentajes: primero bajar un 10% y luego subir un 10%. El profesor comprueba que los montones resultantes vuelven a ser de 99 fichas. Con esta experiencia se hace ver a los alumnos que los porcentajes encadenados son conmutativos, pueden aplicarse en cualquier orden.

Por último el profesor propone que se apliquen los dos porcentajes de una vez. ¿Qué porcentaje aplicado de una vez realiza el mismo efecto que los otros dos? El profesor comprueba que en todos los grupos se obtiene que los dos porcentajes deben de multiplicarse.

Al finalizar cada experiencia o al finalizar la última, el profesor formaliza en la pizarra las propiedades observadas sobre los porcentajes.

Variante: *Con el mismo procedimiento, se explica el interés simple como porcentajes encadenados de igual valor.*

Ficha: *11* — Título: *"El bar de Moe"*

Tema: *1 "Fracciones"*
Tipo: *1*

Para todos los alumnos

Objetivos: *1.1,1.2, 1.4, 1.5 – 2.6*

Referencia: *Creación propia.*

Material necesario: *Garrafas de agua (llenas), vasos de plástico.*



Desarrollo en el aula: *Se trata de una experiencia para introducir a los alumnos en el trabajo con proporciones directas, indirectas y con repartos proporcionales. Está basada en la serie animada "The Simpsons".*

*Se comienza con "**proporcionalidad directa".***
Se escoge a un alumno, que desempañará el papel de Moe. Se sitúa a los alumnos en un bar imaginario (en función de las condiciones del aula se recomienda la recreación de la escena mediante la disposición de mesas y sillas). Se pide al alumno "Moe" que sirva todos los vasos de agua que sea capaz en 30 segundos. El alumno servirá "n" vasos. Se pregunta a los alumnos: ¿y si necesitamos en el bar 2n vasos? El profesor conduce las sugerencias hacia "Le dejamos el doble de tiempo. La experiencia se puede reproducir en el aula. El profesor continua: si necesitamos "100n" vasos, ¿Cuánto tiempo tardaría? En este caso, la escena no se reproduce, se pide a los alumnos que aproximen un resultado. Después de dar un tiempo para la reflexión, el profesor señala que se trata de una proporción directa y, en la pizarra, utilizando los datos de una de las dos experiencias anteriores, señala los pasos para calcular una proporción directa. Se recomienda señalar en este momento, que se trata de una abstracción de los datos, en la realidad el camarero acusaría el cansancio, tendría que cambiar de garrafa de agua, etc. De este modo se prepara a los alumnos para afrontar otros problemas similares (Y se explica el posible error entre ambas experiencias)

*Se continua con "**proporcionalidad inversa".***
En el apartado anterior es probable que alguno de los alumnos propusiese "que haya dos camareros". El profesor recupera esa posibilidad, o la propone en caso de no haber sido comentada. Se sigue el mismo proceso que en la situación anterior: se reproduce la escena para que 2 camareros sirvan "n" vasos y posteriormente 3 camareros. Después, el profesor recupera la última pregunta de apartado anterior: ¿Cuánto tardaba 1 camarero en servir 100n vasos? ¿Y si ahora fuesen 2 camareros? ¿O tres camareros? Del mismo modo, se deja un tiempo para la reflexión de los alumnos, y posteriormente el profesor formaliza en la pizarra el cálculo de proporcionalidad inversa.

*Para trabajar los "**repartos proporcionales",** se propone trabajar de modo similar, recreando dos situaciones más. Para repartos **directamente proporcionales**, se propone repartir el volumen de una garrafa de agua de 5 litros entre cuatro clientes (se pueden continuar los personajes: Homer, Barney, Carl y Lenny). El reparto se realiza de forma proporcional al dinero que tiene cada uno de ellos. Para repartos **inversamente proporcionales**, se propone repartir el mismo volumen de agua pero de forma inversa al tiempo que cada uno de los clientes lleve en el bar.*

Variante: *Para el caso de proporcionalidad inversa, introducir a los 4 clientes y proceder con las siguientes preguntas: ¿Cuánto tarda en beberse "n" vasos 1 cliente?, ¿Y 2 clientes? ¿Y 4 clientes?*

Ficha: *12* **Título**: *"NIM simplificado"*

Tema: *2 "Polinomios"*

Tipo: *4*

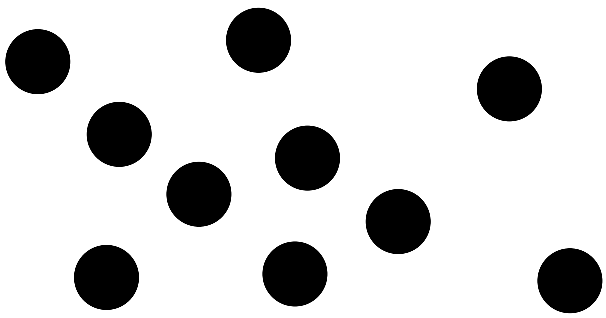
Jugadores: *2*

Objetivos: *1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 – 2.1, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4*

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. Juegos, enseñanza y matemáticas. Gijón, Signos, nº 1. 1990*

Material necesario: *Un montón de fichas, no importa el color o la forma, pueden ser monedas, bolígrafos de los alumnos… Comenzamos con un número de 10 fichas.*

Reglas del juego: *Se colocan las fichas encima de la mesa, sin importar el orden o la forma. Cada uno de los jugadores, por turnos, puede retirar 1 o 2 fichas según decida. Pierde el jugador que se lleve la última ficha.*



Variantes: *Cambiar el número de fichas, 13, 17, 25… y plantear de nuevo a los alumnos ¿Cuál sería la estrategia ganadora? ¿Y para "n" fichas?*

Desarrollo en el aula: *Se trata de un juego de estrategia, por lo que el objetivo es encontrar la estrategia ganadora. No se trata por tanto de retirar fichas al azar.*

Se deja inicialmente jugar a los alumnos por su cuenta y posteriormente se realiza un debate sobre las estrategias que han seguido.

Es relativamente sencillo demostrar a los alumnos que, en la versión descrita, el segundo jugador tiene ventaja, puede ganar siempre. Para ello basta con que complete a 3 en cada ronda el número de fichas retiradas por el primer jugador. De este modo se forma la sucesión 10, 7, 4, 1, en la que se fuerza al primer jugador a retirar la última ficha. Esta estrategia se basa en una técnica de resolución de problemas, "empezar por el final".

En el caso de comenzar con otro número de fichas, existen dos posibilidades. Si el número de fichas es múltiplo de 3 + 1, la estrategia es exactamente la misma que para 10 fichas, gana siempre el segundo jugador. En el caso de que el número de fichas sea múltiplo de 3 o múltiplo de 3 + 2, la estrategia ganadora es para el jugador que comienza a retirar fichas. Sólo tiene que retirar 1 o 2 fichas de tal forma que deje en la mesa un número múltiplo de 3 + 1 (reduciendo el juego al caso general) y siguiendo la estrategia ganadora del primer caso.

Las estrategias ganadoras se deben razonar en el aula, explicadas, y analizadas.

Se trata por tanto de una actividad multidisciplinar, con la que se puede entrenar la resolución de problemas, los criterios de divisibilidad (del 3 en este caso) o nociones de álgebra al escribir de forma formal en la pizarra lo que está ocurriendo en el juego. Es un juego para introducir de forma sencilla, si el profesor lo considera oportuno, la idea de congruencia. Incluso, presentando el NIM original, el sistema binario, en el que está basada la estrategia ganadora en este caso.

Ficha: *13* — **Título**: *"El valor de N"*

Tema: *2 "Polinomios"*
Tipo: *3*

Jugadores: *2 o 3*

Objetivos: *1.1, 1.3, 1.4, 1.5 – 3.4*

Referencia: *GRUPO AZARQUIEL. Ideas y actividades para enseñar álgebra. Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Nº 33. Madrid, Síntesis. 1993*

Material necesario: *Un tablero con los números del 1 al 100. 10 fichas de distinto color por jugador (goma de borrar, monedas…), un dado de 10 caras o 2 dados de 6 caras y 10 tarjetas de expresiones algebraicas.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2n: 0,5	1/3 n + 2n	3/4 n × 0,5	1/4 n × n2
n^3 - 1/2 n	n^4 : 2n	1/5 n + n^2	1/2 n + n
	2/3 n + 5	n^3 – 3n	

Reglas del juego: *Se coloca el tablero con los valores del 1 al 100 en el centro. Cada jugador coloca sus tarjetas algebraicas delante de él. Se sortea el turno de juego.*
Cada jugador lanza el dado por turnos. El valor obtenido será el valor de "N". El jugador escoge una de sus tarjetas y sustituye en ellas el valor de N, de modo que el resto de jugadores puede corroborar las operaciones.
Si la sustitución se realiza correctamente el jugador coloca una de sus fichas en el tablero de valores del 1 al 100, colocando su ficha sobre el valor que haya obtenido al realizar la sustitución.
El jugador da la vuelta a la tarjeta que ha usado, y no puedo volver a usarla.
No puede haber más de una ficha en cada casilla.
Si la sustitución se realiza incorrectamente se pierde el turno.
Si no se puede colocar la ficha, por estar la casilla ocupada se pierde el turno.
Gana el primer jugador que coloque sus 10 fichas.

Variantes: *se puede plantear la posibilidad de que los jugadores puedan comer fichas, colocando su ficha en una casilla ya ocupada. El jugador cuya ficha es comida, puede recuperar una de las tarjetas que tenga boca abajo.*
Se pueden sustituir las tarjetas algebraicas (es recomendable) cuando los alumnos ya estén familiarizados con ellas, planteando expresiones algebraicas de la complejidad que se desee.

Desarrollo en el aula: *Se trata de una actividad que permite realizar los ejercicios repetitivos de sustitución de una forma amena. Se puede plantear una batería de tarjetas distintas y adaptadas al nivel del tema que se esté tratando en clase, de modo que los alumnos empiecen jugando con polinomios simples y puedan terminar con tarjetas que contengan incluso sistemas de ecuaciones. Se trata por tanto de un juego que se adapta a los contenidos de prácticamente todos los contenidos del bloque de álgebra.*

Ficha: *14*	**Título**: *"Factores a raya"*	**Tema:** 2 *"Polinomios"* / **Tipo:** *2 y 3*
Nº de jugadores: 2	**Objetivos:** *1.1, 1.4, 1.5 -3.2, 3.4*	

Referencia: *CROUSE, R. J. y SWEENEY, M. J. "Algebra tic-tac-times", Mathematics Teacher, 1991*

Material necesario: *Dos tableros, uno que llamaremos de juego y otro que llamaremos de factores, además de fichas claramente diferenciadas (fichas de colores, diferentes monedas, piedras…).*

Reglas del juego: *El objetivo del juego es tachar cuatro casillas del tablero de juego que formen una línea recta, horizontal, vertical o diagonal.*
El primer jugador coloca una ficha de cada tipo en el tablero de factores, realiza la multiplicación y coloca una de sus fichas sobre el polinomio del tablero de juego que corresponda.
El siguiente jugador, a continuación, puede mover las fichas del tablero de factores para realizar su jugada y tachar otra casilla del tablero de juego.
Si un jugador se equivoca al hacer el producto de los factores, o halla un polinomio ya tachado, pierde el turno y no puede repetir jugada.

Tablero de juego

$x^2-7x+12$	x^2-3x+2	x^2-16	$x^2+8x+16$	x^2-x
x^2+5x+4	x^2-4x	x^2+2x-3	x^2+x	x^2+1
$x^2-8x+16$	x^2-5x+6	x^2-4x+4	$x^2+7x+12$	x^2-2x-8
x^2-4	x^2+2x	x^2-6x+9	x^2-9	x^2+3x-4
x^2-2x+1	x^2-2x-3	x^2-2x	x^2	x^2+5x+6
x^2-6x+8	x^2+4x+4	x^2+2x-8	x^2+3x	x^2-4x+3
x^2+6x+9	x^2+x-2	x^2+4x+3	x^2-x-2	x^2-3x
x^2-3x-4	x^2+x-12	x^2-x-6	x^2+4x	x^2+6x+8
x^2+3x+2	x^2+2x+1	x^2-5x+4	x^2-x-12	x^2+x-6

Tablero de factores

$x-4$	$x-3$	$x-2$
$x-1$	x	$x+1$
$x+2$	$x+3$	$x+4$

Variantes: *Puede utilizarse el mismo sistema de tablero para realizar operaciones con potencias de distinta o misma base. Además, una vez se ha jugado unas cuantas veces, se pueden cambiar los valores del tablero de factores y del tablero de juego, para evitar que aprendan los valores de memoria y resulte monótono.*

Desarrollo en el aula: *Con este tipo de actividad, para favorecer la motivación en el aula, se pueden organizar campeonatos entre los alumnos, de modo que al ganar una partida se pase de ronda o al perder se acceda a una fase de consolación. Se podría incluso proyectar el tablero en una pantalla PDI para que pudiera ser seguido por el resto de alumnos.*
Se debe explicar que el conocimiento de los factores que determinan el polinomio es esencial para poder seguir una estrategia ganadora que nos permita tachar las casillas deseadas, tanto para ganar nosotros como para impedir que gane el rival.
Se considera esta actividad de tipo 2 o 3 porque puede usarse en ambos ámbitos. Puede plantearse antes de una instrucción rigurosa, de modo que los alumnos vayan aprendiendo a "intuir" ese concepto de factorización y el trabajo con polinomios. Pero también puede usarse una vez realizada la instrucción, de modo que los alumnos puedan fortalecer la consolidación de sus mecanismos para realizar la factorización y la resolución de polinomios y ecuaciones de primer grado.

Problemas que pueden surgir en el aula:
Falta de motivación de los alumnos que pierdan muy rápido las partidas. Para ello se realizarán fases de consolación, debemos tener en cuenta que el principal objetivo no es saber quién gana sino jugar y aprender.
Partidas muy largas, al extenderse demasiado cada jugador en su turno. Se puede proponer una limitación de tiempo por jugada (por ejemplo 20"). De este modo la partida cobra dinamismo y emoción.

Ficha: *15*	**Título**: *"Carreras algebraicas"*	**Temas:** 3-*4* *"Ecuaciones y sistemas"* **Tipo:** *3*
Jugadores: *2 o 3*	**Objetivos:** *1.1, 1.3, 1.4, 1.5 – 3.4, 3.5, 3.6*	

Referencia: *GRUPO AZARQUIEL. Ideas y actividades para enseñar algebra. Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Nº 33. Madrid, Síntesis. 1993*

Material necesario: *Un tablero con tres filas numeradas del 1 al 6. Una baraja de 36 cartas, de ellas 30 tienen ecuaciones (5 cuya solución es 1, 5 cuya solución es 2 y así sucesivamente hasta 6) y 6 comodines. 3 fichas del mismo color por cada jugador.*

Tablero de juego y tarjetas de juego.

SA	1	2	3	4	5	6
LI	1	2	3	4	5	6
DA	1	2	3	4	5	6

$(2x + 3)(x - 5) = 0$	$x^2 - 5x = 0$	$(x - 5)^2 = 0$
$x^2 - 36 = 0$	$(x - 6)^2 = 0$	$2x^2 - 10x = 0$
$x^2 - 5 \times 4x = 0$	$x^2 - 5x - 6 = 0$	$(x - 3)^2 = 0$
$x^2 - 16 = 0$	$(x-3)(x^2 + 3) = 0$	$x^2 + 16 - 8x = 0$
$(x-4)(x^2 + 1) = 0$	$x^2 - 3x = 0$	$-x^2 + 9 = 0$
$x^2 - 2x = 0$	$-(x - 1)^2 = 0$	$(x + 1)(x - 2) = 0$
$x^2 - 4x = 0$	$(3x - 6)(x^2 + 4) = 0$	$-x^2 + 1 = 0$
$(2x - 12)(x^2 + 1) = 0$	$x^2 + 1 - 2x = 0$	$(2x + 3)(x - 4) = 0$
$(x+1)(x-6) = 0$	$-x^2 + 4 = 0$	$x^2 + 9 - 6x = 0$
$x^2 + x - 6 = 0$	$x^2 + x - 2 = 0$	$2(x - 1)(x + 2) = 0$

Reglas del juego: *Hay 2 o 3 jugadores, cada uno juega en una fila distinta que coloca sus fichas en la zona de salida. Las cartas de la baraja se colocan en el centro de la mesa, al lado del tablero de juego. Se sortea el orden de salida. El jugador que comienza coge una carta de la baraja y halla la solución de la ecuación, (colocando la carta boca arriba para que los compañeros puedan comprobar la solución). Si la solución es 1, mueve una de sus fichas hasta la casilla con un 1; en caso contrario no mueve sus fichas y pasa el turno.*
La carta se coloca de nuevo en el montón. Los jugadores levantan las cartas por turnos. Para avanzar las fichas los jugadores tienen que sacar una tarjeta cuya solución corresponda con una casilla a la que puedan avanzar sus fichas.
Gana el primer jugador que es capaz de colocar sus tres fichas en la casilla con el número 6.
En el caso de que los alumnos saquen un comodín pueden elegir mover cualquier ficha a la casilla que deseen.

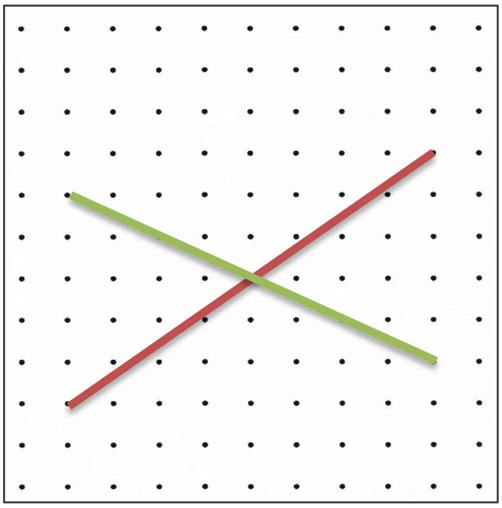
Variantes: *Para dar mayor agilidad al juego, se puede permitir que los jugadores avancen tan sólo si su respuesta es correcta, independientemente del valor de la solución, pues puede que algún jugador se pase varios turnos sin avanzar y el juego se haga demasiado pesado.*
Cuando los alumnos hayan jugado varias veces, es bueno cambiar las cartas de la baraja, para que los jugadores no memoricen los resultados.
Al cambiar las tarjetas se puede cambiar también el tipo de contenido de las mismas, ecuaciones de primer grado, de segundo, sistemas, factorización de polinomios, etc.

Desarrollo en el aula: *Con este juego perseguimos el objetivo de practicar la resolución de ecuaciones. El hecho de poder cambiar las cartas de la baraja nos permite poder avanzar y practicar diferentes fases del aprendizaje de la resolución de ecuaciones. Es una actividad que puede sustituir los monótonos ejercicios de repetición que se usan después de las primeras explicaciones.*

Ficha: *16*	**Título**: *"Geoplano y sistemas de ecuaciones lineales"*	**Tema:** *3-4 "Ecuaciones y sistemas"* **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.1, 1.2, 1.3, 1.4 – 3.5, 3.7*	

Referencia: *Creación propia.*

Material necesario: *Plantilla de geoplano (puede imprimirse o dibujarse). Corchera grande. Chinchetas. Hilos de colores (lo más gruesos posibles, se recomienda lana).*



Desarrollo en el aula: *Se trata de una experiencia para introducir la interpretación gráfica de ecuaciones y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.*

Antes de comenzar la actividad, el profesor coloca en la corchera del aula el geoplano (el geoplano debe tener un tamaño que permita su visualización por todos los alumnos del aula).

Se comienza la actividad presentando el material a los alumnos. Se identifican las coordenadas de un plano definido por ejes cartesianos, con los puntos del geoplano construido en el aula.

A continuación (si los alumnos aún no lo conocen) se realiza una demostración, en el geoplano, de que una ecuación lineal corresponde gráficamente a una recta. Para ello se sitúan varios puntos de la ecuación en el geoplano mediante chinchetas y después se unen el primero y el último con uno de los hilos. Se hace ver a los alumnos que todos los puntos están alineados y que cualquier par de puntos que obtengan de la ecuación, está en esa recta. Se repite el proceso con más de una ecuación. Se dejan finalmente dos de los ejemplos utilizados en el geoplano (dos que se corten dentro del geoplano). El profesor hace ver a los alumnos que las coordenadas de ese punto de corte, pertenecen a ambas ecuaciones. De este modo los alumnos visualizan que encontrar la solución de un sistema de ecuaciones de primer grado es equivalente a encontrar el punto donde se cortan dos rectas. También observan fácilmente en el geoplano, que si las dos rectas son paralelas, el sistema no tiene solución.

Se explican seguidamente los métodos algebraicos de resolución, acompañando los ejemplos de su interpretación gráfica en el geoplano.

Por último, el geoplano permanece en el aula para que los alumnos puedan comprobar los resultados de los sistemas de ecuaciones que resuelven.

Problemas que pueden surgir en el aula:
Es importante que el profesor señale que la representación del geoplano, es sólo una parte de la situación, la que interesa representar, aquella donde se cortan las dos rectas. Es importante señalar a los alumnos que las rectas sin infinitas.

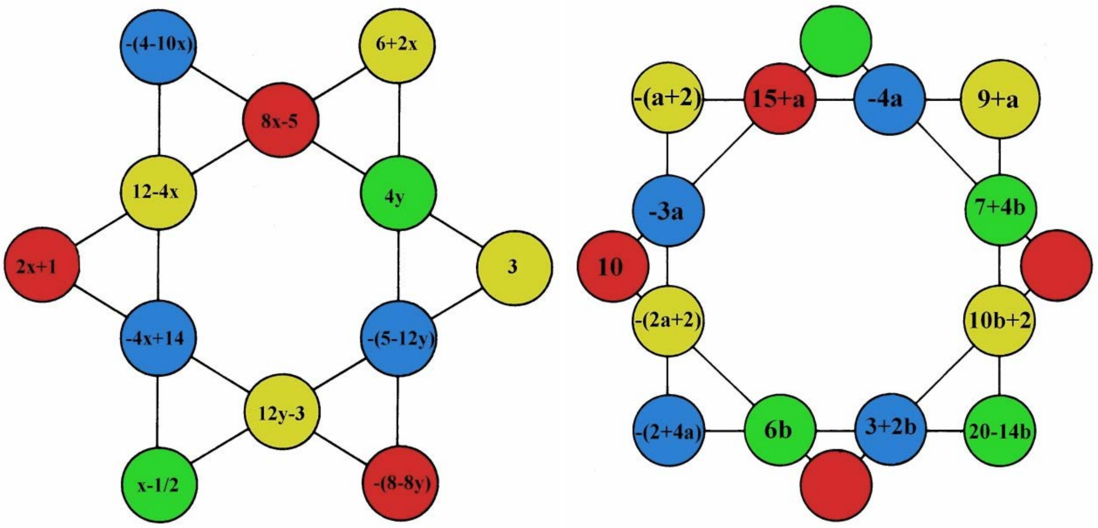
Ficha: *17*	**Título**: *"Estrellas mágicas"*	**Tema:** *3 y 4* *"Ecuaciones y sistemas"* **Tipo:** 3 y *4*
Jugadores: *1 a 3*	**Objetivos:** *1.1, 1.4, 1.5 - 3.5, 3.6, 3.7*	

Referencia: *GARCIA AZCARATE, A. "Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas: números y álgebra" Servicio de publicaciones de la universidad autónoma de Madrid. 1999.*

Material necesario: *Fotocopias de las estrellas.*

Reglas del juego: *En las estrellas mágicas todas las filas suman el mismo valor. Cada grupo debe resolver el valor de las incógnitas y de las casillas vacías, para completar la estrella. Para la obtención de los valores los alumnos pueden servirse de ecuaciones de primer o segundo grado y de sistemas.*

Ejemplo de estrellas de distinto nivel y formato



Desarrollo en el aula: *Se trata de una actividad para realizar después de la explicación teórica de la resolución de ecuaciones y sistemas.*

El objetivo de la actividad es que los alumnos afiancen las estrategias de resolución de ecuaciones. El diseño de la estrella, permite crear varios caminos válidos para la resolución de la misma. Esto significa que el alumno debe plantear la estrategia de resolución. Cuando todos los grupos han resuelto las estrellas, se ponen en común las estrategias usadas, valorando aquellas que desemboquen en cálculos más sencillos o en menor número de operaciones.

La dificultad de las estrellas es graduable. En primer lugar se ofrece a los alumnos estrellas que impliquen resolución de ecuaciones de primer grado, luego de segundo grado, después que impliquen sistemas, y por último que en función del camino tengan unas u otras. También se pueden intercalar "vías muertas" en cualquiera de las etapas, para que los alumnos identifiquen cuando los datos que tienen no son suficientes para obtener una solución.

Para aumentar la motivación de los alumnos pueden organizarse competiciones entre los alumnos, valorando la rapidez de la resolución, menor número de operaciones realizadas y menor dificultad en las operaciones realizadas.

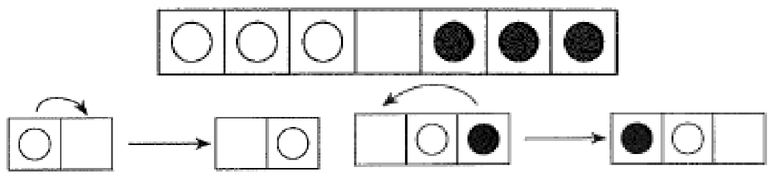
Problemas que pueden surgir en el aula:
Que los alumnos traten de resolver las estrellas de forma sistemática. El profesor debe indicar que no existe un solo camino de resolución, y que cada uno de los caminos que pueden escoger conduce a operaciones distintas. El profesor debe indicar también que antes de decidirse por una vía, deben estudiar varias opciones, para escoger la que les resulte más sencilla.

Ficha: *18*	**Título**: *"Sol y Sombra"*	**Tema:** 5 *"Sucesiones"* **Tipo:** *4*
Nº de jugadores: *1*	**Objetivos:** *1.1, 1.2, 1.4, 1.5 - 3.1, 3.2, 3.3*	

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "Juegos Matemáticos para secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998.*

Material necesario: *Un tablero con 7 casillas consecutivas dibujadas (Puede ser en una hoja de papel). Seis fichas diferentes, divididas en dos juegos de tres, de modo que sean diferentes 3 a 3 (Monedas, sacapuntas, gomas de borrar…).*

Reglas del juego: *Se colocan las tres fichas de cada tipo en las tres casillas de cada extremo, dejando una casilla vacía en el medio. El juego consiste en intercambiar las fichas de lugar, de modo que las del lado derecho pasen a la izquierda y viceversa. Para ello, las fichas pueden moverse de dos maneras distintas. Pueden avanzar si la casilla continua está vacía, o pueden saltar por encima de una ficha del otro tipo si la siguiente casilla está vacía. En ningún caso se puede retroceder.*



Desarrollo en el aula: *Para su uso en clase, se pide a los alumnos, en primer lugar, que traten de resolver el juego, es decir, de intercambiar la posición de las 6 fichas. Además se les pide que lo hagan en el menor número de movimientos posible.*
Pasado un primer periodo de experimentación, se les pide que anoten los pasos que van dando, de modo que puedan probar todas las alternativas para, una vez analizadas todas, poder observar cuál conduce a una solución y cuál no, y cuál lo hace en el menor número de pasos posible (Esta fase se puede dejar para trabajar en casa).
Una vez estudiados todos los casos (deberían de concluir que el número mínimo de movimientos es 15), a la hora de exponer sus conclusiones en el aula, se debe llegar a un acuerdo en la anotación de los diferentes pasos y movimientos. (Un ejemplo podría ser denominar los movimientos de cada tipo de ficha con una letra, y el tipo de movimientos, simple o con salto, con minúscula o mayúscula, n, B, b, N, N, n, B, B, B, n, N, N, b, B, n).
Después de este estudio generalizamos lo que acabamos de hacer, ¿Cuántos movimientos necesitamos para 4 fichas de cada tipo y 9 casillas? ¿Y para 5 fichas y 11 casillas? Tenemos la gran ventaja de la experiencia anterior, pero rápidamente vemos que al aumentar el número de fichas, experimentar todas las opciones resulta un esfuerzo imposible. Construimos una tabla, es el momento de realizar una conjetura que nos ayude a deducir el número de movimientos para "n" fichas.

N.° de fichas de cada color	1	2	3	4	5	…	n
N.° de saltos	1	4	9	16	25	…	n^2
N.° de mov. casilla adyacente	2	4	6	8	10	…	2n
N.° total de movimientos	3	8	15	24	35	…	n^2+2n

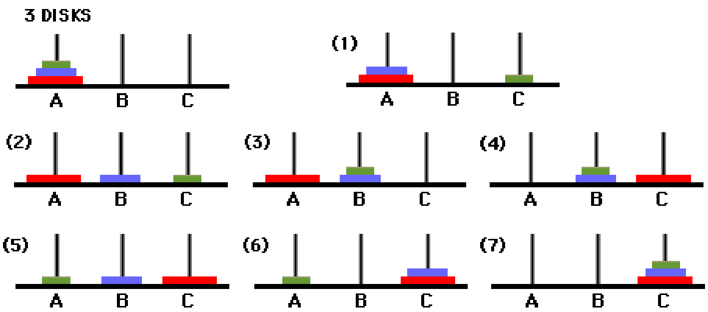
Trabajando con la tabla podemos introducir los conceptos de sucesión y término general de una sucesión. Desglosando los movimientos en número de saltos o número de movimientos simples obtenemos diferentes términos generales. Además podemos pedir a los alumnos que obtengan algunos de ellos y ver la equivalencia entre las distintas formas de expresar una relación algebraica.

Problemas que pueden surgir en el aula:
Que al comienzo los alumnos piensen que el juego no tiene solución y pierdan la motivación. En este caso, debemos instarles a continuar experimentando, ofreciéndoles nuevos caminos y pistas para continuar.
Que tengan problemas a la hora de expresar sus experiencias al resto de compañeros. Para evitarlo debemos actuar y negociar con ellos una forma de expresar los diferentes movimientos que pueden realizar.

Ficha: *19*	**Título**: *"Torres de Hanói"*	**Tema:** 5 *"Sucesiones"* / **Tipo:** *4*
Nº de jugadores: *1*	**Objetivos:** *1.1, 1.2, 1.4, 1.5 - 3.1, 3.2, 3.3*	

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "Mates de cerca" Editorial GRAÓ. Biblioteca de aula, nº 287. 1998.*

Material necesario: *Un tablero con 3 ejes perpendiculares a él. Discos de colores, de tamaño decreciente y con un agujero en el centro para poder introducirlos en los ejes (El material se puede hacer en clase por los propios alumnos, o puede ser comprado).*



Reglas del juego: *Puede jugarse con 3, 4, 5… discos. Lo recomendable es empezar a jugar con tres discos e ir incrementando el número discos iniciales.*
Los discos se colocan en uno de los ejes, ordenados de forma decreciente respecto a su tamaño. El objetivo del juego es volver a formar la misma torre, en el mismo orden, en otro de los ejes libres. Para ello podemos servirnos de los otros dos ejes auxiliares. La única regla es que no puede haber ningún disco colocado sobre uno menor que él.
Los discos se deben mover de uno en uno y, por supuesto, no podemos dejarlos encima de la mesa, siempre tienen que estar colocados en alguno de los ejes.

Desarrollo en el aula: *Una vez explicadas las reglas del juego (es un juego sencillo fácil de entender), se deja a los alumnos jugar.*

Aunque antes de eso, se les puede decir que el juego lleva consigo la siguiente leyenda (falsa) "En Benarés había un templo con una bandeja con tres agujas de diamante, en una de las cuales había 64 discos de oro, cada uno más pequeño que el anterior. Los monjes del templo tenían como misión trabajar sin descanso para cambiarlos de aguja (siguiendo las mismas normas que vosotros). En el momento que lo consiguieran se acabaría el mundo"

Se les pide no sólo que logren reproducir la torre de discos de un eje a otro, sino que lo hagan en el menor número de movimientos posible. Para ello deben ir anotando los movimientos que deciden hacer, de modo que luego puedan reproducirlos con facilidad. Pueden empezar con 3 discos y cuando lo logren, pasar a 4, luego 5, y así sucesivamente.
Después de este primer momento de juego, se realiza un pequeño debate donde los alumnos ponen en común sus conclusiones.
Una vez alcanzada la solución para 3 y 4 discos, los movimientos para un mayor número de discos resultan fácilmente reproducibles. El objetivo en el aula es que los alumnos se den cuenta de que el número mínimo de movimientos avanza en forma de progresión. Si son capaces de intuir el algoritmo de resolución (sencillo con pocos discos) debemos hacerles ver que el hecho de aumentar el número de discos en uno, duplica el número de movimientos, puesto que se deben realizar prácticamente todos los movimientos una vez más. De este modo se deduce el término general que nos da el número mínimo de movimientos para "n" discos.
Así se comprobaría que los monjes necesitarían más de $1{,}84 \times 10^{19}$ movimientos para alcanzar el fin del mundo…

Nº de discos	*3*	*4*	*5*	*6*	…	***n***	*64*
Nº de Movimientos	*7*	*15*	*31*	*63*	…	2^n-1	$1{,}84 \times 10^{19}$

Ficha: *20* — **Título**: *"Drago"*

Tema: 5 y 6 *"Sucesiones y Gráficas"*

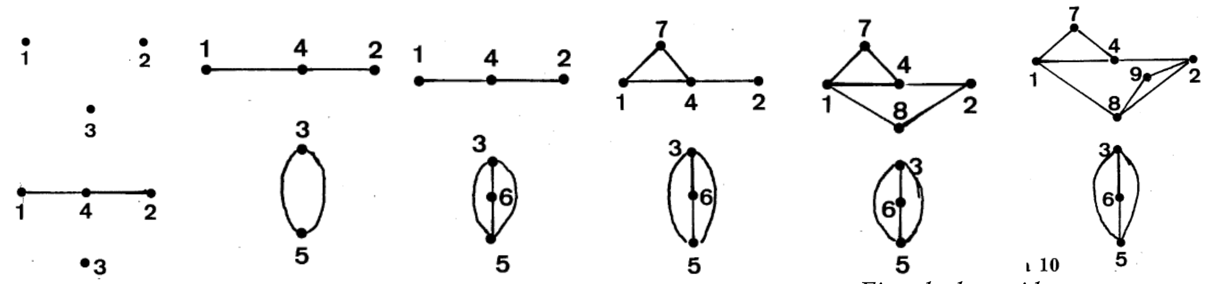
Tipo: *2*

Nº de jugadores: *2*

Objetivos: *1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 - 3.1, 3.2, 3.3, 5.1, 5.2, 5.3*

Referencia: *REVISTA SUMA. "El Drago: Juego de funciones", nº 7. Pp.47-52. 1991*

Material necesario: *Papel y lápiz.*



Ejemplo de partida con tres puntos.

Reglas del juego: *Es un juego para dos jugadores. En primer lugar los jugadores deciden el número de puntos con el que van a jugar (de 3 a 10) y el orden de juego.*

A continuación los jugadores, por turnos, tienen que unir dos de los puntos con una línea, y dibujar a su vez un punto sobre esa nueva línea. Las reglas para dibujar las líneas son:

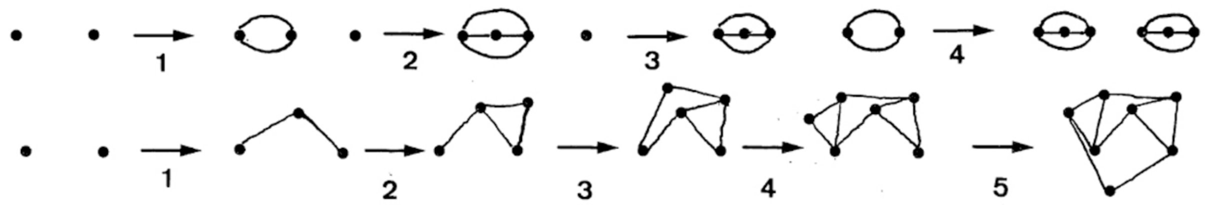
- *Si de un punto salen tres líneas, este punto queda inutilizado para el juego*
- *Se puede dibujar una línea entre dos puntos útiles, o entre un punto y él mismo, si de éste sólo sale una línea o ninguna.*
- *Las líneas no pueden cruzarse por ningún motivo.*

Gana el último jugador que pueda dibujar una línea.

Desarrollo en el aula: *Una vez que los alumnos adquieren el mecanismo del juego, el profesor plantea su análisis matemático. Para realizar ese análisis se plantea a los alumnos la siguiente pregunta ¿Cuál es la estrategia ganadora? Para afrontar esta pregunta nos apoyamos en otras dos más sencillas de responder:*

¿Cuál es el número mínimo de jugadas para "n" puntos? ¿Y el número máximo?

Es importante que los alumnos observen que el número mínimo de jugadas se obtiene cuando dejamos "bloqueados" tantos puntos como iniciales haya, para lo cual necesitamos dos jugadas por punto. El número máximo de jugadas se obtiene cuando solo dejemos un punto sin "bloquear".



Número mínimo (sup.) y máximo (inf.) de movimientos para dos puntos.

Después de obtener los mínimos y máximos para un número concreto de fichas (1, 2, 3 y 4 por ejemplo) se recurre a los conocimientos sobre sucesiones de los alumnos para averiguar la expresión algebraica de la que obtener el número de jugadas para cualquier número de puntos. La expresión de las jugadas mínimas se trata de la sucesión de números pares, y la de jugadas máximas una progresión aritmética con diferencia igual a 3.

Nº de puntos	1	2	3	4	…	***n***	**a**
Jugadas mínimas	2	4	6	8	…	***2n***	
Jugadas máximas	2	5	8	11	…	***3n - 1***	$[a_n = a_1 + 3(n-1) = 3n - 1]$

Para afianzar conceptos vistos en la unidad didáctica anterior, se plantea en el aula el estudio del número de puntos dibujados al final de la partida en ambos casos, que además servirá para introducir la idea de función.

A continuación el profesor plantea la estrategia ganadora, basándose en el estudio realizado:

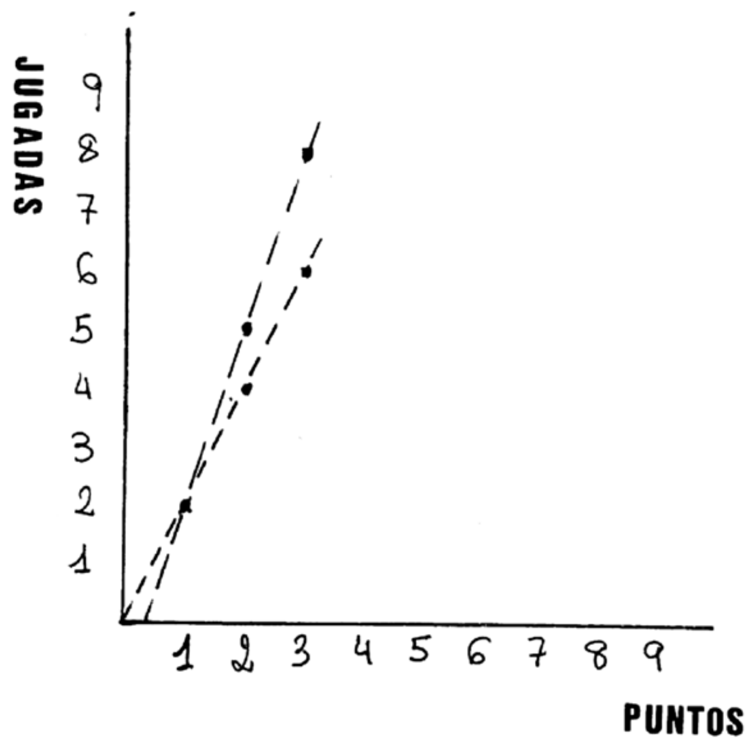
El segundo jugador tiene más posibilidades de ganar el juego ya que puede afrontar el juego con tres estrategias distintas:

- *Hacer el mínimo número de jugadas, ya que es un número siempre par.*
- *Hacer el máximo número de jugadas, que si el número de fichas es impar, será par.*
- *Entre 4 y 10 puntos buscar un número intermedio de jugadas.*

En el resto de opciones gana el jugador que comienza.

Para introducir las funciones, el profesor señala que en el estudio de jugadas que se ha realizado intervienen dos factores: el número de puntos y el número de jugadas a realizar, y que entre ellas existe una clara relación. Se dice que el número de jugadas es función del número de puntos. Una función se expone como una dependencia entre dos variables, y la fórmula hallada, como una forma de expresar esa relación.

Se señala la forma gráfica como otra manera de expresar esa relación. Seguramente los alumnos ya saben que es una gráfica, por lo que se les invita a hacer una con los resultados obtenidos.

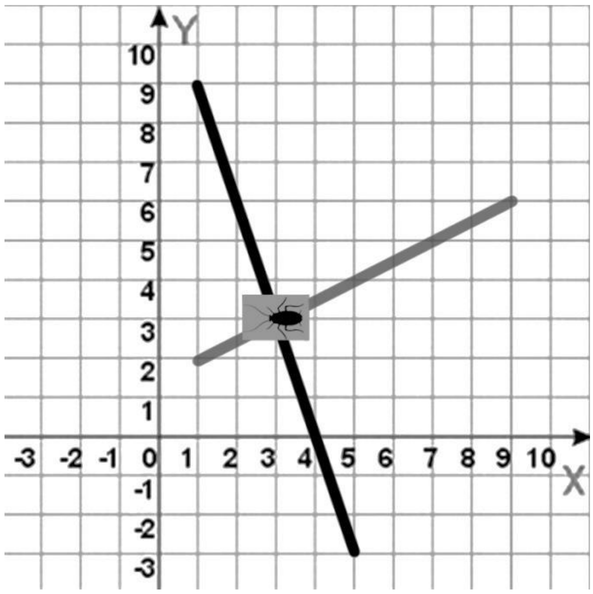


El profesor indica que los puntos no pueden unirse (los alumnos tenderán a hacerlo de forma natural) ¿Tiene sentido que la variable "puntos" adquiera un valor de 5.3268? Se introduce el concepto de variable discreta y variable continua. A partir de aquí se sigue con otros conceptos: continuidad, crecimiento, etc.

Ficha: *21*	**Título**: *"Raya la cucaracha"*	**Tema:** 6 *"Gráficas"* **Tipo:** *2 y 3*
Jugadores: *3 ó 6*	**Objetivos:** *1.2, 1.4, 1.5 – 5.1, 5.2, 5.3*	

Referencia: *Creación propia basada en el juego virtual "Algebra vs Cockroaches"*

Material necesario: *Plano cartesiano dibujado. Una ficha pequeña con una "cucaracha" dibujada.*



Reglas del juego: *Se enfrentan tres equipos, de 1 o 2 jugadores. Se sortea el orden de juego.*

El equipo que comienza coloca la ficha con la cucaracha en la posición que elija dentro del tablero. Debe quedar claro el punto por el que pasa la cucaracha, pudiendo ser el centro de la tarjeta. Los otros dos equipos deben proponer una función (en su forma algebraica) cuya representación gráfica "mate la cucaracha" (pase por el punto donde se encuentra). El equipo de la derecha del que comienza debe dar una función lineal creciente y el de la izquierda una función lineal decreciente. El primer equipo que ofrezca una respuesta correcta gana 2 puntos, y el otro 1 punto. Si alguna de las soluciones no es correcta, obtiene 0.5 puntos.

Gana el primer equipo que alcance una marca de puntos prefijada o el que más puntos tenga después de un número fijado de rondas.

Variante: *Cambiar las funciones que deben ofrecer los equipos. Que sean parabólicas, hiperbólicas, etc.*

Desarrollo en el aula: *Se trata de una actividad para fortalecer la relación entre la expresión gráfica y la algebraica de las funciones.*

Para su desarrollo en el aula, los alumnos deben haber adquirido unos conocimientos básicos sobre representación de funciones elementales.

Se puede introducir el juego, permitiendo que los equipos ofrezcan las soluciones libremente. Cuando los alumnos se den cuenta que de forma inmediata pueden ofrecer una función constante horizontal, se plantea que las funciones sean crecientes o decrecientes.

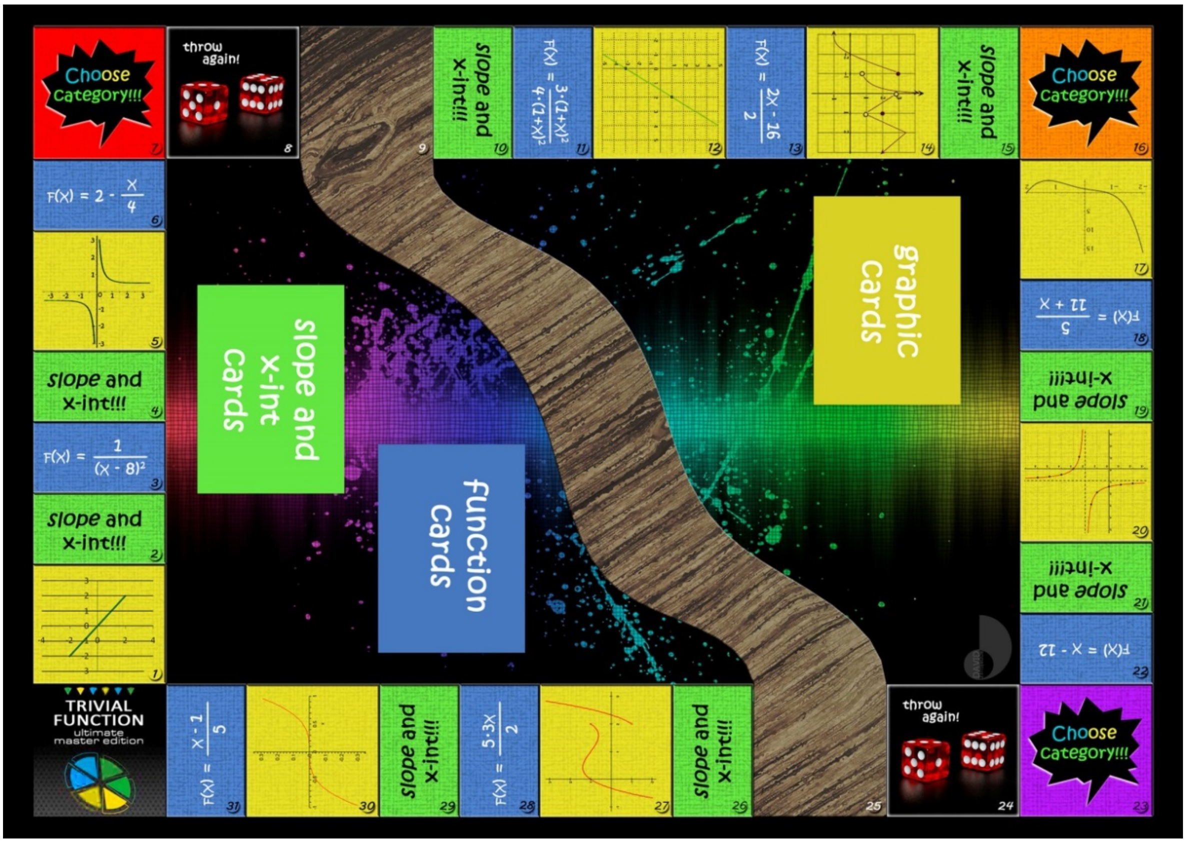
Se recomienda que los grupos de alumnos no sean de más de dos, para evitar que los grupos sean muy numerosos, y con ello que haya alumnos que no presten atención al juego.

Cuando los alumnos hayan obtenido un nivel de dominio alto sobre las funciones lineales, se introducen funciones más complejas (cuadráticas o hiperbólicas).

Ficha: *22*	**Título:** *"Trivial function"*	**Tema:** 6 y 7 *"Gráficas y análisis"* **Tipo:** *3*
Jugadores: *2 ó 4*	**Objetivos:** *1.2, 1.4, 1.5 - 5.1, 5.4, 5.6*	

Referencia: *Creación propia a partir del juego comercial "Trivial Pursuit"*
(el juego fue diseñado y utilizado durante la fase práctica del master en un aula bilingüe)

Material necesario: *Tablero de juego. Fichas de cada uno de los tres tipos. 1 dado. 2 fichas circulares.*



Reglas del juego: *Se enfrentan dos equipos, de 1 ó 2 jugadores cada uno. El objetivo del juego es completar la ficha de juego con 6 "quesitos", dos de cada color.*

Se sortea el orden de juego. Cada equipo lanza el dado y avanza ese número de casillas. En la casilla de destino se debe coger una carta, del mismo color que el de la casilla, de los montones situados en el centro del tablero. Cada casilla corresponde a un tipo diferente de actividad:

- *Casillas amarillas: Los alumnos tienen que analizar la función contestando a preguntas sobre: dominio de definición, rango, continuidad, máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento.*
- *Casillas azules: Los alumnos tienen que comprobar si ciertos puntos pertenecen a la función escrita en la casilla, además de aprender vocabulario para nombrar a la variable dependiente e independiente.*
- *Casillas verdes: Los alumnos deben calcular la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.*

Si el equipo responde correctamente puede seguir tirando, hasta un máximo de tres veces consecutivas. Si la respuesta es incorrecta, pierde el turno.

Si un equipo cae en una de las casillas "Choose category" el equipo puede elegir la casilla del color que desee y responder como si hubiese caído en esa casilla. Si contesta correctamente, gana un "quesito" del color de la tarjeta.

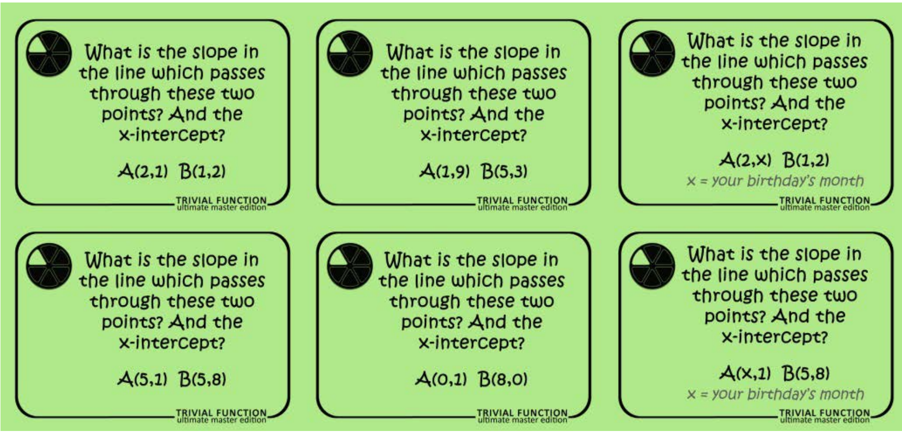
Gana el primer equipo que reúna 6 "quesitos", dos de cada color.

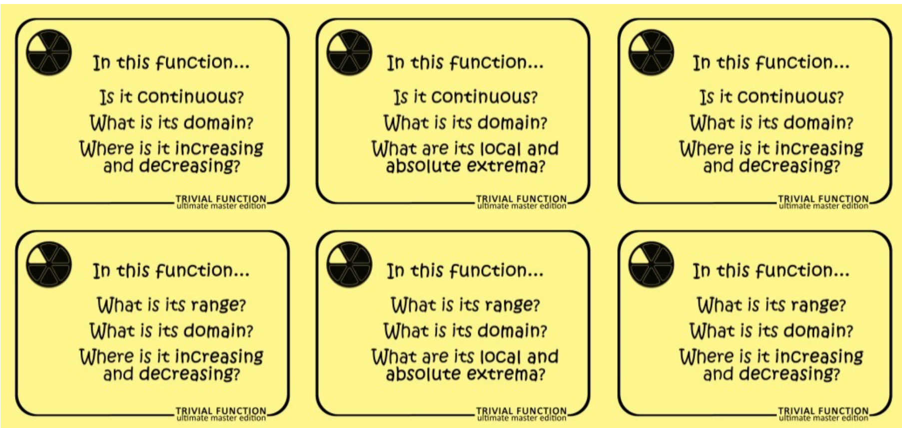
Desarrollo en el aula: *Se trata de una actividad para consolidar conocimientos sobre análisis de funciones. Para que la actividad se realice de forma fluida es imprescindible que los alumnos tengan un grado de conocimiento mínimo sobre el análisis de funciones.*
Las tarjetas están diseñadas para evitar que los alumnos memoricen el contenido de las mismas.
Es importante durante el desarrollo de la actividad que el profesor muestre una actitud activa, solventando las dudas y comprobando que los alumnos responden correctamente a las preguntas.

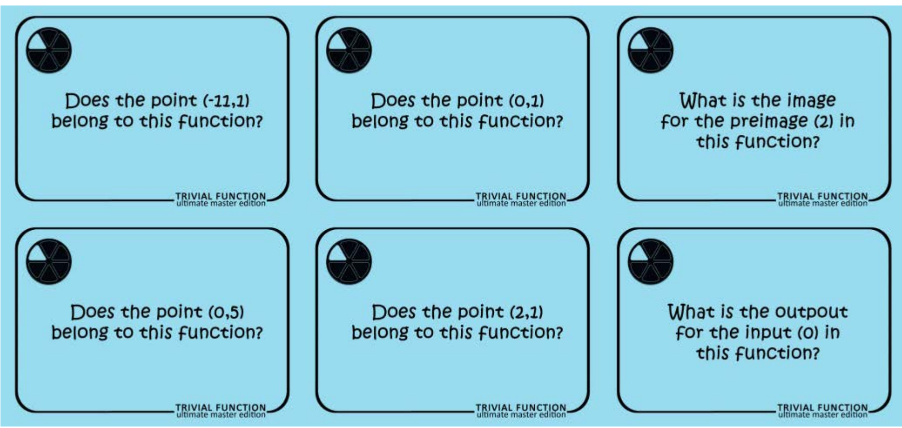
Variantes: *Si los alumnos muestran un nivel elevado, respondiendo correctamente a todas las preguntas, se pueden introducir algunas variantes:*

- *Cambiar el contenido de las tarjetas, aumentando su dificultad.*
- *Reduciendo el tiempo que tienen los alumnos para contestar.*

Ejemplos de algunas de las tarjetas:







Traducción de las tarjetas:

Tarjetas Verdes:

¿Cuál es la pendiente en la línea que para por estos dos puntos?

¿Y el punto de corte con el eje de las x?

Tarjetas Amarillas:

En esta función:

¿Cuál es el dominio?

¿Cuál es el rango?

¿Cuál son los máximos y mínimo locales y absolutos?

¿Dónde es creciente y decreciente?

¿Es continua?

Tarjetas Amarillas:

¿Pertenece este punto a la función?

¿Cuál es la imagen para la pre imagen (n) en esta función?

¿Cuál es el valor de salida para el valor de entrada (n) en esta función?

Ficha: *23* **Título**: *"¿Quién es quién"*

Tema: 6 y 7 *"Gráficas y análisis"*

Tipo: *3*

Jugadores: *2*

Objetivos: *1.1, 1.3, 1.4, 1.5 – 5.1, 5.2, 5.3, 5.6*

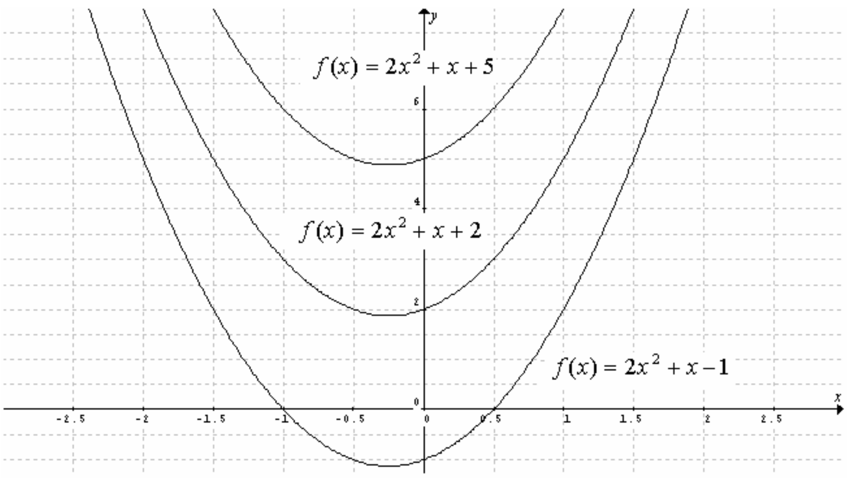
Referencia: Referencia: *Creación propia.*

Material necesario: *Fotocopias con dos juegos de ejes cartesianos, uno en blanco y otro con una función dibujada y su expresión algebraica escrita.*

Reglas del juego: *Se enfrentan dos jugadores. El objetivo del juego es adivinar la expresión algebraica del jugador rival, antes de que el otro jugador adivine la tuya. Es imprescindible que los jugadores no puedan ver el folio del otro jugador.*

Se sortea qué jugador comienza. El jugador que comienza dice un valor para la variable independiente, y el otro jugador contesta con el valor de la variable dependiente en su función. El jugador que ha preguntado marca el punto correspondiente a esas coordenadas en su juego de ejes cartesianos en blanco. Los jugadores van nombrando valores de la variable independiente por turnos.

Gana el primer jugador que sea capaz de deducir, con los puntos dibujados, la expresión algebraica de la función.



Algunos ejemplos de gráficas cuadráticas que se pueden utilizar

Variantes: *Existen diferentes variantes.*

(1) Se va aumentando la dificultad de las gráficas que tienen que adivinar los alumnos. Es recomendable empezar jugando alguna partida con rectas, hasta que los alumnos sean conscientes de que siempre ganará el siguiente jugador en participar al necesitar sólo dos puntos.

(2) Se entrega a los alumnos los dos juegos de ejes cartesianos en blanco y se les pide que dibujen y escriban la función que tiene que adivinar su compañero. Es conveniente dar algunas directrices para la elección de la función a representar, para asegurarnos de que los alumnos pueden adivinarlas.

Desarrollo en el aula: *Se trata de una actividad para trabajar el cambio de expresión de una función de su forma gráfica a su forma algebraica. Es importante haber trabajado en clase cómo obtener expresiones algebraicas a partir de una tabla de valores o de una gráfica.*

Es una actividad que puede realizarse en el aula de forma paralela al estudio de diferentes tipos de funciones, dedicando cada día unos minutos.

Para favorecer la motivación, se puede organizar un torneo entre los alumnos, intentando que todos los alumnos jueguen contra todos. No tienen por qué ganar siempre los alumnos de más talento; en algunos tipos de funciones, la suerte al elegir valor para la variable independiente, es más determinante.

Ficha: *24* — Título: *“Adivina quién soy”*

Tema: 7 *“Análisis func.”*

Tipo: 3 y 4

Jugadores: *todos*

Objetivos: *1.3, 1.4 - 5.1, 5.4, 5.7*

Referencia: *Creación propia.*

Material necesario: *Cartulinas con gráficas dibujadas.*

Reglas del juego: *Se divide a los alumnos en grupos, de 3 a 5. Previamente a la realización de la actividad, el profesor prepara tantas fichas con funciones expresadas en forma gráfica, como grupos se organicen.*

Se da a cada grupo una hoja donde aparecen situaciones reales provenientes de diferentes ámbitos, que se corresponden con las funciones. Se da también a cada grupo una de las fichas con gráficas dibujadas boca abajo.

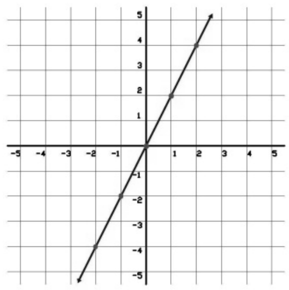
Cuando el profesor lo indica, los grupos giran las fichas y tienen un tiempo fijado para estudiar la gráfica, anotar datos, e intentar saber con qué situación se corresponde. Pasado ese tiempo, los grupos tienen que pasar sus fichas al grupo situado a su derecha.

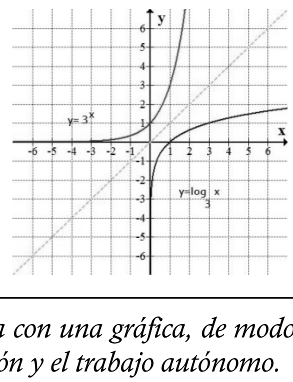
Cuando todos los grupos han agotado todas las fichas, éstas se retiran y se deja a los grupos un par de minutos para debatir, apoyándose en las anotaciones, qué función corresponde con cada situación.

Gana el equipo que más situaciones logre acertar.

Ejemplos de uso en la vida real de funciones que se pueden utilizar en esta actividad.

- ***Función lineal:*** *Precio de un parking de pago por horas, precio del alquiler de equipos, temperatura de ebullición del agua en relación con la altura…*
- ***Función exponencial y logarítmica:*** *cálculo de interés de una inversión, desintegración radiactiva, creación de escalas de medición de sonido (decibelios), intensidad de terremotos (Richter) o acidez de productos cosméticos (pH)…*
- ***Función polinómica:*** *relación espacio/tiempo en movimientos acelerados, crecimiento de poblaciones, depreciación del valor de un objeto,*
- ***Función hiperbólica:*** *repartos inversamente proporcionales…*





Variantes: *Se puede pedir a cada grupo de alumnos que prepare una tarjeta con una gráfica, de modo que las tarjetas estén hechas por los propios alumnos, para incentivar la investigación y el trabajo autónomo.*

Se puede pedir también que además de acertar con qué situación se corresponde cada una de las funciones, extrapolen la expresión algebraica de cada gráfica. Para ello deben ser funciones adaptadas a su nivel.

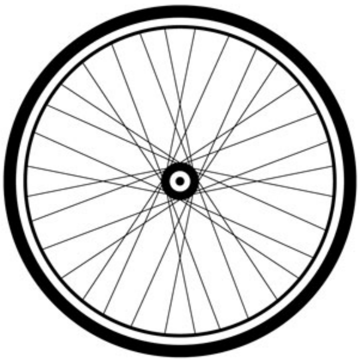
Desarrollo en el aula: *Se trata de una actividad que permite a los alumnos identificar el uso de las funciones en la vida cotidiana. Para realizar la actividad es necesario que los alumnos tengan unos conocimientos básicos sobre las propiedades de diferentes tipos de funciones.*

Se propone realizar la actividad, con las fichas diseñadas por el profesor, en mitad del desarrollo de la unidad didáctica, dejando para el final la actividad donde los propios alumnos diseñan las fichas. De este modo la segunda vez que se realiza la actividad, se puede utilizar para evaluar la comprensión de los alumnos del significado en la vida real de cada uno de los tipos de funciones.

Ficha: *25*	**Título**: *"¿Quién demonios es π?"*	**Tema:** *8* *"Geo. planas"* **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.2, 1.4, 1.5 – 4.1, 4.2, 4.11*	

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "Mates de cerca" Editorial GRAÓ. Biblioteca de aula 287. 1995.*

Material necesario: *Lo que traigan los alumnos. Se les pide con antelación que traigan objetos que tengan circunferencias (ruedas, platos, tazas, discos, etc.) Todos deben traer algo a clase.*






Desarrollo en el aula: *Para los alumnos el número π es un concepto difícil de entender. Se presenta como un número lleno de decimales sin sentido (aparece incluso antes de hablar de los números irracionales). Pero nos hemos parado a pensar ¿Qué es pi? ¿Qué representa? Con esta actividad podemos introducir el número pi como una relación presente en las circunferencias.*

Se trata de una actividad muy sencilla de llevar a cabo en clase. Cada alumno tiene un objeto circular en las manos, que él mismo ha traído, de su elección. Se les pide que midan el perímetro de la circunferencia. Para ello pueden utilizar cintas métricas metálicas si los objetos son grandes, o de un hilo que rodee la circunferencia que posteriormente se mide con una regla.

Una vez que se dispone del contorno de la circunferencia (perímetro), se trata de estimar el diámetro o el radio. Obviamente las medidas que se obtengan, por precisos que intentemos ser, van a ser aproximadas. Esta idea debe quedar clara a los alumnos. Dependiendo además del objeto que hayan traído, tendremos un margen de precisión mayor o menor.

A continuación se divide el perímetro entre el diámetro. En función de la precisión alcanzada, se dispondrá de un número más o menos aproximado al valor del número π.

Ficha: *26*	**Título**: *"Buscágono"*	**Tema:** 8 *"Geo. plana"* / **Tipo:** *3*
Jugadores: *2*	**Objetivos:** *1.2, 1.3, 1.4 – 4.1, 4.2, 4.11*	

Referencia: *ANTOLÍN, J.; CORBALÁN, F. y GAIRIN J. M. Materiales matemáticos. MAT-MAT (Universidad Autónoma de Barcelona). 1987 (con ampliación personal)*

Material necesario: *Baraja de 39 cartas. En la cara anterior hay una figura dibujada y en la cara posterior hay tres características (que permiten su identificación): el número de lados, si los lados y ángulos son iguales o desiguales, y si al prolongar algún lado la figura queda cortada en algún punto.*
En el juego original las figuras representadas son: 7 triángulos, 11 cuadriláteros, 6 pentágonos, 7 hexágonos, 5 octógonos, y 3 dodecágonos, aunque pueden cambiarse según las necesidades del aula.

Reglas del juego: *Se disponen las cartas encima de la mesa, con la cara que tiene dibujada la figura hacia arriba. Uno de los jugadores, sin que su compañero lo vea, escoge una carta y le da la vuelta, apuntando las características descritas. A continuación, devuelve la carta a su sitio. El otro jugador tiene que adivinar de que carta se trata haciendo preguntas cuya respuesta sólo puede ser sí o no. Por ejemplo, ¿Es regular?, ¿Tiene 5 lados? Gana el jugador que logre adivinar la figura con el menor número de preguntas.*

Desarrollo en el aula: *Se trata de un juego cuyo objetivo es la clasificación de los polígonos planos, así como el repaso de algunas de sus propiedades.*
En 3º de la ESO debería de ser una actividad de repaso, no de nuevos conocimientos. Esto significa que el juego en el aula se puede abordar explicando las normas y dejando jugar a los alumnos, sin explicación de contenidos. De este modo podemos evaluar lo que los alumnos saben y repasar sólo aquellas partes que no recuerden.

Variantes: *Con las mismas cartas, una variante para los mismos o más jugadores (hasta 5) sería la siguiente (variación del chinchón con baraja española):*
Se definen los criterios de clasificación, que pueden ser los mismos que hay detrás de las cartas (número de lados, regularidad, cóncavo/convexo). Se reparten 7 cartas a cada jugador y las demás se dejan en un montón en el centro de la mesa. Cada jugador, atendiendo a los criterios de clasificación que más le favorezcan, tiene que agrupar sus cartas para conseguir un trío y un cuarteto. Hasta que uno de los jugadores logre tener un cuarteto y un trío, por turnos, los jugadores pueden coger la carta superior del montón de las sobrantes y cambiarla por una de las que tienen en la mano, dejando la carta que tenían en la mano al final del mazo.
Además de las posibles variantes de juego, hay que especificar que las cartas son perfectamente sustituibles por otras, sin tener que modificar las reglas, adaptándose el juego al nivel del aula.

Ficha: *27* **Título**: *“Juego del triángulo”*

Tema: 8 *“Geo. plana”*

Tipo: *3*

Jugadores: *4 aprox.*

Objetivos: *1.4 – 4.1, 4.2, 4.11*

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. “Juegos Matemáticos para secundaria y Bachillerato” Editorial Síntesis. Madrid. 1998. (diseñado por J. Antolín)*

Material necesario: *Tres dados cúbicos normales, y una hoja para apuntar los resultados.*

Reglas del juego: *El número más conveniente de jugadores es cuatro pero puede variar en función de las necesidades del aula.*
Cada uno de los jugadores, por turno, tira los tres dados a la vez y comprueba si con los valores que obtiene se puede construir un triángulo (tomando los valores como las medidas de los lados). Existen 4 posibilidades: que se pueda construir un triángulo escaleno, un triángulo isósceles, un triángulo equilátero, o que no se pueda construir ningún triángulo.
Lograr un triángulo escaleno se valora con 1 punto, el isósceles 2 y el equilátero 3. Si no se puede formar ningún triángulo, el jugador recibe 0 puntos.
En la hoja de resultados se anotan los valores de los tres dados y los puntos que obtiene cada jugador en cada tirada. Gana el jugador que antes consiga un número de puntos prefijado, o el que más puntos tenga después de un número fijo de tiradas.

nº	Jugador 1			P	Jugador 2			P	Jugador 3			P	Jugador 4			P
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																

Desarrollo en el aula: *Se trata de un juego cuyo objetivo es el repaso de la clasificación de los triángulos, así como las propiedades de cada uno de los triángulos*
En 3º de la ESO debería de ser una actividad de repaso, no de nuevos conocimientos. Esto significa que el juego en el aula se puede abordar explicando las normas y dejando jugar a los alumnos, sin adelantar las pautas para reconocer o formar triángulos. De este modo podemos evaluar lo que los alumnos saben y repasar sólo aquellas partes que no recuerden.
La puntuación nula, puede no darse de inicio y esperar a que en alguno de los grupos se dé la situación de no encontrar ningún triángulo. En ese momento aprovechar para explicar las propiedades de la formación de triángulos. Se puede debatir si se considera apropiada la valoración fijada, para detectar si son capaces de reconocer que el triángulo escaleno es el que más fácilmente puede componerse y el equilátero o el isósceles los que menos, debido a que las condiciones para su formación son más restrictivas.

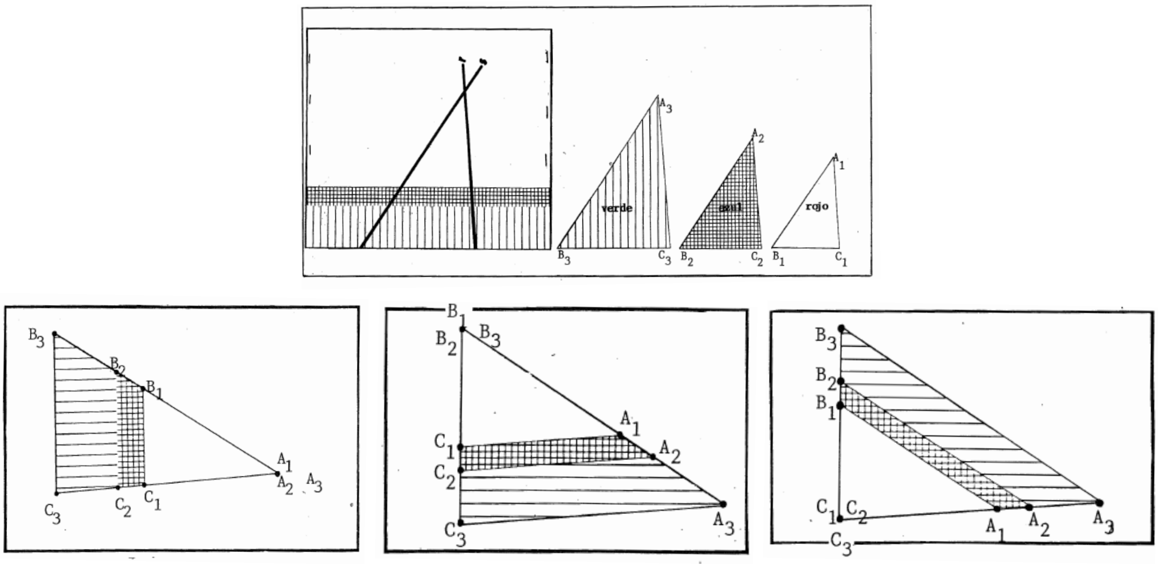
Variantes:
Para aumentar el número de longitudes posibles de los lados (en el juego original sólo pueden ser 1-6), pueden crearse algoritmos específicos. Por ejemplo, un lado será la suma de tres valores, otro lado el producto de los tres valores y el tercer lado el valor más pequeño. De esta forma, además de trabajar las propiedades geométricas de los triángulos podemos aprovechar el juego para afianzar conocimientos de álgebra. También se puede pedir construir triángulos rectángulos, acutángulos u obtusángulos, dependiendo de la clasificación que se quiera trabajar.

Problemas que pueden surgir en el aula:
Que los alumnos no recuerden la clasificación y formación de triángulos. En ese caso antes de empezar a jugar se deberá realizar una breve exposición con las propiedades y formas de reconocer cada uno de los triángulos, utilizando el juego como una actividad posterior de consolidación.

Ficha: *28*	**Título**: *"En posición de Thales"*	**Tema:** *8* *"Geo. planas"* **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.2, 1.4, 1.5 – 4.1, 4.3, 4.4, 4.11*	

Referencia: *PUEYO LOSA, M. Revista SUMA, nº 4. 1989*

Material necesario: *folios de colores (tres folios de colores distintos para cada alumno). Tijeras, semicírculo graduado, regla.*



Desarrollo en el aula: *El teorema de Thales, uno de los resultados de geometría más importantes, es para muchos alumnos una simple línea de texto que aprender de memoria. Esta actividad trata de hacer comprender su importancia e interés.*

Se pide a los alumnos que coloquen los tres folios según se indica en la figura 1 (superpuestos, con los bordes paralelos pero no coincidentes), recortando los tres folios a la vez, por dos líneas cualesquiera como las que se indican en la figura 1.

Con este sencillo mecanismo han construido tres triángulos, a primera vista diferentes. En primer lugar podemos pedir a los alumnos, que con ayuda de un transportador de ángulos midan los ángulos de los tres triángulos. Comprobarán que sus tres triángulos tienen los ángulos iguales. Es el momento de explicarles que era algo obvio, pues comparten el ángulo superior, y los otros dos ángulos se forman por paralelas al lado opuesto a ese ángulo. Debemos poner énfasis en eso, que los triángulos se forman haciendo paralelas a uno de los lados, y esto no sólo ocurre con los triángulos en la posición en la que hemos cortado los folios, sino que se pueden mover los triángulos (en las posiciones de la figura) y ver que en los tres casos, los lados no coincidentes son paralelos.

A continuación, se pide a los alumnos que elijan una de las tres posiciones (la que quieran, pues luego tendrán que repetir el procedimiento en las otras dos). Con los triángulos colocados en esa posición (suponemos que es la 1) tienen que comprobar las siguientes medidas:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2};\ \frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{A_1C_1}{A_3C_3};\ \frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3}$$

Además de comprobar las igualdades, es conveniente que dejen anotados los valores.

A continuación se les pide que realicen la misma comprobación pero para las otras dos posiciones, fijándose en los valores que aparecen, pues deben coincidir. Por ejemplo:

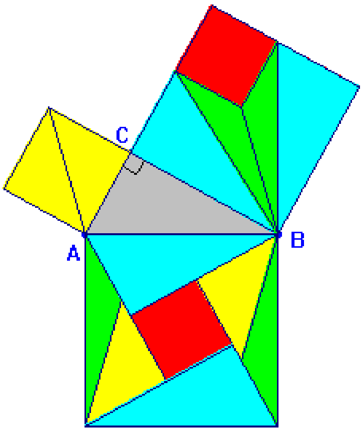
$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$$

Una vez han terminado y comprobado que los alumnos han llegado a los resultados, es el momento de explicar que lo que ha sucedido: no es casualidad, son triángulos semejantes, y detrás se encuentra el teorema de Thales.

Ficha: *29*	**Título**: *"Tangram pitagórico"*	**Tema:** *8* *"Geo. planas"* / **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.2, 1.4, 1.5 – 4.1, 4.4, 4.5, 4.11, 4.12*	

Referencia: *Construcción tradicional.*

Material necesario: *Cartulinas o folios, y tijeras.*



$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \begin{array}{l} a=\sqrt{b^2+c^2} \\ b=\sqrt{a^2-c^2} \\ c=\sqrt{a^2-b^2} \end{array}$$

Desarrollo en el aula: *El teorema de Pitágoras es otro de los resultados de geometría básicos, que los alumnos suelen aprender de memoria, sin llegar a razonar o entender realmente.*
Con esta actividad se pretende que los alumnos visualicen, creando con sus propias manos, una reproducción de la esencia de dicho teorema. No hay que olvidar que se trata de un teorema de origen geométrico, aunque luego en el aula se use desde un punto de vista más algebraico.

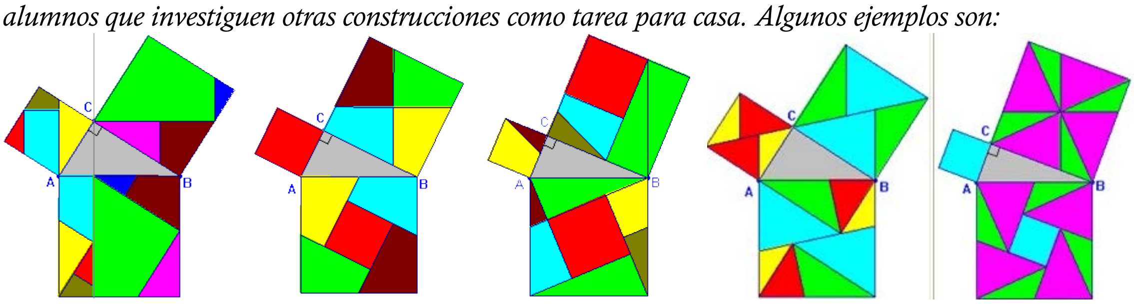
En primer lugar se pide a los alumnos que dibujen un triángulo rectángulo, el que quieran La única condición es que sea rectángulo. Se les puede hacer una pequeña aclaración sobre el tamaño que debe ocupar con respecto al total de la cartulina, para que tengan espacio suficiente para hacer toda la construcción.

Después, sobre el cateto menor, dibujan un cuadrado, que dividirán en dos triángulos iguales. Sobre el cateto mayor realizan la construcción que se ve en la imagen superior. Existen varios modelos de puzzles pitagóricos. Se ha escogido éste debido a la sencillez constructiva, ya que está basado principalmente en simetrías, que además, pertenecen a los contenidos de 3º ESO.

Con las construcciones sobre los dos catetos realizadas, se les pide que recorten las piezas y traten de generar un solo cuadrado con todas ellas. Se les puede dejar un rato para intentarlo y finalmente darles la posición correcta de las piezas, si no la han obtenido.

Se trata por tanto de una construcción sencilla, que pueden llevarse a casa después, y que les permite visualizar la esencia de este teorema.

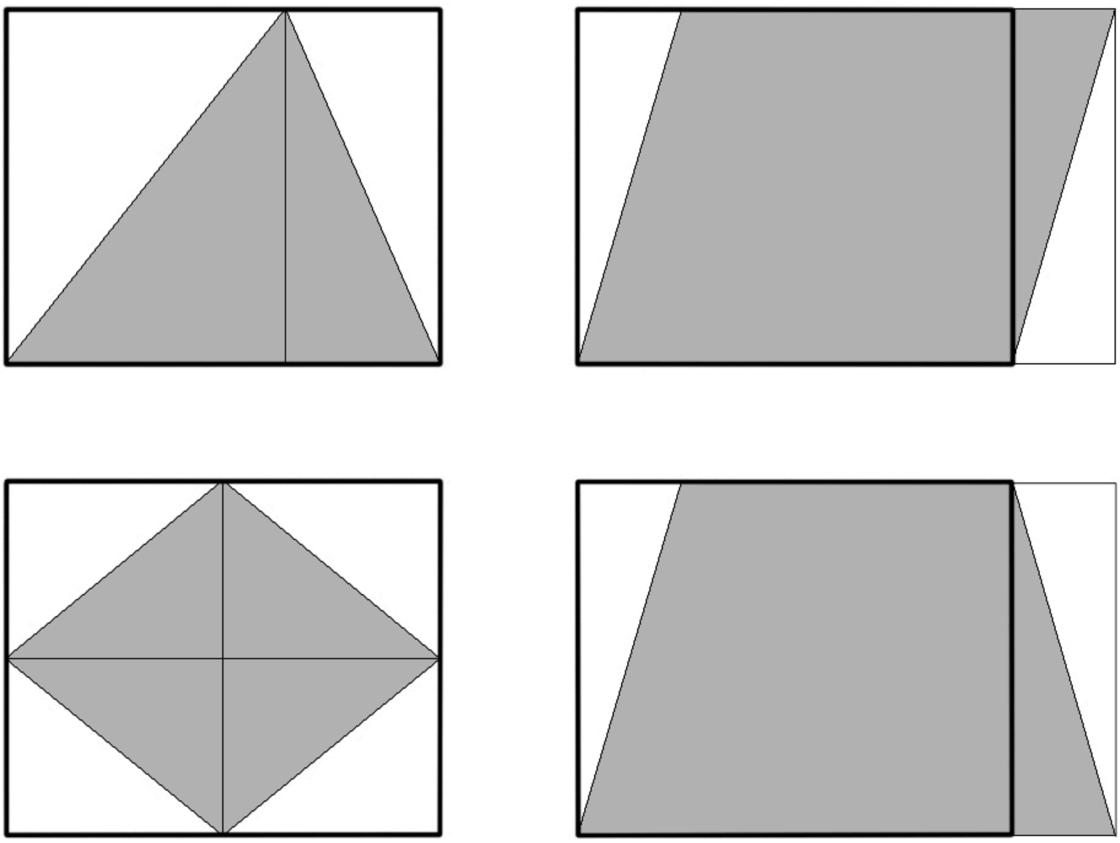
Variaciones: *Existen muchos modelos de rompecabezas pitagóricos. Se puede usar otro en el aula o pedir a los alumnos que investiguen otras construcciones como tarea para casa. Algunos ejemplos son:*



Ficha: *30*	**Título**: *"Un disfraz rectangular"*	**Tema:** *8* *"Geo. planas"* **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.1, 1.3, 1.4, 1.5 – 4.1, 4.5, 4.11, 4.12*	

Referencia: *Construcciones tradicionales.*

Material necesario: *Cartulinas o folios, y tijeras.*



Desarrollo en el aula: *Se trata de una sencilla de actividad para que los alumnos repasen áreas planas. En primer lugar se recuerda a los alumnos la definición de área plana y el cálculo del área de cuadrados y rectángulos.*

A continuación se pide a los alumnos que dibujen en las cartulinas las siguientes figuras de las medidas que desees: un triángulo, un rombo, un romboide, un trapecio y otra figura que no cumpla ninguna de las condiciones anteriores, ni sea una esfera. Cada una de ellas se debe dibujar y recortar por duplicado.

Cuando los alumnos tienen preparadas las figuras geométricas, se pide a los alumnos que hagan un panel en el que coloquen las figuras respetando las siguientes condiciones:

Una copia de cada figura, debe recortarse para convertirse en un rectángulo.

La copia modificada y la original deben situarse al lado, colocando la fórmula que se deduzca de la construcción, debajo de la copia modificada

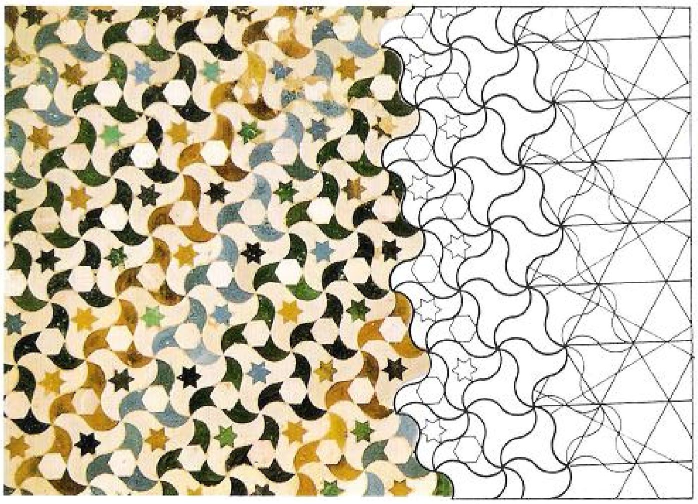
Por último, una de las copias de la última figura, se recorta formando triángulo y se coloca en el panel con la descomposición echa.

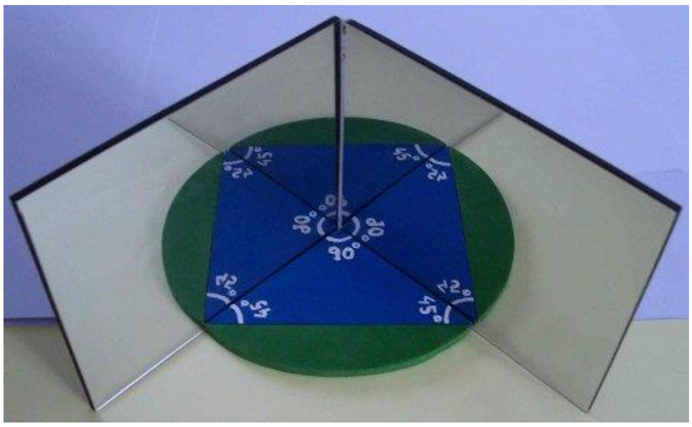
Los paneles permaneces en el aula durante toda la unidad didáctica. Los alumnos pueden observar en los paneles, con figuras distintas pero de iguales características, estrategias para calcular su área.

Ficha: *31*	Título: *"Artistas por un día"*	Tema: *9* *"giros, simetrías"* / Tipo: *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.4 - 4.5, 4.9, 4.11*	

Referencia: *Creación propia a partir del artículo BLANCO MARTIN, Mº F. Movimientos y simetrías. Universidad de Valladolid. 1994*

Material necesario: *Cartulinas de colores. Fotocopias con los 17 grupos cristalográficos.*



Desarrollo en el aula: *Antes de exponer una visión algebraica de traslaciones, giros y simetrías podemos ofrecer a los alumnos la posibilidad de experimentar con los conceptos geométricos. Y una forma de motivar esa experimentación es apoyarse en conceptos intuitivos propios de su edad.*

Para realizar la actividad, explicamos brevemente en primer lugar los distintos grupos cristalográficos. No se trata de que los aprendan, sino de explicar cómo funcionan, que existe un motivo generador que podemos girar, desplazar, etc., para rellenar un plano.

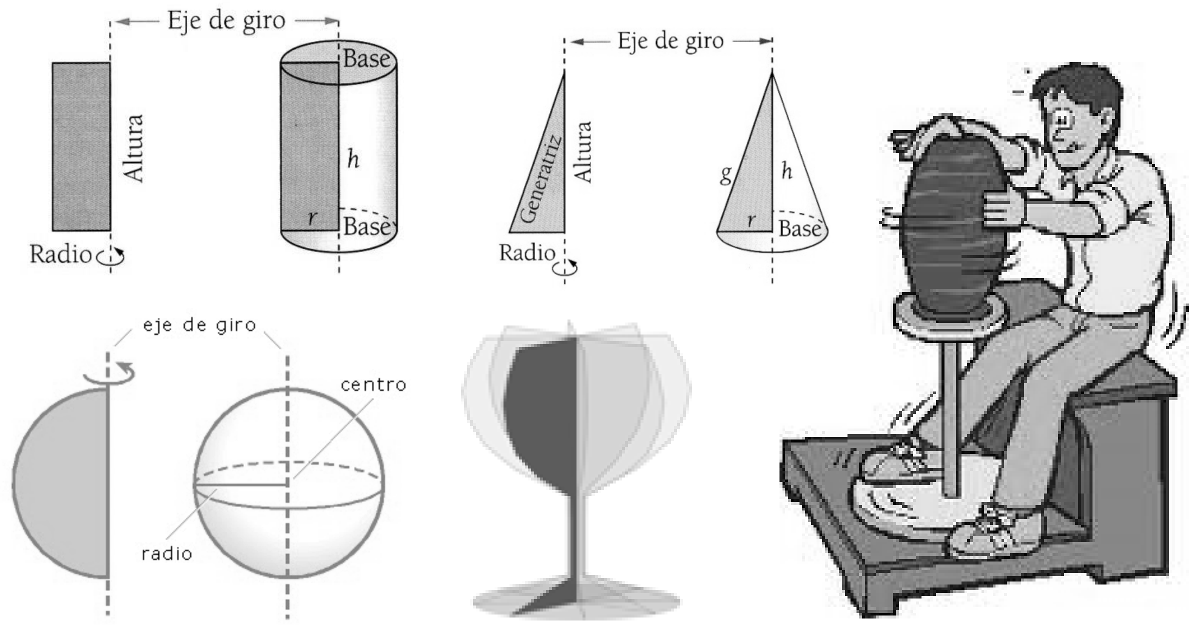
A continuación, es momento de que ellos mismos creen su propio diseño. Las dudas se van solventando sobre la marcha, el objetivo es que experimenten con giros, simetrías y translaciones. Si son capaces de comprender lo que significa cada uno de esos movimientos, la comprensión de la transcripción algebraica será más sencilla.

*Para que la creación y experimentación con las diferentes combinaciones posibles se realice de forma más dinámica pueden usarse espejos convencionales, o el libro-espejo de **Z. Dienes**, para la creación de las imágenes.*

Ficha: *32*	**Título**: *"Geometría centrifugada"*	**Tema:** *9* *"giros, simetrías"* / **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.4 - 4.6, 4.8, 4.11*	

Referencia: *Construcción tradicional.*

Material necesario: *Hilo, cartulinas, pegamento, regla.*



Desarrollo en el aula: *Una forma sencilla de entender la repercusión de giros y simetrías en la formación de cuerpos geométricos, es construir uno mismo esos cuerpos geométricos. Los cuerpos generados por traslación, como puede ser un prisma, quizás necesiten un poco de imaginación o un programa informático, que nos permita activar un rastro del movimiento para una construcción más visual, pero los cuerpos de revolución son fácilmente "construibles" en directo.*

Primero pedimos a los alumnos que recorten en un trozo de cartulina (debe ser cartulina lo más rígida posible, para que al girar no se doble y perdamos el efecto deseado) una de las figuras básicas, un triángulo o un cuadrado. A continuación, se pega uno de sus lados a un trozo de hilo largo, que sobresalga superior e inferiormente. No hay más que retorcer el hilo lo más que se pueda y tirar de los extremos con fuerza.

Una vez construidos por este procedimiento el cono y el cilindro, se pide reflexionar sobre cómo obtener medio círculo a partir del giro de una recta respecto de un punto (fácilmente visualizable moviendo un lapicero) ¿Y si ahora giramos ese semicírculo respecto a un eje perpendicular? De un modo similar al anterior, se pide a continuación recortar el semicírculo y pegarlo a un hilo para tratar de hacer entender la obtención de la esfera a partir del movimiento de un segmento respecto a dos ejes perpendiculares.

Después de construir los tres cuerpos básicos, se propone la construcción de otros cuerpos de revolución, aprendiendo qué tienen todos ellos en común, secciones circulares perpendiculares al eje de giro y secciones idénticas paralelas al eje de giro.

Por último se comenta el trabajo de un alfarero en el torno. Al hacerlo girar y colocar las manos, consigue que todas las secciones paralelas al eje de giro sean iguales, y las secciones perpendiculares al eje de giro son circulares. Así, les resulta fácil deducir que en el torno se construyen cuerpos de revolución.

Ficha: *33*	**Título**: *"Pictionary 3D"*	**Tema:** 10 *"Ele. Espacio"* / **Tipo:** *3*
Jugadores: *Varios*	**Objetivos:** *1.1, 1.3, 1.5 - 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.6, 4.8, 4.10, 4.11*	

Referencia: *Juego comercial. Thiry. 1990*

Material necesario: *Útiles de dibujo básicos (papel, lápiz, goma, pinturas, regla…). Tarjetas de juego.*

Reglas del juego: *Se enfrentan dos equipos, con un mínimo 2 jugadores (se recomienda un máximo de 4 jugadores por equipo). Cada equipo numera a sus jugadores para saber el orden del dibujante.*

El primer dibujante del primer equipo coge una tarjeta del montón sin que los demás jugadores la vean. El jugador que ha cogido la tarjeta, debe hacer un dibujo para ilustrar el contenido de la misma. No estará permitido dibujar números ni simbología matemática habitual, ni en general símbolo alguno que pueda aparecer en un teclado de ordenador habitual.

Los compañeros de equipo del jugador que dibuja tienen un tiempo determinado para adivinar el contenido de la tarjeta, por ejemplo 45 segundos. Pasado ese tiempo se abre un segundo periodo, más corto que el anterior, por ejemplo de 15 segundos, donde ambos equipos pueden responder. Pasados ambos periodos de tiempo, si ningún equipo ha conseguido adivinar el contenido de la tarjeta, el jugador dibujante pierde el turno, pasando a dibujar un jugador del otro equipo.

Gana el equipo que pasado un número de rondas determinado o un tiempo total estipulado, tenga más puntos.

Variantes: *Con esta mecánica de juego, las variantes son tan grandes como obvias. Con sólo cambiar el contenido de las tarjetas podemos variar los contenidos con los que trabajan los alumnos. Algunos ejemplos de conceptos para tarjetas, divididos por temáticas serían:*

Geometría 3D	***Geometría 2D***	***Otros campos (Algebra…)***
Poliedro regular, poliedro irregular, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro, esfera, cono, sección de un plano y un cono, coordenadas terrestres, huso horario, longitud y latitud…	*Ángulos complementarios, área, circunferencia inscrita, diagonal, mediana, puntos alineadas, polígono cóncavo, polígono convexo, triangulo acutángulo, polígono semejante, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, simetría, giro, elemento invariante de una simetría, elemento invariante de un giro, elipse, parábola, hipérbola…*	*Coeficiente, coordenadas, distancia, ecuación, exponente, fórmula, función, logaritmo, monomio, número imaginario, número racional, número real, número complejo, polinomio, probabilidad, propiedad distributiva, raíz cuadrada, valor absoluto…*

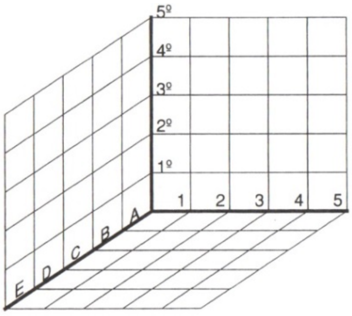
Desarrollo en el aula: *A pesar de que se trata de un juego que tiene una gran variedad de aplicaciones en el aula se ha decidido incluirlo en el tema de elementos del espacio porque se considera que el hecho de tener que dibujar los conceptos puede ayudar a entrenar la capacidad espacial de los alumnos. El uso de este juego en el aula se situaría antes de la realización de ejercicios de carácter más algebraico con elementos tridimensionales y geométricos (que en la actualidad son la base del aprendizaje en estos temas) ayudando así a los alumnos a familiarizarse con los elementos básicos.*

De este modo ayudamos a los alumnos a "aprehender" las propiedades geométricas de cada elemento, teniendo que crear imágenes concretas que las definan. Los alumnos aprenden a relacionar las imágenes mentales con las propiedades geométricas que ven en el aula, y así cuando se enfrenten a problemas donde intervengan esas figuras geométricas, tendrán más herramientas para modelizar el problema, uno de los puntos de mayor fracaso en este tipo de ejercicios.

Ficha: *34*	**Título**: *"Batallas espaciales"*	**Tema:** 10 *"Ele. Espacio"* **Tipo:** *2 y 3*
Jugadores: *2*	**Objetivos:** *1.4, 1.5 - 4.6, 4.7, 4.10, 4.11*	

Referencia: Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "Juegos Matemáticos para secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998. (Variación propia)*

Material necesario: *Triedro de cartulina (puede ser fácilmente hecho en clase, tiene que estar cuadriculado y numerado en los tres ejes), piezas cúbicas de dos colores (como las de los juegos infantiles de construcción), papel y lápiz.*



Reglas del juego: *Se enfrentan dos jugadores. Los triedros deben estar enfrentados en la mesa donde se vaya a desarrollar el juego, de modo que los jugadores no puedan ver el interior del triedro del rival.*

Los jugadores se ponen de acuerdo en el número de "naves" a disponer, sirva como ejemplo la disposición de barcos original del famoso juego de los años cuarenta del siglo pasado "hundir la flota": 2 portaaviones (5 cubos), 3 buques (3 cubos), 5 lanchas (1 cubo). Uno de los colores de los cubos (negro por ejemplo), son los que forman las naves, el otro (blanco) es simplemente de apoyo, para poder sostener las naves a una determinada altura.

Los jugadores van diciendo coordenadas por turnos, y el rival debe contestar "tocado" si en esa coordenada hay un cubo negro, o "agua" en caso de que no haya cubo negro, es decir, en caso de que el lanzamiento rival no toque sus naves. Si un jugador logra tocar todos los cubos que forman una de las naves de su rival, éste debe decir "hundido" para indicar que ha perdido una de las naves.

Gana el jugador que primero logre "derribar" todas las naves del rival.

Variantes: *Existen dos posibles formas de complicar el juego, elevando el nivel de conocimientos del mismo, así como su ejecución.*

(3) Los barcos pueden tener diferentes formas, esferas, conos, piramidales… para ello es necesario disponer en el aula de materiales para poder "construir" y sujetar las naves, pero sobre todo que los alumnos sean capaces de "calcular" casi instantáneamente si un lanzamiento rival toca una de las naves. En este caso se puede introducir la palabra "rozado" cuando un lanzamiento esté en una casilla ocupada sólo parcialmente por una nave.

(4) Hacer que los lanzamientos sean lineales, no puntuales, es decir, los jugadores indican su lanzamiento dando dos puntos, y el "misil" atraviesa el triedro rival como una recta, pudiendo tocar varias naves a la vez. Se trata de una variación que exige un entrenamiento espacial muy alto, pero que puede ser útil para trabajar con intersecciones de figuras en el espacio.

Desarrollo en el aula: *Tanto el juego inicial como sus variaciones, pueden servir como introducción al sistema de coordenadas espacial, trabajando tanto el uso del sistema de coordenadas como la ubicación de elementos en el mismo. Se fomenta también la percepción espacial por parte del alumno, además de la búsqueda de estrategias. Es un juego, sobre todo la primera variación, recomendado para los primeros pasos del alumno con el trabajo tridimensional, siendo muy útil para que el alumno empiece a interpretar las figuras en el espacio.*

Ficha: *35*	**Título**: *"La luz de Apolonio"*	**Temas:** 10 *"Ele. Espacio"* **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.2, 1.4, 1.5 – 4.5, 4.8, 4.11*	

Referencia: *Creación propia.*

Material necesario: *Una o varias linternas con luz potente. Cartulina negra. Un cono seccionado (o cono de Apolonio), que pueden construir los alumnos en clase de tecnología, partiendo de un cono de madera para manualidades.*

Desarrollo en el aula: *Se trata de una actividad que a la hora de llevarse a cabo puede dividirse en dos partes, ambas con el mismo fin: mostrar a los alumnos que las cónicas tienen propiedades como familia de curvas, y que todas ellas surgen de secciones planas realizadas a un cono por planos en posiciones determinadas.*

La primera parte de la actividad se desarrolla con el aula a oscuras (razón suficiente para conseguir un ambiente diferente de motivación entre los alumnos). Es necesario utilizar una linterna o foco de cierta calidad, capaz de proyectar un cono de luz visible. Pedimos a uno de los alumnos que sujete la linterna en una posición fija. Enfrentando la cartulina negra a la luz de la linterna, simularemos secciones del cono de luz. Tan sólo tenemos que definir las cónicas en función de la posición de la cartulina (plano que secciona). Como actividad, podemos pedirles que entreguen un dossier fotográfico que podrán realizar en casa, por grupos, etc., con la silueta de todas las cónicas. (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola)

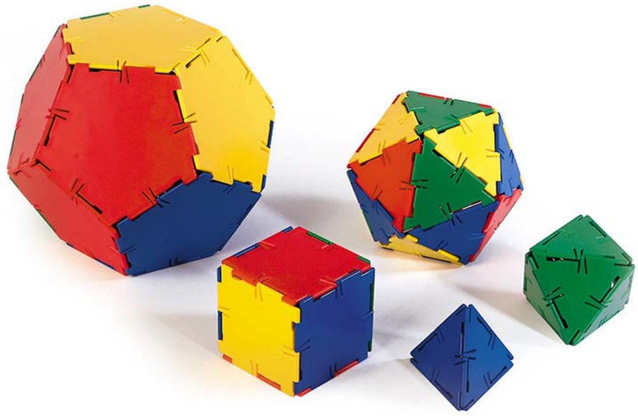
La segunda parte de la actividad, consistiría en la creación por parte de los alumnos de un "Cono de Apolonio", un cono seccionado de forma que cada una de sus piezas muestra una de las cónicas. Para ello tan sólo necesitan un cono de madera y acceso a la sala de tecnología del centro. La actividad puede desarrollarse por el propio profesor de matemáticas o en colaboración con el profesor de tecnología. Podría realizarse en solo una única sesión, pues sólo es necesario dar cuatro cortes por pieza. Al terminar los alumnos pueden pintar las piezas y conservarlas como ayuda para su estudio.

Durante la actividad pueden hacerse referencias a Apolonio de Perga (S. III a.C.) y a su obra "Cónicas" donde se relata el cono que ellos mismos están construyendo, o a la película Ágora sobre la figura de Hipatia de Alejandría.

Ficha: *36*	**Título:** *“Polydron”*	**Temas: 11** *8+9+10* / **Tipo:** *1*
Para todos los alumnos	**Objetivos:** *1.2, 1.4, 1.5 – 4.6, 4.7, 4.11, 4.12*	

Referencia: *Juego comercial,* **http://www.polydron.co.uk/**

Material necesario: *Conjunto de piezas, que se puede adquirir en la página web de la empresa.*




Desarrollo en el aula: *Se trata de una variación de juegos de piezas y construcción para niños que hay en el mercado. En este caso se ha modificado de modo que las piezas básicas de construcción sean polígonos regulares, que además comparten la longitud del lado, con lo cual pueden unirse y experimentar en la formación de poliedros así como obtener de una forma sencilla sus desarrollos.*

Uno de los lotes cuenta además con piezas auxiliares que permite construir esferas y cilindros, con lo cual se manejan prácticamente todas las figuras que se trabajan en el aula.

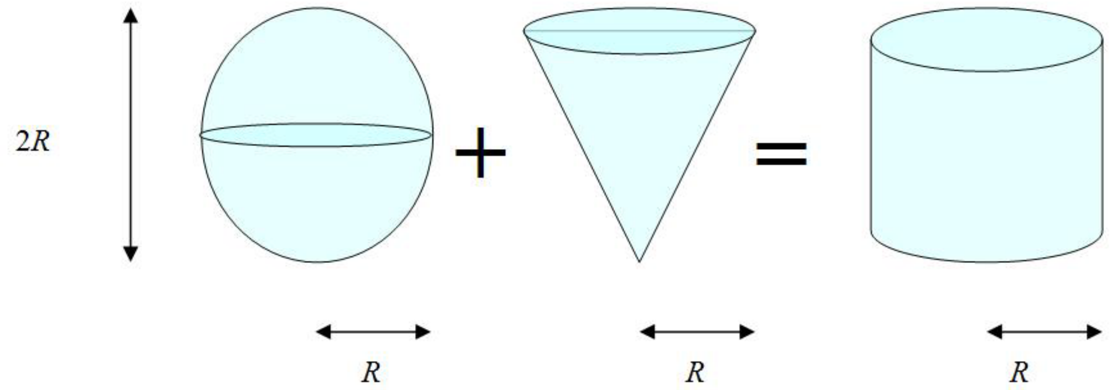
El juego ofrece multitud de posibilidades en el aula, siendo para el curso que nos ocupa las más importantes:

- *Identificación y desarrollo de poliedros regulares.*
- *Volumen y área de poliedros regulares.*
- *Unión de partes de poliedros conocidos, para trabajar con áreas y volúmenes de figuras mixtas.*
- *Estudio de configuraciones y relaciones geométricas.*
- *Estudios de planos de simetría en poliedros.*
- *Experimentación. Se puede trabajar de manera manipulativa para resolver cuestiones teóricas como por ejemplo ¿Por qué no puedo formar un poliedro de más de 12 caras con pentágonos? ¿Puedo formar un poliedro con hexágonos? Y ver fácilmente que al sumar ángulos en uno de los vértices, obtengo un ángulo completo, con lo cual no puedo cerrar el polígono.*

Ficha: _37_	**Título**: _"Una relación especial"_	**Tema:** 11 _"Áreas y vol."_ **Tipo:** _1_
Para todos los alumnos	**Objetivos:** _1.2, 1.4, 1.5 – 4.6, 4.11, 4.12_	

Referencia: _Creación tradicional._

Material necesario: _Un cilindro, una esfera y un cono de plástico transparentes (por lo menos el cilindro) todo ellos con el mismo diámetro. Agua._



Desarrollo en el aula: _Los volúmenes de los cuerpos de revolución suelen generar dificultades a los alumnos. La relación "base x altura", que sí parece intuitiva y genera menos problemas, sólo pueden aplicarla al cilindro. ¿Y cómo entender el porqué de la fórmula del volumen de la esfera, o del cono? Lo más fácil para muchos es aprender de memoria algo que no logran comprender. Con esta sencilla experiencia tratamos de conseguir que los alumnos relacionen los volúmenes de la esfera y el cono con los del cilindro._

Con las tres figuras encima de la mesa preguntamos a los alumnos: ¿alguien se atreve a adivinar qué pasará si trato de juntar los volúmenes de esta esfera y este cono? Puede que algún alumno conteste correctamente, pero para aquellos que nunca se hayan parado a pensarlo el resultado será sorprendente. Llenamos el cono de agua (el cono no debe tener base) y lo vertemos dentro del cilindro. A continuación introducimos la esfera dentro del cilindro y hacemos ver que el agua se alinea exactamente con el borde del cilindro (nótese que de intentar llenar la esfera con agua y verterla en el cilindro, el grosor de las figuras nos puede jugar una mala pasada y faltar "un poco" para completar el cilindro, perdiendo así el efecto). Es decir que el volumen de la esfera junto al del cono es igual al del cilindro.

A continuación sacamos la esfera y nos preguntamos qué parte del cilindro representa sólo uno de los dos cuerpos. Para averiguarlo, no tenemos más que rellenar el cono y verter sobre el cilindro dos veces más cantidad para llenarlo. Con esto hemos conseguido que vean fácilmente que el cono representa 1/3 del cilindro, lo que apoyándonos en lo que hemos visto antes significa que la esfera tiene 2/3 del volumen que la contiene. Y sabiendo el radio de la esfera es fácil conocer el cono que la contiene, base la circunferencia de ese radio y altura dos veces el radio. Hemos reducido de manera sencilla el problema del volumen de la esfera y el cono al volumen de un cilindro, que comprenden mucho mejor.

Si hubiera tiempo suficiente, es aconsejable dejarlos "jugar" con las figuras y el agua, para que experimenten de primera mano.

Ficha: *38* — **Título**: *"Carrera de dados"*

Tema: 13 *"Prob." (+12)*
Tipo: *2 (3)*

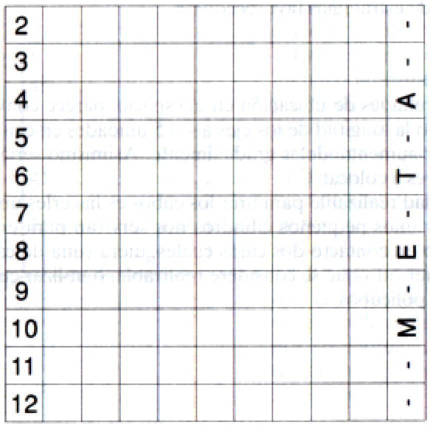
Nº de jugadores: *2*

Objetivos: *1.1, 1.4, 1.5 - 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14*
Desde el tipo 3 (6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5)

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "Juegos Matemáticos para secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998.*

Material necesario: *Un tablero con 11 filas que puede ser reproducido sobre el propio cuaderno del alumno Se dibujan en él los números del 2 al 12 en la primera columna. Dos dados. 10 fichas, distinguibles 5 y 5 de ellas (monedas, piedras…)*

Tablero de juego



Reglas del juego: *Para empezar, por turnos, cada jugador va colocando sus fichas sobre los números de la primera columna del tablero (van eligiendo, el 5, el 8, el 11…).*
Una vez que los jugadores han colocado sus fichas, tiran los dos dados por turnos. Suman el valor de ambos dados y el jugador que tenga la casilla en esa fila puede avanzar su ficha una casilla hasta la meta.
Gana el jugador que logre llegar con una de sus fichas hasta la meta.

Desarrollo en el aula: *El uso en el aula de este juego estaría situado al comienzo del tema, siendo uno de los objetivos principales de su uso, el acercamiento intuitivo a la idea de probabilidad.*
Primero se plantea a los alumnos que jueguen, es imprescindible que los alumnos hayan jugado algunas partidas antes de pasar a una fase posterior de análisis. Se puede pedir a los alumnos que anoten las fichas de los valores que ganan, incluso anotar la posición en que quedan todas las fichas. Con varias partidas por cada pareja, y sumando todos los grupos que se establezcan en clase, deberían de poder obtenerse resultados de los que deducir conclusiones.
Se pueden discutir también los diferentes cambios que introduce la fila que queda sin escoger, utilizando el mismo modo de actuar, anotando los resultados que se obtienen con cada una de las elecciones.
Con los diferentes resultados obtenidos, y tras una aproximación intuitiva a los diferentes conceptos, se podrían introducir de manera formal los conceptos de espacio muestral, suceso aleatorio, etc.

(Tipo 3. En el análisis que se hace con los alumnos, el uso de tablas de frecuencias, cálculo de media, moda, etc., puede servir como repaso del tema anterior.)

Variantes: *Una de las variantes de este juego consiste en reducir el número de filas a 6 (del 0 al 5). Los alumnos tiran 5 monedas al aire y contamos el número de caras, siendo esa fila la que avanza hacia la meta. ¿Por qué valor de caras debemos decantarnos?*

Problemas que pueden surgir en el aula:
Que los alumnos jueguen varias partidas pensando que se trata de un juego completamente dependiente del azar. El profesor debe instar a los alumnos a reflexionar sobre qué valores han ganado y a buscar una estrategia ganadora, indicando que no se trata de un juego sólo de "azar".

Ficha: *39* **Título**: *"El Dado ganador"*

Tema: 13 *"Prob." (+12)*

Tipo: *2 (3)*

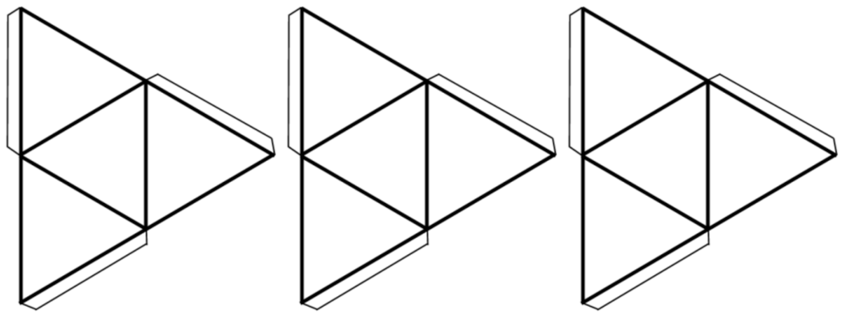
Nº de jugadores: *2*

Objetivos: *1.1, 1.4, 1.5 - 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14*
Desde el tipo 3 (6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5)

Referencia: *CÓLERA, José. "Visión didáctica de la estadística y el azar" en aspectos didácticos de matemáticas. 3. Zaragoza. 1990.*

Material necesario: *Se necesitan 3 dados con forma de tetraedro (pueden construirse en clase, con cartulina, aprovechando los conocimientos de geometría de temas anteriores. En ellos deben estar dibujados los siguientes valores.*

Dado A: 6, 3, 3, 3 – Dado B: 5, 5, 2, 2 – Dado C: 4, 4, 4, 1



Desarrollo de los dados

Reglas del juego: *Las reglas del juego son muy sencillas. El jugador que empieza elige un dado (el que quiera). El otro jugador elige otro de los dados que quedan (el que desee también). Ambos jugadores lanzan los dados, ganando el que obtenga el número más alto.*

Desarrollo en el aula: *El uso en el aula de este juego estaría situado al comienzo del tema, siendo uno de los objetivos principales de su uso, el acercamiento intuitivo a la idea de probabilidad.*
Después de haber dejado que los alumnos jueguen unas cuantas partidas se trata de resolver las siguientes cuestiones:

- *¿Qué dado debe elegir el primer jugador para aumentar sus posibilidades de ganar?*
- *¿Qué dado debe elegir el segundo jugador, para cada elección de dado del jugador uno, para aumentar sus posibilidades de ganar?*
- *¿Ambos jugadores están en igualdad de condiciones? ¿Qué jugador tiene ventaja?*

Para poder resolver las cuestiones los alumnos deben anotar las diferentes situaciones que se van dando a lo largo del juego, dándose cuenta de que pueden reproducirlas todas sin necesidad de que las jueguen, obteniendo las simulaciones en su cuaderno, utilizando diagramas de árbol, por ejemplo.
De este modo se obtiene que entre los dados A y B, A gana en 10 de las 16 veces. Entre los dados B y C, B gana 10 de 16 veces y entre C y A, el dado A gana en 9 de 16 veces. Es decir que A gana a B, B gana a C y C gana a A (por este motivo se suelen denominar "dados no transitivos"). Lo cual significa que si somos el segundo jugador en escoger tendremos una posibilidad mínima de ganar de 9/16.
Para poder llegar a conclusiones más generales es necesario que se den todos los pasos intermedios, que los alumnos jueguen libremente y que vayan planteándose las dudas necesarias. ¿Es mejor que empiece yo, o mi compañero? ¿Qué dado es mejor escoger? ¿Se trata de azar puro, o puedo controlar mis posibilidades?

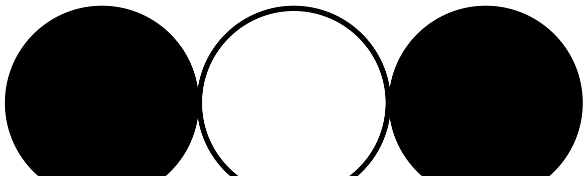
(Tipo 3. En el análisis que se hace con los alumnos, el uso de tablas de frecuencias, cálculo de media, moda, etc., puede servir como repaso del tema anterior.)

Problemas que pueden surgir en el aula:
Que los alumnos no entiendan la no transitividad de los resultados. Puede parecer contrario a la lógica para los alumnos, será necesario hacer hincapié dejando claro el hecho de que siempre hay un dado "mejor" que el que escoja el primer jugador.

Ficha: *40*	**Título**: *"Feriante ventajista"*	**Tema:** 13 *"Prob." (+12)* **Tipo:** *2 (3)*
Nº de jugadores: *2*	**Objetivos:** *1.1, 1.4, 1.5 - 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14* *Desde el tipo 3 (6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5)*	

Referencia: *CÓLERA, José. "Juegos y cachivaches para el estudio del azar", en Apuntes de educación, nº 37, abril-junio. 1990. (Juego popular)*

Material necesario: *Se necesitan 3 fichas con dos caras distinguibles. Pueden ser círculos de papel pintados, o gomets pegados de dos en dos. Una de las fichas debe tener las dos caras negras, otra las dos caras blancas y la tercera una cara negra y una cara blanca.*



Las tres fichas de juego, con una cara blanca hacia arriba.

Reglas del juego: *Las reglas del juego son muy sencillas. Aunque su comprensión requiere algo más de tiempo. Un jugador esconde las tres fichas de modo que el otro no pueda verlas, saca una enseñando sólo una de sus caras. El otro jugador debe apostar si la cara oculta es blanca o negra.*

Desarrollo en el aula: *El uso en el aula de este juego estaría situado al comienzo del tema, siendo uno de los objetivos principales de su uso, el acercamiento intuitivo a la idea de probabilidad y darnos cuenta de que en la probabilidad no debemos dejarnos llevar por las apariencias.*

Al igual que en los juegos anteriores, es fundamental que a los alumnos practiquen el juego suficientemente para que alcancen a entender el objetivo.

Un análisis superficial del juego nos dice que una vez nos enseñan una cara, tenemos dos opciones: que la otra cara sea igual, o que no lo sea. En principio ambas tienen el mismo número de posibilidades, lo que convierte el hecho de ganar o no la apuesta en una cuestión de azar. Se pide entonces que se anoten los resultados.

Sumando los resultados de todos los alumnos se debería concluir que una de las dos opciones aparece con una frecuencia aproximadamente el doble que la otra. ¿Cómo es esto posible?

Es el momento de hacer reflexionar a los alumnos que el juego tiene dos fases. Antes de decidir, nuestro compañero ha tenido que escoger una de las fichas. Si retrocedemos hasta el principio del juego, hay seis opciones diferentes. (3 fichas, 6 caras). De esas 6, hay 3 negras y 3 blancas, para cada una de las 3 negras, 2 tienen la otra negra y sólo 1 tiene la otra cara blanca. Lo mismo ocurre con la opción de que la cara vista sea blanca. Es decir, que una vez nos enseñan una cara, hay 2 de 3 opciones de que la otra cara sea del mismo color. Un primer análisis del juego nos ha hecho cometer errores. No se trata de un juego equitativo, de ahí el nombre del juego, el feriante "ventajista".

(Tipo 3. En el análisis que se hace con los alumnos, el uso de tablas de frecuencias, cálculo de media, moda, etc., puede servir como repaso del tema anterior).

Problemas que pueden surgir en el aula:
Para los alumnos resulta muy difícil negar la pregunta que parece evidente, "veo una cara blanca, hay dos monedas con caras blancas, la otra puede ser o blanca o negra, por tanto hay las mismas posibilidades".
Se debe hacer un análisis riguroso en la fase de explicación del juego. Establecer de manera precisa las 6 posibilidades iniciales para que puedan seguir el razonamiento completo.

Ficha: *41* — **Título**: *"Cruzar el rio"*

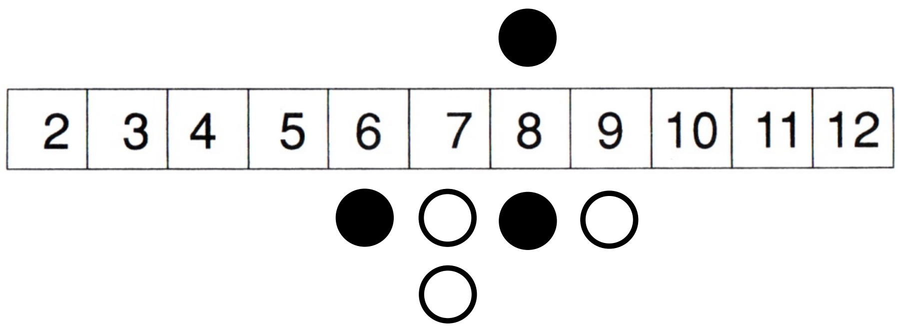
Tema: 13 *"Prob." (+12)*
Tipo: *2 (3)*

Nº de jugadores: *2*

Objetivos: *1.1, 1.4, 1.5 - 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14*
Desde el tipo 3 (6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5)

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "Juegos Matemáticos para secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998.*

Material necesario: *Un tablero de juego con once casillas numeradas del 2 al 12. 22 fichas, diferenciadas 11 a 11 (monedas, piedras…). Dos dados cúbicos normales.*



Reglas del juego: *Cada jugador coloca sus fichas debajo de las casillas del tablero. Puede escoger donde las coloca, cada una bajo una casilla, todas bajo la misma, repartidas… con total independencia, además, de donde las coloque el otro jugador. Una vez fijadas, los jugadores tiran los dados alternativamente, sumando el valor de ambos. Cada jugador puede mover (cruzar con su ficha el tablero/río) una ficha que este situada en el valor que haya salido en los dados.*

Desarrollo en el aula: *Se trata de un juego de probabilidad algo más complejo que los anteriores, por lo tanto es aconsejable desarrollarle en el aula después, o tras una explicación más exhaustiva.*

Si los alumnos ya han jugado a algunos de los juegos anteriores, rápidamente descubrirán que no todas las casillas tienen la misma probabilidad de salir, pero ¿Es entonces la mejor jugada colocar todas las fichas en el 7? ¿Es mejor repartir algunas de las fichas? En este caso el estudio de casos es más complejo.

En el caso de que no hayan jugado a ninguno de los juegos anteriores, se les deja jugar por su cuenta y después se procede a un análisis general. Se estudia en la pizarra que todos los valores no son equiprobables.

Una vez alcanzado este punto (el mismo que si hubieran jugado ya a alguno de los juegos anteriores), se analiza cómo repartir las fichas. Para ello se les pide que hagan un estudio detallado de todos los casos, reflexionando sobre ellos, intentando asociar un valor de probabilidad a cada uno de ellos.

(Tipo 3. En el análisis que se hace con los alumnos, el uso de tablas de frecuencias, cálculo de media, moda, etc., puede servir como repaso del tema anterior).

Variantes: *Una variante del juego es poner un tablero que tenga sólo casillas del 0 al 5 y jugar con la resta de los dos dados. El estudio de casos podría resultar más sencillo a los alumnos.*

Problemas que pueden surgir en el aula:
Entender que no todas las casillas tienen la misma probabilidad y que no se trata sólo de un juego de azar puede resultar bastante evidente para los alumnos. Pero a la hora de hacer el estudio de casos, para ver que reparto de fichas puede ser el más beneficioso, a los alumnos les puede resultar tedioso tener que hacer todo el estudio de casos, o incluso difícil en función de los alumnos. Se trata de un juego que puede profundizar en la probabilidad a distintos niveles, corresponde al profesor particular de cada grupo evaluar hasta qué punto se debe profundizar con el grupo en cuestión.

Ficha: *42*	**Título**: *"Pares o Nones"*	**Tema:** 13 *"Prob." (+12)* **Tipo:** *2 (3)*
Nº de jugadores: *2*	**Objetivos:** *1.1, 1.4, 1.5 - 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14* *Desde el tipo 3 (6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5)*	

Referencia: *CORBALÁN, Fernando. "Juegos Matemáticos para secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998.*

Material necesario: *Dos dados cúbicos, con valores numerados del 1 al 6.*

Reglas del juego: *Los jugadores eligen entre pares o nones. Se lanzan los dados, y se suman los valores, obteniendo un valor par o impar, de tal modo que se anota un punto al jugador correspondiente.*

Desarrollo en el aula: *Se trata de un juego de probabilidad muy sencillo tanto de llevar a cabo como de reflexionar. Es un juego que lleva poco tiempo desarrollar en el aula.*
Se puede dejar a los alumnos jugar el tiempo que deseemos y después se les pide que digan que prefieren, si elegir pares o nones. Llevados por su intuición, algunos alumnos osados, podrían responder una de las dos opciones, pero la única manera certera de saberlo, es saber todas las posibilidades que tenemos para poder valorarlos.
Antes incluso de valorar todas las opciones, (mediante un esquema de árbol por ejemplo), se les puede pedir que anoten los resultados y dejar que jueguen de nuevo. Sumando los valores de toda la clase, con un valor grande y representativo, podríamos ir haciendo que los alumnos intuyan la respuesta correcta.
Después de realizar el diagrama de árbol, mostramos a los alumnos que se trata de una sucesión equiprobable.

(Tipo 3. En el análisis que se hace con los alumnos, el uso de tablas de frecuencias, cálculo de media, moda, etc., puede servir como repaso del tema anterior).

Variantes: *En lugar de sumar los valores de ambos dados, se multiplican, ¿qué elegirías ahora? Con un estudio de la misma forma podemos ver que en este caso, no se trata de una jugada equiprobable, siendo la posibilidad de obtener pares mucho mayor.*

Problemas que pueden surgir en el aula:
Entender que no todas las casillas tienen la misma probabilidad y que no se trata sólo de un juego de azar puede resultar bastante evidente para los alumnos. Pero a la hora de hacer el estudio de casos, para ver que reparto de fichas puede ser el más beneficioso, a los alumnos les puede resultar tedioso tener que hacer todo el estudio de casos, o incluso difícil en función de los alumnos. Se trata de un juego que puede profundizar en la probabilidad a distintos niveles, corresponde al profesor particular de cada grupo evaluar hasta qué punto se debe profundizar con el grupo en cuestión.

5. Conclusiones.

Después de realizar la selección de actividades y una comparación con los objetivos marcados para el proyecto, estás son las principales conclusiones extraídas:

- ***Todos los objetivos son susceptibles de ser trabajados con otro tipo de actividades fuera de las convencionales.*** Si bien es cierto que algunos son significativamente más sencillos, como los relacionados con la geometría o la probabilidad, precisamente aquellos que menos acostumbrados estamos a ver, como actividades relacionadas con el álgebra, o las funciones, son aquellas que mayor motivación pueden ocasionar en los alumnos, por su parte de sorpresa.
- ***Las actividades expuestas en este trabajo se presentan como una buena manera de trabajar los objetivos del bloque 1 (bloque común).*** Son objetivos que con un método más clásico basado en clases magistrales y ejercicios es difícil trabajar. En cambio con actividades de tipo lúdico, al observar el índice por objetivos, se observa que los objetivos del *bloque 1* están presentes en la mayoría de actividades.

6. Futuras líneas de mejora del proyecto.

Después de finalizar la propuesta, y con la consciencia de las limitaciones enfrentadas durante su realización, se proponen las siguientes mejoras.

- ***Experimentar y profundizar para mejorar la selección.*** La mayoría de las actividades presentadas han sido seleccionadas o modificadas a partir del material propuesto por pedagogos y matemáticos como ***Corbalán*** y ***de Guzmán***, son pocas las actividades que han sido desarrolladas desde cero. Esto se debe principalmente a la falta de tiempo para experimentar en primera persona estas actividades con los alumnos o para desarrollar un número de actividades mayor. Destacar el caso de estudiosos como ***Z. Dienes*** que dedicó casi toda su vida a desarrollar este tipo de materiales y actividades.

  "Se propone como futura línea de mejora, realizar una práctica real de la selección de actividades planteadas, evaluando su eficacia y proponiendo posibles cambios, tanto modificaciones de las actividades, como inclusión o eliminación de actividades."

- ***Completar todos los cursos de secundaria.*** Una forma de facilitar la implantación de este tipo de actividades es que los alumnos se acostumbren a trabajar con ellas, no sólo de manera esporádica. Durante el presente trabajo sólo se ha podido realizar la propuesta para un solo curso por falta de tiempo.

  "Se propone como futura línea de mejora la creación de un glosario de actividades de formato similar, pero para cada uno de los cursos de educación secundaria, creando un programa coherente entre los diferentes cursos."

- ***Revisión continua para adecuarse a las necesidades de alumnado como grupo social.*** Algunas de las actividades propuestas en el presente trabajo, han sido diseñadas hace décadas. Los conceptos matemáticos en los que se basan no han cambiado, pero los alumnos sí.

  "Se propone como futura línea de mejora la revisión de las actividades planteadas en el presente trabajo, estudiando las preferencias y la evolución del alumnado como grupo social, adaptando las actividades que sea necesario, o creando algunas nuevas que respondan mejor a las necesidades del alumnado actual."

- ***Compatibilización del material manipulativo físico con elementos digitales.*** Como se ha señalado, actualmente el debate por el uso de materiales didácticos, se ha trasladado al debate por el uso de materiales didácticos físicos o digitales. La aparición de nuevos programas y recursos electrónicos, acompañado de la expansión de equipos informáticos entre alumnos y profesores parece estar ganando la batalla.

  "Se propone como futura línea de mejora enfrentar ambos tipos de materiales. Ofreciendo ventajas y limitaciones de unos y otros. Posterior a esa confrontación de estilos, se propone la creación de un programa de actividades común que potencie las ventajas aportadas de ambas opciones."

7. Bibliografía.

7.1. Bibliografía en papel.

ALSINA, C; BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. Mª. *"Materiales para construir la Geometría". Editorial Síntesis. Madrid. 1988.*

ALONSO, P. y SALAR, A. *"Actividades con calculadora". Curso "Las matemáticas en la etapa 12-16", Zaragoza, comunicación interna. 1993.*

ANTOLÍN, J.; CORBALÁN, F. y GAIRIN J. *"M. Materiales matemáticos". MAT-MAT (Universidad Autónoma de Barcelona). 1987*

BLANCO MARTÍN, Mº F. *"Movimientos y simetrías". Publicaciones Universidad de Valladolid. 1994.*

CARRETERO, R; CORIAT, M y NIETO, P. *"Secuenciación organización de contenidos y actividades de Aula. Junta de Andalucía. Materiales curriculares. 1995.*

CASCALLANA, M.T. "*Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos" Editorial Santillana, Madrid. 1988.*

CÓLERA, J. *"Visión didáctica de la estadística y el azar", en aspectos didácticos de matemáticas. 3. Zaragoza. 1990.*

CÓLERA, J. *"Juegos y cachivaches para el estudio del azar", en Apuntes de educación, nº 37, abril-junio. 1990b.*

CORBALÁN, F. y GAIRIN J. M. *"Juegos en clase de matemáticas". Barcelona. Cuadernos de pedagogía. Nº160, junio 1988.*

CORBALÁN, F. *Juegos, enseñanza y matemáticas. Gijón, Signos, nº1. 1990*

CORBALÁN, F. *"La matemática aplicada a la vida cotidiana" Editorial GRAÓ. Biblioteca de aula. 115. 1995.*

CORBALÁN, F. *"Mates de cerca" Editorial GRAÓ. Biblioteca de aula, nº 287. 1998.*

CORBALÁN, F. *"Juegos Matemáticos para secundaria y Bachillerato" Editorial Síntesis. Madrid. 1998b.*

CROUSE, R. J. y SWEENEY, M. J. *"Algebra tic-tac-times", Mathematics Teacher, 1991*

DIENES, Z.P. *"Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas". Barcelona, Ed. Teide. 1971*

GARCIA AZCARATE, A. *"Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas: números y algebra" Servicio de publicaciones de la universidad autónoma de Madrid. 1999.*

GIMENEZ, J. *"La importancia de lo tangible para el aula de las matemáticas". Revista de didáctica de las matemáticas "Números". Vol. 43-44. Pg. 47-52. 2000.*

GRUPO AZARQUIEL. *Ideas y actividades para enseñar algebra. Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Nº 33. Madrid, Síntesis. 1993*

de GUZMÁN, M. *"Matemáticas, creatividad y rigor". Cuadernos de pedagogía, nº 291, pp. 44-49. Mayo. 2000.*

de GUZMÁN, M. *"Mirar y ver. Demostraciones Visuales.". Editorial Nivola. 2004.*

HERNÁN, F. y CARRILLO, E. *"Recursos en el aula de matemáticas". Editorial Síntesis. Madrid. 1988.*

MORA I CAÑELLAS, LL. *"Revista Suma", nº7. Pp. 47-52. 1991.*

MEAVILLA SEGUÍ, V. y OLLER MARCÉN, A.M. *"Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos". Revista de didáctica de las matemáticas "Números". Vol. 82. Pp. 89-100. 2013.*

PUEYO LOSA, M. *Revista SUMA, nº 4. 1989*

PUIG ADAM, P. *"El material didáctico matemático". Revista de enseñanza media. Madrid. 1985.*

REVISTA SUMA. *"El Drago: Juego de funciones", nº7. Pp.47-52. 1991*

REVISTA SUMA. *"Pedro Puig Adam, maestro", nº 34. Junio, pp.9-20. 2000*

SANCHEZ PESQUERO, C.; CASAS GARCIA, L.M. *"Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas". Centro de investigación y documentación educativa (CIDE). Bilbao. 1998*

7.2. Bibliografía digital.

BOCYL, DECRETO 52/2007*, de 17 de mayo; por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León*

http://www.educa.jcyl.es/es/curriculo/educacion-secundaria-obligatoria.ficheros/87187-Curriculo%20de%20Secundaria.pdf

GONZÁLEZ MARÍ, J. L. *"Recursos, material didáctico y juegos y pasatiempos: Consideraciones generales." 2010.*

http://www.gonzalezmari.es/materiales_infantil_primaria_y_ESO._Consideraciones_generales.pdf

GRUPO ALQUERQUE. *Sevilla*

http://www.grupoalquerque.es/

MARIA REINA ESKOLA. *Aulas de apoyo. Donostia.*

http://aulasptmariareinaeskola.es/dbh2-eso2/matem%C3%A1ticas/juegos-matem%C3%A1ticos/

MAURICIO C. *"Matemáticas a través de los juegos". 2004*

http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS3.pdf (numéricos)

http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS4.pdf (algebraicos)

http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS5.pdf (geométricos)

http://www.mauriciocontreras.es/JUEGOS6.pdf (probabilidad, estadística y estrategia)

PÉREZ SANZ, A. *"Historia de la enseñanza de las matemáticas." 2005.*

http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/donosti/historia_%20ensenanza.htm