

**VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LAS  
ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO A TRAVÉS  
DE PRUEBAS FORMALES Y PRUEBAS PREFORMALES**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesorado en Educación  
Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza  
de Idiomas (Especialidad de Matemáticas)**



**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID  
(Didáctica de la Matemática)  
CURSO 2013/2014**

**Alumna: Ana Mahamud Gutiérrez  
Tutora: Cristina Pecharromán Gómez  
Fecha: Valladolid, Julio de 2014**

## **ÍNDICE**

---

	<b><u>Página</u></b>
1. <u>Introducción</u> .....	4
2. <u>Análisis curricular</u> .....	6
2.1. <u>Legislación Educativa</u> .....	6
2.2. <u>Currículo a través de textos</u> .....	8
3. <u>Marco Teórico</u> .....	13
4. <u>Marco Metodológico</u> .....	17
4.1. <u>Metodología en esta investigación</u> .....	19
5. <u>Objetivos e hipótesis de trabajo</u> .....	20
6. <u>Planificación y Desarrollo de la acción</u> .....	21
6.1. <u>Diseño de enseñanza</u> .....	21
6.2. <u>Instrumentos de recogida de datos</u> .....	26
6.3. <u>Análisis de la Docencia por la profesora investigadora</u> .....	32
6.4. <u>Análisis de la docencia por un observador externo</u> .....	34
6.5. <u>Reflexión final</u> .....	39
7. <u>Análisis de Datos</u> .....	40
7.1. <u>Cuestionario de valoración del aprendizaje (Examen)</u> .....	40
7.2. <u>Errores y dificultades de aprendizaje</u> .....	52
7.3. <u>Análisis del cuaderno de los alumnos</u> .....	53
7.4. <u>Análisis del cuestionario a los alumnos</u> .....	55
7.5. <u>Reflexión final</u> .....	59
8. <u>Conclusiones y Problemas abiertos</u> .....	60
8.1. <u>Conclusiones</u> .....	60

Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

8.2. <u>Aportaciones del estudio</u> .....	62
8.3. <u>Puntos Débiles</u> .....	62
8.4. <u>Problemas abiertos</u> .....	63
9. <u>Reflexión Personal</u> .....	64
10. <u>Bibliografía</u> .....	65
<u>ANEXO</u> .....	66
<u>Anexo I: Unidad Didáctica</u> .....	67

## **1. Introducción**

El presente trabajo es una asignatura dentro del Módulo Prácticum del Máster de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Es un módulo de desarrollo profesional que consta de dos asignaturas: por un lado, las prácticas y en segundo lugar este *Trabajo Fin de Máster* (6 ECTS).

La investigación la he desarrollado en el I.E.S. José Jiménez Lozano durante el periodo de Prácticas citado anteriormente, entre los días 05/03/2014 y 25/04/2014.

El contenido de este trabajo trata sobre el aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano, en alumnos de 4º de la E.S.O., a través de pruebas formales y preformales.

Nuestro objetivo es establecer si las pruebas preformales resultan más cercanas y más comprensibles para los alumnos. Nos guiaremos a través de la siguiente hipótesis general de investigación:

- Las pruebas preformales son más significativas para los alumnos que las pruebas formales.

La razón por la cual he escogido esta temática es que, los alumnos, en la mayoría de los casos, no son conscientes de lo que supone haber demostrado un teorema, no saben extraer consecuencias de la demostración de éste, ni aplicar el resultado cuando procede. Cuando se les pide que realicen una demostración, se limitan a reproducir mecánicamente algunos pasos del razonamiento, sin pararse a pensar en el proceso en sí y las relaciones entre un paso y el siguiente. Por otra parte, no suelen distinguir las pruebas de ejemplos.

La experiencia y múltiples investigaciones realizadas en el área de Didáctica de la Matemática informan de que los alumnos tienen grandes dificultades para comprender las demostraciones formales, rigurosas.

Así pues, el contexto en el que podemos situar el presente trabajo de final de master es precisamente en el contexto de la innovación educativa.

En este trabajo se da respuesta a las posibles necesidades que puede tener un docente a la hora de hacer que sus alumnos entiendan ciertas demostraciones matemáticas.

Para ello, hemos estructurado el texto de la siguiente manera:

- Después de esta introducción, en la segunda sección, realizaremos un estudio del currículo legal y de un par de textos sobre nuestro tema de estudio: la geometría analítica.
- En la tercera sección desarrollaremos el marco teórico sobre el que apoyamos nuestra investigación.
- En la cuarta sección se presenta el marco metodológico que aplicamos y cómo lo desarrollamos en la investigación.
- En la quinta sección describimos los objetivos generales y específicos de la investigación y a

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

través de qué hipótesis nos hemos guiado.

- En la sexta sección describimos la planificación y desarrollo de la enseñanza, los instrumentos que hemos utilizado como recogida de datos y la valoración de la enseñanza, tanto por parte nuestra como por un observador externo.
- En la séptima sección realizamos un análisis de los datos recogidos durante la investigación (exámenes y cuadernos) y describimos los errores y dificultades que hemos observado por parte de los alumnos.
- En la octava sección mostramos las conclusiones que hemos extraído y las aportaciones de la investigación. También describiremos cuáles son los puntos débiles del estudio y los problemas abiertos que dejamos para futuras investigaciones.
- Finalmente, en la novena sección se hacen algunas consideraciones personales.

## **2. Análisis Curricular**

La elaboración del presente Trabajo Fin de Master se llevará a cabo en la Comunidad Autónoma de Castilla y León y por tanto tomaremos como guía el Real Decreto 1631/2006, del 29 de Diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria de las distintas materias.

También tendremos en cuenta el Decreto 52/2007, del 17 de Mayo, donde se desarrollan en profundidad los objetivos, contenidos y criterios de evaluación del Real Decreto.

### **2.1. Legislación Educativa**

#### **Objetivos:**

De acuerdo con lo que establece el R.D. 1631/2006 del 29 de Diciembre, la enseñanza de las Matemáticas de 4º E.S.O., concerniente al tema que nos ocupa, tiene como objetivo el desarrollo de las siguientes capacidades:

- Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas, y analizar los resultados utilizando los recursos mas apropiados.
- Identificar las formas planas o espaciales que se presentan en la vida diaria y analizar las propiedades y relaciones geométricas entre ellas, adquiriendo una sensibilidad progresiva ante la belleza que generan.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

Objetivos que ampliamos con el decreto 52/2007 del Currículo de la E.S.O. en Castilla y León con la incorporación siguiente:

- Desarrollar la actividad mental y favorecer así la imaginación, la intuición y la invención creadora.

#### **Contenidos:**

En cuanto a los contenidos, el R.D. 1631/2006 no especifica ningún contenido relacionado con la geometría analítica. El decreto 52/2007 del Currículo de la E.S.O en Castilla y León redacta entre los contenidos de matemáticas de 4º ESO opción B:

- Iniciación a la geometría analítica plana: puntos y coordenadas.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

- Distancia entre dos puntos; rectas y ecuaciones.
- Estudio general de la recta.
- Paralelismo y perpendicularidad.

### Criterios de Evaluación:

- ◆ Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.
- ◆ Manejar puntos y figuras por medio de números y ecuaciones, calcular la distancia entre dos puntos, reconocer y obtener en diversos contextos la ecuación de una recta, resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

### 2.2. Currículo a través de textos

A continuación se realizará un esquema comparativo sobre tres libros de texto de 4º E.S.O. de Matemáticas Opción B en relación al tema de Geometría Analítica.

Los tres libros estudiados son los siguientes:

- Editorial Edelvives, proyecto Aula 360º
- Editorial Santillana, proyecto La casa del saber
- Editorial SM, proyecto Algoritmo

	Edelvives	Santillana	SM
<b>Distribución de los contenidos</b>	Dedica un <b>único tema</b> a los contenidos: - Geometría Analítica	Dedica un <b>único tema</b> a los contenidos: - Vectores y rectas	Dedica <b>tres temas</b> a los contenidos: 1. Vectores en el plano. 2. Ecuaciones de recta y circunferencia. 3. Relaciones métricas.
<b>Motivación</b>	- Breve <b>lectura sobre</b> la historia de las matemáticas de algún <b>concepto</b> que se vaya a dar <b>en el tema</b> .  - Realiza <b>una pregunta</b> en relación al concepto de la lectura.	- Redacta una <b>pequeña historieta</b> que no tiene que ver con el tema.  - A continuación realiza <b>preguntas relacionando</b> la lectura con los <b>conceptos</b> que va a introducir para motivarles <b>en el tema</b> .	- Al principio del tema describe algún <b>ejemplo o dato histórico</b> relacionado con el tema siguiente.  - Al final del tema dedica una página al <b>Mural Matemático</b> donde escribe cuatro datos curiosos a modo de divulgación.
<b>Índice</b>	<b>Sí</b>	<b>Sí</b>	<b>No</b>
<b>Actividades al inicio del tema.</b>	<b>Sí</b> , propone <u>actividades</u> como motivación hacia el tema	<b>Sí</b> , realiza <u>preguntas</u> relacionadas con el tema.	<b>No</b>
<b>Recordatorio de conocimientos previos</b>	<b>No</b>	<b>No</b>	<b>No</b>
<b>Recursos informáticos</b>	Con <b>enlaces a páginas</b> con ejercicios extras y da una explicación del recurso interactivo. Al final propone un ejercicio para realizar en <b>GeoGebra</b> y lo describe paso a paso.	<b>No</b>	<b>No</b>



Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

<b>Resumen al final del libro</b>	Propone un ejercicio de completar un <b>esquema</b> sobre el tema y contestar a unas preguntas generales sobre el tema.	Realiza un <b>resumen de los conceptos</b> y los <b>procedimientos</b> que llevar a cabo para la realización de algunos ejercicios	<b>No</b> tiene un resumen sino que al final del tema <b>describe los pasos</b> a seguir para la <b>resolución de un problema</b> y resuelve un problema siguiendo dichos pasos.
<b>Clasificación de los ejercicios (por dificultad y temática)</b>	Ordena los ejercicios al final del tema <b>por conceptos</b> .  Además los diferencia <b>según la dificultad</b> mediante marcas.	Ordena los ejercicios al final del tema <b>por conceptos</b> .  Además los diferencia <b>según la dificultad</b> mediante marcas.	<b>No</b> ordena los ejercicios ni por dificultad ni por capítulos.
<b>Tipos de Ejercicios a lo largo del tema</b>	- <u>Actividades Resueltas</u> : ejercicios resueltos de mera <b>reproducción</b> de los conceptos vistos en cada capítulo.  - <u>Ejercicios propuestos</u> : <b>similares</b> a las actividades resueltas.	- <u>Ejemplos</u> : Ejercicios resueltos de mera <b>reproducción</b> de los conceptos vistos en clase.  - <u>Ejercicios propuestos</u> : separados en tres tipos: <b>Practica, Aplica y Reflexiona</b> .	- <u>Ejercicios resueltos</u> de los conceptos vistos en el capítulo.
<b>Tipos de Ejercicios al final del tema</b>	- <u>Actividades resueltas</u> : Ejercicios <b>resueltos</b> (antes de proponer un ejercicio diferente a los ya resueltos, realizan uno similar).  - Ejercicios de <b>cálculo mental</b>  - Ejercicios de mera <b>reproducción</b>  - Ejercicios de <b>reflexión</b> : en los que tienen que aplicar <b>un concepto</b> o un procedimiento visto en clase pero no se les pide de manera directa.	- <u>Hazlo así</u> : Ejercicios <b>resueltos</b> (antes de proponer un ejercicios que no se haya hecho, realizan uno similar).  - Ejercicios de mera <b>reproducción</b> .  - Ejercicios de <b>reflexión</b> en los que tienen que aplicar <b>un concepto</b> o un procedimiento visto en clase pero no se les pide de manera directa.	- <u>Ejercicios de entrenar</u> : de <b>reproducción</b> .  - <u>Problemas para aplicar</u> : <b>Problemas</b> que requieren una <b>reflexión</b> y aplicar <b>algún concepto</b> o un procedimiento visto en clase.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

	- <b>Problemas</b> en los que tienen que <b>reflexionar</b> y usar <b>varios conceptos</b> de la unidad.	- <u>Investiga:</u> <b>Problemas de reflexión</b> en los que se deben usar <b>varios conceptos</b> y procedimientos.  - <u>En la vida cotidiana:</u> <b>Problemas de la vida cotidiana</b> en los que necesitan los conceptos y procedimientos vistos en clase para resolverlos.	- <u>Cuestiones para aclararse:</u> Actividades de <b>afianzamiento de la teoría</b> y de excepciones interesantes de algunos de los conceptos.  - <u>Actividades para profundizar:</u> <b>Problemas</b> de <b>reflexión</b> en los que se deben usar <b>varios conceptos</b> y procedimientos.
<b>Autoevaluación</b>	<b>Si</b>	<b>No</b>	<b>No</b>
<b>Contenidos Comunes</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Vector, módulo, dirección, sentido</li> <li>➤ Vector equipolente</li> <li>➤ Operaciones con vectores de forma gráfica: suma, resta y multiplicación de un vector por un número</li> <li>➤ Coordenadas de un vector</li> <li>➤ Operaciones con vectores mediante coordenadas: suma, resta y multiplicación de vector por un número</li> <li>➤ Producto escalar y propiedades.</li> <li>➤ Ecuación vectorial de la recta.</li> <li>➤ Ecuaciones paramétricas de la recta.</li> <li>➤ Ecuación continua de la recta.</li> <li>➤ Ecuación general de la recta.</li> <li>➤ Ecuación explícita de la recta.</li> <li>➤ Ecuación punto-pendiente de la recta.</li> <li>➤ Punto medio de un segmento</li> <li>➤ Distancia entre dos puntos</li> <li>➤ Posición relativa de dos rectas</li> <li>➤ Haz de rectas paralelas</li> <li>➤ Haz de rectas secantes</li> </ul> <p>S.M. hace hincapié en el concepto de vector libre y vector fijo e introduce las operaciones con vectores atendiendo al tipo de vector que utilizamos mientras que Edelvives y Santillana dan un concepto de vector de forma general.</p> <p>Las definiciones de punto medio de un segmento y distancia entre dos puntos, Santillana los contempla como ejercicios al final del tema.</p> <p>Para la posición relativa de dos rectas, Santillana y Edelvives exponen tres métodos de resolución, mientras que SM expone dos.</p>		

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

<b>Contenidos comunes</b>	<b>no</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sistema de Referencia en el plano</li> <li>- Base de un espacio vectorial</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Circunferencia: Definición como lugar geométrico y expresión algebraica.</li> <li>- Posiciones relativas de una recta y una circunferencia</li> <li>- El ángulo de dos rectas</li> <li>- Distancia de un punto a una recta</li> <li>- Distancia entre rectas paralelas</li> </ul>
<b>Tipo de demostraciones</b>		Prueba Formal	Prueba Formal
			Prueba Preformal

### **Reflexión:**

En este apartado se describe cómo se presenta en cada libro de texto las ecuaciones de la recta en el plano y el paso de unas a otras.

En la deducción de la primera ecuación (la ecuación vectorial) cada uno tiene su matiz:

Edelvives realiza una prueba formal. Deduce la ecuación vectorial mediante un punto y un vector director. Se ayuda primero de la representación gráfica y describe cada paso que da. A continuación formaliza lo descrito gráficamente mediante ecuaciones. Finalmente realiza transformaciones hasta llegar a la ecuación vectorial.

Santillana realiza una prueba formal. Expresa la ecuación de la recta como una traslación de un punto por un vector y por tanto la define como la suma de un punto más un vector de magnitud variable. A continuación contribuye a la explicación con una representación gráfica de la recta y una representación algebraica.

S.M. deduce la ecuación vectorial mediante una prueba preformal siguiendo el mismo método que Edelvives, mediante la representación geométrica y después algebraica.

Los tres deducen el resto de ecuaciones de la recta partiendo de las anteriores, siguiendo el orden descrito anteriormente, realizando transformaciones algebraicas.

Edelvives, al igual que en la vectorial, utilizando pruebas formales.

Santillana mediante pruebas formales, describiendo primero cada paso que hay que dar y, a continuación, dando la expresión algebraica.

SM deduce las ecuaciones mediante pruebas preformales y a continuación generaliza la

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

expresión a la que llega.

Teniendo en cuenta lo anteriormente descrito podemos resumir de cada libro lo siguiente:

- **SM** destaca por tener más contenido teórico y de forma más densa. Además de distribuir los contenidos en distintos temas. No precisa qué conceptos son más importantes ni aclara procedimientos habituales para afrontar determinado tipo de problemas. Las deducciones que realiza son mediante pruebas preformales que a continuación generaliza. En cuanto a los ejercicios, no los clasifica según los contenidos del tema, lo que permite al alumno ver la unidad como un todo y tener que reflexionar sobre qué le piden y qué ha de utilizar. Motiva a los alumnos mediante su mural de divulgación matemática al final de cada tema.

- **Santillana** se centra más en el aprendizaje de los procedimientos y la sistematización de éstos. Tiene una gran colección de ejercicios, tanto resueltos como propuestos, de carácter mecánico de cada unidad del tema, aunque no tanto de problemas de reflexión. Destacable es su apartado de problemas de la vida cotidiana, que aunque breve (un par de problemas) se orienta hacia las directrices de PISA. Las deducciones que realiza son siempre a través de pruebas formales.

- **Edelvives** destaca por implementar recursos tecnológicos a la unidad, como son los enlaces a páginas web con ejercicios extras y juegos interactivos relacionados con el tema. También fomenta la iniciación en un programa informático como es GeoGebra. Tiene una gran colección de ejercicios resueltos y propuestos entre los que destacan los mecánicos. Propone la realización de un esquema del tema y una autoevaluación, tanto por unidad como por bloques. Además fomenta el cálculo mental de los alumnos. Las deducciones que realiza son siempre a través de pruebas formales.

Es claro que, estos libros de texto, no sólo cubren los contenidos redactados por el decreto 52/2007, sino que profundizan mucho más.

### **3. Marco teórico**

En el último cuarto de siglo la demostración matemática ha sido objeto de numerosas investigaciones desde el campo de la Didáctica de la Matemática y se han producido numerosas publicaciones. Dichas publicaciones son sobre las funciones y los niveles de la demostración matemática y sobre su implementación en el aula.

De entre los autores que han realizado trabajos sobre las funciones de la demostración destaca de Villiers (1993), quien presenta un modelo en el que a las demostraciones las asigna cinco funciones:

- *Verificación*: concerniente a la *verdad* de una afirmación
- *Explicación*: profundizando en por qué es verdad
- *Sistematización*: la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas.
- *Descubrimiento*: el descubrimiento o invención de nuevos resultados
- *Comunicación*: la transmisión del conocimiento matemático.

Insiste en que la convicción no se obtiene únicamente mediante la demostración y resalta el valor de la función de “explicación”.

En cuanto a trabajos sobre niveles de demostración se encuentra Bell (1979), que distingue tres niveles en la comprensión y el uso de las demostraciones: el *grado de regularidad o de racionalidad* esperado por los alumnos, la *cualidad explicativa* de la respuesta y el *nivel de sofisticación de las técnicas de demostración* disponibles para el alumno.

Por otro lado, Ibañes y Ortega (1997a-b) consideran otros criterios más ligados a la resolución de problemas, y distinguen:

- *Tipos*: atendiendo a la estructura lógica del enunciado. En los que se distinguen:
  - De *condición necesaria o suficiente*
  - De *condición necesaria y suficiente*

Si se refieren a la existencia de algún objeto matemático, pueden ser:

- De *existencia simple*
- De *existencia y unicidad*
- De *imposibilidad*
- *Métodos*: atendiendo a los procedimientos lógicos que se utilizan en la demostración. Se consideran los siguientes:

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

- *Silogismo*
- *Demostración por casos*
- *Reducción al absurdo*
- *Inducción completa*
- *Método constructivo*
- Demostraciones por *analogía y dualidad*
- *Estilos*: atendiendo a los procedimientos matemáticos. Se encuentran:
  - El *geométrico*
  - El *algebraico*
  - El de *coordenadas*,
  - El del *análisis matemático*.
- *Modos*: Atendiendo a la forma de exposición:
  - El *sintético o directo*
  - El *analítico o indirecto*.

Harel & Sowder (1998) tienen en cuenta la etapa cognitiva en el desarrollo matemático de los alumnos, consideran que:

*“Esquema de Prueba de una persona consiste en lo que constituye descubrimiento y persuasión para esa persona”*

Y el trabajo con alumnos les lleva a distinguir tres grandes categorías de esquemas de Esquemas de Prueba:

- De convicción externa (Rituales, Autoritarios, Simbólicos)
- Empíricos (Inductivos, Perceptuales)
- Analíticos (Transformacionales y axiomáticos).

Trabajos sobre la demostración en el aula: (Ibañes y Ortega, 2001 y 2002a-b) ).

Ibañes (2001) e Ibañes y Ortega (2001) tratan de indagar la relación que existe entre las creencias de los alumnos y la realidad, qué esquemas creen que utilizan y cuáles están usando, y cuál es la evolución de los mismos en los alumnos. Para hacer estas indagaciones consideran los siguientes tipos de esquemas:

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

- Esquema declarado. Esquema de prueba que un alumno declara que ha utilizado.
- Esquema utilizado. Esquema de prueba que un alumno ha utilizado.
- Esquema aceptado. Esquema de prueba que acepta un alumno en el transcurso de una secuencia didáctica.
- Esquema adherido. Esquema de prueba que acepta un alumno, con rechazo de los anteriores, en el transcurso de una secuencia didáctica.
- Esquema inicial. Esquema de prueba que se estima posee un alumno al iniciar una secuencia didáctica.
- Esquema final. Esquema de prueba que posee un alumno al finalizar una secuencia didáctica.

Los alumnos pueden evolucionar hacia los intuitivo-axiomáticos con una instrucción adecuada.

El reconocimiento de procesos y las expresiones que utilizan los alumnos son aspectos a tener en cuenta, los alumnos tienen que reconocer lo que constituye demostración frente a aquello que no lo es y deben saber interpretar el lenguaje propio de los procesos de demostración.

### Pruebas formales y preformales

Van Asch (1993), después de considerar argumentos a favor y en contra de presentar u omitir la demostración para justificar un teorema, distingue tres maneras diferentes por su grado de abstracción para justificar un teorema:

- prueba formal (las “rigurosas” de los textos universitarios)
- prueba preformal
- prueba por medio de un dibujo o un ejemplo (pruebas sin palabras).

El término prueba preformal (término original de Semadeni, 1984) se define así:

*“By a preformal proof we understand a line of reasoning which can be formalized to a formal proof, but in which the essential idea is already present”*

(Van Asch, 1993, p. 310)

Las pruebas preformales se adaptan mejor a la capacidad intelectual de los estudiantes, son argumentos matemáticos correctos, no es una verificación experimental de una proposición, no

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

están basadas íntegramente en argumentos visuales, a menudo suponen acciones concretas, no es una simple comprobación en casos particulares.

Blum y Kirsch (1991) distinguen también tres niveles de demostración: pruebas, pruebas preformales y pruebas formales. Definen las preformales como:

*“A chain of correct, but not formally represented conclusions which refer to valid, non-formal premises”.*

Consideran varias clases de estas pruebas: pruebas acción (acciones concretas que corresponden a argumentos correctos); intuitivo-geométricas (concepciones geométricas básicas y hechos intuitivamente evidentes); orientadas por la realidad (ideas de significado claro y muy accesible).

Ortega (2004) va más allá al afirmar que en los teoremas los procesos constructivos son muchísimo más importantes que las demostraciones y que es la interpretación de los mismos al conectarlos fuertemente con la realidad lo que les da verdadero significado.



#### **4. Marco metodológico**

Seguiremos la metodología analizada por Stake (1998) sobre Estudios de caso cualitativos.

Se establecen cinco requisitos fundamentales para comprender un estudio de caso:

- Elección de cuestiones o asuntos de investigación.
- Triangulación de descripciones e interpretaciones.
- Conocimiento empírico del caso.
- Influencia de los contextos: social, político,...
- Atención meticulosa a sus actividades.

Se consideran casos a entes, organismos o temas específicos, más que a cosas más generales que rara vez serán considerados casos.

Según Robert Stake podemos distinguir tres tipos de estudios de caso según el propósito:

- **Estudios de caso intrínsecos:** aquellos que interesan por sí mismos y por tanto se busca una mejor comprensión del caso.
- **Estudio de caso instrumental:** el caso se escoge para servirnos de apoyo, nos proporciona ideas sobre alguna cuestión o nos sirve para hacer alguna generalización.
- **Estudio de caso múltiple o colectivo:** Se estudian una serie de casos para estudiar conjuntamente un fenómeno, población o condición general

Para realizar la investigación hay que tener en cuenta todo lo referente al caso: actividades, funcionamiento, antecedentes históricos, entorno físico y demás contextos de interés. En general se profundizará más en lo particular, lo que no es común respecto de lo común.

Hay que tener cuidado pues un compromiso demasiado fuerte por generalizar y teorizar nos puede apartar de la comprensión del caso en sí mismo.

Como comentamos anteriormente, el primer requisito para tratar los estudios es tener en cuenta unas cuestiones o asuntos de investigación.

Tanto si el fin es generalizar el caso, como la particularización de éste, estas preguntas nos ayudarán a profundizar en el caso que nos ocupa. Un ejemplo sería: ¿Necesitan las terapias de adicción, que originalmente se desarrollaron para hombres, una reconceptualización para la mujer?

Es necesario estudiar todos los contextos (histórico, físico, cultural, social, económico, político, ético, estético, etc) para poder construir relaciones entendibles dentro del caso.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

El trabajo del investigador no sólo es observacional sino también reflexivo. El estudio intrínseco se enfoca en el caso, en lo que podemos percibir del mismo. El estudio instrumental, en cambio, trata de mostrar cómo las cuestiones de la investigación se manifiestan en el caso. En el estudio de caso instrumental o colectivo los casos son elegidos. Por ello es fundamental escoger una muestra representativa del fenómeno a mayor escala. Aunque hemos de inclinarnos por aquellos casos que parezca que nos van a ofrecer más oportunidades de aprender.

En un estudio de caso intrínseco, el caso no suele ser escogido (sino que es de interés por sí mismos). Pero también hay elecciones que se deben tomar como los lugares y eventos a observar. Para realizar esta selección debemos ayudarnos de la intuición y la experiencia.

Las relaciones e influencias entre los distintos contextos han de ser bien descritas, pues también se estudiarán las diferencias entre distintos efectos (género, ambientación...). Tendremos que estudiar tanto lo corriente como lo inusual. En muchas ocasiones lo inusual servirá para estudiar y detectar lo común.

Es necesario realizar una planificación previa del estudio, para ahorrar tiempo cuando después recopilemos datos. Cuando el estudio de caso sea demasiado amplio debe recurrirse al trabajo en equipo.

Los investigadores deben preocuparse por la validez y claridad de sus percepciones y sus comunicaciones para intentar que haya las mínimas malinterpretaciones posibles. Para ello se recurre a la triangulación.

La triangulación es un proceso de uso de múltiples percepciones con el fin de aclarar significados, comprobando hasta qué punto se repiten observaciones e interpretaciones (mediante entrevistas a gente relacionada con el caso, observadores externos, recopilación redundante de datos). Así, además, tendremos diversidad de percepciones sobre cómo el caso puede ser visto.

#### **4.1. Metodología en esta investigación**

Esta investigación es un estudio de caso colectivo ya que lo hemos realizado impartiendo la unidad de geometría, en el I.E.S. José Jiménez Lozano, a dos grupos de 4º de E.S.O. Opción B.

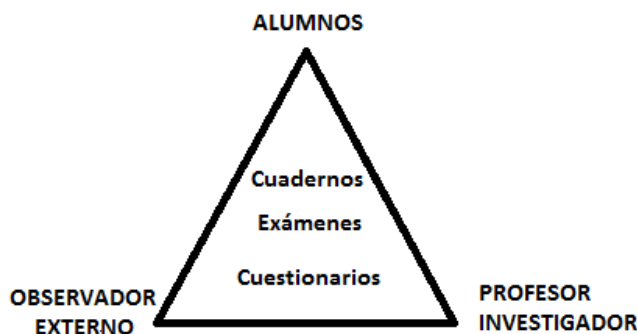
Nuestra investigación está centrada en la valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de las pruebas formales y pruebas preformales. Elegimos esta investigación porque los alumnos, en su mayoría, no saben extraer las consecuencias de la demostración de un teorema ni aplicar el resultado de éste. Cuando se les pide que expongan una demostración se limitan a reproducir algunos pasos del razonamiento, sin pararse a pensar en el proceso en sí y las relaciones entre un paso y el siguiente. Por otra parte, no suelen distinguir entre pruebas y ejemplos.

En lo referente al caso tendremos en cuenta que el primer grupo consta de 21 alumnos entre los que no hay ningún repetidor. El segundo grupo consta de 14 alumnos, tres de ellos repetidores en este curso escolar. Este segundo, es un grupo bastante reducido, en comparación con el otro, al ser el desdoble de una clase en la que no todos los alumnos han elegido Matemáticas B.

Debemos tener en cuenta el contexto en el que se encuentran los alumnos. Como ya analizaremos más adelante, nos encontramos ante dos grupos que han sido instruidos, durante todo el curso escolar, en la demostración matemática formal. Se les ha incidido en que una demostración no es un ejemplo y deberemos tenerlo en cuenta.

Finalmente, para evitar las posibles malinterpretaciones del caso, recurriremos a la triangulación. Para ello contaremos con las siguientes herramientas de recogida de datos:

- Cuestionarios a los alumnos
- Cuestionario a un observador externo
- Examen a los alumnos
- Cuadernos de los alumnos



## **5. Objetivos e Hipótesis de trabajo**

El objetivo general de esta investigación es:

- *Valorar si las pruebas preformales resultan más cercanas, más comprensibles y, por tanto, más significativas para los alumnos.*

Que desarrollaremos en los siguientes objetivos específicos:

- O1.** Elaborar un diseño de enseñanza de las ecuaciones de la recta en el plano, que contemple pruebas formales y preformales.
- O2.** Contrastar el aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de las pruebas formales frente a las pruebas preformales.
- O3.** Observar los errores y dificultades de aprendizaje de los contenidos de la unidad didáctica de geometría analítica de 4º de E.S.O.
- O4.** Iniciar a los alumnos en el uso de la prueba preformal y su distinción de la prueba formal.
- O5.** Comparar ambos tipos de demostración, preformal y formal, para optar por el que sea preferido para los alumnos, sopesando las ventajas e inconvenientes de cada una de las dos modalidades.

Para el desarrollo experimental del trabajo nos guiaremos a través de la siguientes hipótesis generales de investigación:

- H1.** Las pruebas preformales son más significativas para los alumnos que las pruebas formales.
- H2.** Las pruebas preformales son preferidas por los alumnos.
- H3.** Las pruebas preformales ayudan a entender una demostración mejor que las formales.

## **6. Planificación y Desarrollo de la investigación**

En este apartado se describe la intervención en el aula. Utilizaremos de referente la Unidad Didáctica del Anexo I.

Tras ello se realiza un análisis cualitativo de la observación de la acción, por parte de la profesora investigadora y de un observador externo.

### **6.1. Diseño de enseñanza**

El marco teórico de la investigación orientan el diseño de enseñanza de la geometría analítica en 4º de ESO Opción B. Este diseño pretende facilitar el aprendizaje de los conceptos. Además, la investigación está regida por el marco metodológico de Estudios de caso que nos proporciona Stake.

Durante la enseñanza se realizarán clases teóricas y prácticas. Las clases teóricas tienen por objetivo trabajar con los alumnos los conceptos, nociones matemáticas, definiciones y propiedades. Las clases serán expositivas, sin descuidar la interacción de los alumnos. El desarrollo de los contenidos se presentará siguiendo el orden del libro de texto que tienen los alumnos (*Edelvives, proyecto aula 360º*). En relación a las clases prácticas, su objetivo es afianzar y profundizar los conceptos trabajados en las clases teóricas. Utilizaremos como colección de ejercicios y problemas los propuestos por el libro de texto anteriormente citado.

Desarrollamos ahora la enseñanza de las ecuaciones de la recta en el plano.

Partiremos de una representación gráfica de la recta y nos ayudaremos de:

- Los conocimientos previos de los alumnos mediante preguntas del tipo: ¿Cuántos puntos son necesarios para determinar una recta?
- De los conceptos vistos en las sesiones anteriores: producto por un escalar, suma de vectores, vector posición, etc.

Deduciremos la ecuación vectorial de la recta mediante una prueba forma del siguiente modo:

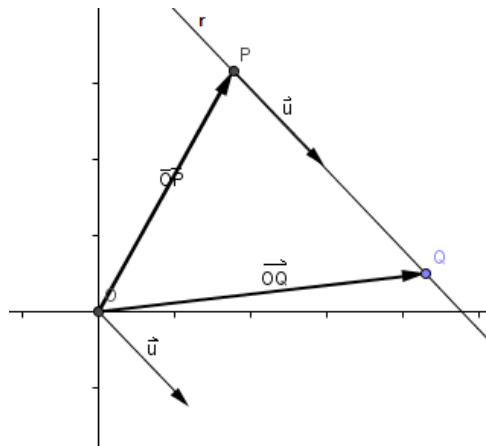
*Sea  $P=(p_1, p_2)$  un punto y  $r$  una recta que pasa por  $P$  y tiene  $\vec{u}=(u_1, u_2)$  como vector director*

*Cogemos un punto cualquiera de  $r$ :  $Q \in r$*

*El vector  $\vec{PQ}$  es paralelo a  $\vec{u}$ , luego son proporcionales y por tanto podemos poner:*

$$\vec{PQ} = k \vec{u}, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales



Observando la representación gráfica y por la suma de vectores, tenemos que:  $\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$

Sustituimos la ecuación que teníamos antes y nos queda:  $\vec{OP} + k \vec{u} = \vec{OQ}$

La ecuación:  $\vec{OQ} = \vec{OP} + k \vec{u}$  es lo que denominamos ecuación vectorial de la recta

En función de las coordenadas:  $(x, y) = (p_1, p_2) + k(u_1, u_2)$

A continuación realizaremos un ejemplo sobre cómo determinar la ecuación vectorial de la recta.

Después deduciremos las ecuaciones paramétricas de la recta mediante una prueba formal. Se expondrá el siguiente enunciado a los alumnos:

La ecuación de la recta cuyo vector director es  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  y pasa por el punto  $P = (p_1, p_2)$  se puede escribir como:

$$\begin{cases} x = p_1 + k u_1 \\ y = p_2 + k u_2 \end{cases} \text{ A estas ecuaciones se las denomina ecuaciones paramétricas de la recta}$$

Y se les realizará la prueba formal de dicha afirmación de la siguiente forma:

Sea  $r$  una recta cuyo vector director es  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  y pasa por el punto  $P = (p_1, p_2)$ . Su ecuación vectorial es la siguiente:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + k(u_1, u_2), \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Multiplicamos por el escalar:

$$(x, y) = (p_1, p_2) + (k u_1, k u_2)$$

Sumamos los vectores del segundo miembro de la ecuación y nos queda:

$$(x, y) = (p_1 + k u_1, p_2 + k u_2)$$

Iguando componentes

$$\begin{cases} x = p_1 + k u_1 \\ y = p_2 + k u_2 \end{cases} \text{ llegamos a las ecuaciones paramétricas de la recta } r$$

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

Inmediatamente después realizaremos un ejemplo sobre cómo determinar las ecuaciones paramétricas de la recta, por ejemplo:

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por el punto  $A=(2,5)$  y el vector  $\vec{w}=(3,-4)$

Tras las ecuaciones paramétricas deducimos la ecuación continua de la recta mediante una prueba preformal de la siguiente manera:

La ecuación de la recta también se puede escribir como:

$$\frac{x-p_1}{u_1} = \frac{y-p_2}{u_2} \quad \text{Esta ecuación recibe el nombre de ecuación continua de la recta}$$

Justificación:

Consideramos  $A=(1,2)$  un punto de la recta  $r$  y  $\vec{u}=(3,-5)$  es el vector director de la recta.

Partimos de las ecuaciones paramétricas de la recta :

$$\begin{cases} x=1+3k \\ y=2-5k \end{cases}$$

Despejamos el valor de  $k$  en ambas ecuaciones:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5}$$

Y obtenemos la ecuación continua de la recta.

Podemos generalizar este resultado:

$$\frac{x-p_1}{u_1} = \frac{y-p_2}{u_2}$$

A continuación deducimos la ecuación general o implícita de la recta mediante la prueba formal siguiente:

La ecuación continua de una recta podemos escribirla como:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{donde} \quad A=\vec{u}_2; \quad B=-\vec{u}_1; \quad C=u_1 p_2 - u_2 p_1$$

Veámoslo:

Tenemos el vector director  $\vec{u}=(u_1, u_2)$  de la recta  $r$  que pasa por el punto  $P=(p_1, p_2)$  .

La ecuación continua de la recta es:

$$\frac{x-p_1}{u_1} = \frac{y-p_2}{u_2}$$

Eliminamos denominadores multiplicando a ambos miembros por  $u_1 u_2$

$$u_2(x-p_1) = u_1(y-p_2)$$

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

*Operamos:*

$$u_2 x - u_2 p_1 = u_1 y - u_1 p_2$$

$$u_2 x - u_1 y + u_1 p_2 - u_2 p_1 = 0$$

*Llamamos*  $A = u_2$  *coeficiente de*  $x$

$B = -u_1$  *coeficiente de*  $y$

$C = u_1 p_2 - u_2 p_1$  *término independiente*

*Tenemos que:*

$Ax + By + C = 0$  *es la ecuación de la recta, siendo*  $\vec{u} = (u_1, u_2) = (-B, A)$

En la siguiente sesión se procederá a la deducción de la ecuación explícita mediante una prueba preformal:

*La ecuación de una recta se puede escribir de la forma:*

$y = mx + n$  *donde*  $m$  *es la pendiente de la recta y*  $n$  *es la ordenada en el origen.*

*A esta ecuación se la llama ecuación explícita de la recta.*

*Veamos que es verdad:*

*Partimos de la ecuación general de la recta:*

$7x + 3y - 29 = 0$  *que es la recta con vector director*  $(-3, 7)$  *y que pasa por*  $\left(0, \frac{29}{3}\right)$

*Despejamos la variable*  $y$ :

$$y = \frac{-7x + 29}{3}, \text{ es decir: } y = \frac{-7}{3}x + \frac{29}{3}$$

*Tenemos la expresión que queríamos, donde:*  $m = \frac{-7}{3}$ ;  $n = \frac{29}{3}$

Daremos las observaciones siguientes:

- $m = \text{tg}(\alpha)$  donde  $\alpha$  es el ángulo de  $r$  con la recta  $y=0$  (eje  $x$ )
- $n$  es el corte de la recta con el eje  $y$
- $m = \frac{-A}{B} = \frac{-u_2}{-u_1}$ ;  $n = \frac{-C}{B} = \frac{u_2 p_1 - u_1 p_2}{-u_1}$

Finalmente daremos la última ecuación de la recta, la ecuación punto-pendiente mediante una prueba formal:

*La ecuación continua de una recta es equivalente a la siguiente expresión:*

$y - p_2 = m(x - p_1)$  *donde*  $m$  *es la pendiente de la recta y*  $(p_1, p_2)$  *es un punto de la recta. A esta ecuación se la denomina ecuación punto-pendiente de la recta.*

*Justificación:*

*Partimos de la ecuación continua de la recta que pasa por el punto*  $P = (p_1, p_2)$  *y tiene*



## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

como vector director  $\vec{u}=(u_1, u_2)$  :

$$\frac{x-p_1}{u_1} = \frac{y-p_2}{u_2}$$

Multiplicamos por  $u_2$  a ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{u_2}{u_1}(x-p_1) = y-p_2 \quad \text{Llamamos } m = \frac{u_2}{u_1} \text{ entonces nos queda la expresión:}$$

$$y-p_2 = m(x-p_1)$$

## 6.2. Instrumentos de recogida de datos

En este apartado se presentan los instrumentos empleados para la recogida de datos de la investigación.

Se realizó una prueba escrita, una evaluación del trabajo personal del alumno (que se refleja en su cuaderno), un cuestionario de opinión a los alumnos sobre las pruebas formales y preformales y un cuestionario al observador externo sobre la docencia por parte de la profesora investigadora.

A continuación presentamos el cuestionario del observador externo, las pruebas escritas, y los cuestionarios de opinión realizadas a los alumnos

### PROTOCOLO DEL OBSERVADOR EXTERNO

Puntúa de 1 a 5, según la escala de Likert, las siguientes cuestiones que permiten valorar la docencia a través del cuaderno del alumno. A continuación, escribe tu opinión por escrito, para apreciar mejor los matices de la valoración.

1 <i>En total desacuerdo</i>	2 <i>Poco de acuerdo</i>	3 <i>Ni de acuerdo ni en desacuerdo</i>	4 <i>Bastante de acuerdo</i>	5 <i>Totalmente de acuerdo</i>
-------------------------------------	-----------------------------	--	-------------------------------------	---------------------------------------

#### Valoración de la programación didáctica

1. Grado de adecuación de la docencia al nivel educativo en cuanto a objetivos y contenidos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

2. Valora la metodología utilizada en el desarrollo de la docencia.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

3. Valora el tiempo utilizado en el proceso de enseñanza de los contenidos.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

4. ¿Se introducen los contenidos nuevos a partir de los conocimientos que posee el alumno? (Especialmente a partir de conceptos, vocabulario matemático, símbolos matemáticos y convenios del sistema de representación gráfico)

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

Opinión:

5. ¿Se refuerzan suficientemente los conceptos con los ejercicios y ejemplos propuestos?

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

### Valoración de la actuación del Profesor

1. Dominio de los contenidos tratados.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

2. Claridad y calidad de sus intervenciones.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

Opinión:

3. Valora el comportamiento y papel del profesor durante el desarrollo de la docencia:

Motivación a los alumnos para el aprendizaje.

Interés por el aprendizaje de los alumnos.

Valoración del conocimiento previo de los alumnos.

Atención a la diversidad.

Resolución de dudas. Solvencia ante las preguntas de los alumnos.

Adecuación de los ejemplos y ejercicios para practicar.

Las pruebas escritas se corresponden con lo tratado en clase.

### Alumnos

1. Grado de atención de los alumnos durante el desarrollo de la docencia.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

2. Actitud general de los alumnos hacia el aprendizaje.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

Opinión (Interacciones entre los alumnos (silencio, hablan, discuten, colaboran,...), tipos de preguntas que realizan, actitud del alumno ante el profesor,...)

### Interacciones profesor-alumnos

1. Frecuencia de las interacciones: nunca, rara vez, a menudo, constantemente.

2. Tipo de interacción:

Ninguna interacción: monólogo del profesor.

El alumno como protagonista absoluto.

Interacción individual profesor-alumno.

Interacciones colectivas profesor-alumno.

### Recursos y condiciones materiales

1. Valora la idoneidad de los recursos empleados en relación al desarrollo de la docencia.

Puntuación:	1	2	3	4	5
-------------	---	---	---	---	---


Opinión:

### Incidencias especiales. Posibles comentarios finales del observador externo.

1. Comentarios personales:


Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

**PRUEBA ESCRITA REALIZADA A LOS ALUMNOS**

 I.E.S. JOSÉ JIMÉNEZ LOZANO	ALUMNO/A: _____	4º ESO A
	Parcial: 24 de Abril de 2014	

- Dados los tres puntos siguientes: R(5, -2), S(-1,1) y T(2,m). Calcula:
  - La ecuación general de la recta que pasa por R y S.
  - El valor de m para que los tres puntos estén alineados.
- En el triángulo de vértices A(-3,1), B(1,5) y C(4,0), halla:
  - La ecuación de la altura que pasa por el vértice B.
  - La ecuación de la mediatriz del lado AB.
- Dada la ecuación de la recta r:  $2x - y + 1 = 0$  y el punto A(6,-2), calcula:
  - La ecuación de la recta s que pasa por el punto A y es paralela a r.
  - La ecuación de la recta t que pasa por el punto A y es perpendicular a r.
  - El punto M de intersección entre r y t.
  - La distancia de A a M.
- Deduce las ecuaciones paramétricas y continua de la recta.

**Pregunta 3: 4 puntos. Resto de preguntas: 2 puntos.**

 I.E.S. JOSÉ JIMÉNEZ LOZANO	ALUMNO/A: _____	4º ESO C
	Parcial: 25 de Abril de 2014	

- Dadas las siguientes rectas:

$$r: \frac{y-3}{5} = x-1; \quad s: y = \frac{2}{5}x; \quad t: \frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2}$$

- ¿Qué recta es paralela a  $2x - 5y + 4 = 0$  ?
  - Da un vector perpendicular a cada una de ellas.
  - Escribe la ecuación general de la recta t.
- En el triángulo de vértices A(1,1), B(-3,2) y C(-1,-4) halla:
    - La ecuación de la altura  $h_1$  que pasa por el vértice B.
    - La ecuación de la altura  $h_2$  que pasa por el vértice C.
    - El ortocentro del triángulo.
  - Comprueba que el triángulo de vértices A(-2,4), B(3,3) y C(-3,-1) es un triángulo rectángulo isósceles.
  - Deduce la ecuación continua y la ecuación punto-pendiente de la recta.

**Pregunta 1 y 2: 3 puntos. Preguntas 3 y 4: 2 puntos.**

# Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

## CUESTIONARIO DE RECOGIDA DE DATOS

**Nombre:**

**Curso:**

1. Puntúa de 1 a 10 pruebas que se han realizado atendiendo a las siguientes categorías: facilidad (F), gusto (G), claridad (C), aprendizaje (A). Entiende que:

- 1 es muy difícil y 10 es muy fácil.
- 1 no me gusta y 10 me gusta mucho.
- 1 no es nada clara y 10 es muy clara.
- 1 no se aprende nada y 10 se aprende mucho.
  - Formal de la ecuación vectorial: F\_\_, G\_\_, C\_\_, A\_\_.
  - Formal de las ecuaciones paramétricas: F\_\_, G\_\_, C\_\_, A\_\_.
  - Pre-formal de la ecuación continua: F\_\_, G\_\_, C\_\_, A\_\_.
  - Formal de la ecuación general: F\_\_, G\_\_, C\_\_, A\_\_.
  - Pre-formal de la ecuación explícita : F\_\_, G\_\_, C\_\_, A\_\_.
  - Formal de la ecuación punto-pendiente : F\_\_, G\_\_, C\_\_, A\_\_.

2. Responde a las siguientes preguntas, señalando en cada caso el porqué:

- ¿Cuál de las dos formas te *convence* más de la veracidad de una ecuación?
- ¿Cuál de las dos pruebas puede ayudar más a *entender* el significado de una ecuación?
- ¿Cuál de las dos pruebas puede ayudar más a *memorizar* una ecuación?
- ¿Cuál de las dos pruebas es más útil para ilustrar cómo se *aplica* una ecuación?

3. Valora de 1 a 10, de las dos pruebas, cuál preferirías utilizar para la obtención de la ecuación de la recta.

1.a. Deduce la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (3,5) y tiene como vector director (2,8).

1.b. Deduce la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (a,b) y tiene como vector director (u,v).

- De la prueba pre-formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
- De la prueba formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

2.a. Deduce las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos (3,5) y (2,8).

2.b. Deduce las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos (a,b) y (c,d).

- De la prueba pre-formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
- De la prueba formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

3.a. Deduce la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos  $(2,-1)$  y  $(3,5)$

3.b. Deduce la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos  $(a,b)$  y  $(c,d)$ .

- De la prueba pre-formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
- De la prueba formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

4.a. Deduce la ecuación general de la recta que pasa por el punto  $(3,5)$  y tiene como vector director  $(-1,2)$ .

4.b. Deduce la ecuación general de la recta que pasa por el punto  $(a,b)$  y tiene como vector director  $(u,v)$ .

- De la prueba pre-formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
- De la prueba formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

5.a. Deduce la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto  $(3,5)$  y tiene como vector director  $(-1,2)$ .

5.b. Deduce la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto  $(a,b)$  y tiene como vector director  $(u,v)$ .

- De la prueba pre-formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
- De la prueba formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

6.a. Deduce la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto  $(3,5)$  y tiene como vector director  $(-1,2)$ .

6.b. Deduce la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto  $(a,b)$  y tiene como vector director  $(u,v)$ .

- De la prueba pre-formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
- De la prueba formal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

### **6.3. Análisis de la docencia por la profesora investigadora**

Tras la enseñanza impartida he alcanzado los objetivos que me proponía, que eran los siguientes:

- O1.** Elaborar un diseño de enseñanza de las ecuaciones de la recta en el plano, que contemple pruebas formales y preformales.
- O2.** Contrastar el aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales frente a pruebas preformales.
- O3.** Observar los errores y dificultades de aprendizaje de los contenidos de la unidad didáctica de geometría analítica de 4º de E.S.O.
- O4.** Iniciar a los alumnos en el uso de la prueba preformal y su distinción de la prueba formal.
- O5.** Comparar ambos tipos de demostración, preformal y formal, para optar por el que sea preferido para los alumnos, sopesando las ventajas e inconvenientes de cada una de las dos modalidades.

Durante la docencia los problemas que me han surgido son:

En relación a la clase en general:

- Mantener el silencio en la clase en las últimas horas del día.
- Comenzar a la hora acordada, debido a que algunos alumnos tenían por costumbre llegar un par de minutos tarde y eso ya retrasa el comienzo de la sesión. Además, la hora después del recreo ,también se retrasa por la tardanza de los alumnos en llegar.

En relación a la docencia impartida:

- El concepto de suma de vectores de forma geométrica he tenido que explicarlo un par de veces ya que los alumnos al día siguiente de dar el concepto, y tras realizar los ejercicios propuestos, tenían ciertas dudas. Tuve que recalcar el concepto de vector libre para su comprensión.
- Han tenido problemas con el concepto de base, debido a que en el libro de texto había ejercicios, a mayores de lo explicado en las sesiones, sobre cambios de base e intentaron hacerlos sin éxito.
- Desconocen el lenguaje matemático, símbolos como el pertenece ( $\in$ ), perpendicular ( $\perp$ ), etc.
- Les cuesta seguir los razonamientos que no consisten en un único paso, sino en varios y aplicar varios conocimientos que conocen. Esta dificultad la he tenido tanto en la deducción



## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

de la ecuación vectorial como en la resolución de problemas del tipo: halla el área de un triángulo, halla el baricentro de un triángulo, halla la distancia de un punto a una recta, etc.

- La disposición del tema en el calendario escolar. Este tema está a continuación de la segunda evaluación y los alumnos están más pendientes de las notas y de las recuperaciones de ésta que del siguiente trimestre y están bastante distraídos.
- Les cuesta entender los problemas que tienen un parámetro y tienen que dar una condición sobre él. Si el resultado es un número no les da tanta dificultad, pero si es una condición, como por ejemplo que sea distinto de un número, entonces les cuesta reconocer que eso sea la solución.

### En relación a nuestra investigación:

- La profesora a lo largo de todo el curso académico ha estado incidiendo en que un ejemplo no es una demostración, y que una demostración no se hace con números. Los alumnos, en un primer momento, consideraban la prueba preformal como un ejemplo y a pesar de dejarles claro las diferencias, la mayoría, por el hecho de tener números, no lo consideraban una prueba. De hecho, algún alumno, como ya comentaremos más adelante en la revisión del cuaderno, ni siquiera copiaba las pruebas preformales o las convertía en pruebas formales al copiarlas en el cuaderno.

En cuanto a la valoración personal del aprendizaje por parte de los alumnos creo que ha sido positiva. Algunos alumnos estaban totalmente desmotivados a estas alturas del curso, pero la gran mayoría tenía ganas de aprender. A pesar de tener una percepción de las matemáticas como algo complicado en más de una ocasión, en las sesiones teóricas han comentado que les resultaba sencillo y en palabras de los alumnos: "*¿sólo es eso?*".

## 6.4. Análisis de la docencia por un observador externo

A continuación se presenta el cuestionario del observador externo entregado a Dña. Antonia López Moreno tras finalizar el período de prácticas:

### PROTOCOLO DEL OBSERVADOR EXTERNO

Puntúa de 1 a 5, según la escala de Likert, las siguientes cuestiones que permiten valorar la docencia a través del cuaderno del alumno. A continuación, escribe tu opinión por escrito, para apreciar mejor los matices de la valoración.

1 En total desacuerdo	2 Poco de acuerdo	3 Ni de acuerdo ni en desacuerdo	4 Bastante de acuerdo	5 Totalmente de acuerdo
-----------------------------	-------------------------	---	-----------------------------	-------------------------------

#### Valoración de la programación didáctica

1. Grado de adecuación de la docencia al nivel educativo en cuanto a objetivos y contenidos.

Puntuación: 1 2 3 4  5

Opinión:

2. Valora la metodología utilizada en el desarrollo de la docencia.

Puntuación: 1 2 3 4  5

Opinión:

3. Valora el tiempo utilizado en el proceso de enseñanza de los contenidos.

Puntuación: 1 2 3  4 5

Opinión:

6. ¿Se introducen los contenidos nuevos a partir de los conocimientos que posee el alumno? (Especialmente a partir de conceptos, vocabulario matemático, símbolos matemáticos y convenios del sistema de representación gráfico)

Puntuación: 1 2 3 4  5

Opinión:

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

7. ¿Se refuerzan suficientemente los conceptos con los ejercicios y ejemplos propuestos?

Puntuación: 1 2 3 4 5

Opinión:

### Valoración de la actuación del Profesor

1. Dominio de los contenidos tratados.

Puntuación: 1 2 3 4 5

Opinión:

2. Claridad y calidad de sus intervenciones.

Puntuación: 1 2 3 4 5

Opinión:

3. Valora el comportamiento y papel del profesor durante el desarrollo de la docencia:

Motivación a los alumnos para el aprendizaje. 4

Interés por el aprendizaje de los alumnos. 5

Valoración del conocimiento previo de los alumnos. 4

Atención a la diversidad. 5

Resolución de dudas. Solvencia ante las preguntas de los alumnos. 5

Adecuación de los ejemplos y ejercicios para practicar. 5

Las pruebas escritas se corresponden con lo tratado en clase. 5

### Alumnos

1. Grado de atención de los alumnos durante el desarrollo de la docencia.

Puntuación: 1 2 3 4 5

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

2. Actitud general de los alumnos hacia el aprendizaje.

Puntuación: 1 2 3 ④ 5

Opinión (Interacciones entre los alumnos (silencio, hablan, discuten, colaboran,...), tipos de preguntas que realizan, actitud del alumno ante el profesor,...)

Los alumnos han sido colaboradores, aunque siempre había alguno completamente desmotivado (ya <sup>lo</sup> estaba) que han continuado así.

### Interacciones profesor-alumnos

1. Frecuencia de las interacciones: nunca, rara vez, a menudo, constantemente.

2. Tipo de interacción:

Ninguna interacción: monólogo del profesor.

El alumno como protagonista absoluto.

Interacción individual profesor-alumno.

Interacciones colectivas profesor-alumno.

### Recursos y condiciones materiales

1. Valora la idoneidad de los recursos empleados en relación al desarrollo de la docencia.

Puntuación: 1 2 3 ④ 5

Opinión:

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

### **Incidencias especiales. Posibles comentarios finales del observador externo.**

#### 1. Comentarios personales:

Todo ha sido adecuado, la alumna ha estado atenta en todo momento a las sugerencias planteadas.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

Según el observador externo:

- El nivel de la docencia ha sido el adecuado, al igual que la metodología y la introducción de los nuevos conocimientos a partir de los conocimientos previos del alumno. Aunque no está totalmente de acuerdo con el tiempo empleado en las sesiones. Puede ser debido a que, a pesar de la planificación de las sesiones, se tuvo que emplear dos sesiones a mayores de las previstas.
- Valora muy positivamente el dominio de los contenidos y la claridad a la hora de exponerlos, atendiendo al interés de los alumnos y a la diversidad de éstos. Aunque se ha de prestar más atención a aquellos alumnos que no están motivados y no están atentos, e intentar motivarles.
- Las interacciones con los alumnos han sido de forma colectivas y constantes a lo largo de la docencia.
- He de investigar sobre otros posibles recursos para impartir los conocimientos tratados.
- He estado atenta a las sugerencias que se me planteaban.

### **6.5. Reflexión final sobre el análisis de la docencia**

Teniendo en cuenta la reflexión de la profesora y del observador externo, se valora de forma positiva la intervención en el aula. En general, en cuanto al aprendizaje de los alumnos, podemos considerar que han aprendido las distintas ecuaciones de la recta y cómo transformar unas en otras. Como ya veremos en el punto siguiente, en el análisis de datos, hay una gran diferencia entre los dos grupos a los que se les ha impartido la docencia.

En el grupo 2, que son la mitad de alumnos, la prueba preformal ha sido acogida mucho mejor y parece que el aprendizaje también es superior.

El problema ha resultado ser el grupo con mayor número de alumnos, donde el diálogo era más complicado y sus ideas preconcebidas, sobre que la prueba preformal no demostraba la veracidad del enunciado, han estado muy presente en todas las sesiones.

Otras dificultades que he observado en los alumnos son el razonamiento y el método de estudio. Incluso alumnos con buena intuición matemática prefieren aprender fórmulas a razonar o comprender procedimientos. Esto les ha entorpecido en el aprendizaje de nuevos conceptos por no tener los conocimientos previos bien asentados. En cuanto se les dió las pautas de cómo hallar cada coeficiente de una recta, en vez de razonar para transformar de unas a otras, preferían memorizar cómo calcular cada coeficiente.

Además, a la hora de problemas que encadenen varios procedimientos, rápidamente se escudan en que les parece complicado y se pierden en el proceso.

Como orientación docente no creo que fuera conveniente el impartir el concepto de base de un espacio vectorial en este curso, puesto que ha generado más dudas de las que ha resuelto.

## **7. Análisis de los datos**

En esta sección se realiza un análisis cuantitativo de las herramientas de recogida de datos utilizadas durante la investigación, descritos en la sección anterior de este TFM: el examen escrito, el cuaderno del alumno y la encuesta realizada a los alumnos.

### **7.1. Prueba escrita**

A continuación se muestran los resultados de la prueba escrita realizada al grupo 1. Esta prueba se utilizó para valorar el aprendizaje de la unidad didáctica de geometría analítica. Está compuesta por cuatro preguntas, tres de ellas con una valoración de dos puntos y una de ellas con un valor de cuatro puntos, que hacen un total de 10 puntos. La prueba se incluye en el apartado 6.2 de este trabajo.

Consideraremos respuesta correcta a la que no tiene ningún error, respuesta parcialmente correcta a la que tiene un pequeño error de cálculo o de copiar mal un dato y respuesta incorrecta a aquella que tiene algún error grave, más de un error leve o está mal hecha.

*1ª Pregunta:* Dados los tres puntos siguientes: R(5, -2), S(-1,1) y T(2,m). Calcula:

- La ecuación general de la recta que pasa por R y S.
- El valor de m para que los tres puntos estén alineados.

*Objetivo:* Comprobar el aprendizaje de la obtención de la ecuación general de una recta que pasa por dos puntos e interpretación de los conceptos de vectores proporcionales o recta que pasa por un punto.

*Resultados:*

Nº Personas (%)	a)	b)
Respuesta Correcta (RC)	57,14 %	28,57 %
Respuesta Incorrecta (RI)	19,05 %	42,86 %
Respuesta Parcial (RP)	19,05 %	14,29 %
No sabe / No contesta	4,76 %	14,29 %

*Reflexión:* La mayoría de alumnos saben obtener la ecuación general de una recta dados dos de sus puntos. El error que cometen los alumnos en esta pregunta es a la hora de sacar los coeficientes de la ecuación general.

El porcentaje del apartado b) en cambio es muy alto en respuestas incorrectas y la mitad o no saben hacerlo o no saben lo que se les pregunta. El error más generalizado en este apartado es



## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

que el parámetro, por denotarse con una  $m$ , los alumnos creen que es la pendiente de la recta. Lo que nos da a entender que no demuestran comprender el significado de pendiente ni cómo hallarla.

Algunas ilustraciones de los fallos que encontramos en estas preguntas son los siguientes:

- No saber sacar los coeficientes de la ecuación general porque han intentado aprenderse todos de memoria y tienen errores de signo.

$Ax+By+C=0 \rightarrow$  Ecuación General  
 $A=-3$   
 $B=-6 \rightarrow -B=-6$   
 $C=(-3 \cdot 5) - (6 \cdot -2) = -15 + 12 = -3$   
 $+ 3 \cdot 5 - (-6) \cdot (-2) = 15 - 12 = 3$   
 $-3x - 6y - 3 = 0$ . sustituye el valor  $x(2)$   
 $-3 \cdot 2 - 6m - 3 = 0$   
 $-6 - 6m - 3 = 0 \rightarrow$   
 $-9 = 6m \rightarrow m = \frac{-9}{6} \rightarrow m = \frac{-1}{3}$

$R(5,-2)$   
 $S(-1,1)$   
 $T(2,m)$   
 $\Rightarrow$  Ecuación general de la recta que pasa por  $R$  y  $S$   
 Vector  $\vec{RS} \Rightarrow (-1-5, 1+2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (-6, 3)$  y un punto  $R$  que pasa por la recta  
 $(u_1, u_2) = (-6, 3)$   
 $Ax + By + C = 0 \Rightarrow A = u_1 \cdot u_2$   
 $B = -u_1 \cdot u_1$   
 $-6x - 3y + C = 0$      $-3x - 6y + C = 0$   
 $\Downarrow$   
 $-30 + 6 + C = 0 \Rightarrow C = 24$

**2ª Pregunta:** En el triángulo de vértices  $A(-3,1)$ ,  $B(1,5)$  y  $C(4,0)$ , halla:

- La ecuación de la altura que pasa por el vértice  $B$ .
- La ecuación de la mediatriz del lado  $AB$ .

**Objetivo:** Comprobar si saben obtener: una recta teniendo dos de sus puntos, una perpendicular a una recta que pase por un punto determinado y obtener la mediatriz por cualquiera de los métodos.

**Resultados:**

Nº Personas (%)	a)	b)
Respuesta Correcta (RC)	42,86 %	28,57 %
Respuesta Incorrecta (RI)	23,81 %	28,57 %
Respuesta Parcial (RP)	14,29 %	19,05 %
No sabe / No contesta	19,05 %	23,81 %

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

*Reflexión:* En el apartado a), al tener ya varios pasos, se nota que los alumnos que dan una respuesta correcta bajan un poco con respecto a la pregunta 1a). El error más generalizado es al sacar los coeficientes de la ecuación general y a la hora de sacar la perpendicular, realizarla del lado incorrecto.

En el apartado b) el porcentaje de alumnos que responden correctamente es bastante bajo. La mitad de los alumnos aproximadamente, o no lo hacen bien, o no saben cómo realizar el ejercicio. Los dos errores más generalizados en este apartado son a la hora de realizar los cálculos y hacer que la mediatriz pase por el vértice opuesto al lado, en vez de por el punto medio.

Ilustramos un error de esta pregunta:

- No saber la definición de mediatriz, ni por qué punto pasa:

Handwritten student work on a blue background:

6) A(-3,1) B(1,5)  
V (4,4) → vector de la mediatriz es el perpendicular a (4,4), es decir (-4,4).  
 $-4x - 4y + C = 0 \rightarrow 4x - 4y + 16 = 0$   
 $4 \cdot (-1) - 4(5) + C = 0 \rightarrow$  la mediatriz no pasa por el punto B, sino por el punto medio de  $\overline{AB}$   
 $4 - 20 + C = 0$   
 $-16 + C = 0$   
 $C = 16$

3ª Pregunta: Dada la ecuación de la recta r:  $2x - y + 1 = 0$  y el punto A(6,-2), calcula:

- a) La ecuación de la recta s que pasa por el punto A y es paralela a r.
- b) La ecuación de la recta t que pasa por el punto A y es perpendicular a r.
- c) El punto M de intersección entre r y t.
- d) La distancia de A a M.

*Objetivo:* Comprobar que el alumno ha aprendido el procedimiento de obtención de paralelas y perpendiculares a una recta dada. Saber si relaciona la representación geométrica de intersección de dos rectas con la representación analítica. Comprobar el aprendizaje de los conceptos coordenadas de un vector y módulo.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

*Resultados:*

Nº Personas (%)	a)	b)	c)	d)
Respuesta Correcta (RC)	61,90 %	57,14 %	47,62 %	42,86 %
Respuesta Incorrecta (RI)	19,05 %	23,81 %	9,52 %	9,52 %
Respuesta Parcial (RP)	9,52 %	9,52 %	19,05 %	19,05 %
No sabe / No contesta	9,52 %	9,52 %	23,81 %	28,57 %

*Reflexión:* Hay un porcentaje alto de alumnos que saben realizar la recta paralela o perpendicular a una dada. El porcentaje en cambio en los apartados c y d disminuye. Esta disminución de respuestas correctas hace que aumente las respuestas parciales, ya que los errores cometidos son esencialmente de cálculo (a la hora de despejar o realizar el sistema).

En cuanto a las respuestas incorrectas en el apartado a) y b) hay más, ya que los alumnos saben el procedimiento que deben hacer pero no lo aplican adecuadamente. Pero en los apartados c) y d) que deben interpretar el resultado no saben qué procedimiento usar y por tanto se eleva el número de respuestas sin contestar (No sabe / No contesta).

Ejemplos ilustrativo de un error es el siguiente:

- Realizar mal los cálculos:

d)  $d(A, M) = \sqrt{(-4-6)^2 + (-7+2)^2} = \sqrt{10^2 + 25} = \sqrt{35} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

*4ª Pregunta:* Deduce las ecuaciones paramétricas y continua de la recta.

*Objetivo:* Comprobar el aprendizaje de los alumnos de las deducciones teóricas de las ecuaciones de la recta.

*Resultados:*

Nº Personas (%)	Grupo 1 (4º E.S.O. A)
Respuesta Correcta (RC)	23,81 %
Respuesta Incorrecta (RI)	19,05 %
Respuesta Parcial (RP)	42,86 %
No sabe / No contesta	14,29 %

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

*Reflexión:* El porcentaje de alumnos que contestan perfectamente es bajo, al igual que los que no contestan o contestan erróneamente. Se incluye en respuesta parcial a aquellos alumnos que deducen una de las dos ecuaciones solamente, o deducen ambas, pero no indican qué representa cada parámetro que utilizan, a pesar de que sí indican los pasos que van dando.

Ejemplo representativo de estas respuestas parciales es el siguiente:

The image shows a handwritten derivation on a blue background. At the top, it states  $(x, y) = (P_1, P_2) + (KU_1, KU_2)$ . Below this, it says "Agrupamos los términos y separamos las coordenadas" and shows a system of equations:  $\begin{cases} x = P_1 + KU_1 \\ y = P_2 + KU_2 \end{cases} \rightarrow$  Ecuación paramétrica. Then it says "A partir de aquí, despejamos K." and shows  $\begin{cases} K = \frac{x - P_1}{U_1} \\ K = \frac{y - P_2}{U_2} \end{cases}$ . Finally, it says "Igualamos:" and shows the equation  $\frac{x - P_1}{U_1} = \frac{y - P_2}{U_2}$  labeled as "Ecuación continua." The final equation is enclosed in a green box.

A continuación se muestran los resultados de la prueba escrita realizada al grupo 2. Esta prueba, al igual que la anterior, se utilizó para valorar el aprendizaje de la unidad didáctica de geometría analítica. Está compuesta por cuatro preguntas, dos de ellas con una valoración de tres puntos y otras dos con un valor de dos puntos, que hacen un total de 10 puntos. La prueba se incluye en el apartado 6.2. de este trabajo.

Hay que destacar que, de los 14 alumnos, hay cuatro que tienen un cero en el examen porque no respondieron a ninguna de las preguntas y se les ha incluido en el apartado No sabe/No contesta y de ahí el elevado porcentaje de este apartado.

1ª Pregunta: Dadas las siguientes rectas:

$$r: \frac{y-3}{5} = x-1; \quad s: y = \frac{2}{5}x; \quad t: \frac{x+1}{5} = \frac{1-y}{2}$$

- ¿Qué recta es paralela a  $2x - 5y + 4 = 0$  ?
- Da un vector perpendicular a cada una de ellas.
- Escribe la ecuación general de la recta t.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

*Objetivo:* Comprobar el aprendizaje del concepto de vector perpendicular. Saber si reconocen, dada una recta, sus elementos y saben hallar un vector director. Comprobar si saben realizar las transformaciones algebraicas adecuadas para la obtención de la ecuación general de una recta.

*Resultados:*

Nº Personas (%)	a)	b)	c)
Respuesta Correcta (RC)	28,57 %	42,86 %	50,00 %
Respuesta Incorrecta (RI)	35,71 %	7,14 %	14,29 %
Respuesta Parcial (RP)	0 %	14,29 %	7,14 %
No sabe / No contesta	35,71 %	35,71 %	28,57 %

*Reflexión:* En el apartado a) hay un elevado número de respuestas que no son correctas. Mientras que en el apartado b) y c) hay más alumnos que contestan correctamente que mal. Lo que podemos extraer es que los alumnos no saben de identificar los vectores en las distintas ecuaciones de la recta. Pero conocen el concepto de vector perpendicular y saben hallar la ecuación general a partir de otras dadas.

El error más generalizado en el apartado c) es despejar mal, realizar mal las transformaciones algebraicas.

*2ª Pregunta:* En el triángulo de vértices A(1,1), B(-3,2) y C(-1,-4) halla:

- La ecuación de la altura  $h_1$  que pasa por el vértice B.
- La ecuación de la altura  $h_2$  que pasa por el vértice C.
- El ortocentro del triángulo.

*Objetivo:* Comprobar que el alumno ha aprendido el procedimiento de obtención de: la ecuación de una recta teniendo dos de sus puntos y una perpendicular a una recta que pase por un punto determinado. Saber si relaciona la representación geométrica de intersección de dos rectas con la representación analítica.

*Resultados:*

Nº Personas (%)	a)	b)	c)
Respuesta Correcta (RC)	50,00 %	35,71 %	35,71 %
Respuesta Incorrecta (RI)	14,29 %	21,43 %	21,43 %
Respuesta Parcial (RP)	0 %	7,14 %	7,14 %
No sabe / No contesta	35,71 %	35,71 %	35,71 %

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

### Reflexión:

La mitad de los alumnos sabe el procedimiento para obtener una recta y su perpendicular por un punto dado. Y algo menos de la mitad saben relacionar la representación geométrica de la intersección de dos rectas con la representación analítica.

Los errores cometidos por los alumnos cuya respuesta no es correcta son: no hallar la altura por el vértice correcto o hallar la altura como la perpendicular que pasa por el punto medio en vez de por el vértice (es decir, calcula la mediatriz en vez de la altura). También, a la hora de hallar el ortocentro, un par de alumnos hallan la tercera altura y hallan el corte de las tres rectas mediante dos sistemas para verificar que las tres se cortan.

Un error ilustrativo es el siguiente:

- Error al hallar la altura:

~~a)~~  $h_1$  pasa por vértice B  
 $\overline{BA} = (4, -1) \rightarrow \vec{u}(4, -1)$   
B (-3, 2)  
La altura es perpendicular a AC

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1}$$

b)  $h_2$  pasa por vértice C  
 $\overline{BA} = (4, -1) \rightarrow \vec{u}(4, -1) \rightarrow$  Es perpendicular por tanto su vector director es: (1, 4)  
C (-1, 4)

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-1}$$

c)

3ª Pregunta: Comprueba que el triángulo de vértices A(-2,4), B(3,3) y C(-3,-1) es un triángulo rectángulo isósceles

Objetivo: Comprobar el aprendizaje del alumno de los conceptos de coordenadas de un vector, vector perpendicular y módulo.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

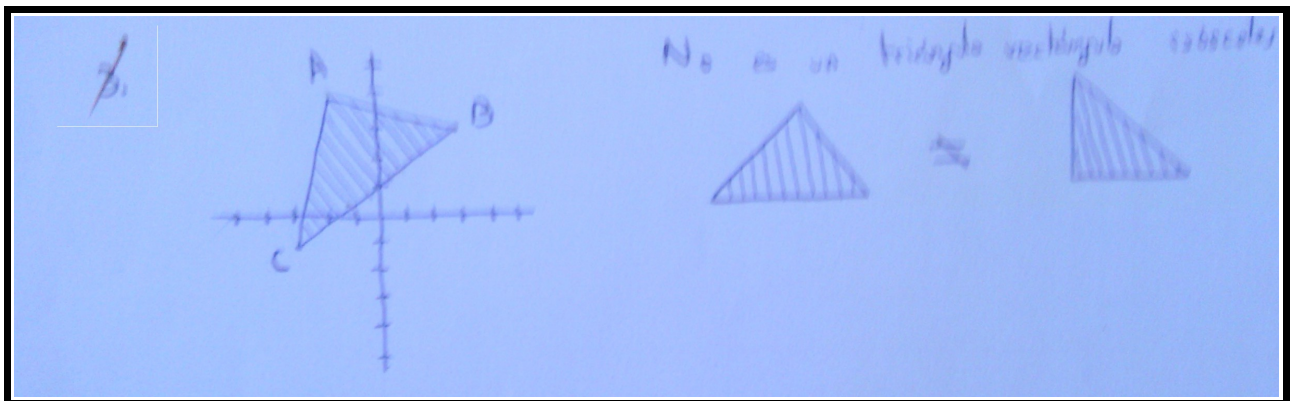
Resultados:

Nº Personas (%)	a)
Respuesta Correcta (RC)	14,29 %
Respuesta Incorrecta (RI)	21,43 %
Respuesta Parcial (RP)	28,57 %
No sabe / No contesta	35,71 %

*Reflexión:* El número de alumnos que realizaron bien este ejercicio es muy bajo. Al cambiar el tipo de enunciado los alumnos tienen problemas para relacionarlo con los conceptos que conocen. Entre las respuestas parciales se encuentran alumnos que no demostraron que era rectángulo e isósceles sino sólo una de las dos cosas.

Un resultado del examen es el siguiente:

- Intentar de forma visual contestar a la pregunta:



4ª Pregunta: Deduce la ecuación continua y la ecuación punto-pendiente de la recta.

*Objetivo:* Comprobar el aprendizaje de los alumnos de las deducciones teóricas de las ecuaciones de la recta.

Resultados:

Nº Personas (%)	Grupo 2 (4º E.S.O. C)
Respuesta Correcta (RC)	0 %
Respuesta Incorrecta (RI)	1 (7,14 %)
Respuesta Parcial (RP)	10 (71,43 %)
No sabe / No contesta	3 (21,43%)

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

*Reflexión:* No detallan quién es cada uno de los parámetros que utilizan, aunque saben el procedimiento y explican en mayor o menor medida qué pasos realizan, por ello considero que la respuesta es parcial y no incorrecta.

Un ejemplo de cómo explican la deducción de la ecuación punto-pendiente es el siguiente:

La ecuación punto pendiente:

- Sabiendo la ecuación continua  $\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2}$ , d.
- Respejes la ecuación dejando a un lado  $y-b$  y al otro todos los componentes.

$$y-b = (x-a) \cdot \frac{u_2}{u_1} \quad \text{y } \frac{u_2}{u_1} \text{ es igual a } m \text{ entonces}$$

queda

$$y-b = m \cdot (x-a)$$



## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

### **Reflexión:**

En la tabla siguiente resumimos los porcentajes de respuestas correctas de cada pregunta en cada uno de los grupos:

% Respuestas Correctas	Grupo 1
Ecuación General	57,14 %
Vectores equipolentes	28,57 %
Altura de un triángulo	42,86 %
Mediatriz	28,57 %
Paralela	61,90 %
Perpendicular	57,14 %
Intersección de rectas	47,62 %
Distancia entre puntos	42,86 %
Deducción ecuaciones Paramétricas y Continua	23,81 %

% Respuestas Correctas	Grupo 2
Vectores directores	28,57 %
Vector perpendicular	42,86 %
Ecuación General	50,00 %
Altura de un triángulo	50,00 %
Altura de un triángulo	35,71 %
Intersección de rectas	35,71 %
Distancia entre puntos y vector perpendicular	14,29 %
Deducción ecuaciones Continua y Punto-pendiente	0,00 %

A continuación resumimos las dificultades observadas relacionadas con nuestro estudio de investigación, las pruebas formales y preformales en las deducciones de las ecuaciones de la recta en el plano.

Hemos observado que el desarrollo de la deducción formal la realizan perfectamente y explican cada uno de los pasos que dan. El único error que se repite en los alumnos es el de no describir cada letra que utilizan, es decir, a pesar de escribir la ecuación de la recta de la que parten y dar todos los pasos correctamente hasta llegar a la siguiente, no especifican que  $\vec{u}$  es el vector director de la recta y  $P$  es un punto de la recta. Por ello, creemos que los alumnos donde tienen dificultades es a la hora de saber cuáles son los elementos que han de definir al comienzo de una demostración.

A continuación mostramos una tabla del porcentaje de alumnos que realizaron la prueba formal en la última pregunta del examen y el porcentaje de alumnos que realizaron la prueba preformal en la última pregunta del examen (que pedía las deducciones de dos ecuaciones de la recta).

% alumnos	Realizan Prueba Formal	Realizan Prueba Preformal
Grupo 1	90,48 %	9,52 %
Grupo 2	100 %	0 %

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

De entre los alumnos del grupo 1, sólo dos realizaron la demostración mediante la prueba preformal, mientras que el resto de alumnos usaron la prueba formal.

Los dos alumnos que realizaron la prueba preformal están incluidos entre las respuestas incorrectas, detallamos el por qué:

- El primero confunde la ecuación general y la continua. Se pide la deducción de la ecuación continua de la recta y escribe la general (llamándola erróneamente continua), y no deduce ni la continua ni las paramétricas.
- El segundo saca mal el vector director, escribe: "*La recta  $r: x+y-1=0$  pasa por el punto  $A(1,0)$  y tiene vector  $v(1,1)$* ". A continuación pone las ecuaciones paramétricas y la continua pero no las deduce. Finalmente generaliza la expresión y pone las ecuaciones paramétricas y continua con letras, pero tampoco las deduce.

Por tanto, las dos únicas personas que intentan la deducción mediante la prueba preformal, en realidad lo que no comprenden es lo que significa una demostración, que deben describir los pasos y no sólo el resultado al que han de llegar.

El resto de compañeros, salvo los que sólo escriben las ecuaciones sin deducirlas (incluidos en respuesta incorrecta) y los que no contestan, realizan bien las deducciones formales y describen los pasos que dan, pero no especifican quién es cada parámetro.

Dos alumnos realizan la deducción no sólo de las dos ecuaciones que se les pide sino también de la ecuación vectorial, y a partir de ella deducen las otras dos.

En el grupo 2 todos realizan la prueba formal. Un alumno, a pesar de la claridad del enunciado, deduce todas las rectas vistas en clase. Y cinco alumnos parten de la ecuación vectorial en vez de las ecuaciones paramétricas.

En resumen, el porcentaje de alumnos que se inclinan por la realización de una prueba preformal es prácticamente inexistente. Creemos que esto es debido, como ya hemos indicado, al pensamiento inculcado anteriormente de que una prueba no puede realizarse con números. Pero esto no es indicador de que el aprendizaje haya sido mejor con una u otra prueba, ya que una de las deducciones fue realizada en clase mediante una prueba preformal y la otra formal. Y los errores han sido los mismos en ambas pruebas.

Por tanto, seguiremos analizando el resto de datos para tener una percepción mejor de qué es lo que ayuda más a los alumnos a la hora de comprender una demostración, si la prueba preformal o la formal. Ya que los resultados anteriores no han sido suficientes para dar una conclusión clara.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

### **Orientaciones didácticas:**

Seguiría incluyendo preguntas teóricas en los exámenes para que los alumnos cojan hábito de razonar y expresarse adecuadamente, lo que les ayudaría también a la resolución de problemas.

Haría hincapié en los enunciados de las demostraciones que queremos realizar. Que comprendan cuáles son las hipótesis y cuál la tesis, de dónde partimos y a qué queremos llegar.

## **7.2. Errores y Dificultades de aprendizaje**

En este apartado se resumen los errores y dificultades de aprendizaje que se observaron.

En cuanto a la prueba escrita podemos observar que los alumnos tienen grandes problemas de concentración durante el examen. Muchos alumnos tienen incorrectas preguntas debido a errores de cálculo sencillos como:

$$3 - (-2) = 1; \quad 3 - 4 = 1; \quad (-4 - 6)^2 = 10; \quad \text{En la expresión } \frac{2}{5}x \text{ escribir: } \textit{el coeficiente de } x \text{ es } 2$$

Y también tienen errores por leer mal el enunciado o copiar mal resultados que habían calculado previamente.

Además se han observado, a la hora de realizar los problemas, deficientes conocimientos previos, ejemplo de ello:

- No saber las definiciones de mediatriz y altura y por qué punto pasan.
- A la hora de realizar transformaciones algebraicas en ecuaciones de primer grado, despejan mal la incógnita.
- No realizan bien el binomio de Newton  $(a - b)^2$
- Realizan dos sistemas de ecuaciones para encontrar el ortocentro porque no están seguros de que con el corte de dos rectas sea suficiente.
- En la realización de cálculos con radicales, por ejemplo:  $\sqrt{26} = 2\sqrt{3}$

La mayor dificultad encontrada en esta investigación ha sido el desconocimiento de las pruebas preformales por parte del profesor que impartía la clase anteriormente. Al insistir durante todo el año en que no se puede hacer una prueba mediante un caso particular, los alumnos han sido muy excépticos frente a la prueba preformal.

Otro problema es que les cuesta escribir formalmente los pasos a seguir en una demostración, reconocer qué elementos han de describir.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

### **7.3. Análisis del cuaderno de los alumnos**

Se pretende valorar la actitud del alumno hacia el aprendizaje y la atención prestada durante las clases a través de la observación de su cuaderno de trabajo. Para ello tomamos nota de los siguientes parámetros:

- T: Tiene escrita la teoría dada en clase, las pruebas formales y preformales de las deducciones de cada recta, sólo parte de la teoría o nada.
- E: Tiene los ejercicios resueltos durante las clases, sólo copia algunos, o no copia nada.
- L: Limpieza y orden en el cuaderno.
- R: Realización de resúmenes en el cuaderno y/o subrayado de los conceptos y procedimientos más importantes.

En el grupo 1 se recogió los cuadernos de 18 alumnos mientras que en el grupo 2 se recogieron los cuadernos de 9. Los porcentajes siguientes representan a los alumnos según los parámetros anteriormente descritos:

	Grupo 1	Grupo 2
T (Teoría escrita)	<p><b>15 escriben la teoría:</b></p> <p>Uno transforma la prueba preformal a formal.</p> <p>4 no lo escriben tal cual sino que escriben todo seguido y en la <b>prueba preformal no pone justificación</b>, lo consideran un ejercicio.</p> <p><b>3 No tienen nada</b> de la teoría dada en clase sino resúmenes descargados de Internet.</p>	<p><b>9 escriben la teoría:</b></p> <p><b>2 hacen distinción</b> a la hora de copiar la prueba <b>formal y preformal</b>. En la prueba formal separa el enunciado de la justificación pero en las pruebas preformales lo ponen todo seguido siguiendo el mismo esquema que da a los ejercicios.</p>
E (Ejercicios resueltos)	<p><b>15:</b> Uno de ellos tiene una colección de ejercicios a mayores de los resueltos en clase.</p> <p><b>3:</b> Sólo tienen <b>algunos</b> de los <b>ejercicios</b> realizados en clase.</p>	<p><b>8</b></p> <p><b>1:</b> Sólo tiene <b>algunos</b> de los <b>ejercicios</b> realizados en clase.</p>
L (Limpieza y orden)	<p><b>6</b> alumnos destacan por la <b>limpieza</b> y el <b>orden</b> mientras que sólo <b>1</b> destaca por el <b>desorden</b>.</p>	<p><b>2</b> alumnos destacan por la <b>limpieza y orden</b>.</p>
R (Resúmenes y subrayados)	<b>9</b>	<b>5</b>

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

### Grupo 1:

83,33% de los alumnos copian la teoría, de entre los cuales, el 33,33% lo copia distinto a como está en la pizarra. O no separa la justificación del enunciado, o lo pone como un ejercicio o transforma la prueba preformal en formal.

83,33% de los alumnos tienen los ejercicios resueltos en el cuaderno.

33,33% de los alumnos destacan por su limpieza y orden en el cuaderno.

50% de los alumnos realizan resúmenes o subrayan en su cuaderno lo más importante.

### Grupo 2:

Todos los alumnos copian la teoría pero el 22,22% de forma distinta a como está en la pizarra sólo en el caso de la prueba preformal, al igual que pasaba con el grupo anterior.

88,88% de los alumnos tienen los ejercicios resueltos en el cuaderno.

25% de los alumnos destacan por su limpieza y orden en el cuaderno.

55,55% de los alumnos realizan resúmenes o subrayan en su cuaderno lo más importante.

### **Reflexión:**

De los datos extraídos de la observación de los cuadernos, concluimos que los alumnos están interesados en el aprendizaje de la asignatura y están atentos a las explicaciones y ejercicios realizados por parte del profesor en el aula. Sin embargo, al principio tuvieron problemas a la hora de convencerse de que la prueba preformal era una justificación válida. Reflejo de esto es el porcentaje de alumnos que al escribir en su cuaderno la prueba formal sigue un esquema de enunciado, justificación y ejemplo, todo ello bien diferenciado, mientras que para la prueba preformal no distingue el enunciado de la justificación, o pone directamente que es un ejemplo.

## 7.4. Análisis del cuestionario de valoración de las pruebas formales y preformales

En este apartado se analiza el cuestionario realizado por los alumnos para que valoraran su aprendizaje a través de las pruebas formales y preformales. La encuesta que se entregó a los alumnos está incluida en el apartado 6.2. de este trabajo.

Para el análisis, realizaremos una valoración pregunta por pregunta.

1. Puntúa de 1 a 10 las pruebas que se han realizado atendiendo a las siguientes categorías: facilidad (F), gusto (G), claridad (C), aprendizaje (A). Entiende que:

- 1 es muy difícil y 10 es muy fácil.
- 1 no me gusta y 10 me gusta mucho.
- 1 no es nada clara y 10 es muy clara.
- 1 no se aprende nada y 10 se aprende mucho.

Resultados de la Media de la nota dada por los alumnos:

<i>Ecuación / Categoría</i>	Facilidad	Gusto	Claridad	Aprendizaje
Formal de la ecuación Vectorial	7,09	7,05	7,05	<b>7,45</b>
Formal de las ecuaciones Paramétricas	6,82	6,91	7,32	<b>7,77</b>
Preformal de la ecuación Continua	7,27	7,27	7,32	<b>7,41</b>
Formal de la ecuación General	<b>6,54</b>	6,27	6,32	6,45
Preformal de la ecuación Explícita	6,32	6,41	6,55	<b>6,91</b>
Formal de la ecuación Punto-pendiente	6,09	6,09	6,55	<b>7,27</b>
<b>Total Preformal</b>	6,79	6,84	6,93	<b>7,16</b>
<b>Total Formal</b>	6,64	6,58	6,81	<b>7,24</b>

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

### Reflexión:

La prueba preformal de las ecuaciones obtiene mejor nota que la prueba formal en facilidad, gusto y claridad. Por tanto podemos concluir que, como creíamos, la prueba preformal les ayuda a ver las deducciones de forma más clara y fácil y por eso les gusta más.

Aunque hay que tener en cuenta que en aprendizaje la puntuación de la prueba formal es mayor. Lo que puede ser debido a que con la prueba formal tienen la seguridad de que pueden extrapolarlo a cualquier ejemplo, mientras que con la preformal les quedan dudas.

2. Responde a las siguientes preguntas, señalando en cada caso el porqué:

- ¿Cuál de las dos formas te *convence* más de la veracidad de una ecuación?
- ¿Cuál de las dos pruebas puede ayudar más a *entender* el significado de una ecuación?
- ¿Cuál de las dos pruebas puede ayudar más a *memorizar* una ecuación?
- ¿Cuál de las dos pruebas es más útil para ilustrar cómo se *aplica* una ecuación?

### Resultados:

Grupo 1 (4º ESO A):

	Preformal	Formal	NS / NC	Ambas
Convence más	<b>77,27 %</b>	18,18 %	4,55 %	0 %
Ayuda a Entender	22,73 %	<b>72,73 %</b>	4,55 %	0 %
Ayuda a Memorizar	<b>59,09 %</b>	31,82 %	4,55 %	4,55 %
Ilustra cómo se aplica	<b>68,18 %</b>	9,09 %	4,55 %	18,18 %

Grupo 2 (4º ESO C):

	Preformal	Formal	NS / NC	Ambas
Convence más	<b>55,56 %</b>	44,44 %	0 %	0 %
Ayuda a Entender	33,33 %	<b>66,67 %</b>	0 %	0 %
Ayuda a Memorizar	<b>77,78 %</b>	22,22 %	0 %	0 %
Ilustra cómo se aplica	<b>88,89 %</b>	11,11 %	0 %	0 %

Porcentaje de ambos grupos:

	Preformal	Formal	NS / NC	Ambas
Convence más	<b>70,97 %</b>	25,80 %	3,23 %	0 %
Ayuda a Entender	25,81 %	<b>70,97 %</b>	3,23 %	3,23 %
Ayuda a Memorizar	<b>64,52 %</b>	29,03 %	3,23 %	0 %
Ilustra cómo se aplica	<b>74,19 %</b>	9,68 %	3,23 %	12,90 %



## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

### Reflexión:

Como podemos observar en las tablas, los alumnos opinan que es mejor utilizar la prueba preformal, pues esta les convence más de la veracidad de una ecuación, les ayuda más a memorizar dicha ecuación y además les resulta más útil para ilustrar cómo se aplica una ecuación. Aun así, a la hora de entender el significado de una ecuación prefieren la prueba formal pues de esta forma tienen la seguridad de que pueden aplicarlo después a cualquier ejercicio concreto.

3. Valora de 1 a 10, de las dos pruebas, cuál preferirías utilizar para la obtención de la ecuación de la recta.

Recogeremos los datos en la siguiente tabla, donde se muestran, primero por grupos y después el total, las preferencias de los alumnos en cada una de las ecuaciones.

Tengamos en cuenta la siguiente notación:

- I: Si ponen la misma nota a la prueba formal y a la prueba preformal
- F1: Si prefieren la prueba formal a la prueba preformal por un punto de diferencia
- F2: Si prefieren la prueba formal a la prueba preformal por dos puntos de diferencia
- F+2: Si prefieren la prueba formal a la prueba preformal por más de dos puntos de diferencia
- P1: Si prefieren la prueba preformal a la prueba formal por un punto de diferencia
- P2: Si prefieren la prueba preformal a la prueba formal por dos puntos de diferencia
- P+2: Si prefieren la prueba preformal a la prueba formal por más de dos puntos de diferencia
- NS/NC: No sabe, no contesta

Grupo 1 (4º ESO A)

Preferencia	I	F1	F2	F+2	P1	P2	P+2	NS/NC
Vectorial	5	8	2	1	0	1	1	4
Paramétrica	4	1	6	0	4	1	1	5
Continua	4	5	2	0	4	1	0	6
General	2	5	2	0	2	0	6	5
Explícita	6	2	1	1	1	1	3	7
Punto-pendiente	8	3	2	0	2	0	0	7

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

Grupo 2 (4º ESO C)

Preferencia	I	F1	F2	F+2	P1	P2	P+2	NS/NC
<b>Vectorial</b>	2	0	0	1	3	0	2	1
<b>Paramétrica</b>	3	0	0	2	2	0	2	0
<b>Continua</b>	3	1	0	2	1	0	2	0
<b>General</b>	0	0	1	1	4	0	3	0
<b>Explícita</b>	1	1	1	1	3	0	2	0
<b>Punto-pendiente</b>	1	1	1	1	3	1	1	

### Reflexión:

Podemos observar que los grupos son bastante diferentes en cuanto a preferencias. El primer grupo, que en general es mejor matemáticamente hablando (más intuitivo), prefiere en general la prueba formal a la preformal, salvo en la ecuación general. Esta prueba es mucho más complicada para los alumnos (debido al cambio de variable), lo que me lleva a pensar que para demostraciones sencillas prefieren pruebas formales mientras que si tienen algún razonamiento algo más complicado su preferencia cambia.

Aún así no tienen una clara preferencia por la prueba formal ya que es alto el número de alumnos que igualan las notas de ambas pruebas. Además hay un gran índice de alumnos que no contestaron que nos indica que, o bien no tenían ninguna preferencia, o no lo rellenaron con suficiente reflexión.

En el grupo 2 tenemos una preferencia notable por la prueba preformal, aunque también podríamos aplicar el mismo razonamiento anterior ya que justamente en las dos ecuaciones que les resultaban más sencillas se vuelcan en que no tienen preferencia por ninguna de las dos.

## **7.5. Reflexión Final**

En la clase donde eran menos alumnos y he podido comunicar mejor el sentido de la prueba preformal los datos informan de que prefieren la enseñanza mediante pruebas preformales. El grupo 1, en general entendían mejor las deducciones formales que el grupo 2, y por tanto, entre las ideas que ya tenían de lo que es una prueba correcta y que las deducciones eran sencillas, no veían el porqué de realizar formas preformales. De ahí que este grupo no tenga una clara preferencia hacia ninguna de las dos pruebas aunque tienda algo más hacia la prueba formal.

Además, los alumnos en el grupo 1 prefieren memorizar fórmulas en vez de razonar el procedimiento. Un ejemplo muy repetido es a la hora de sacar el parámetro C de la ecuación general de la recta. Muchos prefieren aprenderse la fórmula  $(C = u_1 y - u_2 x)$ . Y es por esto que prefieren en ciertos momentos la prueba formal, que les da una fórmula que pueden usar desde el comienzo. Mientras que en el grupo 2 prefieren deducirla a partir de otra más sencilla, aunque los resultados no son mejores debido a los errores de cálculo.

Como última reflexión también diremos que ha dependido de la dificultad de la deducción la preferencia de una u otra prueba. Ante deducciones sencillas, como eran la continua o la paramétrica, los alumnos, en ambos grupos, no tenían una clara preferencia o se inclinaban hacia una prueba formal. Mientras que ante la deducción de la ecuación general, más complicada para los alumnos, preferían la prueba preformal.

## **8. Conclusiones y problemas abiertos**

En este apartado presentamos las conclusiones que hemos obtenido de la investigación realizada. Veremos si se cumplen o no las hipótesis de trabajo, para poder valorar si el aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano es mejor por pruebas formales o preformales.

Además se expondrán los puntos débiles que ha tenido esta investigación durante su desarrollo, así como los problemas abiertos que quedan sin resolver para posibles futuras investigaciones.

### **8.1. Conclusiones**

Presentaremos las conclusiones a través de las hipótesis de trabajo planteadas en el apartado 5 de este trabajo, y teniendo en cuenta los resultados del análisis cualitativo y cuantitativo realizado en los puntos anteriores.

Hipótesis 1: Las pruebas preformales son más significativas para los alumnos que las pruebas formales.

Conclusión 1: Después de realizarse la acción en el aula, no se ha podido verificar la hipótesis, ya que en los exámenes no se ve un mejor aprendizaje de la ecuación enseñada mediante pruebas preformales ante las enseñadas mediante pruebas formales. Tampoco podemos negarla puesto que tampoco se percibe que el aprendizaje haya sido mayor en las ecuaciones enseñadas mediante pruebas formales a las enseñadas mediante pruebas preformales, sino que el aprendizaje se ve igualado en ambas.

Sin embargo, debemos tener en cuenta que, los alumnos en la pregunta teórica del examen, en general, realizaron una prueba formal, a pesar de que de las dos ecuaciones pedidas, una fue deducida en clase mediante una prueba formal y la otra mediante una prueba preformal. Esto nos da a entender que los alumnos se inclinan hacia la prueba formal a la hora de demostrar un enunciado. Pero los errores cometidos para ambas deducciones son los mismos y no podemos sacar conclusiones que nos lleven a verificar o negar nuestra hipótesis.

Además, aunque el observador externo ha valorado positivamente la docencia, no ha hecho distinción entre la docencia a través de pruebas formales y preformales. Deberíamos elaborar un diseño de enseñanza con pruebas formales y otro con pruebas preformales donde se puedan contrastar ambas.

Hipótesis 2: Las pruebas preformales son preferidas por los alumnos.

Conclusión 2: Esta hipótesis no queda confirmada. A la vista del cuestionario que se les impartió, los alumnos prefieren las pruebas preformales por su facilidad y claridad. Les resulta más útil este tipo

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

de prueba ya que con ellas consiguen entender el procedimiento y cuál es la aplicabilidad.

También tenemos que tener en cuenta que en el grupo 1 hay una preferencia hacia la prueba formal en el caso de las deducciones sencillas. Al igual que en el grupo 2, en este caso, no se inclinan por ninguna de ellas. Pero en el caso de deducciones más complicadas, como es el caso de la ecuación general, los alumnos prefieren las pruebas preformales. Lo que podemos concluir es que, ante demostraciones complicadas, los alumnos se decantan por las pruebas preformales.

Pero no hemos conseguido contrastar esta conclusión con el resto de herramientas de recogida de datos puesto que en el examen los alumnos tuvieron preferencia por la prueba formal a la hora de realizar la demostración.

Hipótesis 3: Las pruebas preformales ayudan a entender una demostración mejor que las pruebas formales.

Conclusión 3: Esta hipótesis tampoco queda confirmada. A raíz de los datos obtenidos a través del cuestionario, sabemos que los alumnos creen que las pruebas formales son las que más les ayudan a entender una demostración. Aunque las pruebas preformales les resulten más claras y sencillas, las pruebas formales les dan la seguridad de que realmente van a poder aplicarlo a cualquier ejercicio concreto, cosa que las pruebas preformales no les dan.

Los alumnos no ven como una demostración válida la prueba preformal, y a la hora de demostrar cualquiera de las deducciones de las ecuaciones de la recta en los exámenes, se inclinan por la prueba formal. Esta prueba es la que les convence de la generalidad de la demostración.

A pesar de esto, no tenemos los datos suficientes para contrastar que realmente la prueba formal les ayude a entender más. Por tanto, no podemos afirmar que la hipótesis sea falsa.

## **8.2. Aportaciones del estudio**

Esta sección muestra las aportaciones que se pueden extraer de este estudio experimental.

- Instrumentos de valoración del aprendizaje de los alumnos, de la opinión sobre las pruebas formales y preformales y tablas de recogida de datos.
- Un diseño de enseñanza sobre las pruebas formales y preformales de las ecuaciones de la recta en el plano
- Se presenta un conjunto amplio de ideas teóricas de diversos autores, sobre las distintas investigaciones en la enseñanza de la demostración matemática.
- Valoración de los alumnos ante una prueba preformal y una prueba formal en la docencia de las ecuaciones de la recta en el plano.

## **8.3. Puntos débiles**

En este apartado describimos los puntos débiles y limitaciones que hemos encontrado durante el desarrollo de la investigación. Estos puntos son los siguientes:

- Falta de experiencia en docencia por parte del profesor investigador. La docencia impartida para esta investigación es la primera experiencia como profesor de matemáticas en un grupo de secundaria. Esta inexperiencia hizo difícil la recogida de datos a la vez que se desarrollaba la clase.
- La inexperiencia en el campo de la investigación y la falta de formación teórica han dificultado el trabajo, debido a que las clases teóricas sobre investigación e innovación en docencia matemática fueron impartidas tras las prácticas.
- Limitaciones por el bajo nivel de conocimientos previos de los alumnos. Muchos de los errores cometidos por los alumnos son de conceptos anteriores al que nosotros hemos explicado.
- Son necesarios más datos y más extensión en el tiempo para poder confirmar las hipótesis planteadas.

#### **8.4. Problemas abiertos**

En este apartado se presentan cuestiones que no se han podido valorar en esta investigación y podrían tenerse en cuenta para futuras investigaciones:

- Realizar el estudio con una duración más prolongada, por ejemplo, un curso escolar, para así poder realizar más pruebas escritas a los alumnos y tener más resultados acerca del aprendizaje. También así los alumnos pueden entender mejor cuál es la función de una prueba preformal.
- Realizar la docencia en dos clases contrastando los resultados de las pruebas preformales y formales.
- Tener entrevistas con los alumnos que faciliten la interpretación de las respuestas
- Refinar el cuestionario del observador externo para sacar más conclusiones sobre las diferencias entre ambas pruebas

## **9. Reflexión Personal**

La realización de este trabajo de fin de máster ha sido gracias a los conocimientos recibidos durante este curso de máster en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. El trabajo de fin de máster está dividido en tres partes, un módulo genérico, un módulo específico y el Prácticum, que es un módulo de desarrollo profesional que consta de dos asignaturas: por un lado, las prácticas y en segundo lugar este trabajo de fin de máster.

En el módulo genérico se imparten clases de psicología, pedagogía y sociología, que aportan una base para comprender a los alumnos y desarrollar la metodología para nuestras clases. Este módulo, nos ha ayudado en la realización de este trabajo, con el desarrollo de la docencia y la interpretación de la legislación.

En el segundo módulo, el genérico, se imparten clases específicas de la especialidad, en mi caso Matemáticas. Este módulo ha sido de gran ayuda para la realización de la unidad didáctica, pues en él no sólo elaboramos una unidad didáctica sino que también la presentamos.

Durante las prácticas he conocido cuál es la realidad de las aulas, he podido llevar a cabo todo lo aprendido durante el curso y he conseguido recoger información vital para este trabajo.

Por último, he recibido las clases sobre investigación educativa e innovación docente en matemáticas. Estas dos asignaturas, a pesar de pertenecer al módulo específico, se han cursado después de las prácticas y han resultado una gran ayuda para este TFM por tratarse de investigación en docencia.

Con la realización de este TFM además he tomado contacto con la lectura científica y me ha ayudado a realizar valoraciones de datos. He mejorado mi capacidad de reflexión crítica y me ha iniciado en el ejercicio profesional como investigadora. Por ello espero haber sabido comunicar las conclusiones y los conocimientos de modo claro y preciso.

Desde un punto global, diré que esta experiencia es positiva, puesto que aprender algo siempre lo es. Aunque no sólo valoraré el aprendizaje de algo nuevo sino también el hecho de trabajar en un nuevo ambiente y con distintas dinámicas de grupo.



## **10. Bibliografía**

- Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (2007). Decreto 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL*, 23 de mayo de 2007.
- MEC (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE n° 5*, de 5 enero de 2007.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (2004): Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. *Números*. Vol 55. La Laguna. Tenerife.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (1998): La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática*. Vol 9, n1 2, pp. 65-104. ISSN: 0187-82988. México D.F., México.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (2001): Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO*. Vol. 28, pp 39-60. Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.
- González, J.C. (2012). *Estudio de contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las CCSS y de las CCEE. Universidad de Valladolid.
- Colera, J., Gaztelu, I., García, R., Olivieira, M.J. y Martínez, M.M. (2006). *Matemáticas 4º E.S.O. Opción B*. Madrid: Grupo Anaya, S.A.
- Carrasco, M.A., Martín, R. y Ocaña, J. M. (2011). *Matemáticas 4º ESO (Opción B) Aula 360º*. Madrid: Grupo Editorial Luis Vives.
- Vizmanos, J.R. y Anzola, M. (2003). *Matemáticas: “Algoritmo”, 4º ESO, Opción “B”*. Madrid: Ediciones S.M.
- Álvarez, M<sup>a</sup>. Dolores, Gaztelu, Ana M<sup>a</sup>. y otros. (2011). *Matemáticas 4º ESO Opción B (Proyecto la Casa del Saber)*. Torrelaguna (Madrid): Santillana Educación, S. L.

ANEXO

## ANEXO I:

# **Unidad Didáctica 8: Geometría Analítica**

## **1. Introducción Contextual:**

Esta unidad didáctica está dentro del cuarto bloque que corresponde a Geometría (el cual he dividido en tres unidades didácticas).

En ella se estudia una introducción a la geometría analítica (vectores y las ecuaciones de la recta). Abordaremos el estudio de la recta en el plano, deteniéndonos en el estudio de los pilares necesarios para ello. Se trabajarán con los elementos geométricos y los números para conseguir algebrizar los conceptos asociados al estudio en el plano.

El propósito de esta unidad didáctica consiste en desarrollar las habilidades para el manejo y aplicación de conceptos básicos de la geometría analítica.

Este tema es especialmente importante como adquisición de nuevos conceptos que proporcionan una herramienta y estrategias básicas para, no sólo la asignatura de matemáticas sino también otras materias.

Los conceptos que se estudian darán a los alumnos una visión geométrica que les ayudará a resolver problemas o ejercicios de posteriores estudios. Trataremos en profundidad las diferentes ecuaciones de la recta, sus posición relativa, etc.

Lo alumnos han estudiado el paralelismo y perpendicularidad de las rectas de manera sintética en el primer ciclo de la ESO y en el tema anterior han estudiado toda la trigonometría. Han sido iniciados en el concepto de vector de manera intuitiva en 3º de ESO con los movimientos en el plano.

## **2. Contribución a las competencias básicas:**

**C.B.1:** La competencia matemática: todo el currículo de la materia contribuye a la adquisición de la competencia matemática, puesto que la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con objeto de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella forma parte del propio objeto de aprendizaje.

**C.B.2:** Las matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística ya que el propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto.

**C.B.3:** Los propios procesos de resolución de problemas contribuyen de forma especial a

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

fomentar la autonomía e iniciativa personal porque se utilizan para planificar estrategias, asumir retos y contribuyen a convivir con la incertidumbre controlando al mismo tiempo los procesos de toma de decisiones.

**C.B.4:** También, las técnicas heurísticas que desarrolla constituyen modelos generales de tratamiento de la información y de razonamiento y consolida la adquisición de destrezas involucradas en la competencia de aprender a aprender, tales como la autonomía, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo.

### **3. Objetivos:**

De entre los objetivos que figuran en el Decreto 52/2007 nos interesa destacar los que hablan sobre la capacidad de pensamiento reflexivo.

Nuestro objetivo en esta unidad es que los alumnos comprendan y sepan utilizar conceptos, procedimientos, estrategias y métodos matemáticos en la interpretación de las ciencias y en actividades cotidianas.

Muy importante es también el uso del lenguaje matemático para expresar situaciones que puedan ser tratadas matemáticamente y la utilización del discurso racional para plantear problemas, justificar procedimientos, etc.

#### Objetivos didácticos:

- O1. Calcular las coordenadas y el módulo de un vector.
- O2. Identificar vectores equipolentes.
- O3. Reconocer las características de un sistema de referencia.
- O4. Operar con vectores de forma gráfica y utilizando sus coordenadas.
- O5. Reconocer las diferentes ecuaciones en las que se pueden expresar una recta.
- O6. Determinar posiciones relativas de dos rectas.
- O7. Resolver problemas en los que intervengan relaciones métricas entre puntos y rectas.
- O8. Reconocer la expresión general de un haz de rectas paralelas.
- O9. Hallar la ecuación de la mediatriz de un segmento.
- O10. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que estén implicados conceptos relativos a las relaciones métricas.

### **4. Contenidos, División de tiempos y espacios:**

#### Contenidos (contenidos mínimos en negrita):

Concerniente a vectores:

- **Concepto de vector y características de los vectores** (origen, extremo, dirección, sentido y

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

módulo)

- Vectores equipolentes.
- **Suma de vectores y producto de un número por un vector**
- Sistemas de referencia
- Combinación lineal
- Base y coordenadas
- **Operaciones con coordenadas**
- **Producto escalar** y propiedades.
- Aplicaciones del producto escalar.

Concerniente a las Ecuaciones de la recta:

- Distancias en el plano.
- Ángulo de dos rectas. Procedimientos
- **Cálculo de puntos de una recta, de su vector director y normal, y de su pendiente a partir de su ecuación en cualquiera de sus formas.**
- **Obtención de las ecuaciones de una recta a partir de algunos elementos dados, pasando de unas formas a otras.**
- **Discusión de la posición relativa de dos rectas en el plano** resolviendo sistemas y comparando los coeficientes.
- Utilización de la relación de las pendientes de las rectas paralelas y de las perpendiculares.
- **Cálculo de la distancia entre dos puntos** y entre punto y recta siguiendo un procedimiento geométrico.
- Cálculo de haz de rectas paralelas.

### División de Tiempos:

En total dedicaré once horas a esta unidad didáctica.

Primera sesión: Introducción al concepto de vector (y las diferencias entre magnitudes escalares y vectoriales). Se dará todo lo concerniente a vectores (componentes, opuesto, suma y producto por un número de forma geométrica) y sistemas de referencia.

Segunda sesión: Concepto de base. Suma de vectores y multiplicación de un número por un vector con coordenadas. Producto escalar, propiedades de éste. Cálculo del módulo de un vector.

Tercera sesión: Ecuación vectorial y transformación de la ecuación vectorial a las ecuaciones paramétricas

Cuarta sesión: Deducción de la ecuación continua y la ecuación general. Relaciones de los coeficientes con los vectores.

Quinta sesión: Deducción de la ecuación explícita. Deducción de la ecuación punto-pendiente.

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

Sexta sesión: Resolución de problemas y ejercicios relacionados con las ecuaciones de la recta.

Séptima sesión: Posición relativa de dos rectas (3 métodos). Realización de resolución de ejercicios.

Octava sesión: Cálculo de distancia entre dos puntos. Haz de rectas paralelas

Novena sesión: Realización de resolución de problemas y ejercicios.

Décima sesión: Realización de resolución de problemas y ejercicios.

Undécima sesión: Examen de la unidad.

Al comienzo de las clases se realizará un pequeño resumen de lo dado en las clases anteriores (5 minutos) para que vean la unidad como un todo, cómo conseguimos partiendo de una ecuación de forma continuada llegar a las demás.

También al finalizar cada nueva explicación se realizará un ejercicio para visualizar mejor el concepto. Y al final de la clase se realizarán ejercicios que engloben lo visto en las sesiones anteriores para afianzar y repasar los conocimientos.

En todas las sesiones se mandarán ejercicios (2 ó 3) a los alumnos para casa.

### Espacio:

El espacio para realizar las tareas será el aula de clase

## **5. Metodología:**

En general la metodología a seguir en las primeras cinco sesiones y la octava sesión será la siguiente: Empezaremos con explicaciones teóricas con las que introduzcamos los conceptos a tratar en la sesión correspondiente, así como para intentar saber lo que el alumno conoce sobre el tema. Realizaremos a continuación algunos ejercicios donde se traten los contenidos procedimentales relacionados con los conceptos estudiados. Y por último, dejaremos propuestas algunas actividades similares a las realizadas en clase.

El resto de sesiones serán de resolución de ejercicios y problemas.

Transcurso de las sesiones con actividades:

Primera sesión: En la primera media hora de introducción se centrará en motivar a los alumnos hacia el tema que nos concierne mediante ejemplos cotidianos que introducen el concepto de vector. Por ejemplo, al mover una pelota en el campo de fútbol, el espacio, la velocidad y la fuerza son magnitudes vectoriales, no así la distancia o la rapidez, difíciles de distinguir en una primera aproximación al concepto.

La segunda media hora será una clase magistral sobre los conceptos anteriormente descritos conjunto con ejemplos clarificadores de esos conceptos. Por ejemplo la suma de vectores se introducirá de la siguiente manera:

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

Un alumno va a buscar a otro a su casa, pero para ello no puede tomar el camino más corto (y se dibuja en la pizarra una calle a vista de pájaro) porque entonces tendría que atravesar edificios. Por tanto tiene que trasladarse en la dirección de un vector y a continuación en la de otro.

Ejemplos de actividades para la introducción de los conceptos para las siguientes sesiones:

### A.1 Dos puntos determinan una recta:

Conseguir tener una idea intuitiva de recta y conocer las ideas previas de los alumnos mediante preguntas del tipo:

- ¿Cuántos puntos son necesarios para determinar una recta?
- ¿Cuántas rectas pasan por dos puntos? ¿Y por uno? ¿Y por tres?

### A.2 Ecuaciones de la recta:

Sea P un punto de la recta, y  $\vec{v}$  su vector director. Consideramos un punto genérico de la recta, entonces se tiene que lo que conocemos como ecuación vectorial de la recta.

- Deducción de las ecuaciones paramétricas igualando coordenada a coordenada.
- Distintos valores de k nos dan puntos de la recta. ¿k es igual para ambas coordenadas? Entonces podemos despejar k e igualar (deducción de la ecuación continua mediante una prueba pre-formal).
  - a) ¿Podemos utilizar esta ecuación para toda recta?
  - b) ¿Qué tipo de rectas no tiene ecuación continua?
- En la ecuación anterior, ¿cuál es el siguiente paso que darías?
- Deducción de la ecuación general operando la ecuación continua.
- Deducción de la ecuación explícita de manera pre-formal. ¿Qué representa la n en la ecuación explícita? (Ordenada en el origen)

### A.3 Cálculo de las ecuaciones de una recta:

1. Dado un punto y un vector.
2. Dados dos puntos. (siempre llegar a punto y vector)

### A.4 Obtención de punto y vector:

Proponer ejercicios de rectas descritas de todas las formas y obtener un punto y un vector director de cada una de ellas.

### A.5 ¿Verdadero o falso?

Dar pares de ecuaciones y ver si representan la misma recta:

### A.6 ¿Qué relación ves entre la ecuación punto-pendiente de la recta y su ecuación explícita?

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

### A.7 Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas.

- a) Resolviendo Sistemas.
- b) Proporcionalidad coeficientes

### A.8 Problemas analíticos:

- Paralela a otra por un punto
- Perpendicular a otra por un punto

### A.9 Distancias

- Entre dos puntos
- Entre punto y recta: deducción a través de un problema.

### A.10 Autoevaluación:

Ejercicios propuestos que engloban todos los conceptos vistos en la unidad.

## **6. Recursos:**

Pizarra y tiza

Libro de texto de la editorial Edelvives proyecto aula 360°

## **7. Evaluación:**

La realización del examen contará un 90%.

Los ejercicios y problemas que se manden para casa y la actitud participativa en clase será un 10% de la calificación total.

En esta nuestra unidad didáctica podemos evaluar los siguientes aspectos:

### Criterios generales:

- Realizar los ejercicios propuestos en cada sesión.
- Saber trabajar en grupo, se valorará la participación en el grupo de cada alumno, su aportación personal, su contraste de ideas con el resto de compañeros, el respeto mostrado hacia las ideas de los demás, el nivel de integración conseguido, la ayuda dada a compañeros con las ideas menos claras, etc.

### Criterios específicos:

Se pondrá en paréntesis cada criterio con qué objetivo está relacionado (O1,..., O11) y qué competencia básica estaremos evaluando si han adquirido (C.B.1, C.B.2, C.B.3, C.B.4).

**C.E.1.1:** Determinar los elementos que definen un vector. (O1)(C.B.1, C.B.2)



## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

- C.E.1.2: Calcular el módulo de un vector. (O1)(C.B.1)
- C.E.2: Reconocer el conjunto de vectores equipolentes. (O2)(C.B.1)
- C.E.3: Identificar las características de un sistema de referencia y en concreto del sistema de referencia cartesiano. (O3)(C.B.1)
- C.E.4: Realizar operaciones con vectores tanto de forma gráfica como usando sus coordenadas.(O4)(C.B.1)
- C.E.5.1: Expresar una recta en sus diferentes ecuaciones. (O5)(C.B.1)
- C.E.5.2: Saber expresar la recta en sus diferentes ecuaciones, a partir de una de ellas.(O5)(C.B.1, C.B.4)
- C.E.6: Averiguar la posición relativa que ocupan dos rectas en el plano a partir de las diferentes formas de expresar su ecuación. (O6)(C.B.1, C.B.3)
- C.E.7.1: Calcular la distancia entre dos puntos. (O7)(C.B.1, C.B.4)
- C.E.7.2: Determinar el punto medio de un segmento. (O7)(C.B.1)
- C.E.7.3: Determinar vectores y rectas perpendiculares. (O7)(C.B.1)
- C.E.8: Distinguir la ecuación del rectas paralelas (O8)(C.B.1)
- C.E.9: Calcular la ecuación de la mediatriz de un segmento como lugar geométrico o como recta perpendicular al segmento.(C.B.1, C.B.3)
- C.E.10: Aplicar los conceptos relativos a las relaciones métricas a problemas diarios. (C.B.1, C.B.2, C.B.3, C.B.4)

Utilizaremos los siguientes instrumentos de evaluación:

- Observación de intervenciones en el aula.
- Valoración de trabajos individuales (revisión del cuaderno).
- Preguntas directas en clase.
- Trabajo diario desarrollado en casa.
- Prueba escrita

### **8. Atención a la diversidad:**

El tratamiento de la diversidad resulta complejo, no obstante, apuntamos algunas estrategias posibles:

- Actividades de diagnóstico de los conocimientos previos de los alumnos para adecuar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Reforzamiento de lo aprendido antes de continuar (mediante los 5 minutos primeros de repaso al comienzo de cada sesión como ya se ha expuesto anteriormente).
- Ejercicios complementarios: Se indicarán ejercicios complementarios para los que hayan realizado las tareas que se piden con mayor rapidez durante las clases.
- Variaciones de nivel: Durante las sesiones se realizarán ejercicios cada vez de mayor dificultad, intercalando alguno de un nivel más bajo para no desmotivar a los alumnos que

## Valoración del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el plano a través de pruebas formales y pruebas preformales

---

les cueste más.

- Tutorías: Ante cualquier duda estaré siempre a su disposición.

### **9. Conclusiones:**

Iremos anotando todo lo necesario para analizar si la temporización ha sido la adecuada, si los alumnos han podido seguir el ritmo marcado con las actividades propuestas, etc. Y no sólo para ir cambiando las actividades y la metodología según vayamos viendo el proceso de la unidad, sino también para mejorarla para años sucesivos.